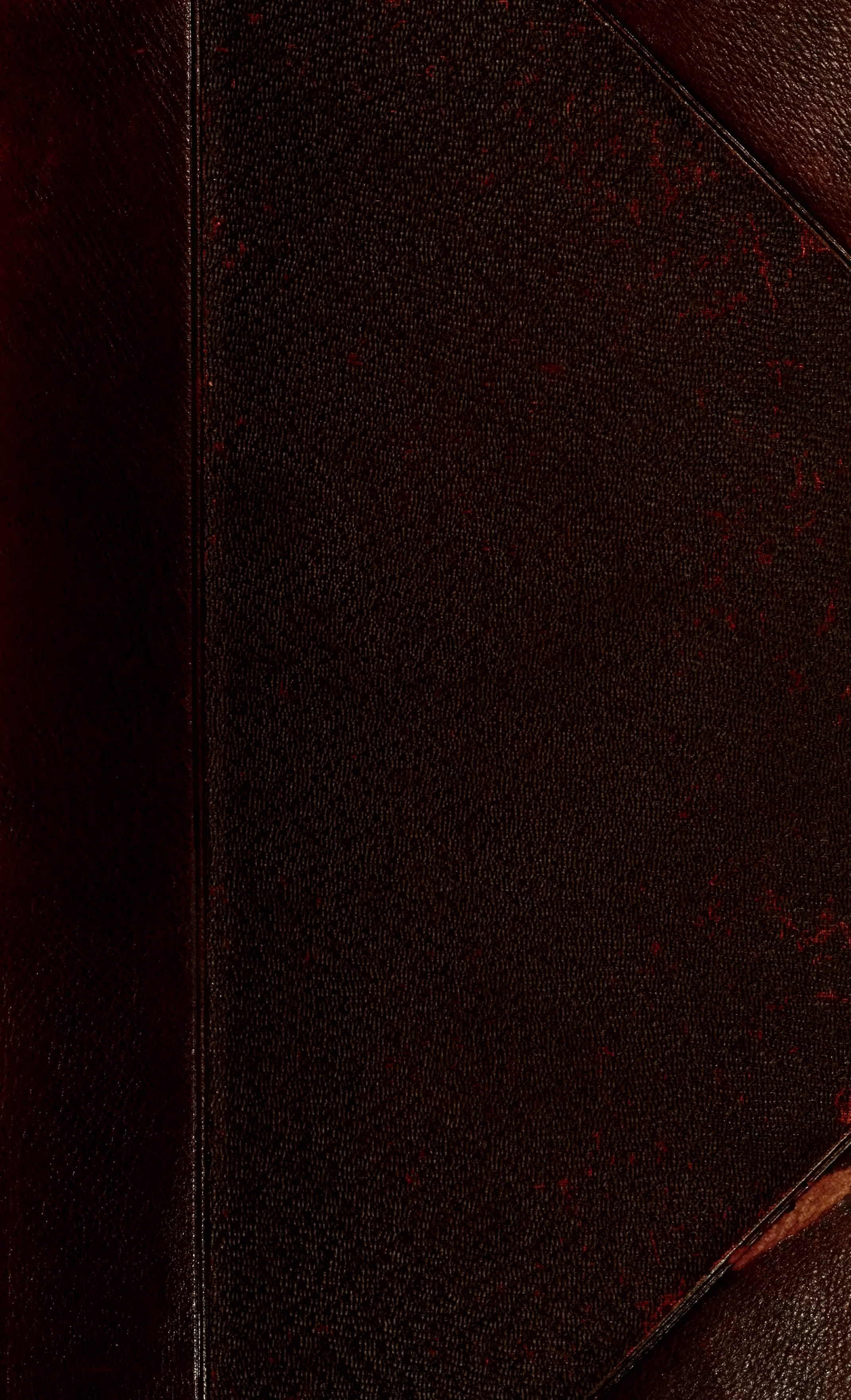
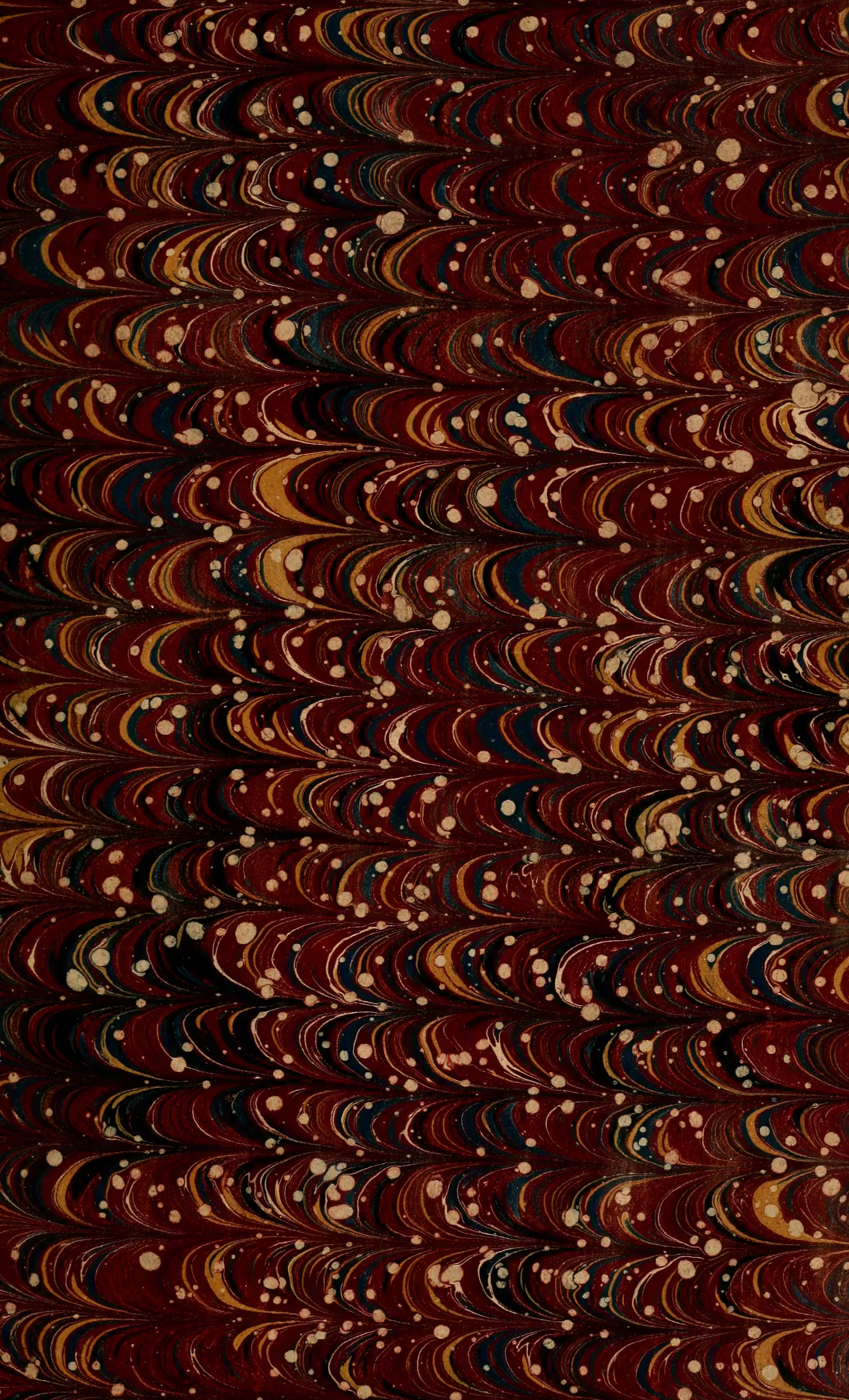
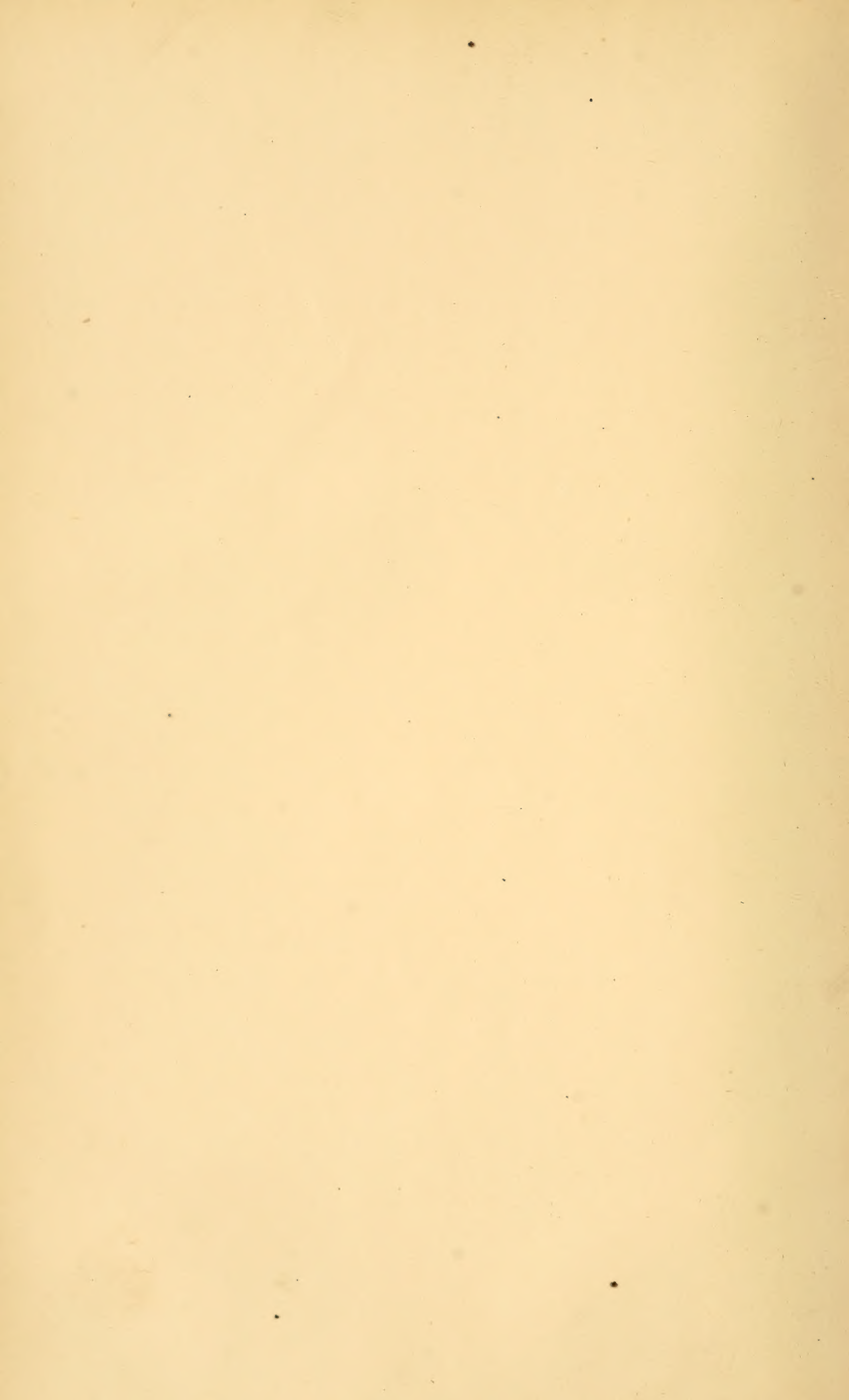



Astronomy Library
Library of
Wellesley
NON MINISTRARI SED MINISTRARE.
College.
Purchased from
The Horsford Fund.
No 134280









ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. W. FÖRSTER, PROF. DR. J. FRENZEL,
PROF DR. A. KENNGOTT, PROF. DR. A. LADENBURG,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. W. VALENTINER, PROF. DR. A. WINKELMANN,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN.

III. ABTHEILUNG

II. THEIL:

HANDWÖRTERBUCH DER ASTRONOMIE

HERAUSGEGEBEN

VON

PROFESSOR DR. W. VALENTINER.

BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1897.

HANDWÖRTERBUCH

DER

ASTRONOMIE

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. E. BECKER-STRASSBURG, PROF. DR. E. GERLAND-KLAUSTHAL, PROF. DR. M. HAID-KARLSRUHE, DR. N. HERZ-WIEN, DR. H. KOBOLD-STRASSBURG, DR. N. v. KONKOLY-BUDAPEST, PROF. DR. C. W. PETERS (†), DR. E. v. REBEUR-PASCHWITZ (†), DR. FR. RISTENPART-KARLSRUHE, PROF. DR. W. SCHUR-GÖTTINGEN, PROF. DR. H. SEELIGER-MÜNCHEN, DR. C. STECHERT-HAMBURG, PROF. DR. W. WISLICENUS-STRASSBURG, DR. K. ZELBR-BRÜNN

HERAUSGEGEBEN

VON

Prof. Dr. W. VALENTINER

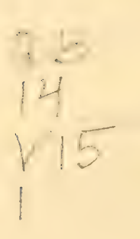
VORSTAND DER GROSSHERZOGLICHEN STERNWARTE IN KARLSRUHE

ERSTER BAND

MIT 241 ABBILDUNGEN IM TEXTE UND 3 TAFELN.



BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1897.



Vorwort.

In dem »Handwörterbuch der Astronomie«, welches als Theil der »Encyklopädie der Naturwissenschaften« erscheint und von dem jetzt der erste Band vollendet ist, ist die Anordnung des Stoffes eine ähnliche, wie in anderen Theilen der Encyklopädie, die lexikologische. Zwar hat sich dieselbe für die Astronomie recht schwierig gezeigt, und es ist lange erwogen worden, ob nicht eine andere Anordnung, z. B. die nach den Hauptgebieten der Astronomie vorzuziehen sei. Indessen würden damit nur neue Lehr- oder Handbücher dieser einzelnen Zweige, der sphärischen, der theoretischen, der physikalischen Astronomie gegeben werden, an denen kein fühlbarer Mangel ist. Was aber das »Handwörterbuch der Astronomie« als Theil der Encyklopädie will, ist etwas anderes, es will dem Studirenden, dem Fachmann, dem wissenschaftlich gebildeten Freund der Astronomie ein möglichst bequemes Nachschlagebuch sein, in welchem er über einzelne Punkte Aufklärung findet und zugleich Anregung, seine Kenntnisse durch das Studium originaler Werke zu erweitern oder zu festigen. Ein solches Werk, in gewisser Weise ein Compendium der Astronomie, hat uns bislang gefehlt.

Besonderes Gewicht ist auf die praktische Astronomie gelegt; die Instrumente und ihre Behandlung, die Anstellung, Bearbeitung, Verwerthung der Beobachtungen, ihre Ergebnisse treten naturgemäss etwas in den Vordergrund gegenüber der rein theoretischen Astronomie. In Betreff letzterer musste im Allgemeinen daran festgehalten werden, den Gang der Untersuchungen bis zu ihren Resultaten anzudeuten, oder so darzustellen, dass dem Leser wohl ein möglichst vollständiges Bild geboten wird, ohne doch in zu viele Einzelheiten einzutreten. Wo aber keine sehr langwierigen und schwierigen theoretischen Entwickelungen nothwendig sind, um zu rechnerischen Resultaten zu gelangen, da soll im Handwörterbuch alles Erforderliche gegeben sein, um jene praktisch und bequem verwerthen zu können.

Dass bei der lexikologischen Anwendung Wiederholungen vorkommen, ist nicht zu vermeiden, um so weniger, als jeder Artikel doch möglichst selbstständig bestehen musste, wenn nicht der Gebrauch durch ein allzu häufiges Hin- und Hergehen von einem Artikel zum andern leiden sollte. Auch der Umstand, dass das ganze Werk nicht von einer Hand bearbeitet wurde, hat nothwendig eine Ungleichförmigkeit zur Folge gehabt. Indessen ist durch die Gewinnung

der bewährtesten Mitarbeiter erreicht worden, dass die betreffenden Theile von solchen Gelehrten verfasst wurden, die in ihnen die meiste Erfahrung durch eigene Untersuchungen hatten, und der so erlangte Vortheil dürfte die angedeuteten Nachtheile reichlich aufwiegen.

Die Zahl der Artikel ist möglichst zusammengedrängt, sodass zu häufige Wiederholung oder Auseinanderziehen des Stoffes umgangen wurde. Die eigentlichen Stichwörter werden in grosser Ausführlichkeit und Uebersichtlichkeit als Index zum Schluss des ganzen, auf zwei Bände berechneten Werkes gegeben.

Da die Astronomie auf dem Boden einer alten Geschichte steht, so durfte eine gedrängte Darstellung des Entwickelungsganges hier nicht unterbleiben. Dementsprechend ist als »Einleitung in die Astronomie« ein diesen Theil umfassender Artikel gegeben worden. Es ist zugleich dadurch erreicht, dass an vielen Stellen, wo sonst ein ausführlicher Hinweis auf frühe Arbeiten nothwendig gewesen wäre, nunmehr mit wenigen Bemerkungen auszukommen war.

Der Herausgeber ist sich wohl bewusst, nicht ganz das erreicht zu haben, was ihm bei der Uebernahme der Aufgabe vorschwebte, und rechnet auf die freundliche Nachsicht seiner Fachgenossen. Dieser Wunsch gilt auch hinsichtlich der wohl etwas zu grossen Anzahl nothwendiger Berichtigungen. Manche Inconsequenzen in der Schreibweise sind verursacht durch die den Autoren gewohnte, welche mit der in den früheren Bänden der Encyklopädie angewandten und füglich hier nicht zu vermeidenden, nicht immer im Einklang war, und durch die Schwierigkeit, welche das Lesen der Correkturen an oft drei verschiedenen Orten, ohne dass eine jedesmalige Verständigung durchführbar gewesen wäre, bereitete. Dazu kommt, dass ein Theil des Werkes in einer Zeit zum Abdruck gelangte, in welcher der Herausgeber durch die Verlegung der Sternwarte von Karlsruhe nach Heidelberg, und die damit und mit dem Neubau des Instituts in Zusammenhang stehende Unruhe und Ueberhäufung mit anderen Arbeiten genöthigt wurde, die manchmal verzögerten Correkturen rascher zu erledigen, als ihm lieb war. Immerhin hofft er, dass wesentliche Unrichtigkeiten nicht übersehen worden sind.

W. Valentiner.

Inhaltsverzeichniss.

Allgemeine Einleitung in die Astronomie

Abendweite bis Finsternisse.



Allgemeine Einleitung in die Astronomie.

Von

Dr. N. Herz.

Unter allen Wissenschaften nimmt ihrem Alter nach wohl den ersten Rang die Astronomie: die Lehre von den Gestirnen, ihrer gegenseitigen Lage an der Himmelskugel, ihren scheinbaren und wirklichen Bewegungen und deren Ursachen, und ihrer physischen Beschaffenheit, ein. Je nach den verschiedenen Gebieten, welche man vorzugsweise behandelt, unterscheidet man: 1) Die sphärische Astronomie, welche auf Grundlage der Beziehungen zwischen den grössten Kreisen auf der Kugel die relative Lage der Gestirne an der Himmelskugel gegen einander und ihre absolute Lage gegen gewisse Coordinatensysteme (s. d.) behandelt, die scheinbare Bewegung der Himmelskugel und die damit im Zusammenhang stehenden Probleme erörtert, und auch die unter dem Namen »geographische Ortsbestimmung« (s. d.) zusammengefassten Aufgaben löst; 2) die theoretische oder theorische Astronomie, welche die wirkliche Bewegung der Himmelskörper untersucht, und deren Gesetze und Ursachen erforscht (s. Bahnbestimmung und Mechanik des Himmels); 3) die physische Astronomie, welche sich mit der physischen und chemischen Beschaffenheit der Himmelskörper beschäftigt (s. Astrophysik); 4) die praktische Astronomie, deren Aufgabe es ist, die zu den Beobachtungen dienenden Instrumente (s. d.) zu beschreiben, deren Theorie auseinanderzusetzen, sowie auch die verschiedenen Beobachtungs- und Reductionsmethoden darzulegen.

Schon in den ältesten Zeiten erkannte man durch den blossen Anblick des gestirnten Himmels zunächst eine verschiedene Helligkeit der Sterne, nach welcher man die mit freiem Auge gut sichtbaren Sterne bald in 6 Grössenklassen eintheilte. Man erkannte, dass die Gestirne mit wenigen Ausnahmen eine gegen einander unveränderliche Lage hatten, als ob sie an der Himmelskugel angeheftet, mit dieser jedoch in einer rotirenden Bewegung begriffen wären. Wegen ihrer gegenseitigen, unveränderlichen Lage, vielleicht auch, weil man sie thatsächlich an einer grossen Hohlkugel angeheftet dachte, nannte man sie Fixsterne *(stellae fixae)*. Die Gesammtheit derselben theilte man in eine Anzahl von Gruppen, den sogen. Sternbildern; von welchem Princip — wenn man von einem solchen sprechen kann — oder von welchen Phantasiegebilden man sich dabei

leiten liess, ist schwer zu sagen, da man bei der Betrachtung der in einem Sternbild befindlichen Gruppen kaum eine entfernte Aehnlichkeit mit den dieselben repräsentirenden Figuren finden kann, und diese Namen oder Bilder schwerlich zur Orientirung am Himmel beitragen konnten.

Die nächste sich bei der Betrachtung des Himmels darbietende Wahrnehmung ist diejenige der Drehung des ganzen Himmelsgewölbes um eine gegen den Horizont geneigte Axe, welche die Himmelskugel in zwei Punkten, den Weltpolen trifft, die, weil in der Drehungsaxe gelegen, unbeweglich erscheinen, und von denen der auf der nördlichen Erdhemisphäre gesehene der Nordpol heisst. In Folge dieser Drehung beschreibt jeder Stern täglich einen Kreis, und zwar einen um so grösseren, je weiter er von den Polen entfernt ist; den grössten Kreis beschreiben jene Sterne, welche 90° von beiden Polen abstehen, es ist dieser ein sogen. grösster Kreis an der Himmelskugel (dessen Ebene durch den Kugelmittelpunkt geht), er wird der Himmelsäquator genannt. Die anderen zu diesem parallelen kleinen Kugelkreise, in welchen sich die ausserhalb des Aequators befindlichen Sterne bewegen, heissen Parallelkreise; der Abstand derselben vom Aequator, ausgedrückt in Graden (Minuten und Secunden) heisst die Declination oder die Abweichung derselben und der in ihnen stehenden Gestirne.

Im Laufe ihrer täglichen Bewegung werden die Gestirne einmal ihren höchsten Stand erreichen, sie culminiren oder sind in ihrer Culmination. Dieses findet für alle Gestirne statt, wenn sie durch jenen grössten Kreis an der Himmelskugel gehen, welcher durch die Weltpole und das Zenith (Scheitelpunkt) geht, und welcher der Meridian des Ortes heisst, und auf dem Horizonte den Nord und Südpunkt bestimmt. In den alten Werken findet man statt Culmination oder Meridiandurchgang des Gestirns die Ausdrucksweise, das Gestirn stehe in der Mitte des Himmels (in *medio coeli)*. Bei denjenigen Sternen, welche von dem sichtbaren Weltpole nur so weit entfernt sind, dass ihr ganzer Parallelkreis über dem Horizont liegt, die demnach nicht untergehen, den sogen. Circumpolarsternen, beobachtet man ausser diesem höchsten Stande, der oberen Culmination, noch einen tiefsten Stand, welchen sie ebenfalls im Meridian auf der nördlichen Seite desselben erreichen, und welchen man die untere Culmination des Gestirnes nennt. Für die auf- und untergehenden Gestirne bezeichnet man denjenigen Theil ihres Parallelkreises, der über dem Horinzonte liegt, als den Tagebogen, den unter dem Horizonte gelegenen als den Nachtbogen (über die Berechnung derselben s. Tagebogen). Je weiter der Stern vom Aequator steht, desto grösser ist sein Tagebogen, für die Circumpolarsterne ist derselbe 360°.

Dieselben Erscheinungen bietet auch die Sonne; die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinander folgenden gleichartigen (z. B. oberen) Culminationen nennt man einen wahren Sonnentag [von ihm zu unterscheiden ist der mittlere Sonnentag und der Sterntag (s hierüber Zeit)]; man theilt denselben in 24 Stunden, welche in der Astronomie von dem Meridiandurchgange der Sonne an, dem wahren Mittag, bis zum nächstfolgenden von 0 bis 24 Uhr gezählt werden. Da aber hiernach ein Nachmittag mit dem darauf folgenden Vormittage zusammengezogen erscheint, so wird an dem letzteren das astronomische Datum um 1 kleiner sein als das bürgerliche; es ist z. B. der 10. August 4 h Nachm. (bürgerlich) gleich dem 10. August 4 h astronomisch, der 11. August 9 h Vorm. (bürgerlich) gleich dem 10. August 21 h (astronomisch).

Die ältesten Völker begannen den Tag entweder vom Abend oder vom Morgen an zu rechnen, oder sie unterschieden den Zeitraum, während dessen

die Sonne über dem Horizont stand, den Tag, von demjenigen, während dessen sie nicht gesehen wurde, der Nacht, und theilten den Tag sowohl wie die Nacht in 12 gleiche Theile. Die Tages- und Nachtstunden waren daher für die verschiedenen Jahreszeiten verschieden. Daneben findet man später auch die Eintheilung des Zeitraumes zwischen 2 Sonnenauf- oder -untergängen (der Nychthemeren) in 24 Stunden. Diese Stunde entspricht bis auf kleine in den ältesten Zeiten nicht erkannte Unterschiede wirklich gleichen Zeitintervallen. Für die astronomischen Beobachtungen muss man die Tages- oder Nachtstunden, die sogen. Temporalstunden, von den wirklichen Stunden (dem 24. Theil der Nychthemeren) den sogen. Aequinoctialstunden unterscheiden. Meistens werden jedoch auch noch bei späteren Beobachtungen die Temporalstunden angegeben, z. B. 4 Tagesstunden vor Mittag, oder $2\frac{1}{2}$ Nachtstunden nach Sonnenuntergang. Um diese Temporalstunden in Aequinoctialstunden zu verwandeln, muss man das Verhältniss der Tageslänge zur Nachtlänge kennen. Dieses wird durch die Grösse des Tagebogens der Sonne gegeben. Sei für denjenigen Ort und dasjenige Datum, auf welche sich die obigen Angaben beziehen (für die gegebene geographische Breite des Ortes und die Deklination der Sonne) der Tagebogen der Sonne gleich 150° gefunden, so ist die Länge des Tages gleich 10 Aequinoctialstunden, dagegen die Nacht gleich 14 Aequinoctialstunden, daher sind 4 Tagesstunden gleich $\frac{4}{12} \times 10 = 3\frac{1}{3}$ Aequinoctialstunden, und $2\frac{1}{2}$ Nachtstunden gleich $\frac{5}{2} \times \frac{14}{12} = 2\frac{11}{12}$ Aequinoctialstunden, folglich entspricht der Zeitangabe 4 Tagesstunden vor Mittag die Angabe 3 Stunden 20 Minuten vor Mittag oder 20 *h* 40 *m*, und der Zeitangabe $2\frac{1}{2}$ Nachtstunden nach Sonnenuntergang entspricht die Angabe 7 *h* 55 *m* Nachmittag, weil der Sonnenuntergang für den Tagebogen 150° um 5 *h* Nachmittag stattfindet.

Die erste Bestimmung der Jahreslänge »mittels der Sterne« sollen nach Herodot die Aegypter gemacht haben. Dass sich die Sonne zwischen den Sternen weiterbewege, war nicht allzuschwer zu erkennen, da der Anblick des gestirnten Himmels in den verschiedenen Jahreszeiten ein anderer ist, indem eben jene Sternbilder nicht gesehen werden, in deren Richtung die Sonne gerade steht. Auch sieht man unmittelbar vor dem Sonnenaufgang und unmittelbar nach dem Sonnenuntergang die in der Umgebung der Sonne befindlichen Sternbilder, und durch fleissiges Beobachten derselben konnte man diejenigen Gegenden am Himmel, welche die Sonne im Laufe eines Jahres durchschreitet, finden. Die Gesammtheit dieser von der Sonne durchlaufenen Sternbilder bildet am Himmel einen ziemlich breiten Gürtel, welcher von den Alten als Sonnenbahn oder Thierkreis (Zodiacus) bezeichnet wurde. Die in demselben befindlichen Sternbilder sind Widder (♈), Stier (♉), Zwillinge (♊), Krebs (♋), Löwe (♌), Jungfrau (♍), Waage (♎), Scorpion (♏), Schütze (♐), Steinbock (♑), Wassermann (♒), Fische (♓), welche auch als Zeichen des Thierkreises bezeichnet werden. (Ueber die Verschiedenheit zwischen Zeichen und Sternbilder s. später).

Die genaue Bestimmung der Zeit, welche die Sonne braucht, um von einem Sterne ausgehend, zu demselben wieder zurückzukehren, war aber nicht so einfach, und wurde zuerst aus den sogen. heliakischen Auf- und Untergängen der Sterne geschlossen. Wenn genau in demselben Momente, in welchem die Sonne aufgeht, auch ein anderes Gestirn aufgeht (untergeht), so nennt man dies seinen kosmischen Aufgang (Untergang), wenn hingegen genau in demselben Momente in dem die Sonne untergeht, ein anderes Gestirn untergeht (aufgeht), so nennt man diesen seinen akronychischen Untergang (Aufgang). Denkt man sich demnach genau in derselben Richtung, in welcher man die Sonne sieht, ein anderes

Gestirn — man sagt dann, es befindet sich mit der Sonne in Conjunction — so wird es kosmisch aufgehen und akronychisch untergehen. es ist dann überhaupt für uns nicht sichtbar. Befindet sich ein Gestirn genau in der entgegengesetzten Richtung wie die Sonne, d. h. geht die Verbindungslinie des Gestirns mit der Sonne durch unser Auge — man sagt, das Gestirn befindet sich mit der Sonne in Opposition, — so geht es akronychisch auf und kosmisch unter, das Gestirn ist dann die ganze Nacht sichtbar. Natürlich fallen kosmischer Aufgang und akronychischer Untergang nicht mehr zusammen, wenn das Gestirn nur in der Nähe der Sonne steht, und ebenso fallen akronychischer Aufgang und kosmischer Untergang nicht mehr zusammen, wenn sich das Gestirn nur nahe mit der Sonne in Opposition befindet. Da sich aber die Sonne zwischen den Fixsternen weiter bewegt, so wird sie (ihr Mittelpunkt) nur einen Moment genau in der Richtung eines anderen Sternes stehen, nach einigen Tagen wird sie merklich weiter gerückt sein, der Stern geht etwas früher auf, bleibt jedoch noch immer in den Strahlen der Sonne unsichtbar, wird aber, wenn die Sonne genügend weiter gerückt ist, auf einen Moment am Osthimmel sichtbar, um gleich darauf in den Strahlen der aufgehenden Sonne zu verblassen. Man nennt dies den heliakischen Aufgang des Gestirns. In dem Maasse, als die Sonne von dem Sterne weiter rückt, wird er immer früher aufgehen und daher immer länger am Osthimmel sichtbar bleiben, später um Mitternacht, endlich am Abend aufgehen und am Morgen untergehen, noch später um Mitternacht untergehen, und nachdem die Sonne den Umlauf zwischen den Sternen einmal vollendet hat (nach Ablauf eines Jahres) nähert sie sich wieder demselben Stern, sodass er immer früher nach Sonnenuntergang untergeht, immer kürzer sichtbar bleibt, bis er endlich an einem Abend nur noch einen Moment nach eingetretener Dunkelheit sichtbar ist und dann sogleich ebenfalls untergeht. Man bezeichnet dies als den heliakischen Untergang des Gestirns.

Die Zeit zwischen zwei heliakischen Aufgängen oder Untergängen desselben Sterns konnte als die Länge eines Jahres angesehen werden. Die alten Aegypter beobachteten für diesen Zweck den hellsten Stern im Sternbilde des grossen Hundes, den Sirius oder Sothis (nach unserer Bezeichnung α *Canis majoris)* und fanden auf diese Art die Jahreslänge gleich 365 Tagen. Dieses Jahr behielt man auch noch viel später, als man die wahre Länge desselben bereits weit genauer kannte, wegen seiner Bequemlichkeit als Aegyptisches Jahr bei. Es war dies jedoch nur eine rohe Näherung, deren Unrichtigkeit man schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit erkennen musste, denn nach dieser Annahme musste irgend eine Zeit, z. B. der Frühlingsanfang, schon nach 4 Jahren um einen Tag, nach 120 Jahren um 30 Tage später fallen, also nach nahe 1460 Jahren oder genauer nach 1457 wahren Sonnenjahren, welche gleich sind 1458 ägyptischen Jahren, sämmtliche Daten des Jahres durchwandern. Diese Periode von rund 1460 Jahren hiess die Sothis- oder Hundsternperiode und begann mit jenem Jahre, in welchem der Sirius am 1. Thot (Anfang des ägyptischen Jahres, s. Chronologie) heliakisch aufging. Die frühzeitige Kenntniss dieser Periode lässt nun allerdings die Auslegung zu, dass schon frühzeitig nebst dem Jahre zu 365 Tagen ein anderes mit der richtigen Jahreslänge von $365\frac{1}{4}$ Tagen eingeführt worden sein mag. Lauth behauptet sogar, dass »die gelehrten Priester schon seit den ältesten Zeiten das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen kannten« und dass sich »das Doppeljahr und das doppelte Datiren bereits auf Denkmälern des 4. Jahrtausends vor unserer Zeitrechnung in ihren bedeutsamen Epochenamen gewisser Könige verkörpert findet.« Daraus könnte man aber, vielleicht mit mehr Berechtigung,

den umgekehrten Schluss ziehen, dass nämlich diese angeblich so alten Denkmäler einer späteren Zeit entstammen. Da der Beginn einer Sothisperiode nach CENSORIN auf 139 n. Chr., demnach der Beginn der nächstfrüheren auf 1317 v. Chr. fällt, so ist dieses Jahr als der wahrscheinliche Beginn der Doppeldatirungen anzusehen, indem einerseits, wenn die Erkenntniss der Jahreslänge zu $365\frac{1}{4}$ Tagen später fiele, der dieser Zeit zunächst liegende am 1. Thot heliakisch aufgehende Stern als Regulator der Periode angenommen worden wäre, andererseits aber die auf noch frühere Zeiten bezogenen Doppeldatirungen zum mindesten zweifelhaft und durch Synchronismen erklärlich sind.

Aehnlich verhält es sich mit dem von einigen Historikern behaupteten Alter der Astronomie anderer Völker. BAILLY giebt als älteste Epoche der indischen Astronomie, wie sie in der Sûrya siddhânta enthalten ist, das Jahr 3102 v. Chr., dem Beginn der Aera der Caliy-Yuga. BENTLEY hat jedoch nachgewiesen, dass die Entstehungszeit der Sûrya siddhânta ungefähr 1060 n. Chr. fällt. Die Chinesen sollen nach DELAMBRE schon um 2600 v. Chr. Sonnen-, Mond- und Planetentheorien gehabt haben; allein noch 1350 v. Chr. schickte der Kaiser Ya-o die Astronomen Hi-Tchong, Hi-Chou, Ho-Tchong, Ho-Chou in die 4 Weltgegenden, um die Sterne zu suchen, die in den Solstitien und Aequinoctien stehen.

In allen diesen mythischen Berichten findet man nebst einer angeblich frühzeitigen Kenntniss der Jahreslänge auch eine angebliche Kenntniss der Sonnenbahn verzeichnet. Denkt man sich die Punkte, welche der Sonnenmittelpunkt an den verschiedenen Tagen einnimmt, auf einem Sternglobus oder in Sternkarten eingetragen, so findet man, dass die Sonne am Himmel genau einen grössten Kreis beschreibt, welcher später die Ekliptik (Bahn der Finsternisse) genannt wurde, weil sowohl Sonnen- als auch Mondfinsternisse nur dann stattfinden, wenn Sonne und Mond sich in ihr befinden, und daher die verfinsterte Sonne und der verfinsterte Mond immer in ihr gesehen werden. Ekliptik und Aequator schneiden sich als zwei grösste Kugelkreise in zwei um 180° von einander abstehenden Punkten, den Knoten der Ekliptik, und schliessen einen Winkel (etwa $23\frac{1}{2}$°) ein, welcher die Schiefe der Ekliptik heisst. Befindet sich die Sonne in den Knoten, also im Aequator, so sind Tag und Nacht für alle Punkte der Erde gleich (Tagebogen gleich dem Nachtbogen) und man nennt denjenigen Punkt, in welchem die Sonne aus der südlichen Hemisphäre in die nördliche tritt (zur Zeit des Frühlings) den Frühlings- Tag- und Nachtgleichenpunkt, Frühlingspunkt oder das Frühlingsäquinoctium (auch der aufsteigende Knoten der Ekliptik auf dem Aequator), den zweiten, in welchem die Sonne aus der nördlichen in die südliche Hemisphäre übergeht (zur Zeit des Herbstes) den Herbst- Tag- und Nachtgleichenpunkt oder das Herbstäquinoctium (auch der absteigende oder niedersteigende Knoten der Ekliptik auf dem Aequator). Die von diesem um 90° abstehenden Punkte der Ekliptik, in welchen die Sonne ihre grösste nördliche oder südliche Deklination hat, werden als Sonnenwendepunkte oder Solstitien bezeichnet (ersteres, weil die Sonne ihre Bewegungsrichtung vom Aequator weg bezw. zum Aequator in diesen Punkten ändert, letzteres weil die Sonne bei diesem Uebergange ihre Deklination einige Zeit fast gar nicht oder nur äusserst wenig ändert, also still zu stehen scheint) und zwar als Sommer- und Wintersonnenwenden, oder als Sommer- und Wintersolstitien. Die von der Sonne in diesen Stellungen bei ihrer täglichen Bewegung beschriebenen Parallelkreise führen den Namen Wendekreise, und zwar ist der nördliche Wendekreis der Wendekreis des Krebses, der südliche der Wendekreis des Steinbocks,

weil die Sonne zu diesen Zeiten in den beiden Zeichen des Krebses und Steinbocks steht.

In den beiden Tag- und Nachtgleichenpunkten sind nun zwei fest bestimmte Punkte in der Ekliptik und im Aequator gegeben, deren man sich zur Bestimmung der Lage der übrigen Punkte des Aequators und der Ekliptik bedienen kann, indem man die Abstände derselben von den Aequinoctialpunkten angiebt. Man wählt als Anfangspunkt dieser Abstände das Frühlingsäquinoctium und nennt die, von diesem Punkte bis zu irgend einem anderen Punkte der Ekliptik in dieser, gemessene Strecke die Länge des Punktes, die im Aequator gemessene Entfernung eines Punktes vom Frühlingspunkt seine Rectascension oder gerade Aufsteigung. Für die Ortsbestimmung eines ausserhalb des Aequators und der Ekliptik gelegenen Gestirnes fällt man von demselben ein sphärisches Perpendikel auf die Ekliptik und nennt die Entfernung des Fusspunktes des letzteren vom Frühlingspunkt die Länge des Gestirns, den Abstand desselben von der Ekliptik, gemessen auf dem gefällten Perpendikel die Breite desselben. Desgleichen fällt man ein sphärisches Perpendikel von dem Gestirn auf den Aequator und nennt die Entfernung des Fusspunktes desselben vom Frühlingspunkt die Rectascension des Gestirns, den Abstand des Gestirns vom Aequator, gemessen in dem Perpendikel, die Deklination des Gestirns. Wenn zwei Gestirne dieselbe Rectascension, aber nicht dieselbe Deklination haben, so sagt man, sie befinden sich in Conjunction in Rectascension. Man sagt, sie befinden sich in Opposition in Rectascension, wenn ihre Rectascensionen um 180° verschieden, ihr Deklinationsunterschied dabei ganz beliebig ist. Desgleichen spricht man von einer Conjunction und Opposition in Länge, je nachdem die Differenz der Längen der beiden Gestirne 0° oder 180° beträgt. Zwei Gestirne, welche sich in Conjunction in Rectascension befinden, culminiren gleichzeitig, befinden sie sich in Opposition in Rectascension, so culminirt das eine um 12 Stunden später als das andere.

In den ältesten Zeiten kannte man aber die Sonnenbahn in Ermangelung von geeigneten Beobachtungsinstrumenten gewiss nicht als grössten Kreis, sondern wie schon oben erwähnt, als breites Band, während man doch mit Hilfe des Gnomon (s. d.) bald herausgefunden hatte, dass die grösste und kleinste Sonnenhöhe für einen gewissen Ort, und die Differenz der grössten und kleinsten Sonnenhöhe sogar für alle Orte (wenigstens im Laufe mehrerer Decennien) nahe constant war. Später, als man bereits näherungsweise die Sonnenbahn als grössten Kreis vermuthete oder kannte, wählte man für diesen den Namen »der Zeichenträger« oder »der Kreis, der durch die Mitte der Zeichen geht«, oder auch »der schiefe Kreis« und nahm ganz richtig die grösste Declination der Sonne (die halbe Differenz zwischen der grössten und kleinsten Sonnenhöhe an demselben Ort) als Neigung des »schiefen Kreises« oder der Ekliptik gegen den Aequator. Nach PLINIUS soll zuerst ANAXIMANDER[1]), nach PLUTARCH hingegen PYTHAGORAS[2]) die Schiefe der Ekliptik bestimmt haben.

Noch complicirter, aber jedenfalls leichter zu erkennen ist der Lauf des Mondes. Schon im Laufe einer Nacht sieht man, dass er einzelne Sterngruppen

[1]) Ein Schüler des THALES, 610—546 v. Chr.

[2]) 580—500 v. Chr. Nach längeren Reisen liess er sich in Kroton in Unteritalien nieder, wo er bald viele Schüler und Anhänger fand, und die nach ihm benannte Schule anfänglich als eine Art Geheimbund begründete, welcher jedoch kurz vor seinem Tode vom Volke zersprengt und erst lange nach seinem Tode wieder reconstruirt wurde.

passirt; dabei wird er von einem Tag zum anderen seine Lichtgestalt (Phase) ändern; er wird bald voll, bald nur theilweise erleuchtet, zeitweise gar nicht gesehen, und der Wechsel dieser Lichtgestalten wiederholt sich in regelmässigen Zwischenzeiten. Wenn der Mond um Mitternacht culminirt (in Opposition mit der Sonne ist) erscheint er voll (Vollmond), nähert er sich in Folge seiner rascheren Bewegung der Sonne, so nimmt die Grösse seines beleuchteten Theiles immer mehr und mehr ab; in der Entfernung 90° von der Sonne (Quadratur, letztes Viertel) erscheint er zur Hälfte erleuchtet; bei der weiteren Annäherung an die Sonne wird er endlich, wenn er mit der Sonne gleichzeitig culminirt (mit der Sonne in Conjunction ist) in den Strahlen derselben verschwinden (Neumond). Dann wird er sich wieder von der Sonne entfernen, erscheint wieder in der nächsten Quadratur (erstes Viertel) zur Hälfte erleuchtet, im weiteren Verlaufe immer grösser, bis er, nachdem er alle Phasen (eine vollständige Lunation) durchgemacht hat, wieder als Vollmond erscheint. Vollmond und Neumond bezeichnet man auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Syzygien. Die Bestimmung der Zeit zwischen zwei Vollmonden ist sehr leicht; daher war auch die Länge des Monates schon frühzeitig gut bekannt. Die Griechen hatten schon im 6. Jahrh. v. Chr. ein Lunisolarjahr (s. Chronologie); sie nahmen 99 Lunationen gleich 8 Jahren, gleich 2922 Tagen, woraus für die Dauer einer Lunation $29\frac{1}{2}$ Tage folgt. METON (432 v. Chr.) hat auf die Beziehung, dass 19 Jahre gleich 235 Lunationen, gleich 6940 Tagen sind (woraus sich für die Dauer einer Lunation 29·53 Tage ergiebt) die Verbesserung dieses Lunisolarjahres durch Einführung des nach ihm benannten METON'schen Cyclus gegründet. Doch war schon viel früher den Chaldäern nicht nur die Dauer der Lunation, sondern überhaupt der Lauf des Mondes sehr gut bekannt. Denkt man sich die vom Monde nach einander eingenommenen Orte wieder auf einen Himmelsglobus aufgetragen, so wird man finden, dass er von einer Fixsterngruppe ausgehend nach etwa $27\frac{1}{3}$ Tagen wieder zu derselben zurückkehrt und dabei einen grössten Kreis an der Himmelskugel beschreibt, welcher mit der Ekliptik nicht zusammenfällt, sondern gegen diese um etwa $5\frac{2}{3}$° geneigt ist; die Schnittpunkte der Mondbahn mit der Ekliptik heissen die Knoten der Mondbahn, und zwar derjenige, in welchem der Mond aus der südlichen in die nördliche Hemisphäre tritt, der aufsteigende Mondknoten (früher auch Drachenkopf, *caput draconis* genannt), der zweite der absteigende oder niedersteigende Mondknoten (Drachenschwanz, *cauda draconis)*. Die Bewegung in seiner Bahn wird er jedoch nicht mit derselben Geschwindigkeit vollführen, vielmehr wird sein tägliches Fortschreiten zwischen den Grenzen 11·8° und 15·3° variiren, im Mittel legt er täglich 13·5° zurück, und die Orte an der Himmelskugel, in denen er sich mit der grössten, mit der mittleren und mit der kleinsten Geschwindigkeit bewegt, werden sich für eine Reihe von Umläufen nahezu unveränderlich ergeben. Betrachtet man aber die Bewegung des Mondes durch lange Zeiträume, so wird man sich überzeugen, dass seine Bahn in einer fortwährenden Drehung begriffen ist. Man nennt die Zeit, welche der Mond braucht, um genau an denselben Ort des Himmels (zu demselben Fixstern) zu kommen, seine siderische Umlaufszeit oder den siderischen Monat; die Zeit, welche er braucht, um in dieselbe Stellung gegen die Sonne zu kommen (von einem Vollmonde zum andern), seine synodische Umlaufszeit oder einen synodischen Monat (gleich der Dauer einer Lunation); die Zeit, welche er braucht, um von einem Knoten ausgehend zu demselben wieder zurückzukehren, seine draconitische Umlaufszeit oder den Drachenmonat; endlich die Zeit, innerhalb welcher er alle Phasen der Geschwindigkeit durchläuft (von der

grössten Geschwindigkeit wieder zu dieser zurückkehrt), seine anomalistische Umlaufszeit oder den anomalistischen Monat. Siderische, draconitische und anomalistische Umlaufszeit sind sehr nahe gleich und müssten völlig gleich sein, wenn die Mondbahn unbeweglich wäre; der synodische Monat muss etwas länger sein, denn während des siderischen Monats (etwa 27 Tage) ist die Sonne auch um nahe 27° weiter gerückt, welche der Mond in weiteren zwei Tagen zurücklegt, so dass derselbe, nachdem er der Sonne vorangeeilt ist, diese wieder nach etwa $29\frac{1}{2}$ Tagen einholt. Den Chaldäern war aber bereits bekannt, dass die verschiedenen Umlaufszeiten nicht gleich sind, sondern dass der Drachenmonat kürzer, der anomalistische Monat länger ist, als der siderische, d. h. dass der Mond bereits einen vollen siderischen Umlauf (360°) zurückgelegt hatte, ehe er alle Grade der Geschwindigkeiten (Abweichungen, Anomalien von der mittleren Geschwindigkeit) erlangt hatte, dabei aber schon früher durch die Knoten gegangen war, was darin seinen Grund hat, dass die Mondknoten sich auf der Ekliptik nach rückwärts bewegen, die Punkte der grössten und kleinsten Geschwindigkeit hingegen in der Bahn nach vorwärts. Die Chaldäer fanden, dass der Mond in $6585\frac{1}{3}$ Tagen, während welcher er 241 siderische Umläufe ausführt, nur 239 mal die grösste Geschwindigkeit erlangt (239 Umläufe der Anomalien vollführt), hingegen 242 mal die Ekliptik schneidet (durch den Knoten geht) und dass in dieser Zeit 223 Lunationen stattfinden. Daraus folgt für die Länge eines siderischen Monats 27·325 Tage, eines anomalistischen Monats 27·554 Tage, eines Drachenmonats 27·212 Tage, und eines synodischen Monats 29·531 Tage. Diese Periode von $6585\frac{1}{3}$ Tagen oder 18 Jahren und 11 Tagen, der Saros, diente auch zur Vorhersagung der Finsternisse. Denn da nach dieser Zeit der Mond in dieselbe Stellung zur Sonne gekommen war, und auch die Bewegungsverhältnisse in seiner Bahn (Geschwindigkeit, Abstand von der Ekliptik) sich fast genau wiederholen, so müssen sich auch die Finsternisse in derselben Ordnung und nahe an derselben Stelle des Himmels wiederholen. Die Verschiebung zwischen den Sternen beträgt nach jeder Periode 11°, nämlich den von der Sonne in 11 Tagen zurückgelegten Weg. Die empirische Bestätigung dieser Inductionsschlüsse musste dann auch als Beweis der Annahme aufgefasst werden, dass der Mond sein Licht von der Sonne erhält, und Sonnen- und Mondfinsternisse durch die gegenseitige Stellung dieser beiden Himmelskörper erzeugt werden. Zu demselben Resultat mussten auch die beiden Umstände führen, dass erstens die Sonnenfinsternisse nur zur Zeit des Neumondes, die Mondfinsternisse nur zur Zeit des Vollmondes stattfinden, und zwar nur dann, wenn gleichzeitig der Mond in der Nähe der Knoten seiner Bahn stand, und zweitens, dass die beleuchtete Seite des Mondes stets nach derjenigen Seite des Himmels gekehrt ist, auf welcher die Sonne steht. Es ist nämlich bei wachsendem Monde (um die Zeit des ersten Viertels, zwischen Neumond und Vollmond) der Mond östlich oder links von der Sonne (das Gesicht gegen Süden gewendet), die rechte Seite des Mondes beleuchtet, daher seine Hörner nach links oder Osten gekehrt sind; zur Zeit des abnehmenden Mondes (letztes Viertel, zwischen Vollmond und Neumond) steht der Mond westlich oder rechts von der Sonne, die linke Seite des Mondes ist beleuchtet, die Hörner sind nach rechts oder Westen gekehrt.

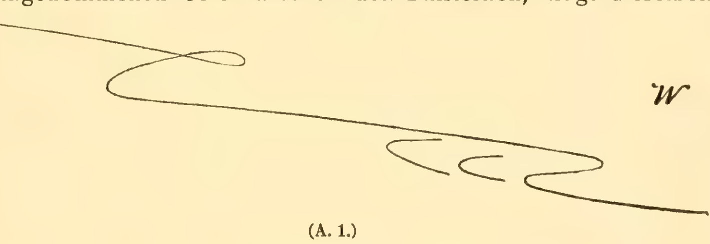
Nächst den Chaldäern, deren Finsternissbeobachtungen aus der Zeit um 720 v. Chr. uns PTOLEMÄUS mittheilt, soll nach PLINIUS auch THALES[1]) eine

[1]) 639—548 v. Chr., geboren zu Milet, machte er eine Reise nach Aegypten und gründete, von derselben zurückgekehrt, in Milet die jonische Schule. Er starb in Athen.

Finsterniss vorhergesagt haben. Von Letzterem theilt auch Plinius die Annahme zur Erklärung der Sonnenfinsternisse mit, »dass der Mond, welcher ein dunkler Körper ist, in gerader Linie zwischen Sonne und Erde zu stehen kommt«.

Schon in sehr früher Zeit, obzwar nicht nachweisbar wann, erkannte man, dass sich zwischen den Fixsternen eine Reihe von anderen, dem Aussehen nach von ihnen nicht wesentlich verschiedene Gestirne bewegen, welche mit dem Namen Wandelsterne, auch irrende Sterne oder Planeten belegt wurden. Zu denselben zählte man Mercur, Venus (in den ältesten Zeiten je nach der Sichtbarkeit am Abend östlich von der Sonne, oder am Morgen westlich von derselben für zwei verschiedene Gestirne, den Abendstern und den Morgenstern gehalten), Mars, Jupiter, Saturn, und ausserdem Mond und Sonne. Philolaus (um 450 v. Chr.) und Socrates (470—401 v. Chr.) kannten die Planeten bereits; nach Plinius soll sogar schon Pythagoras nicht nur die Identität des Morgen- und Abendsterns erkannt, sondern auch die Entfernungen der Planeten angegeben haben. Plato[1], der die Erscheinungen, wie sie sich dem Beschauer darbieten, auf eine Maschinerie, die Bewegung einer Reihe von concentrischen Ringen, zurückzuführen suchte, erkannte bereits die Unregelmässigkeiten in diesen Bewegungen, und nicht viel später gab Eudoxus von Knidos[2] eine Theorie, nach welcher man sogar an eine Vorausberechnung der Planetenörter mit einem für jene Zeiten schon ganz mittelmässigen Erfolge schreiten konnte.

Bestimmt man für irgend einen Planeten eine Reihe der zu verschiedenen Zeiten von ihm eingenommenen Orte zwischen den Fixsternen, trägt dieselben in eine Himmelskarte ein, und verbindet die erhaltenen Punkte durch einen stetigen Linienzug, so wird man hier



(A. 1.)

sehr complicirte krumme Linien erhalten, die oft mehrfach gewunden, oft mit Schleifen versehen sind, und von denen Fig. 1 ein Beispiel giebt. Sei in dieser Figur links Ost (*O*), rechts West (*W*), das Gesicht gegen Süden gewendet, so dass die Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Fixsterne von *O* gegen *W* stattfindet; die Bewegungsrichtung der Sonne und des Mondes zwischen den Fixsternen entgegengesetzt der Richtung der täglichen Bewegung, nämlich von *W* gegen *O*, nennt man die rechtläufige oder direkte. Die Planeten bewegen sich meist ebenfalls von *W* gegen *O*, d. h. direkt, verändern jedoch zeitweise ihre Bewegungsrichtung und wandern dann für einige Zeit von Ost gegen West, sie werden rückläufig oder retrograd, um nach einiger Zeit abermals diese Bewegungsrichtung zu ändern und sich wieder direkt weiter zu bewegen. Da sie zur Zeit der Richtungsänderungen ihren Ort nur äusserst langsam verändern, so scheinen sie für kurze Zeit still zu stehen, man sagt sie sind

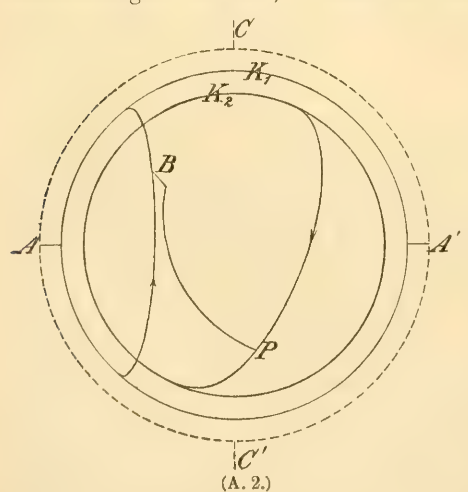
---

[1]) 430—347 v. Chr., geboren in Athen, lebte er bis zu dem Tode seines Lehrers Socrates daselbst, ging dann auf Reisen nach Aegypten und Unteritalien, und gründete nach seiner Rückkehr in Athen unter dem Namen der Academie eine neue Philosophenschule.

[2]) 420—355 v. Chr. Ein Schüler Plato's, ging ebenfalls auf einige Jahre nach Aegypten, und gründete nach seiner Rückkehr in Cyzicus eine Schule, mit der er später nach Athen ging, wo er aber bald darauf starb.

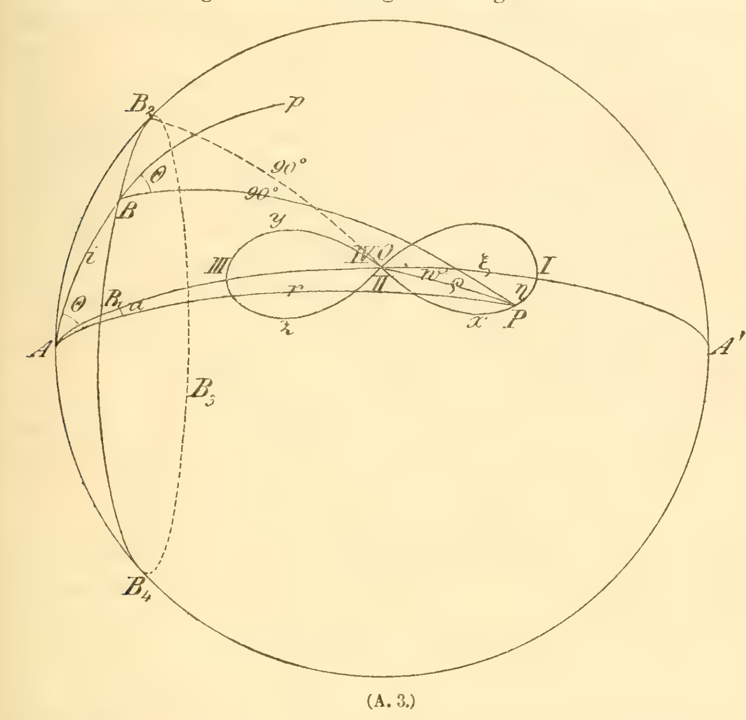
stationär, oder sie befinden sich in den Stillständen oder Stationen. Man fand nun, dass die Retrogradationen der Planeten sich in für die verschiedenen Planeten verschiedenen, aber für jeden einzelnen Planeten sehr nahe gleichen Zwischenzeiten wiederholten, dass der Planet trotz der Retrogradationen im Laufe der Zeit doch vorwärts kam, ohne sich weit von der Ekliptik nach Nord oder Süd zu entfernen, und dass er in nahe gleichen Zwischenzeiten zu seinem ursprünglichen Orte zurückkehrte, nun aber die Schleifen, und zwar alle um nahe gleich viel zwischen den Sternen verschoben waren; dass aber nach einer Reihe von Umläufen sich die einzelnen Schleifen deckten, und zwar so, dass wenn dies für die ersten der Fall war, dieses auch für alle folgenden stattfand, so weit es die ältesten Beobachtungen überhaupt zu constatiren gestatteten. Jupiter legt z. B. in jedem Jahre $\frac{1}{12}$ des ganzen Umkreises zurück (Fig. 1 giebt ein Darstellung der scheinbaren Jupiterbahn), sodass er nach 12 Jahren wieder ungefähr zur selben Stelle am Himmel zurückgekehrt ist. Dabei haben sich aber die Schleifen etwa um den 6. Theil des Zwischenraumes zweier Schleifen verschoben, sodass er nach 6 vollen Umläufen, während welcher er 65 mal retograd geworden war, und zu denen er nahe 71 Jahre gebrauchte, wieder ziemlich genau an derselben Stelle des Himmels erscheint, und sich die Erscheinungen nun fast genau in derselben Weise wiederholen. Daraus folgt für die Zeit eines vollen Umlaufs (unter Voraussetzung einer gleichmässigen Bewegung) 11 Jahre 315 Tage (das Jahr gleich $365\frac{1}{4}$ Tage gerechnet), und für die Zeit zwischen zwei Retrogradationen 398 Tage. Die erstere Zeit, innerhalb welcher der ganze Zodiacus durchlaufen wird, auch die zodiacale Umlaufszeit genannt, wurde nun für Mercur, Venus und Sonne gleich gefunden, für die drei übrigen Planeten und den Mond verschieden.

Die Theorie der homocentrischen Sphären des Eudoxus welche diese Erscheinungen erklärte, ist uns nur in dunklen, unzusammenhängenden Bruchstücken zum grössten Theil von Simplicius (im 6. Jahrh. n. Chr.) überliefert, auf dessen Mittheilungen Schiaparelli in Mailand diese Theorie wieder aufgebaut hat. Sie besteht hiernach in folgendem: Denkt man sich zunächst zwei dicht übereinander gelegte Kugelschalen, von denen die äussere K_1 um eine Achse AA' (Fig. 2) etwa im Sinne des Pfeiles rotirt, dann wird jeder Punkt der Kugel K_1 einen Parallelkreis beschreiben. Seien nun in zwei diametral gegenüber stehenden Punkten BB' die Endpunkte der Achse einer zweiten Kugel K_2 eingesetzt, die mit derselben Geschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne rotirt, und sei von B um 90° entfernt ein Körper P. Es wird einmal vorkommen, dass die Pole A, B und der Punkt P in einen Kreis fallen, wenn man sich die beiden Kugelschalen unmittelbar untereinander denkt. Sei diese Lage AB_1I (Fig. 3), wenn I die Lage des Körpers P für diesen Fall ist. Dann muss der Bogen OI gleich AB_1 sein, welchen Bogen Schiaparelli die Inclination nennt. Nach einer Viertelumdrehung der Kugel K_1 kommt B_1 nach B_2; würde sich die zweite Kugel K_2 nicht gedreht haben, so wäre PB wie früher in die Verlängerung B_2A' von AB_2 gekommen. Die ebenso grosse entgegengesetzte



(A. 2.)

Drehung der zweiten Kugel bewirkt aber, dass die wirkliche Lage von BP um $90°$ von B_2A' verschieden ist, nämlich $B_2\,II$, und O der jetzige Ort des Punktes P ist; inzwischen wird der letztere einen Weg $I\,II$ zurückgelegt haben. Bei der weiteren Drehung der beiden Kugeln bewegt sich der Punkt P über y weiter, und wenn der Pol B nach B_3 (auf der vorderen Seite der Kugel, Fig 3 giebt eine Ansicht von der inneren hohlen Seite der Kugel) B_4 und B_1 gekommen sein wird, wird P in den Punkten III, IV, I angelangt sein, wo, wie leicht ersichtlich, der Bogen $II\,III$ gleich der Inclination ist. Die Curve, welche P beschreibt, wird eine sphärische Lemniscate,



(A. 3.)

welche EUDOXUS nach der Nachricht des SIMPLICIUS Hippopede genannt hat. Die Dimensionen derselben hängen von der Inclination ab, und zwar werden sich die beiden Dimensionen $I\,III$ und yz mit wachsender Inclination, allerdings in ungleichem Verhältnisse, vergrössern. Sei für einen gegebenen Augenblick die Grösse der Drehung der Sphäre K_1 bestimmt durch den Winkel $OAB = \theta$, der Pol der zweiten Sphäre K_2 liege in B, wo $AB = i$ die Inclination ist. Gleichzeitig habe sich die zweite Sphäre um B ebenfalls um den Winkel θ gedreht, sodass der ursprünglich in der Verlängerung von AB gegen p hin gelegene Punkt (P) jetzt nach P kommt, wobei $p\,BP = \theta$ ist. Nennt man die Entfernung $AP = r$, den Winkel $OAP = u$, positiv nach abwärts, wenn die Drehung der äusseren Kugel K_1 von OA nach aufwärts geschieht, so ist aus dem Dreieck BAP, weil $BP = 90°$ ist:

$$\cos r = -\sin i \cos \theta;$$
$$\sin r \cos (\theta + u) = +\cos i \cos \theta;$$
$$\sin r \sin (\theta + u) = +\sin \theta;$$

Multiplicirt man erst die zweite Gleichung mit $-\sin \theta$, die dritte mit $+\cos \theta$ und addirt, sodann die zweite mit $+\cos \theta$, die dritte mit $+\sin \theta$ und addirt, so folgt

$$\sin r \sin u = \sin \theta \cos \theta\,(1 - \cos i) = \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2\theta$$

und

$$\sin r \cos u = \sin^2 \theta + \cos i \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \theta.$$

Aus dem Dreieck OAP, in welchem $AO = 90°$ ist, folgt, $OP = \rho$ und $AOP = 180° - w$ gesetzt:

$$\cos \rho = \sin r \cos u$$
$$\sin \rho \sin w = \sin r \sin u$$
$$\sin \rho \cos w = - \cos r,$$

und hiermit für die sphärischen Coordinaten ξ, η:

$$\sin \eta = \sin v \sin \rho = \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2\theta,$$
$$\cotg \xi = \frac{\cotg \rho}{\cos w} = - \tang r \cos u = \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos^2 \theta}{\sin i \cos \theta}.$$

Einfacher werden die Gleichungen, wenn man die Curven auf die Tangentialebene in O orthogonal projicirt; die rechtwinkligen Coordinaten x, y der Projection folgen aber als die Orthogonalprojectionen der grössten Kreisbögen ξ, η auf die Tangentialebene. Projicirt man das Dreieck $\rho\xi\eta$ auf diese Ebene, so wird, wenn man die Projectionen von ρ und w mit ρ', w' bezeichnet und die positive y-Achse entgegengesetzt den positiven u, w nach oben zählt:

$$\sphericalangle w' = \sphericalangle w; \quad \rho' = R \sin \rho,$$

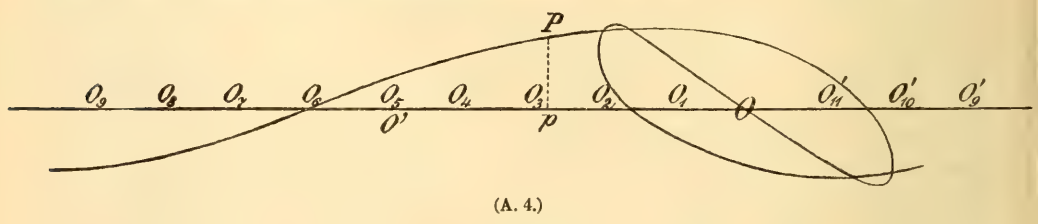
wenn R der Halbmesser der Kugel ist. Demnach

$$x = \rho' \cos w' = R \sin \rho \cos w = - R \cos r$$
$$y = - \rho' \sin w' = - R \sin \rho \sin w = - R \sin r \sin u,$$

folglich

$$x = R \sin i \cos \theta$$
$$y = - R \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2\theta.$$

Denkt man sich nunmehr die beiden Kugeln K_1, K_2 (Fig. 2) mit AA' in eine dritte äussere Kugel K eingehängt, welche um eine Achse rotirt, die zu AA'



(A. 4.)

senkrecht steht, und die durch die Pole CC' der Ekliptik geht, und zwar mit anderer Geschwindigkeit als K_1, K_2, und beobachtet die Erscheinung aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte aller Kugeln, so wird sich zunächst der Punkt O gleichmässig in einem grössten Kreise bewegen, dessen Pole CC' sind, also in der Ekliptik. Ist P der Planet, so wird er sich nicht in O befinden, sondern bald rechts, bald links von diesem Punkte, der also gewissermaassen einen mittleren Ort des Planeten darstellt. Denkt man sich nun einen Streifen der Himmelskugel längs der Bahn von AA' herausgeschnitten und in die Zeichnungsfläche gelegt, oder besser ausgedrückt durch eine äquatoreale Cylinderprojection dargestellt, so wird vermöge der Drehung der Kugel K der Punkt O in gleichen Zeiträumen nach O_1, O_2, O_3 . . . (Fig. 4) kommen, während die relative Lage von P gegenüber O durch die Hippopede gegeben ist, welche das System der beiden Sphären $K_1 K_2$ ersetzt. Ueberträgt man also die Hippopede auf jeden einzelnen der Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 . . . . , wo jedoch in Fig. 4 die positive X-Achse nach links gelegt ist, weil dies die Richtung der direkten Bewegung ist, und verbindet man die jeweiligen Planetenorte durch einen stetigen Linienzug, so erhält man eine Curve, deren Form wesentlich bedingt ist durch das Verhältniss der Geschwindigkeiten der Kugel K und des Kugelsystemes $(K_1 K_2)$. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die Rotationsdauer von K gleich der Umlaufszeit des mittleren Ortes um die

Erde, also gleich der zodiakalen Umlaufszeit des Planeten sein muss, also für Jupiter 11 Jahre 315 Tage, und die Rotationsdauer von K_1 und K_2 gleich der Zwischenzeit zwischen zwei Retrogradationen, also für Jupiter 398 Tage. Die zodiakale Umlaufszeit ist aber für die oberen Planeten Saturn, Jupiter und Mars gleich der siderischen, indem nämlich wegen der relativen Kleinheit der Erdbahn die mittlere Bewegung so stattfindet, als würde der Planet von der Sonne aus gesehen, und die Ungleichheiten der mittleren Bewegung sich durch den veränderlichen Erdort ergeben. Für die unteren Planeten Mercur und Venus aber ist die zodiakale Umlaufszeit gleich einem Jahre, da die mittleren Orte dieser Planeten stets mit dem Sonnenorte zusammenfallen, von welchem sie bald rechts, bald links erscheinen.

Sei allgemein die zodiakale Umlaufszeit, also die Rotationsdauer der Sphäre K gleich Z, die Zeit zwischen zwei Retrogradationen, also die Rotationsdauer des Sphärensystems $(K_1 K_2)$ gleich T (ausgedrückt in mittleren Sonnentagen), so beträgt die Drehung in einem Tage $\frac{360^\circ}{Z} = \mu$ bezw. $\frac{360^\circ}{T} = \mu_1$, daher sind die Drehungen in t Tagen μt für die Sphäre K, und $\mu_1 t = \theta$ für das System $(K_1 K_2)$. Sei für eine gewisse Zeit der Planet in dem Mittelpunkte der Hippopede, und zwar in dem retrograden Theile seiner Bewegung, also in IV (Fig. 3), und der Mittelpunkt der Hippopede an einer gewissen Stelle des Himmels in O (Fig. 4), dann wird auch der Planet sich in O befinden, seine Länge ist gleich der Entfernung des Punktes O vom Frühlingspunkt, sie sei gleich λ_0. Dasjenige Datum, für welches die Werthe gewisser Grössen: mittlere oder wahre Längen der Himmelskörper, die Längen ihrer Knoten u. s. w. gegeben werden, nennt man die Epochen dieser Grössen, und man wird daher sagen, dass λ_0 die mittlere und wahre Länge des Planeten zu einer gegebenen Epoche ist. Für dieselbe Epoche ist, weil der Planet in der Hippopede sich in IV befindet, der Winkel $\theta_0 = 270^\circ$; t Tage nach der Epoche ist die Länge des Mittelpunktes der Hippopede, also die mittlere Länge des Planeten $\lambda_0 + \mu t$, der Drehungswinkel der beiden Sphären $\theta = 270^\circ + \mu_1 t$, demnach

$$x = + R \sin i \sin \mu_1 t,$$
$$y = + R \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2 \mu_1 t,$$

oder für den Halbmesser 1 und ausgedrückt in Bogenminuten

$$x = \frac{\sin i}{arc\, 1'} \sin \mu_1 t; \quad y = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} i}{arc\, 1'} \sin 2 \mu_1 t,$$

folglich, wenn die Werthe x, y von O' aus aufgetragen werden,

$$x_1 = Op = OO' - O'p = \mu t - \frac{\sin i}{arc\, 1'} \sin \mu_1 t$$
$$y_1 = pP = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} i}{arc\, 1'} \sin 2 \mu_1 t.$$

Es ist aber $\lambda_0 + x_1$ die wahre Länge λ des Planeten, y seine Breite β und man hat daher in der EUDOXI'schen Theorie

$$\lambda = \lambda_0 + \mu t - \frac{\sin i}{arc\, 1'} \sin \mu_1 t \qquad \beta = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} i}{arc\, 1'} \sin 2 \mu_1 t.$$

Würde nun noch das ganze System der Kugeln K, K_1, K_2 in eine äusserste Kugel eingehängt, die in 24 Stunden um eine Achse rotirt, welche durch die Weltpole geht, so wird auch die tägliche Bewegung erklärt, und man erhält hierdurch eine Zerlegung der scheinbaren, sehr complicirten Planetenbewegung in eine

völlig gleichmässige mittlere Bewegung, und eine gesetzmässig auftretende Gleichung oder Ungleichheit.

Construirt man mit einem angenommenen Werthe von i nach dieser Gleichung die Curve, welche den scheinbaren Planetenlauf repräsentirt, so findet man eine gewisse Grösse des retrograden Bogens sowie die zugehörige Zeit der Retrogradation, und man konnte die Theorie als mit der Erfahrung in genügender Uebereinstimmung betrachten, wenn diese beiden Elemente für eine gewisse hiernach zu bestimmende Inclination genügend dargestellt wurden. Wenn auch nach unseren heutigen Kenntnissen die so bestimmte Zeit der Retrogradation nicht gerade besonders gut mit der beobachteten übereingestimmt hätte, so konnte doch selbst eine Differenz von mehreren Tagen als unerheblich bezeichnet werden, da die Planeten zur Zeit der Stationen längere Zeit unbeweglich erscheinen, und die Zeit der Stationen, demnach auch die Zwischenzeit, d. h. die Zeit der Retrogradationen nicht genau ermittelt werden konnte. EUDOXUS prüfte die Theorie wahrscheinlich an Modellen, und erhielt auch in dieser empirischen Weise die Werthe der Inclinationen.

Für den Jupiter ist z. B. $Z = 4333$ Tage, $T = 398$ Tage, daraus folgt $\mu = 5'$, $\mu_1 = 54'{\cdot}3$. Nimmt man $i = 12° \, 8'$, so wird der retrograde Bogen ziemlich gut dargestellt, die Zeit der Retrogradation allerdings um 20 Tage zu gross gefunden, was jedoch noch als hinreichende Uebereinstimmung bezeichnet werden kann. Für die Epoche 133 n. Chr. Mai 17 Mitternacht hat man eine Opposition des Jupiter in $\lambda_0 = 233° \, 11'$ (von PTOLEMÄUS beobachtet). Hiermit kann man den Ort des Jupiter für jeden beliebigen Moment voraus- oder zurückrechnen. Man hat z. B. für 133 n. Chr. August 5 $t = +80^d$, $\mu t = +6° \, 40'$; $\mu_1 t = +72° \, 24$ $log\, sin\, \mu_1\, t = 9{\cdot}9792$; und da $log\, sin\, i = 9{\cdot}3226$, $log \frac{sin\, i}{arc\, 1'} = 2{\cdot}8589$ ist, so wird $log \frac{sin\, i}{arc\, 1'}\, sin\, \mu_1\, t = 2{\cdot}8381$, die zugehörige Zahl $11° \, 29'$, daher $\lambda = 211° \, 11' + 6° \, 40' - 11° \, 29' = 228° \, 22'$.

Ebenso erhält man für den Saturn für welchen $Z = 10760^d$, $T = 378^d$, $\mu = 2'$, $\mu_1 = 57'$ ist, eine genügende Darstellung des retrograden Bogens mit der Inclination $i = 6° \, 20'$, welche hier die Zeit der Retrogradation um 16 Tage zu klein giebt.

Für den Mars ist $Z = 687^d$, $T = 780^d$, $\mu = 31'{\cdot}4$, $\mu_1 = 27'{\cdot}7$. Man findet keine Inclination, für welche der Planet mit dieser Geschwindigkeit in der Hippopede retrograd würde, und um die Retrogradation in einer Weise zu erhalten, welche den Beobachtungen entspricht, verdreifachte EUDOXUS die Geschwindigkeit des Sphärensystems $K_1 K_2$, sodass $T = 260^d$, $\mu_1 = 1° \, 23'$ wird, womit der retrograde Bogen wenigstens in seinem mittleren Werthe dargestellt wird. Da aber die Grösse des retrograden Bogens beim Mars (sowie auch bei Venus und Mercur) ziemlich starken Schwankungen unterliegt, so wird eine feste Inclination die Erscheinungen nicht genügend darstellen. Da übrigens der Planet nach je 260 Tagen retrograd würde, während er es thatsächlich nach je 780 Tagen in den Oppositionen wird, so giebt die Theorie noch 2 überzählige Retrogradationen zwischen den Oppositionen, welche, wie die Rechnung zeigt, in den Entfernungen 130° bis 140° von der Sonne stattfinden, wo der Planet noch ganz gut gesehen wird, wo sich aber diese Retrogradationen nicht zeigten; die Theorie ist also mangelhaft.

Für Venus und Mercur fand man, dass der mittlere Ort stets mit dem Orte der Sonne zusammenfällt (was darin seinen Grund hat, dass die Bahnen dieser

beiden Himmelskörper innerhalb der Erdbahn liegen), demnach die Planeten mit der Sonne fortzurücken scheinen und ihre Entfernungen von der Sonne gewisse Grenzen nicht überschreiten können: Venus erscheint nie weiter als ungefähr 46°, Mercur nie weiter als ungefähr 24°; diese grössten Elongationen von dem mittleren Orte oder von der Sonne geben dann gleich die Entfernung $OI = OIII$ (Fig. 3), demnach die Inclination. Für den Mercur wird die Darstellung des retrograden Bogens mit $i = 24°$ noch eine mittelmässig gute (es ist $Z = 365^d$, $T = 88^d$, $\mu = 59'$, $\mu_1 = 3° 6{\cdot}4'$), während es für Venus bei der angenommenen Inclination von 46°, wie sie die grösste Elongation erfordert, auch wieder nothwendig war, die Geschwindigkeit in der Hippopede zu verdreifachen, um den retrograden Bogen angenähert richtig zu erhalten, wodurch aber eine genügende Uebereinstimmung mit den beobachteten Stationen nicht zu erzielen war. (Es ist $Z = 365^d$, die Zwischenzeit zwischen 2 Retrogradationen 584^d, der von EUDOXUS angenommene Werth war $T = 195^d$).

Für den Mond folgte die äusserste Sphäre der täglichen Bewegung, die zweite hatte ihre Pole in den Polen der Ekliptik, und rotirte um diese mit der Geschwindigkeit von 3·3′ täglich von Ost nach West, sodass sie in etwa 18 Jahren ihren Umlauf vollendete; sie trug um die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, d. i. um $5\frac{2}{3}°$, von den Polen der Ekliptik entfernt die Pole der dritten Sphäre, welche den Mond in 27 Tagen einmal um die Erde herumführt; die zweite Sphäre erklärte demnach die Drehung der Mondknoten. Auch für die Sonne war zwischen der Sphäre der täglichen und derjenigen der jährlichen Bewegung eine zweite Sphäre eingeschaltet, deren Rotationsdauer nahe 2900 Jahre war; die Pole der zweiten Sphäre fielen in die Pole der Ekliptik, diejenigen der dritten standen von ihnen um einen halben Grad ab. Ueber die Bedeutung dieser Sphäre ist uns nichts näheres bekannt, sie ist nicht unähnlieh jener Schwankung, welche die arabischen Astronomen als Trepidation bezeichneten, unterscheidet sich aber von dieser durch die Amplitude und die Periode.

Nach dieser EUDOXI'schen Theorie erfordert die Erklärung der Planetenbewegung: für Sonne und Mond je 3 Sphären, für die übrigen Wandelsterne je 4, für die Fixsterne 1 Sphäre, die der täglichen Bewegung folgt, im Ganzen demnach 27 Sphären. Die hier noch fast ganz unrichtigen Darstellungen in den Bewegungen von Mars und Venus veranlassten CALIPPUS (370—300 v. Chr.), für diese beiden Planeten je eine Sphäre einzuschieben, doch findet sich in den alten Quellen keine Angabe über die Art dieser Einschiebung. Aber auch für die Sonne und den Mond fügte er je 2 neue Sphären hinzu, wahrscheinlich zu dem Zwecke, um die Ungleichheit in der Sonnenbewegung, die durch die verschiedene Länge der Jahreszeiten zu erkennen ist, zu erklären; mit einer Inclination von 2° würde die Sonnenbewegung fast so genau, wie mit dem excentrischen Kreise dargestellt. Auch SIMPLICIUS sagt, dass wegen der ungleichen Länge der Jahreszeiten CALIPPUS bei der Sonne und beim Mond je 2 neue Sphären einführte. Mit dem Mondlaufe hat nun allerdings die ungleiche Länge der Jahreszeiten nichts zu thun, aber so wie für die Sonne die Ungleichheit der Längenbewegung erkannt war, welches Verdienst man nach dem Gesagten dem CALIPPUS zuschreiben muss, ebenso war gleichzeitig oder vielleicht schon früher auch die leichter zu erkennende Ungleichheit in der Bewegung des Mondesbekannt. Hiernach hatte CALIPPUS in seiner Theorie 33 Sphären, zu denen ARISTOTELES[1])

---

[1]) Geb. 384 v. Chr. zu Stagira, einer griechischen Kolonie in Thracien, kam er in seinem 17. Jahre zu PLATO nach Athen. Gegen sein 40. Jahr wurde er von PHILLIPP von Macedonien

(384—322 v. Chr.) eine Reihe anderer hinzufügte. Für den Physiker ARISTOTELES waren die für sich bestehenden Sphären jedes einzelnen Planeten, die von EUDOXUS wohl nur als geometrische Repräsentanten von gleichförmigen Bewegungen angesehen wurden, ein Unding, und wenn er auch die Ursachen der Rotationen nicht angeben konnte, so wollte er doch wenigstens ein miteinander zusammenhängendes System von realen Sphären. Die Bewegung des Fixsternhimmels konnte sich natürlich direkt auf die erste Sphäre des Saturn übertragen; eine direkte Verbindung der innersten Saturnsphäre mit der äussersten Jupitersphäre war aber nicht möglich, ohne die Bewegung des ersteren auch auf den letzteren mitzuübertragen, und so sah sich ARISTOTELES genöthigt, zwischen den einzelnen Planeten eine gewisse Anzahl reagirender Sphären einzuschalten, welche die Bewegung der CALIPPI'schen revolvirenden oder deferirenden aufhoben. Für eine Reihe von n revolvirenden Sphären genügen aber $(n - 1)$ reagirende, denn die $n$te reagirende wird bereits der täglichen Bewegung folgen und kann als erste revolvirende des nächsten Planeten dienen. Hieraus folgt als Anzahl der von ARISTOTELES angenommenen Sphären: für Saturn und Jupiter je 4 revolvirende und 3 reagirende Sphären, für Mars, Venus, Mercur und Sonne je 5 revolvirende und 4 reagirende Sphären, für den Mond 5 revolvirende, da er als innerster Wandelstern keine reagirenden Sphären mehr braucht. Hiernach hatte ARISTOTELES 33 revolvirende und 22 reagirende Sphären, zusammen 55 Sphären, wozu noch die Fixsternsphäre kommt.

Nebst den Fixsternen und Planeten erscheinen von Zeit zu Zeit, meist für kurz, selten für lange, die Sterngruppen manchmal in raschem Laufe, manchmal sehr langsam passirend, gewisse, auch dem Aussehen nach von den bisher angeführten Gestirnen wesentlich verschiedene Körper, die Kometen oder Haarsterne. Die mit freiem Auge sichtbaren Kometen unterscheiden sich dem Aussehen nach von den übrigen, am Himmel sichtbaren Körpern wesentlich durch den dunstartigen Schweif, welcher sich von dem verdichteten, meist sternartigen Kern ausgehend, oft in weitem Bogen — bei den im Alterthum beobachteten bis zu 30° und mehr — wie eine Fackel am Himmel ausdehnt. (Ueber die teleskopischen Kometen, welche schwachen Nebeln mit oder ohne verdichtetem Kerne gleichen, s. Kometen.) Da sie nur kurze Zeit sichtbar sind — in den seltensten Fällen ein Jahr und darüber — dann für immer verschwinden und nie wiedergesehen werden, also keine regelmässigen, geschlossenen Bahnen wie die Planeten zu beschreiben scheinen, da man ferner durch den Dunstschweif die Fixsterne wie durch einen Nebel hindurchsieht, ihre Bahnen zwischen den Fixsternen auch nicht mit denjenigen der Planeten zusammenfallen, sondern sich mitunter weit von der Ekliptik entfernen und überdies die Bewegungsrichtung von einigen beständig retrograd ist, so war man zur Annahme geneigt, dass die Kometen terrestrischen Ursprungs sind, welche Annahme man z. B. bei ARISTOTELES und HERACLIDES findet. Daneben tritt aber auch die Meinung auf, dass die Kometen nur subjektive Erscheinungen des Auges, ähnlich denjenigen im Spiegel sind. Da aber andererseits die Kometen an der täglichen Bewegung

---

zur Erziehung seines damals dreijährigen Sohnes ALEXANDER berufen. Er stand sowohl bei PHILLIPP, als auch bei ALEXANDER in grosser Gunst. Als der letztere seine Kriegszüge begann, kehrte er nach Athen zurück und errichtete dort seine Schule im Lyceum, wo er seine Vorträge meist im Auf- und Abgehen mit seinen Schülern hielt, wodurch diese den Namen der Peripatetiker (Herumwandelnde) erhielten. Nach 13jähriger Wirksamkeit zog er sich nach Chalcis zurück, da er bei seinem königlichen Gönner in Ungnade zugefallen war, starb aber daselbst bald nachher im Jahre 322 v. Chr.

der Gestirne theilnehmen, so ist auch schon im Alterthum, z. B. bei DIOGENES LAËRTIUS die Meinung vertreten, dass die Kometen wirkliche Sterne wären. Dass die Chaldäer die Kometen kannten, ist gewiss, weniger bekannt ist uns jedoch, was sie von denselben hielten. Nach EPIGENES sahen sie in ihnen Lufterscheinungen terrestrischen Ursprunges, nach APOLLONIUS Wandelsterne; wahrscheinlich ist hiernach, dass auch bei ihnen die Meinungen getheilt waren.

Ueber das Aussehen, die Grösse, Lage und Entfernung der Himmelskörper, sowie über die wahren Bewegungen der Wandelsterne findet man in den ältesten Quellen ziemlich widersprechende Angaben. Nach einigen soll bereits THALES die Kugelgestalt der Erde gelehrt haben, nach ARISTOTELES nahm jedoch THALES an, dass die Erde eine auf Wasser schwimmende Scheibe sei. ANAXIMANDER nimmt ebenfalls eine ebene Erde in der Mitte der Welt an, um sie bewegen sich in 3 Sphären die Fixsterne, Mond und Sonne, erstere in der untersten Sphäre, über ihnen der Mond und am weitesten von der Erde entfernt die Sonne; die Entfernung des Mondes nimmt er zu 126000 Stadien, diejenige der Sonne doppelt so gross an. PYTHAGORAS nimmt an, dass der Mond der der Erde nächste Himmelskörper sei, und nennt die Entfernung desselben von der Erde einen Ton; er ordnet ferner die Gestirne so an, dass zwischen dem Mond und dem Mercur ein halber Ton, zwischen dem letzteren und der Venus ebenfalls ein halber Ton, zwischen Venus und Sonne $1\frac{1}{2}$ Töne; ferner von dieser zum Mars ein Ton, weiter von diesem zum Jupiter ein halber Ton, ebensoviel zwischen Jupiter und Saturn ist, endlich von diesem bis zum Thierkreis (den Fixsternen) $1\frac{1}{2}$ Töne, sodass die Entfernung der Fixsterne 7 Töne beträgt. Es ist dieses jedoch, wie PLINIUS selbst bemerkt, nur ein Spiel der Phantasie, weshalb den Angaben auch kein astronomischer Werth beizulegen ist. PHILOLAUS und NICETAS von Syrakus (um 450 v. Chr.) nehmen eine Achsendrehung der Erde an; doch scheint sich diese Annahme damals nicht lange erhalten zu haben, denn bei EUDOXUS finden wir wieder die tägliche Bewegung durch eine Drehung der Fixsternsphäre erklärt. Die Theorie des Letzteren, sowie diejenige des CALIPPUS und ARISTOTELES wurden bereits erwähnt, und ist aus ihnen auch die gewählte Anordnung der Gestirne ersichtlich.

Ueber die Grösse derselben finden sich in den überlieferten Berichten keine Angaben, doch soll ARISTOTELES bereits die Veränderlichkeit der scheinbaren Halbmesser der Planeten gekannt und auch deshalb die von ihm selbst adoptirte Theorie der homocentrischen Sphären für zweifelhaft erklärt haben. Es ist merkwürdig, dass sich trotzdem diese Theorie, sowie auch später die anderen geocentrischen Systeme so lange erhielten; es ist dies um so merkwürdiger, als sich im Alterthum bereits heliocentrische Systeme fanden. Nach DIODOR sollen die Aegypter schon frühzeitig ein Planetensystem aufgestellt haben, nach welchem der Erde zunächst der Mond, dann die Sonne, ferner Mars, Jupiter und Saturn sich um die Erde bewegen, während sich Mercur und Venus um die Sonne und mit dieser gemeinsam um die Erde bewegen. Dieses System, welches sich bei keinem griechischen Astronomen findet, scheint, trotzdem es den Erscheinungen auf den ersten Blick am besten entspricht, bald in Vergessenheit gekommen zu sein und tritt erst wieder etwa 1000 Jahre später auf. Es behält aber bei späteren Schriftstellern, z. B. RICCIOLI den Namen des »ägyptischen Systems.« Die Annahme, dass die Erde den Mittelpunkt der Welt bilde, und sich alle Himmelskörper um sie bewegen, bildet jedoch auch hier noch den Grundstock des Systems. Die enge Verbindung der beiden inneren Planeten mit der Sonne, welche durch den Umstand unverkennbar ist, dass sie sich

immer nur bis zu einer gewissen Entfernung (der grössten Elongation) von der Sonne entfernen können, war hinreichend auffällig, um auf die Annahme zu führen, dass sich diese beiden Himmelskörper um die Sonne bewegen, hingegen blieb die Ruhe der Erde dabei noch unangefochten, indem die direkten Wahrnehmungen für diese Annahme sprachen. Doch auch diesen Standpunkt liess ARISTARCH von Samos (zwischen 281—264 v. Chr.) fallen. Nach ARCHIMEDES, PLUTARCH und SENECA nimmt er an, dass die Sonne unbeweglich wäre, und die Erde sich wie die übrigen Planeten um dieselbe in einem Kreise bewege. ARISTARCH ist demnach als der wahre Begründer des heliocentrischen Systems anzusehen; doch scheint auch dieses noch keine weitere Verbreitung, vielleicht auch keine allgemeine Annahme gefunden zu haben, denn bald darauf sehen wir bei den hervorragendsten Astronomen jener Zeit wieder das geocentrische System adoptirt.

ARISTARCH hatte sich auch hervorragende Verdienste um die Astronomie durch seine strenge, wissenschaftliche Deduction des Verhältnisses der Entfernungen von Sonne und Mond erworben, wobei er einer der ersten den Weg der speculativen Philosophie verliess. Er bemerkte, dass der Mond genau halb erleuchtet wäre, wenn er 87° von der Sonne entfernt stünde. Da nun für diesen Fall die Richtung der Sonnenstrahlen in der durch Sonnen-, Mond- und Erdmittelpunkt gelegten Ebene senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Erd- und Mondmittelpunkts, so findet er aus dem durch diese 3 Körper gebildeten, rechtwinkligen Dreiecke, dass die Entfernung Erde—Sonne (Hypothenuse des Dreiecks) mindestens 18mal grösser sei, als die Entfernung Erde—Mond (die kürzere Kathete). Auf demselben Wege fand ARCHIMEDES[1]), dass die Sonne 30mal weiter sei als der Mond. Eine Genauigkeit ist nach dieser Methode natürlich nicht zu erzielen, da die Zeit der Dichotomie (halben Erleuchtung) nicht mit Sicherheit zu ermitteln ist. ERATOSTHENES[2]) (276—194 v. Chr.) giebt nach PLUTARCH die Entfernung des Mondes von der Erde zu 780000 Stadien, diejenige der Sonne von der Erde 4080000 Stadien, sodass nach ihm die Sonne nur etwa 5—6 mal weiter als der Mond wäre, was gegen seine Vorgänger einen bedeutenden Rückschritt bezeichnen würde. Hingegen muss ERATOSTHENES als der erste bezeichnet werden, der durch wirkliche Messung die Grösse der Erde festzustellen suchte. Er fand die grösste Höhe der Sonne zur Zeit der Sommersolstitien in Alexandrien gleich 7° 10′ ($\frac{1}{50}$ des ganzen Umkreises), während die Sonne gleichzeitig in Syene im Zenith gesehen wurde (durch Spiegelung im Brunnen erkannt). Indem nun die Entfernung der beiden Orte gleich 5000 Stadien angenommen wurde, folgt für den Erdumfang 250000 Stadien. Es gab aber verschiedene Stadien, deren genaue Länge uns nicht bekannt ist, ebenso wie wir nicht wissen, welche Stadien ERATOSTHENES gemeint hat; daher bleibt diese Messung der Grösse der Erde für uns an sich unbestimmt.

War es bis dahin einzelnen Forschern gelungen, auf inductivem Wege Resultate zu erhalten, welche für den Fortschritt der Astronomie von nicht zu unterschätzender Bedeutung waren, so tritt uns nunmehr ein Mann entgegen, der für sich allein mindestens ebensoviel leistete, wie alle seine Vorgänger zusammen, und der durch seine ausserordentliche Begabung Resultate erzielte, welche alle

---

[1]) Er wurde 287 v. Chr. zu Syracus geboren, und 212 v. Chr. bei der Einnahme dieser Stadt durch die Römer von einem Soldaten getödtet.

[2]) Geboren 276 v. Chr. zu Cyrene in Afrika, wurde er von PTOLEMÄUS PHILADELPHUS nach Alexandrien berufen, wo er bis zu seinem 194 v. Chr. erfolgten Tode wirkte.

bisher erlangten weit in den Schatten stellten. Ein gleich guter Beobachter und scharfsinniger Denker hatte HIPPARCH von Nicäa[1]), dieser grösste Astronom des Alterthums, dessen Thätigkeit zwischen 160—125 v. Chr. fällt, in der theoretischen und praktischen Astronomie Wege eingeschlagen, welche Jahrhunderte hindurch nicht nur als Norm für die weitere Forschung dienten, sondern durch anderthalb Jahrtausende unverändert beibehalten wurden. An seinen Namen knüpfen sich die Untersuchungen über die Ortsveränderungen der Fixsterne am Himmel, die Theorie der »Praecession der Nachtgleichen« oder die Theorie der »Bewegung der achten Sphäre«, wie sie von späteren Schriftstellern des Mittelalters genannt wird *(theoria motus octavae sphaerae)*, und die vollkommene Umgestaltung der Theorie der Bewegung der Wandelsterne, die »Theorie der epicyklischen Bewegung«. (Ueber die von HIPPARCH eingeschlagenen Beobachtungsmethoden, s. die verschiedenen älteren, von ihm benutzten Instrumente).

Schon ARISTYLL und TIMOCHARIS hatten um 300 v. Chr. an geeigneten Instrumenten die Oerter einzelner Sterne am Himmel bestimmt. Als nun HIPPARCH, veranlasst durch das Aufleuchten eines neuen Sterns im Sternbilde des Scorpions einen Sternkatalog, d. i. ein Verzeichniss von Sternen mit Angabe ihrer sphärischen Coordinaten (Länge und Breite, oder wie dies jetzt allgemein geschieht Rectascension und Deklination), anlegte, fand er durch Vergleichung mit den Angaben der erstgenannten beiden Astronomen, dass die Längen der sämmtlichen Gestirne um nahe denselben Betrag grösser geworden waren, während die Breiten derselben ungeändert blieben. Die Gleichmässigkeit des Auftretens dieses Wachsens der Längen bei allen Gestirnen führte ihn auf die Annahme, dass die beiden Nachtgleichenpunkte längs der Ekliptik zurückweichen, dass also der Aequator in einer drehenden Bewegung begriffen sein müsse. HIPPARCH nahm an, dass diese Drehung derart vor sich gehe, dass die Schnittpunkte in je rund 100 Jahren um 1° zurückwichen, wodurch die Längen aller Gestirne jährlich um 36″ grösser würden, wobei ihre Breiten unverändert blieben, während sich dabei natürlich sowohl die Rectascension als auch die Deklination änderten.

Da nun in Folge dieser »Präcession der Nachtgleichen« (eigentlich ein Rückschreiten derselben) der Frühlingspunkt in immer andere Sternbilder kommt, mit dem Eintreten der Sonne in den Frühlingspunkt aber der Beginn des astronomischen Frühlings verbunden ist, so wird zur Zeit des Beginnes der astronomischen Jahreszeiten die Sonne im Laufe der Jahrhunderte in immer andere Sternbilder eintreten. Zu den Zeiten HIPPARCH's war der Frühlingspunkt ungefähr im Beginn des Sternbildes des Widders, der Frühling begann mit dem Eintritt der Sonne in das Sternbild des Widders, der Sommer mit dem Eintritt der Sonne in das Sternbild des Krebses, der Herbst, bezw. der Winter mit dem Eintritt der Sonne in die Sternbilder der Waage und des Steinbocks. Zu unseren Zeiten (etwa 2000 Jahre nach HIPPARCH) ist der Frühlingspunkt bereits um nahe 30° zurückgewichen, er befindet sich im Anfange des Sternbildes der Fische; der Frühlingsanfang fällt mit dem Eintritte der Sonne in das Sternbild der Fische, der Sommer- bezw. Herbst- und Winteranfang mit dem Eintritt der Sonne in die Sternbilder der Zwillinge, der Jungfrau und des Schützen zusammen. In den Kalendern und selbst noch in der astronomischen Geographie findet man auch noch heute die für astronomische Zwecke völlig unnöthige Eintheilung des Thierkreises in 12 Zeichen, deren Namen mit denjenigen der 12 Sternbilder identisch sind, die aber so angeordnet sind, dass jedes genau 30° der Ekliptik

[1]) Er lebte zumeist auf Rhodus, vorübergehend auch in Alexandrien.

einnimmt, und der Anfang des »Zeichens des Widders« stets mit dem Frühlingspunkte zusammenfällt; in den früheren Zeiten findet man dann noch die Längen nach Zeichen (Signa), Graden, Minuten, Secunden, z. B. $4^s\ 25°\ 16'\ 37''$; diese Zählweise wurde aber seit dem Anfange unseres Jahrhunderts fallen gelassen, und man sagt z. B. für obige Angabe $145°\ 16'\ 37''$. Vor 2000 Jahren fielen demnach die 12 Zeichen des Thierkreises mit den 12 Sternbildern des Thierkreises zusammen, in unserer Zeit fällt jedoch das Zeichen des Widders bereits fast genau in das Sternbild der Fische, hingegen wird zu allen Zeiten der Frühlingsanfang mit dem Eintritt der Sonne in das Zeichen des Widders, der astronomische Sommer- bezw. Herbst- und Winteranfang mit dem Eintritt der Sonne in die Zeichen des Krebses, der Waage und des Steinbocks zusammenfallen [1]).

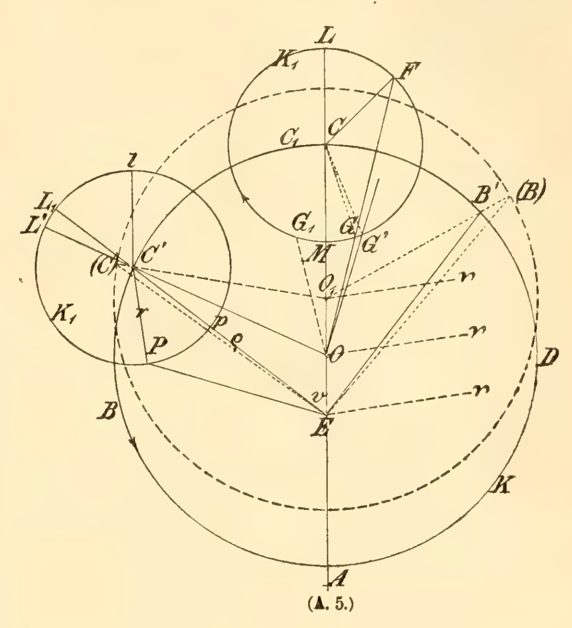
Eine weitere Folge der Präcession ist, dass die Sonne bereits in den Frühlingspunkt tritt, noch ehe sie an denselben Punkt des Himmels (zu denselben Fixsternen) gekommen ist, es muss daher das tropische Jahr (die Zeit zwischen 2 aufeinander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt) etwas kürzer sein, als das siderische Jahr (die Zeit, welche die Sonne zu einem vollen Umlauf von 360° braucht). In der That hatte HIPPARCH diese Beobachtung noch vor Anlegung seines Sternkatalogs gemacht, und wunderte sich, wie PTOLEMÄUS berichtet, ausserordentlich darüber, dass das tropische Jahr kürzer sei als $365\frac{1}{4}$ Tage, während er das siderische Jahr länger fand. Für das erstere giebt er die Länge $365\frac{1}{4} - \frac{1}{300}$ (= 365·2467) Tage. Aus dieser Erscheinung schloss er ganz richtig auf das Rückweichen der Nachtgleichenpunkte, welche er später, wie oben bemerkt, auch aus der direkten Messung der Längen der Fixsterne bestätigt fand.

Der zweite grosse Fortschritt der Astronomie, der sich an den Namen HIPPARCH knüpft, ist die consequente Durchführung und Anwendung der Epicykeln-theorie auf die Bewegung der Himmelskörper. Denkt man sich die Erde als Mittelpunkt O eines Kreises K (Fig. 5), in welchem sich ein Punkt C gleichmässig bewegt, so kann man diesen Punkt als mittleren Ort eines Gestirnes ansehen, welches seinen siderischen Umlauf um die Erde in derselben Zeit vollzieht, wie dieser Punkt. Das Gestirn befindet sich nun aber bald rechts, bald

---

[1]) Es mag hier darauf hingewiesen werden, dass dieser sogen. »astronomische Anfang« der Jahreszeiten den klimatischen Verhältnissen sehr schlecht entspricht. Selbst die Bezeichnung »astronomischer Anfang« ist incorrect; denn strenge genommen müsste der höchste bezw. tiefste Stand der Sonne astronomisch der Mitte des Sommers bezw. Winters entsprechen, dem zu Folge die in der Mitte dazwischen gelegenen Cardinalpunkte der Mitte des Frühlinges bezw. Herbstes. Da nun aber in Folge der continuirlichen Wärmewirkung der Sonne das Maximum der Wärme etwas später eintritt, was natürlich auch vom Temperaturminimum im Winter gilt, so werden klimatisch die Mitte des Sommers und Winters etwas später zu setzen sein. In der That wird in Mitteleuropa den wirklichen Verhältnissen ziemlich gut Rechnung getragen, wenn man eine Verschiebung von einem halben Monat annimmt, wodurch die Mitte des Sommers auf den 7. Juli, die Mitte des Winters auf den 7. Januar, folglich die Mitte des Frühlings auf den 7. April, die Mitte des Herbstes auf den 7. October fällt. Die Länge der Jahreszeiten hängt aber wesentlich von der Intensität der Temperaturunterschiede ab; bei denjenigen Temperaturextremen, welche den mittleren Breiten im Flachlande entsprechen, kann für die Dauer der Jahreszeiten mit den extremen Temperaturgraden (Sommer und Winter) etwa $3\frac{1}{2}$ Monate, für diejenigen mit den mittleren Temperaturgraden (Frühling und Herbst) etwa $2\frac{1}{2}$ Monate (für die letzteren eher etwas kürzer, für die ersteren etwas länger) angenommen werden. Dann wären die klimatischen Trennungspunkte bezw. der 1. März, 15. Mai, 1. September und 15. November.

links von diesem mittleren Ort, und um diese Ungleichheit zu erklären, kann man annehmen, dass sich das Gestirn selbst um seinen mittleren Ort in einem Kreise K_1 bewegt. In dieser Verbindung heisst der erste Kreis K der führende Kreis oder Deferent, der zweite Kreis K_1 der Epicykel. Wird ausserdem die Erde nicht in dem Mittelpunkte O des Kreises K, sondern ausserhalb desselben in E angenommen, so bezeichnet man den Kreis K als den excentrischen Kreis. Für die Erklärung gewisser Ungleichheiten reicht der excentrische Kreis für sich allein oder auch ein mit der Erde concentrischer Deferent mit einem Epicykel aus, für complicirte Bewegungserscheinungen wird der excentrische Kreis als Deferent für einen Epicykel angenommen, oft auch noch andere Bewegungen, z. B. eine Drehung des Deferentenmittelpunkts O um die Erde E eingeführt.



(A. 5.)

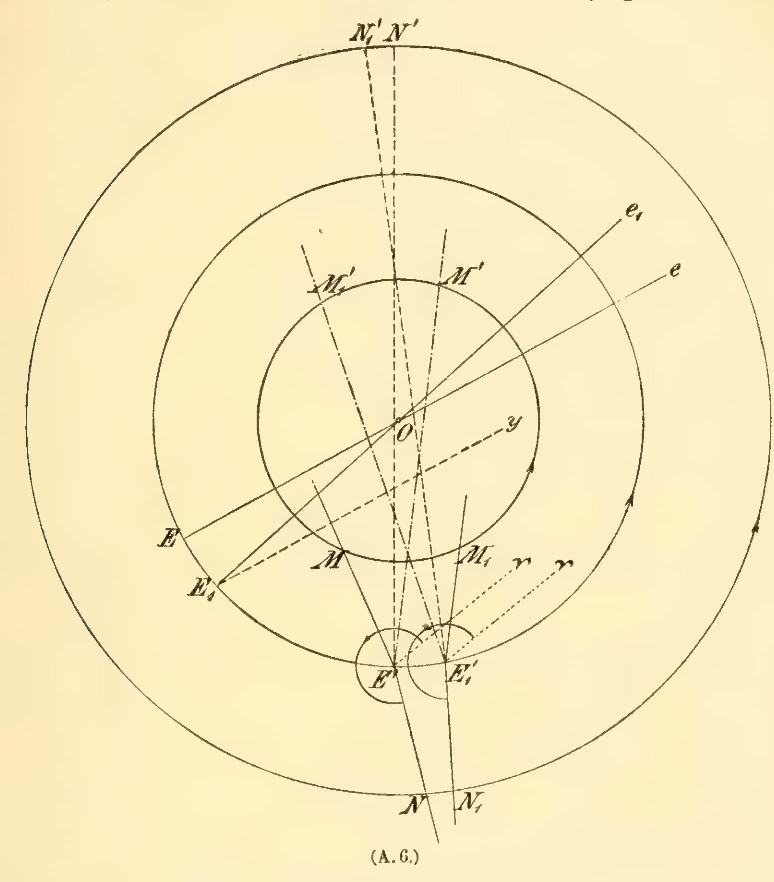
Seien für die Bewegung im einfachen, excentrischen Kreise AC die Schnittpunkte der Verbindungslinie OE mit dem Kreise K, dann ist C derjenige Punkt des Kreises, der am weitesten von E entfernt ist, A der dem Punkte E am nächsten liegende; bewegt sich daher ein Himmelskörper in dem Kreise K, so wird er sich in C in der Erdferne (dem Apogäum), in A in der Erdnähe (dem Perigäum) befinden. Die Linie CA heisst die Apsidenlinie des Kreises, C dessen obere Apside oder das Apogäum, A die untere Apside oder das Perigäum; OE nennt man die Grösse der Excentricität des Kreises. Findet die Bewegung des Himmelskörpers in K gleichmässig statt, so wird sie von E aus gesehen in C am langsamsten, in A am schnellsten erscheinen, weil gleiche Längen des Kreises K von E aus unter verschiedenen Winkeln erscheinen.

Seien für einen der Erde O concentrischen Deferenten K zwei Lagen des Epicykelmittelpunktes C und C'. Ist das Gestirn in der Verlängerung L von OC oder in dem Punkte M dieser Verbindungslinie selbst, so fällt der mittlere Ort mit dem wahren zusammen; aber die Geschwindigkeiten der Bewegungen werden in den beiden Lagen nicht dieselben sein. Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle, für den ersten Fall findet die Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels im Deferenten in der Richtung der Zeichen (nach wachsenden Längen und Rectascensionen) statt, und diejenige des Gestirns entgegengesetzt dieser Bewegung. (Die Bewegungsrichtungen sind in Fig. 5 durch Pfeile angedeutet). Dann werden sich diese beiden Bewegungen in L subtrahiren, in M addiren, daher ist die Geschwindigkeit des Himmelskörpers ein Minimum, wenn er sich in dem Apogäum L des Epicykels befindet, ein Maximum, wenn er in dem Perigäum M des Epicykels ist. Eine Wiederholung aller Ungleichheiten der Bewegung des Gestirnes (sowohl Abweichungen des Gestirnes von seinem mittleren Ort, als auch seiner Geschwindigkeit von seiner mittleren Geschwindigkeit) findet

statt, wenn das Gestirn einen vollen Umlauf im Epicykel vollführt hat, wobei aber die Grösse der Bewegung desselben im Epicykel immer vom instantanen Apogäum L gezählt wird, d. h. ist der Mittelpunkt des Epicykels nach einer gewissen Zeit nach C' gekommen, das Gestirn im Epicykel nach P, so ist die thatsächliche Drehung des Gestirnes in demselben offenbar $lC'P$, wenn $C'l \parallel CL$ ist; allein in der Theorie der Epicykeln zählt man diese Drehung so, als hätte sich der Epicykel unter starrer Verbindung der Punkte LMO um O gedreht, wobei dann die Drehung des Planeten im Epicykel gleich $L'C'P$ ist. Der Grund hiervon wird klar, wenn man bedenkt, dass nach einer Periode der Ungleichheit das Gestirn wieder im Apogäum L sein muss, der Epicykel sich aber unterdessen von C wegbewegt hat. Wird der Epicykel mit dem excentrischen Kreise combinirt, so ist das Apogäum des Deferenten in C, das instantane Apogäum des Epicykels in der Verlängerung von EC' in L_1; doch treten auch hier noch andre Complicationen ein.

Für den zweiten Fall findet die Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten in der Richtung der Zeichen (in der Richtung des Pfeiles) statt, die Bewegung des Gestirnes im Epicykel jedoch ebenfalls in der Richtung der Zeichen (entgegengesetzt der Richtung des Pfeiles); dann addiren sich für einen Beobachter in O oder E die Bewegungen in L und subtrahiren sich in M, es wird demnach im Perigäum des Epicykels die Bewegung am langsamsten, im Apogäum am raschesten. In welchen Fällen die erste oder zweite Darstellungsart gewählt werden müsste, ergiebt sich aus den Beobachtungen selbst. Da nämlich für die Sonne und den Mond die rascheste Bewegung im Perigäum stattfindet, was für den Mond schon daraus erkannt wird, dass sie dann stattfindet, wenn der scheinbare Halbmesser am grössten erscheint, so muss der excentrische Kreis oder die erste Darstellungsart des Epicykels gewählt werden. Da ferner für alle andern wandelnden Gestirne die langsamste direkte Bewegung (eine negative direkte Bewegung, Retrogradation) eintritt, wenn dieselben in ihrem grössten Glanze erscheinen, also in der Erdnähe sind, so ist unmittelbar klar, dass für die Planeten die zweite Darstellungsart gewählt werden muss. Nach unseren heutigen Kenntnissen von den wirklichen Bewegungen der Himmelskörper lässt sich dies auch ohne Zuhilfenahme der Beobachtungen ableiten. Für den Mond hat man die wahre Bewegung um die Erde darzustellen, welche natürlich im Perigäum rascher ist als im Apogäum, daher die erste Darstellungsweise. Desgleichen bewegt sich die Erde in der Sonnennähe (dem Perihel) am raschesten, in der Sonnenferne (dem Aphel) am langsamsten; es ist aber die von der Sonne gesehene wahre (heliocentrische) Bewegung der Erde genau gleich und im Ganzen gleichgerichtet mit der von der Erde gesehenen scheinbaren (geocentrischen) Bewegung der Sonne. Ist nämlich die Erde in E (Fig. 6) so wird die Sonne O in der Richtung Ee zwischen den Fixsternen gesehen, ist die Erde nach E^1 gekommen, so erscheint die Sonne in der Richtung $E_1 e_1$, und da die beiden parallelen Linien Ee und $E_1 y$ am Himmel denselben Punkt treffen, so hat die Sonne scheinbar den Weg $yE_1 e_1$ in der Richtung ee_1 zurückgelegt, während die Erde in Wirklichkeit den Weg EE_1 zurücklegte. Da nun die Erde sich in direkter Richtung um die Sonne bewegt, so wird auch die Sonne sich scheinbar in direkter Richtung um die Erde bewegen, und da $\sphericalangle yE_1 e_1 = \sphericalangle EOE_1$, so wird in jedem Momente die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der Sonne gleich der wahren Winkelgeschwindigkeit der Erde sein; überträgt man sich daher um die ruhend gedachte Erde die scheinbaren (geocentrischen) Richtungen nach der Sonne (die stets nach den Punkten des Himmels gerichtet sind, die

um 180° von denjenigen verschieden sind, gegen welche die Visirlinien von der Sonne zur Erde (heliocentrische Richtung der Erde) gerichtet sind: geocentrische Länge oder Rectascension der Sonne = heliocentrische Länge oder Rectascension der Erde + 180°) und trägt auf diesen Strahlen die Entfernungen der Erde von der Sonne auf, so erhält man als Sonnenbahn das Spiegelbild der Erdbahn.



(A. G.)

Die Richtung des Apogäums der Sonne fällt mit derjenigen des Perihels der Erde zusammen, hingegen fällt die Zeit des Durchgangs der Sonne durch ihr Perigäum mit der Zeit des Durchgangs der Erde durch das Perihel zusammen und hier ist die scheinbare Bewegung der Sonne ebenso wie die wahre Bewegung der Erde am raschesten.

Für die übrigen Wandelsterne combinirt sich in der scheinbaren Bewegung ihre wahre Bewegung mit der wahren Bewegung der Erde. Sei wieder $EE_1\,E'E_1$ die Bahn der Erde $MM_1\,M'\,M_1'$ die Bahn eines inneren Planeten (Mercur oder Venus); wegen der rascheren Bewegung des Planeten wird dieser in derselben Zeit, in welcher die Erde den Weg $E'E_1'$ beschreibt, einen grösseren Weg MM_1 zurückgelegt haben, und der Planet wird an dem einen Tage in der Richtung $E'M$, in der geocentrischen Länge $\Upsilon E'M$, wenn $E'\Upsilon$, $E_1'\Upsilon$ die Richtungen nach dem Frühlingsäquinoctium sind, an dem nächstfolgenden z. B. in der Richtung $E_1'M_1$ in der geocentrischen Länge $\Upsilon E_1'M_1$ gesehen. Befindet sich demnach der Planet zwischen Sonne und Erde (in der unteren Conjunction, in der Erdnähe) so beschreibt er am Himmel den Winkel $\Upsilon E'M - \Upsilon E_1'M_1$ in der Richtung MM_1 gleich der Differenz der wahren Winkelbewegungen, er ist retrograd. In

der oberen Conjunction in der Erdferne, bei $M'M_1'$ wird der Planet erst in der Richtung $E'M'$, in der geocentrischen Länge $\Upsilon E'M'$ gesehen, hierauf in der Richtung $E_1'M_1'$, in der geocentrischen Länge $\Upsilon E_1'M_1'$, hier wachsen die Längen, die wahren Winkelgeschwindigkeiten summiren sich, der Planet hat seine grösste direkte Geschwindigkeit. Nun kann man den Planeten zwar in den beiden Conjunctionen nicht beobachten, aber man kann die Verzögerung der Bewegung des Planeten und den Uebergang zur Retrogradation beim Hellerwerden desselben (Annäherung an die Erde), die Beschleunigung seiner Bewegung bei der Abnahme seiner Helligkeit auf der anderen Seite der Sonne wahrnehmen, so dass man zum zweiten Falle der epicyklischen Bewegung greifen musste.

Sei ferner $NN_1N'N_1'$ die Bahn eines äusseren Planeten (Mars, Jupiter, Saturn). In der Opposition (Erde zwischen Sonne und Planet) wird der Planet an einem Tage z. B. in der Richtung $E'N$ gesehen, die geocentrische Länge ist gleich dem überstumpfen Winkel $\Upsilon E'N$, am nächsten Tage in der Richtung $E_1'N_1$ in der geocentrischen Länge $\Upsilon E_1'N_1$, die Längen werden kleiner; der Planet ist daher in der Opposition, zu welcher Zeit er in der Erdnähe ist, retrograd, indem sich die Winkelgeschwindigkeiten beider Himmelskörper subtrahiren. Zur Zeit der Conjunction werden die aufeinander folgenden Richtungen, in denen der Planet beobachtet wird, $E'N'$ und $E_1'N_1'$ sein, die geocentrischen Längen $\Upsilon E'N'$, $\Upsilon E_1'N_1'$ wachsen, die scheinbare Winkelbewegung ist gleich der Summe der wahren Winkelbewegungen beider Himmelskörper. In der Erdferne hat der Planet daher die grösste direkte Geschwindigkeit, woraus wieder die Nothwendigkeit der Einführung des zweiten Falles der epicyklischen Bewegung folgt[1]), welche diese scheinbare (optische) Ungleichheit erklärt. Zur Erklärung der noch übrigbleibenden Ungleichheiten, welche in Folge der nicht kreisförmigen und ungleichförmigen Bewegung beider Himmelskörper (der wirklichen, physischen Ungleichheiten) auftreten, müssen dann noch der excentrische Deferent, Drehungen des Mittelpunktes desselben u. s. w. herangezogen werden.

Schon Apollonius (um 250 v. Chr.) hatte die Möglichkeit der Anwendung der Epicykeln zur Erklärung der Planetenbewegungen erkannt; doch scheint er nicht die Methoden gekannt zu haben, welche zur Bestimmung der hierzu nöthigen Grössenverhältnisse (Verhältnisse der Halbmesser des Deferenten und Epicykels) dienen. Er gab jedoch eine Regel, nach welcher man unter der Annahme der epicyklischen Bewegung die Grösse des retrograden Bogens und die Zeit der Retrogradation bestimmen kann. Seine Regel lässt sich in folgender Weise darstellen: Wenn $CO = R$ (Fig. 5) der Halbmesser des Deferenten, $CF = r$ derjenige des Epicykels, μ die Geschwindigkeit des Epicykelmittelpunktes C auf dem Deferenten, μ' die Geschwindigkeit des Gestirns im Epicykel ist, so wird der Planet nur dann retrograd erscheinen können, wenn

$$\frac{MC}{MO} = \frac{r}{R-r} > \frac{\mu}{\mu'}$$

ist; dann wird sich aber stets eine Linie FO so ziehen lassen, dass

$$\frac{\frac{1}{2}FG}{GO} = \frac{\mu}{\mu'} \tag{a}$$

ist, weil von LO angefangen, $\frac{1}{2}FG$ immer von r zur Null abnimmt, und GO von $(R - r)$ an wächst, und durch jene Linie, für welche die Gleichung (a) be-

---

[1]) Ptolemäus schliesst hieraus aus den beobachteten Zwischenzeiten zwischen der grössten, der mittleren und der kleinsten Geschwindigkeit.

steht, wird im Epicykel ein Punkt G bestimmt, in welchem der Planet stationär erscheint. Der Beweis für diesen Satz ist sehr einfach[1]). Sei G der Ort, welchen der Planet im Epicykel zur Zeit der Station einnimmt; während der Planet in dem sehr kleinen Zeittheilchen t den sehr kleinen Weg $GG' = \mu' t$ zurücklegt, muss sich der Epicykel soweit fortbewegt haben, dass die Linie OG' nach OG kommt, weil dann der Planet an demselben Orte (in der Richtung OG) erscheint, er also seinen Ort nicht verändert hat; es muss demnach $GCG = \mu' t$ und $G'OG = \mu t$ sein. Es ist dann

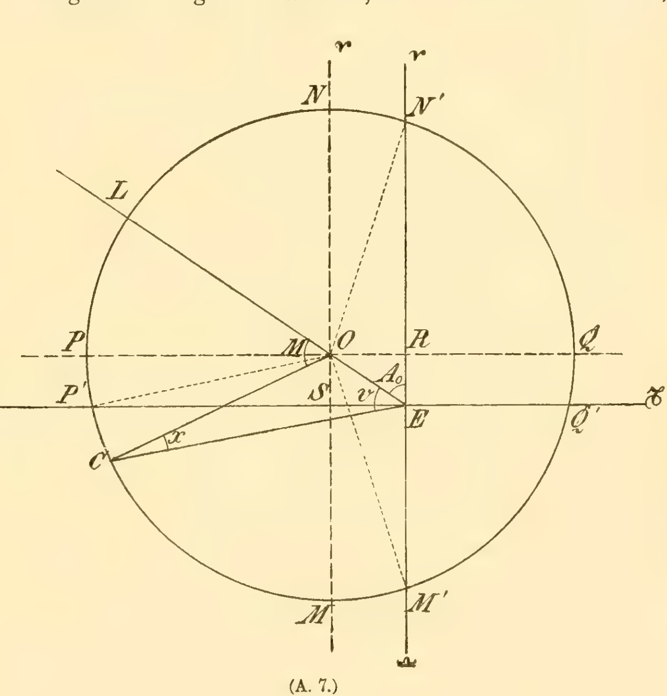
$$GG' = r\mu' t = OG \frac{\mu t}{\sin FGG'} = OG \frac{\mu t}{\cos CGF},$$

weil $CG \perp GG'$ ist. Daher

$$r \cos CGF \cdot \mu' = OG \cdot \mu \quad \text{und da} \quad r \cos CGF = \tfrac{1}{2} GF \quad \text{ist, so wird}$$

$$\tfrac{1}{2} GF : OG = \mu : \mu'.$$

Die Anwendung dieser Regel für die Bestimmung der Retrogradationszeit und der Grösse des retrograden Bogens machte jedoch APOLLONIUS nicht, wenigstens schreibt PTOLEMÄUS ausser dieser Regel dem APOLLONIUS keinerlei Kenntnisse in dieser Theorie zu; weder die Bestimmung der Umlaufszeiten oder Geschwindigkeiten, noch die Ermittelung des Verhältnisses der Halbmesser des Deferenten und des Epicykels rühren von APOLLONIUS her, und erst HIPPARCH gelang es die ersten Bestimmungen derselben aus den Beobachtungen abzuleiten.



(A. 7.)

Eine Folge der ungleichmässigen Bewegung der Sonne in ihrer Bahn ist, dass die 4 Quadranten zwischen den Aequinoctien und Solstitien in verschiedenen Zeiten zurückgelegt werden, demnach die 4 Jahreszeiten verschiedene Länge haben. HIPPARCH fand, dass die Zwischenzeit zwischen dem Frühlingsäquinoctium und dem darauf folgenden Sommersolstitium $94\frac{1}{2}$ Tage beträgt, die Zeit zwischen diesem und dem folgenden Herbstäquinoctium $92\frac{1}{2}$ Tage und aus dieser Erscheinung schloss er eben auf die Ungleichförmigkeit der Sonnenbewegung. Er nahm jedoch an, dass sich die Sonne in einem Kreise $QNPM$ (Fig. 7) gleichmässig bewegt, und die beobachtete Ungleichförmigkeit eine nur scheinbare, optische wäre, welche dadurch hervorgerufen würde, dass die Erde nicht im

[1]) APOLLONIUS führt den Beweis natürlich geometrisch.

Mittelpunkte O sondern excentrisch in E wäre. Der Ort von E ergiebt sich zunächst aus der folgenden Ueberlegung: Da die Zeit zwischen Frühlings- und Herbstäquinoctium 187, diejenige zwischen Herbst- und Frühlingsäquinoctium $178\frac{1}{4}$ Tage ist, die Sonne in der ersten Zeit einen grösseren Bogen zurücklegt, als in der zweiten, so muss die Erde in einer zu NM parallelen Geraden $N'M'$ liegen, sodass der von den beiden Visuren EN', EM' begrenzte Bogen $N'PM'$ auf der Seite des Sommersolstitiums grösser ist, als der zweite $M'QN'$ auf der Seite des Wintersolstitiums. Da ferner die Zeit vom Sommersolstitium zum vorhergehenden Aequinoctium grösser ist als zum folgenden, so muss die Erde näher zu M' liegen. Die Lage des Punktes E gegenüber der Sonnenbahn $MQNP$ oder umgekehrt die Lage der Letzteren gegenüber der Erde ist bestimmt, wenn die Grösse OE der Excentricität, die Richtung der Excentricitätslinie OE im Raume, also der Winkel OEN', welcher, da EN' gegen den Frühlingspunkt gerichtet ist, und EL in der Ekliptik liegt, die Länge von EL ist und die »Länge des Apogäums der Sonne« heisst, und endlich die Grösse des Halbmessers ON bekannt sind. Da aber ON als eine absolute Entfernung im Raume auf andere Weise bestimmt werden musste, so genügt es, das Verhältniss von OE zu ON zu ermitteln. Dies kann nun auf folgende Weise geschehen: Die Visuren von E nach den 4 Cardinalpunkten der Ekliptik (den Aequinoctial- und Solstitialpunkten) schneiden die Sonnenbahn in N', P', M', Q', und da die Bewegung in dem Kreise $NPMQ$ gleichförmig ist, so verhalten sich die Bögen wie die Zwischenzeiten, also:

$$N'P' : P'M' : M'Q'N' = 94\tfrac{1}{2} : 92\tfrac{1}{2} : 178\tfrac{1}{4}$$

und wenn man statt der Zahlen $94\frac{1}{2}$, $92\frac{1}{2}$, $178\frac{1}{4}$ die Buchstaben a, b, c setzt,

$$N'OP' : P'OM' : N'OM' = a : b : c.$$

Daraus folgt:

$$N'OM' = \frac{c}{a+b+c} \cdot 2\pi \qquad N'OQ = \frac{c}{a+b+c} \cdot \pi$$

$$N'OP' = \frac{a}{a+b+c} \cdot 2\pi \qquad N'OP = \pi - N'OQ = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \pi$$

$$POP' = OP'E = N'OP' - N'OP = \frac{a-b}{a+b+c}\,\pi$$

folglich, wenn die Länge des Apogäums

$$\sphericalangle\, LEN' = A_0, \qquad EO = \rho, \qquad ON' = OP' = r$$

gesetzt wird,

$$OR = \rho \sin A_0 = r \cos \frac{c}{a+b+c} \cdot \pi$$

$$OS = \rho \cos A_0 = r \sin \frac{a-b}{a+b+c}\,\pi.$$

Sei L_0 die Länge des mittleren Ortes eines Gestirnes (mittlere Länge) zu einer gegebenen Epoche T_0, ferner L_m die Länge des mittleren Ortes zu einer anderen Zeit T, L die Länge des wahren Ortes (wahre Länge) zu dieser Zeit, die seit der Epoche verflossene Zeit $T - T_0 = t$, ausgedrückt in Tagen, und μ die mittlere, tägliche Bewegung, so ist (Fig. 7)

$$\Upsilon OC = L_m = L_0 + \mu t.$$

Da aber

$$L_m = \Upsilon OC = \Upsilon OL + LOC = A_0 + M$$
$$L = \Upsilon EC = \Upsilon EL + LEC = A_0 + v$$

ist, so wird

$$\Upsilon EC - \Upsilon OC = v - M,$$

folglich, da nach der Figur $M - v = x$ ist,

$$\Upsilon EC = \Upsilon OC - x.$$

Für die Bewegung der Sonne findet man den Werth von x aus dem Dreieck OEC, indem, wenn $r = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin x}{\sin v} = \frac{OE}{OC} = \rho, \quad \sin x = \rho \sin (M - x),$$

woraus folgt

$$\tang x = \frac{\rho \sin M}{1 + \rho \cos M}.$$

Will man daher den Ort der Sonne nach der Theorie des excentrischen Kreises zur Zeit T kennen, so hat man zu rechnen

$$L_m = L_0 + \mu t \qquad M = L_m - A_0$$
$$\tang x = \frac{\rho \sin M}{1 + \rho \cos M} \quad L = L_m - x.$$

Den Werth x nennt man die Mittelpunktsgleichung (Reduction vom Mittelpunkt der gleichmässigen auf den Mittelpunkt der wahren Bewegung).

HIPPARCH fand $\mu = 59' \, 8'' \cdot 287$; $\rho = \frac{1}{24}$ und $LEP' = 24\frac{1}{2}°$, daher $A_0 = 65\frac{1}{2}°$.

Für den Mond fand HIPPARCH, dass in 4612 siderischen Umläufen (weniger $7\frac{1}{2}°$) 4573 Restitutionen der Anomalie stattfinden, und zwar in der Zeit von 126007 Tagen und einer Stunde, während welcher die Sonne 345 ganze Umläufe (weniger der obigen $7\frac{1}{2}°$) vollführte und 4267 Lunationen statffanden. Ausserdem fand HIPPARCH, dass in 5458 Monaten (Lunationen) 5923 Restitutionen der Breite (Durchgänge durch die Ekliptik) stattfinden. Hieraus folgt die Länge des synodischen Monats 29 · 5305942 Tage und die mittlere tägliche siderische Bewegung $\mu = 47434'' \cdot 976$. Da 4573 Umläufe der Anomalie gleich 4267 Lunationen (oder durch 17 abgekürzt 269 Umläufe der Anomalie gleich 251 Lunationen) sind, so folgt, dass $269 \times 360°$ der Anomalie in $251 \times 29 \cdot 530594$ Tagen zurückgelegt werden, dass also die tägliche Bewegung der Anomalie $\mu_1 = 47033'' \cdot 942$ ist. In ähnlicher Weise findet sich die tägliche Zunahme des Abstandes des Mondes vom Knoten, als »Bewegung in Breite« bezeichnet[1]), $\mu_2 = 47625'' \cdot 661$.

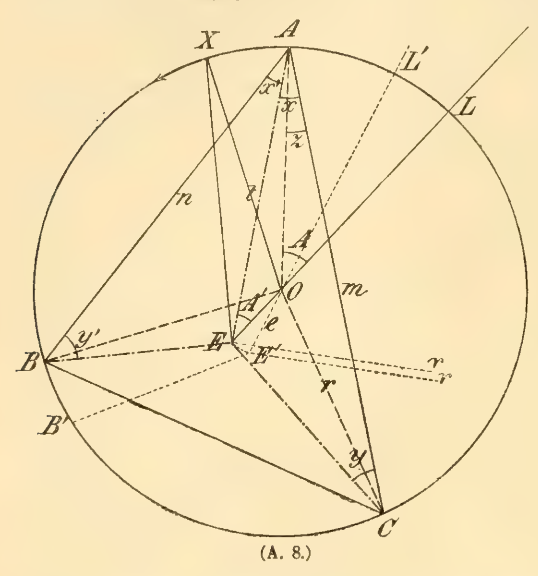
Sieht man zunächst von der Breitenbewegung ab, so wird man die Bewegung des Mondes durch einen excentrischen, in der Ekliptik gelegenen Kreis darstellen können. Hier wird man aber nicht, wie bei der Sonne, mit der einfachen Hypothese ausreichen, dass sich der Mond in dem einfachen, excentrischen Kreise bewege; denn während er sich siderisch (zwischen den Sternen) in einem Tage um μ vorwärts bewegt, wird sich seine Anomalie (gleichgiltig ob als Abweichung vom mittleren Ort oder von der mittleren Geschwindigkeit definirt) um einen Betrag geändert haben, welcher einer Abstandsänderung $\mu_1 t$ vom Apogäum entspricht; es scheint sich demnach das Apogäum um $(\mu - \mu_1)t$ vorwärts bewegt zu haben, so dass also die mittlere tägliche Bewegung des Apogäums $\pi = \mu_1 - \mu = 401'' \cdot 034$ im Sinne der Zeichen beträgt.

Sei nun für eine gewisse Zeit T_1 die Länge des Mondapogäums gleich Π_1, und M_1 die mittlere Länge des Mondes; zur Zeit T_2, d. h. t Tage später, wenn $T_2 - T_1 = t$ gesetzt wird, ist dann die Länge des Mondapogäums $\Pi_1 + \pi t$, und die mittlere Länge des Mondes $M_1 + \mu t$, daher wie selbstverständlich der Abstand der beiden Mondorte gleich μt (gleich der siderischen Bewegung in der Zwischenzeit). Sei nun OL (Fig. 8) die Richtung des Mondapogäums zur Zeit der ersten Beobachtung, A der Ort des Mondes, $LOA = M_1 - \Pi_1 = A$, und E der noch unbekannte und zu bestimmende Erdort. Zur Zeit T_2 fällt die Richtung

---

[1]) Eigentlich Bewegung des Arguments der Breite, da von diesem Abstande die Breite des Mondes abhängt, daher dieser Abstand als »Argument« für die Breite dient.

des Apogäums nach OL', sodass $LOL' = \pi t$ ist, und der Ort des Mondes wird nach B' fallen, sodass $AB' = \mu t$ ist. Nun aber fällt der Erdort E' nicht mit E zusammen[1]); um nun die Bestimmung desselben zu erleichtern, kann man die Linie OL' zurückdrehen bis sie nach OL fällt, und dann fällt B' nach B, sodass $B'OB = L'OL = \pi t$ ist. Dann aber hat man $AOB = AOB' - BOB' = \mu t - \pi t = \mu_1 t$. Daraus folgt, dass man für eine Reihe von Beobachtungen den Ort des Apogäums constant annehmen kann, wenn nur die Orte des Mondes in dem excentrischen Kreise mit der anomalistischen Bewegung μ_1 statt mit der siderischen μ gerechnet werden, und zwar von derjenigen Zeit an für welche der Ort des Apogäums gültig ist. Sei also für eine gegebene Zeit T_1 der Ort des Mondapogäums in L, und A der Mondort, so wird für zwei andere Zeiten T_2 und T_3 ebenfalls L als Ort des Mondapogäums, demnach der zu bestimmende Erdort in E angenommen werden können, wenn für diese Zeiten die Orte des Mondes in dem excentrischen Kreise in B und C so angenommen werden, dass $AOB = \mu_1(T_2 - T_1)$ und $BOC = \mu_1(T_3 - T_2)$ ist. Aus drei Mondorten kann man aber den Ort der Erde finden, wenn gleichzeitig die wahren Mondlängen aus Beobachtungen bekannt sind. Seien diese für die Zeiten T_1 und T_2 gleich L_1 und L_2, so wird die Differenz dieser Längen, wenn die beiden parallelen Geraden $E\Upsilon$ und $E'\Upsilon$ die Richtungen von den beiden Erdorten zum Frühlingsäquinoctium bedeuten:



(A. 8.)

$$L_2 - L_1 = \Upsilon E'B' - \Upsilon EA = (\Upsilon E'L' + L'E'B') - (\Upsilon EL + LEA)$$
$$= (\Upsilon E'L' - \Upsilon EL) + (L'E'B' - LEA)$$
$$= LOL' + (LEB - LEA) = LOL' + AEB,$$

daher

$$AEB = (L_2 - L_1) - \pi(T_2 - T_1)$$

sein und ebenso

$$BEC = (L_3 - L_2) - \pi(T_3 - T_2).$$

Am leichtesten und genauesten waren aber die wahren Längen des Mondes aus den Beobachtungen der Mitte der Mondfinsternisse zu erhalten, denn es genügt hierfür die Zeit zu notiren, ohne eine andere Messung vorzunehmen, da für dieselbe die wahre Länge des Mondes genau um 180° von der wahren Länge der Sonne verschieden ist, letztere sich aber aus der bereits als bekannt vorausgesetzten oder bereits bestimmten Theorie der Sonnenbewegung finden lässt. Nimmt man also zu den Zeiten T_1, T_2, T_3 (entsprechend drei Mondfinsternissen) die wahren Mondlängen L_1, L_2, L_3 als bekannt an, so sind in Fig. 8 die Winkel

$$AOB = 2c \qquad BOC = 2a$$

demnach auch die Winkel im Dreieck ABC

[1]) Eigentlich wäre E fest anzunehmen, und die ganze Figur um E zu drehen; der Erfolg ist aber, wie man sofort sieht, identisch mit der hier durchgeführten Annahme der relativen Drehung um O, welche nur eine Vereinfachung der Figur bewirkt.

$$ACB = c \quad BAC = a \quad CBA = 180° - (a + c) = b$$

und die Winkel

$$AEB = \gamma \quad BEC = \alpha \quad AEC = 360° - (\alpha + \gamma) = \beta$$

bekannt, und man hat, mit der aus der Figur ersichtlichen Bezeichnung der Winkel und Strecken

$$AE = t = m \frac{\sin y}{\sin \beta} = n \frac{\sin y'}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{m}{n} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

folglich

$$\sin y \frac{\sin b}{\sin \beta} = \sin y' \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \tag{a}$$

Ferner ist als Summe der Winkel in den beiden Dreiecken AEB und AEC

$$y + y' + a + \beta + \gamma = 360°, \tag{1}$$

daher, wenn $360° - (a + \beta + \gamma) = d$ gesetzt wird

$$y + y' = d. \tag{b}$$

Aus (a) und (b) erhält man

$$tang\, y = \frac{\sin d \dfrac{\sin c}{\sin b} \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}}{1 + \cos d \dfrac{\sin c}{\sin b} \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}}, \tag{2}$$

sodann wird

$$x = 180° - (\beta + y); \qquad z = 90° - b; \qquad OAE = x - z. \tag{3}$$

Es ist ferner

$$t = m \frac{\sin y}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad r = \frac{m}{2 \sin b} \quad \text{daher} \quad t = 2r \frac{\sin b}{\sin \beta} \sin y \tag{4}$$

$$\begin{aligned} e \sin A' &= r \sin (x - z) \\ e \cos A' &= t - r \cos (x - z) \\ A &= A' + (x - z) \\ \Pi_0 &= L_1 - A'. \end{aligned} \tag{5}$$

wo r gleich 1 gesetzt werden kann. In den Formeln (1) bis (5) liegt die Lösung der Aufgabe[1]).

Um den wahren Mondort für eine andere Zeit T zu finden, hat man, wenn die aus dem Mittelpunkte des Deferenten gesehene Winkelbewegung des Mondes vom Apogäum als mittlere Anomalie, die vom Erdorte aus gesehene als wahre Anomalie bezeichnet wird[2]):

Mittlere Anomalie $LOX = A + \mu_1 (T - T_1)$

$EX \sin OXE = e \sin LOX$

$EX \cos OXE = r + e \cos LOX$

Wahre Anomalie $LEX = LOX - OXE$

Länge des Apogäums $\Pi = \Pi_0 + \pi (T - T_1)$

Wahre Länge des Mondes $= \Pi + LEX$

Der Winkel OXE, gleich der Differenz der wahren und mittleren Anomalie, hiess die Prosthaphärese. Die Rechnung kann durch Tafeln, welche die anomalistische Bewegung und die Bewegung des Apogäums für Jahre, Tage, Stunden u. s. w. geben, ferner durch eine Tafel der Prosthaphäresen fast ganz umgangen

---

[1]) Dieselbe wird noch heute fälschlich nach dem im vorigen Jahrhundert lebenden französischen Mathematiker POTHENOT genannt. PTOLEMÄUS hat sie, allerdings nicht auf dem hier angeführten kurzen Wege, sogar mit sehr wesentlichen Complicationen gelöst.

[2]) Eigentlich sollte dieser Werth das Argument der Anomalie genannt werden, während die Anomalie, die Abweichung vom mittleren Orte OXE ist; doch ist heute noch eine der obigen analoge, wenn auch selbstverständlich nicht identische Bezeichnung üblich.

werden. Die letztere Tafel wird dann so angeordnet, dass für eine Reihe von Werthen von LOX, z. B. für jeden Grad (0°, 1°, 2°, 3°) der Werth von OXE berechnet und eingetragen wird. Man nennt dann LOX das Argument der Tafel, OXE den Tafelwert. Für die nicht in der Tafel enthaltenen Werthe des Argumentes kann man den Tafelwerth durch Interpolation (s. d.) finden. Die Gesammtheit aller für die Erleichterung der Berechnung des Mondortes nöthigen Tafeln nennt man Mondtafeln, und in ähnlicher Weise führt die Gesammtheit der zur Berechnung der Planetenörter nöthigen Tafeln den Namen der Planetentafeln.

Hipparch schlug jedoch nicht den hier mitgetheilten Weg ein, da ihm die analytische Methode (Rechnen mit unbekannten Grössen wie mit bekannten) nicht zu Gebote stand; wahrscheinlich nahm er seine Zuflucht zum indirekten Verfahren, indem er den Ort der Erde so lange variirte, bis die Beobachtungen möglichst gut dargestellt wurden. Er scheint aber die Annäherung nicht genügend weit getrieben zu haben, da seine Resultate der Berechnungen zweier verschiedener Finsternissgruppen ihm die Werthe 0·1047 und 0·0794 für e geben, während die strenge Rechnung 0·0873 und 0·0870 liefert.

Hipparch scheint auch die Bestimmung der Entfernung des Mondes von der Erde (in Erdhalbmessern) vielleicht nach der gleich (bei Ptolemäus) zu erwähnenden Methode der Parallaxen vorgenommen zu haben. Plutarch (50—125 n. Chr.) giebt für dieselbe 56 Erdhalbmesser, also einen recht guten Werth, ohne indessen die Quelle mitzutheilen. Dagegen findet man bei ihm das Verhältniss der Entfernungen von Sonne und Mond nach Aristarch zu 18 bis 20 angesetzt, woraus man schliessen könnte, dass Hipparch für dieses Verhältniss einen besseren Werth noch nicht gefunden hatte.

Mit der Bestimmung der Grösse der Erde befasste sich nahe um dieselbe Zeit Posidonius (um 80 v. Chr.). Er fand, dass der Stern Canopus auf Rhodus eben noch sichtbar war (den Horizont streifte), während er in Alexandrien eine Höhe von $\frac{1}{48}$ des ganzen Umkreises (also $7\frac{1}{2}°$) erreichte. Die Entfernung wird zu 3750 Stadien, nach anderen zu 5000 Stadien angegeben, woraus sich für den Erdumfang 180000 bezw. 240000 Stadien ergiebt. Abgesehen von den Fehlern, welche diesen Bestimmungen anhaften (indem Refraction, Abweichung der Orte in Länge etc. nicht berücksichtigt werden) bleiben diese Resultate für uns schon aus demselben Grunde werthlos, wie das von Eratosthenes erhaltene Resultat.

Planetentheorien sollen nach den Mittheilungen des Ptolemäus aus jener Zeit, also speciell von Hipparch keine vorhanden sein, nur die Umlaufszeiten, wie sie Ptolemäus in seinem Almagest angiebt, rühren nach ihm von Hipparch her. Er giebt die folgenden Zahlen: Saturn vollführt in $59^a\ 1^d\ 18{\cdot}0^h$ nach 57 Restitutionen der Anomalie[1]) 2 Umläufe + 1° 43′; Jupiter in $70^a\ 360^d\ 2{\cdot}4^h$ nach 65 Restitutionen der Anomalie 6 Umläufe — 4° 50′; Mars in $79^a\ 3^d\ 5{\cdot}2^h$ nach 37 Restitutionen der Anomalie 42 Umläufe + 3° 20′; Venus in $7^a\ 362^d\ 16{\cdot}8^h$ nach 5 Restitutionen der Anomalie 8 Umläufe — 2° 15′; Mercur in $46^a\ 1^d\ 0{\cdot}8^h$ nach 145 Restitutionen der Anomalie 46 Umläufe + 1° 0′.

Nach einigen Bemerkungen, welche Plinius der Aeltere (23—79 n. Chr.) über die Theorie der Planeten in seiner Naturgeschichte macht, ist es jedoch fraglich, ob dies in der That alles ist, was Hipparch für die Planetentheorie leistete. Einige Mittheilungen deuten darauf hin, dass Plinius bereits mehr von einer solchen Theorie wusste, als Ptolemäus seinem Vorgänger zuschreibt.

---

[1]) 57 Retrogradationen; die Jahre sind Sonnenjahre zu 365·2467 Tagen.

PLINIUS spricht von Apsiden der Planeten, unterscheidet aber dabei »Apsiden der Kreise« und die »von ihren Centren aus genommenen Apsiden«. Die ersteren sind für Saturn im Scorpion, für den Jupiter in der Jungfrau, für den Mars im Löwen, für die Sonne in den Zwillingen, für die Venus im Schützen, für den Mercur im Steinbock, und zwar in der Mitte des Zeichens; die Letzteren fallen nach PLINIUS für den Saturn in 20° Waage, für Jupiter in 15° Krebs, für den Mars in 28° Steinbock, für die Sonne in 29° Widder, für die Venus in 17° Fische, für den Mercur in 15° Jungfrau, für den Mond in 4° Stier. Auch über die Bewegungen in Breite finden sich schon bei PLINIUS Mittheilungen; Venus überschreitet den Thierkreis um 2°, und da der Thierkreis zu 12° (6° nördlich, 6° südlich) angenommen wurde, so beträgt die grösste nördliche oder südliche Breite 8°; ebenso nach PLINIUS für den Mond 6°, für den Mercur nördlich 5°, südlich 3°; für Mars 2°, für Jupiter 3°, für Saturn 1°.

Was er unter den beiden Gattungen der Apsiden versteht, ist aus seiner Darstellung nicht recht klar, jedenfalls hat er diese Kenntniss von anderen Vorgängern, deren Namen er jedoch nicht nennt[1]).

Ueberhaupt findet man bei den Römern nur sehr geringe astronomische Kenntnisse. Erst unter CICERO (106—44 v. Chr.) scheint die Beschäftigung mit den Wissenschaften begonnen zu haben. CICERO selbst beschränkt sich jedoch auf die Mittheilung der Jahreslänge, der Umlaufszeiten der Planeten (genähert) u. s. w. Eine Beschreibung des gestirnten Himmels (Aufzählung der Sternbilder) findet sich in dem Astronomicon des MANILIUS (um 30 v. Chr.)

Die Länge des Jahres war bis dahin, trotzdem über dieselbe schon aus viel früheren Zeiten ganz richtige Bestimmungen vorlagen, bei den Römern ganz unbekannt, auch beschäftigte sich Niemand mit einer genauen Bestimmung desselben. Daher kam es, dass im römischen Kalender die grösste Unordnung herrschte. Als JULIUS CAESAR mit der Würde des *Pontifex maximus* und bald darauf mit der Dictatur betraut war (um 50 v. Chr.), fiel der astronomische Frühlingsanfang (die Tag- und Nachtgleiche) auf ein Datum, welches etwa unserem 15. Juni entspricht. Um dieser Unordnung ein Ende zu machen, berief CAESAR den alexandrinischen Astronomen SOSIGENES, welcher, gestützt auf die Annahme der Jahreslänge zu $365\frac{1}{4}$ Tagen, den Kalender derart reformirte, dass das Kalenderjahr in Zukunft 365 Tage haben und jedes vierte Jahr ein Schaltjahr mit 366 Tagen sein sollte. Als Schalttag sollte der Tag vor dem 24. Februar (dem *dies sextus ante Calendas Martias)* gelten. Er wurde als *dies bissextus* bezeichnet, wodurch sich die Bezeichnung *annus bissextilis* für das Schaltjahr erklärt (s. Chronologie). Um aber auch den Kalender sofort in Ordnung zu bringen, decretirte CAESAR, dass das Jahr 708 der Stadt Rom um 80 Tage verlängert werde, so dass es 445 Tage hatte. Dieses Jahr bezeichnet man auch als *annus confusionis*. Doch wurde irrthümlicher Weise jetzt jedes dritte Jahr statt jedes vierten Jahres als Schaltjahr angenommen, welcher Fehler erst nach 36 Jahren entdeckt wurde, worauf wieder 12 Jahre hindurch gar nicht eingeschaltet wurde. Erst vom Jahre 757 der Stadt Rom (um Christi Geburt) begann die regelmässige Schaltung gemäss der Julianischen Kalenderreform.

---

[1]) Eine kürzlich auf Rhodos gefundene Inschrift, deren Entstehungszeit aus archäologischen Gründen etwa 100 v. Chr. gesetzt werden kann, enthält für die Planeten vier verschiedene mittlere Bewegungen. S. hierüber Dr. F. Freih. HILLER v. GAERTRINGEN: Inscriptiones Graecae insularum maris Aegaei I, No. 913, und Dr. N. HERZ: Eine astronomische Inschrift aus Rhodos, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. W. in Wien, Bd. 103.

Aus den Jahren 125—150 n. Chr. ist uns ein Werk erhalten, welches vielleicht das ganze Wissen der Griechen, oder was damit identisch sein dürfte, das Gesammtwissen jener Zeiten aus dem Gebiete der reinen Astronomie und der astronomischen Geographie umfasst, die Μεγάλη συντάξις oder *Magna constructio*, oder wie das Werk später in der arabischen Uebersetzung genannt wurde, der Almagest des CLAUDIUS PTOLEMÄUS[1]). Mit Ausnahme der physischen Astronomie sind in diesem Werke bereits alle Zweige der Astronomie vertreten. Indem bezüglich desjenigen, was PTOLEMÄUS über die Beobachtungsmethoden und Instrumente jener Zeiten mittheilt (im 5. und 6. Buch des Almagest) auf die den letzteren gewidmeten Artikel verwiesen werden muss, mag hier dasjenige erwähnt werden, was die sphärische Astronomie in Verbindung mit der geographischen Ortsbestimmung und die theoretische Astronomie betrifft.

Die sphärische Astronomie wird in den ersten beiden Büchern des Almagest behandelt. PTOLEMÄUS spricht hier von dem Anblick der Himmelskugel, den auf derselben zu verzeichnenden Kreisen, der Eintheilung derselben nach Zonen. Es werden die für das folgende nöthigen Rechnungsvorschriften entwickelt, und eine Tafel der Sehnen gegeben, welche unsere Sinustafeln ersetzt, da $\sin\alpha = \frac{1}{2} \, chord \, 2\alpha$ ist. Hieran schliessen sich die aus der Stellung der Erde im Himmelsraume sich ergebenden täglichen und jährlichen Erscheinungen für die verschiedenen Breiten und eine Anzahl von Tafeln, z. B. für die Länge des längsten Tages u. s. w., welche zur geographischen Ortsbestimmung dienen können.

Die Zeit einer Beobachtung wird entweder ohne eine nähere Angabe über die Art der Ermittelung derselben angeführt, woraus man schliessen kann, dass dieselbe an den damals üblichen Sand-, Wasser- oder Sonnenuhren bestimmt wurde; oder aber sie wird aus dem Durchgange eines bekannten Sterns durch den Meridian (durch die Mitte des Himmels) erhalten. Sei die Durchgangszeit eines gewissen Sterns A an einem gewissen Tage des Jahres, z. B. (in unserem Datum ausgedrückt) am 1. Januar genau Mittag, so wird dieser Stern am 15. Januar eine Aequinoctialstunde vor Mittag, am 1. Februar zwei, am 15. Februar drei Aequinoctialstunden vor Mittag u. s. w., nämlich nach je einem halben Monat um eine Stunde früher durch den Meridian gehen. Es werden also für diesen Stern A die Durchgangszeiten

Am	1. Januar,	1. Februar,	1. März,	1. April,	1. Mai,	1. Juni,	1. Juli,
Mittlere Zeit	$0^h = 24^h$	22^h	20^h	18^h	16^h	14^h	12^h

Am	1. August,	1. Septemb.,	1. Octob.,	1. Novemb.,	1. Decemb.,	1. Januar[2])
Mittlere Zeit	10^h	8^h	6^h	4^h	2^h	0^h.

Geht nun ein anderer Stern B z. B. $6\frac{1}{4}$ Stunden später durch den Meridian (diese Differenz der Durchgangszeiten ist natürlich für alle Jahreszeiten dieselbe, da ja die Sterne am Himmel gegen einander unveränderlich stehen), so wird er z. B. am 7. September um $7\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 13\frac{3}{4}$ Uhr durch den Meridian gehen; findet man umgekehrt zur Zeit einer Beobachtung, z. B. am 22. März, dass ein Stern C im Meridian steht, der etwa 5 Stunden früher durch den Meridian geht, als der Stern A, so wird die Zeit der Beobachtung $18\frac{1}{2} - 5 = 13\frac{1}{2}$ Uhr sein, d. h. die Beobachtung fand 1^1 Aequinoctialstunden nach Mitternacht statt.

---

[1]) Weder Geburtsort noch Geburtsjahr, noch sonstige Lebensumstände dieses verdienstvollen Astronomen sind bekannt.

[2]) Eine solche Tafel ersetzt eine Tafel der »Sternzeit im mittleren Mittage«, s. Zeit und Zeitbestimmung.

Die geographische Breite eines Ortes wurde gleichzeitig mit der Schiefe der Ekliptik ε gefunden, indem man die Mittagshöhe der Sonne zur Zeit der Sommer- und Wintersolstitien beobachtete. Sind die beiden Höhen h_1 und h_2, so ist, wenn φ die geographische Breite oder Polhöhe, demnach $90° - \varphi$ die Aequatorhöhe des Beobachters ist

$$h_1 = (90° - \varphi) + \varepsilon; \qquad h_2 = (90° - \varphi) - \varepsilon$$

folglich $$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2); \qquad \varphi = 90° - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2).$$

Die Höhen h_1, h_2 wurden an den grossen, mit Kreisen versehenen Instrumenten, oder auch einfach mittels der Messung der Schattenlängen an einem verticalen Stabe (Gnomon) erhalten. Um auch in jenen Fällen, wo selbst das letztere einfache Hilfsmittel fehlte, die geographische Breite zu finden, giebt PTOLEMÄUS eine Tafel für die Dauer des längsten Tages in verschiedenen Breiten. Da nämlich der Tagebogen T eines Gestirns, dessen Deklination δ ist, bestimmt ist durch $\cos \frac{1}{2} T = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$, so ist für den längsten Tag, für welchen die nördliche Deklination der Sonne gleich der Schiefe der Ekliptik ε, also für die Zeit des PTOLEMÄUS $23° 50'$ ist

$$\operatorname{tang} \varphi = - \operatorname{cotg} \varepsilon \cos \tfrac{1}{2} T = + \operatorname{cotg} \varepsilon \sin (\tfrac{1}{2} T - 90°),$$

und da

$$\operatorname{cotg} 23° 50' = 2{\cdot}26 \quad \text{und} \quad \sin (\tfrac{1}{2} T - 90°) = \tfrac{1}{2} \operatorname{chord} (T - 180°)$$

ist, so wird

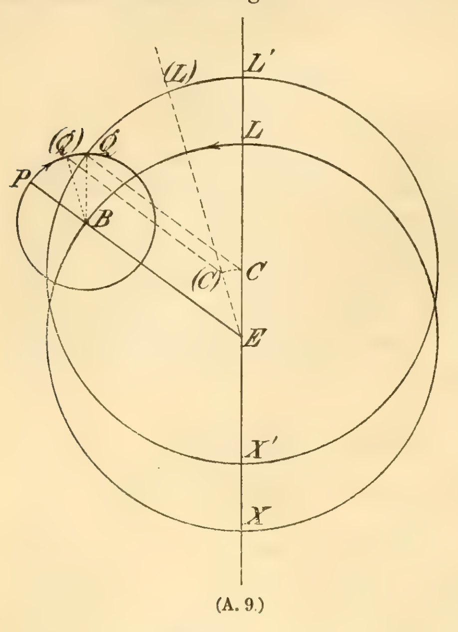
$$\operatorname{tang} \varphi = - \tfrac{9}{4} \cos \tfrac{1}{2} T = \tfrac{9}{8} \operatorname{chord} (T - 180°).$$

Zur Bestimmung der geographischen Länge schlägt PTOLEMÄUS die Beobachtung der Mondfinsternisse vor, indem nämlich der Moment des Beginns oder der Mitte derselben für alle Punkte der Erde derselbe ist, diesem Momente jedoch an verschiedenen Punkten der Erde verschiedene Tageszeiten entsprechen werden. Findet man z. B., dass die Mitte einer Mondfinsterniss an einem Punkte der Erde eine Stunde vor Mitternacht, an einem anderen Punkte aber $2\frac{1}{2}$ Stunden vor Mitternacht beobachtet wurde, so liegt der zweite Ort $1\frac{1}{2}$ Stunden oder $22\frac{1}{2}°$ westlich vom ersteren.

Der Beschreibung des gestirnten Himmels ist das 7. und 8. Buch des Almagest gewidmet; es wird hier ein Catalog von 1022, auf 48 Sternbilder vertheilten Sternen gegeben, und ihre Positionen nach Länge und Breite angeführt. Aus den Vergleichungen seiner eigenen Beobachtungen mit denjenigen von HIPPARCH findet PTOLEMÄUS, übereinstimmend mit seinem Vorgänger, die Präcession in Länge rund $1°$ in 100 Jahren.

Wenn wir von einer theoretischen Astronomie bei PTOLEMÄUS sprechen, so dürfen wir dabei nicht an eine solche in unserem heutigen Sinne, etwa an eine Ableitung der sämmtlichen Bewegungen der Himmelskörper aus einem einheitlichen Gesetze denken. Bei PTOLEMÄUS ist dieselbe eigentlich eine »geometrische« Astronomie, eine Zerfällung der sehr complicirten Bewegungen der Wandelsterne in einfache, epicyklische, wobei er die Arbeiten HIPPARCH's als Muster nehmend, dessen Theorien erweitert und vervollkommnet. PTOLEMÄUS beweist zunächst die Identität der schon von HIPPARCH als gleichwerthig erkannten Annahmen des excentrischen Kreises und des Epicykels. Sei E (Fig. 9) die Erde, LBX der Deferent, PQ der Epicykel, dessen Mittelpunkt in B ist, so dass seit dem Apogäum die Bewegung desselben LB, die Bewegung des Gestirns im Epicykel PQ ist, derart, dass $PBQ = LEB$ ist. Macht man auf EL die Strecke EC gleich dem Epicykelhalbmesser BP und verbindet C mit Q, so ist wegen $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle LEB$ auch QB gleich und parallel CE, folglich EB gleich und parallel QC, d. h. der Ort des Gestirns Q ist jederzeit von dem um $EC = BP$

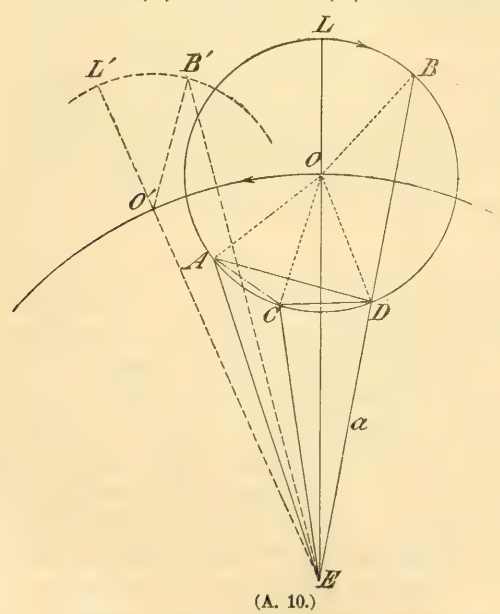
von E entfernten Punkte C gleich weit entfernt, und die Gerade CQ bewegt sich um C mit derselben Geschwindigkeit, wie EB um E, d. h. die Bewegung von Q um die Erde E erfolgt in dem mit dem Halbmesser EB um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis. Dies gilt aber zunächst nur, wenn die Geschwindigkeit im Epicykel gleich derjenigen des Epicykelmittelpunktes im Deferenten ist. Sind aber diese Geschwindigkeiten nicht gleich, so erfolgt die Bewegung des Gestirns doch so wie in einem excentrischen Kreise, dessen Apsiden aber gleichmässig rotiren, und zwar in derselben Richtung wie der Epicykelmittelpunkt, wenn die Geschwindigkeit im Epicykel kleiner ist, wie diejenige des Epicykelmittelpunktes im Deferenten. Sei in derselben Zeit, in welcher der Epicykelmittelpunkt von der Richtung des Apogäums EL nach B gekommen ist, die Bewegung des Gestirns im Epicykel $PB(Q) < LEB$, zieht man parallel zu $B(Q)$ die Gerade $E(L)$ und macht $(C)E = BQ$, so ist der Ort Q derselbe, als wenn das Gestirn sich in dem um (C) beschriebenen Kreise $(L)(Q)$ um den Winkel $(L)(C)(Q) = (L)EB = PB(Q)$ bewegt hätte; inzwischen ist die Richtung des Apogäums EC von EL nach $E(L)$ gekommen und die Drehung ist



(A. 9.)

$$LE\,(L) = LEB - (L)\,EB = LEB - PB(Q) = \mu t - \mu_1 t = \pi t.$$

Doch gilt dieses nur für die bei der Sonne und dem Monde angenommene Bewegungsrichtung (erster Fall, pag. 21), während für die übrigen Wandelsterne der excentrische Kreis für sich nicht verwendbar ist, da in diesem eine zeitweise retrograde Bewegung nicht auftreten kann.



(A. 10.)

Für die Sonnentheorie hatte Ptolemäus zu den Hipparch'schen Resultaten nichts wesentlich Neues hinzuzufügen. Er nimmt die Jahreslänge zu 365·2466 Tagen an, ferner für die von ihm gewählte Epoche des 1. Thot des Jahres 1 Nabonassar = — 746 Februar 26, Länge des Apogäums 65° 30′; mittlere Länge der Sonne gleich 330° 45′; Excentricität = 0·0414.

Die Elemente der Mondbahn bestimmt Ptolemäus sowohl unter der Annahme des excentrischen Kreises, als unter derjenigen des Epicykels, er zieht jedoch

in der Folge die Letztere vor und verwendet dann einen excentrischen Deferenten zur Erklärung einer anderen Ungleichheit. Sei also für eine gewisse Zeit O (Fig. 10) der Ort des Mittelpunktes des Epicykels in dem um die Erde beschriebenen Deferenten OO', A der Ort des Mondes im Epicykel, so ist O der mittlere, A der wahre Ort des Mondes, und der Winkel $OEA =$ wahrer Ort — mittlerer Ort; LOA gezählt in der Richtung des Pfeiles ist gleich $\mu_1 t$, wenn t die seit dem Momente des Durchgangs durch das Apogäum L verflossene Zeit ist. Für eine andere Zeit t' wird O' der mittlere, B' der wahre Ort, $O'EB' =$ wahrer — mittlerer Ort, $L'O'B' = \mu_1 t'$. Schiebt man den ganzen Epicykel $L'O'B'$ zurück, bis er auf den ersten LOA fällt, so kommt L' nach L, B' nach B, und jetzt ist $AOB = \mu_1(t' - t)$ die anomalistische Bewegung in der Zwischenzeit. Ferner ist $OEB = O'EB'$, folglich $BEA =$ (wahrer — mittlerer Ort)$_2$ — (wahrer — mittlerer Ort)$_1$ = wahre siderische Bewegung in der Zwischenzeit — mittlere siderische Bewegung in der Zwischenzeit, ein aus den Beobachtungen und der bekannten mittleren siderischen Bewegung leicht zu bestimmender Winkel.

Um nun die Elemente der Mondbahn aus drei wahren Mondorten (Finsternissen) zu finden, kann man sich mit Rücksicht auf das eben Gesagte die drei Epicykeln auf einen Punkt des Deferenten zusammengeschoben denken. Ohne die Lage von L zu kennen, kann man die relative Lage der drei Mondorte im Epicykel ermitteln, denn es müssen die Längen AOB, BOC gleich den anomalistischen Bewegungen in den Zwischenzeiten sein, und zur Bestimmung der Lage von E sind die Winkel AEB, BEC bekannt. Nach Ptolemäus wird dann die Rechnung folgendermaassen geführt:

Ist D der zweite Durchschnittspunkt der Geraden EB mit dem Epicykel und $ED = a$, so ist

$$\sphericalangle EAD = BDA - DEA = \tfrac{1}{2}BOA - DEA$$
$$\sphericalangle ECD = BDC - DEC = \tfrac{1}{2}BOC - DEC$$
$$DA = a\frac{\sin DEA}{\sin(\frac{1}{2}BOA - DEA)}; \quad DC = a\frac{\sin DEC}{\sin(\frac{1}{2}BOC - DEC)}$$
$$\sphericalangle ADC = \tfrac{1}{2}AOC$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\tfrac{1}{2}AOC$$
$$AO = CO = BO = DO = \tfrac{1}{2}AC : \sin\tfrac{1}{2}AOC$$
$$\sin\tfrac{1}{2}COD = \tfrac{1}{2}DC : DO$$
$$DB = 2OD\sin\tfrac{1}{2}(BOC - COD)$$

Nunmehr sagt Ptolemäus: Wenn $DB = 2AO$ gefunden wird, so fällt O in BE hinein und es ist $AO : OE = AO : DE + AO$; wenn aber $BD < 2AO$ ist, so muss man aus der Grösse von BD diejenige von OE bestimmen; es ist

$$OE^2 = BE \cdot DE + OD^2$$
$$\sin LEB = \frac{OD\cos\frac{1}{2}DOB}{OE}$$
$$LEB + (90^\circ - \tfrac{1}{2}DOB) = LOB,$$

wodurch die Differenz des wahren und mittleren Ortes LEB, also, da der wahre Ort aus der Beobachtung bekannt ist, auch der mittlere Ort, und die Anomalie LOB für eine der Beobachtungszeiten bekannt wird. Uebertragen auf die von Ptolemäus gewählte Epoche (1. Thot des Jahres 1 Nabonassar) wird

Mittlere Länge der Mondes $L_0 = 41^\circ\, 22'$,
Anomalie (vom Apogäum des Epicykels) $A_0 = 268^\circ\, 49'$,
Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = 317^\circ\, 7'$.

$$\frac{OB}{OE} = 0{\cdot}087.$$

Mit diesem Werthe von $OB : OE$ ergiebt sich die grösste Abweichung des wahren Ortes vom mittleren, die grösste Prosthaphärese $= 5°$ und die Beobachtungen der Finsternisse werden ziemlich gut dargestellt. Allein schon HIPPARCH fand, dass Messungen von Distanzen ausserhalb der Syzygien mit der Berechnung nach diesen Elementen nicht stimmten, und PTOLEMÄUS fand auch das Gesetz der Abweichungen. Er fand die grössten Abweichungen in den Quadraturen, wenn ausserdem der Mond im mittleren Theile seiner Bewegung im Epicykel ist (Anomalie 90° oder 270°), während in jenen Quadraturen, wo der Mond im Apogäum oder Perigäum des Epicykels ist, sich keine Abweichung ergab. In der That hat man für den Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Länge des Mondes den Ausdruck[1])

$$D = 6{\cdot}3° \sin A + 1{\cdot}3° \sin(2E - A),$$

wobei A die Anomalie des Mondes, E die Entfernung desselben von der Sonne bedeutet. In den Syzygien ist $E = 0°$ oder $180°$, daher diese Differenz $D_s = 5° \sin A$, welcher Werth sich aus den Beobachtungen der Finsternisse (ekliptische Syzygien) fand; für die Quadraturen ist $E = 90°$ oder $270°$, daher $D_q = 7{\cdot}6° \sin A = 5° \sin A + 2{\cdot}6° \sin A$. Die in den Quadraturen auftretende Abweichung von der einfachen epicyklischen Theorie $d = 2{\cdot}6° \sin A$ verschwindet aber auch, wenn der Mond die Anomalie 0° oder 180° hat, und ist am grössten, wenn die Anomalie $A = 90°$ oder $270°$ ist. Um nun dem Umstande Rechnung zu tragen, dass die grösste Abweichung des Mondes von seinem mittleren Ort in den Syzygien 5°, in den Quadraturen aber 7·6° beträgt, nimmt PTOLEMÄUS an, dass der Epicykel in den Quadraturen der Erde näher ist, als in den Syzygien, demzufolge die Entfernung des Epicykelmittelpunktes von der Erde variirt, so aber, dass schon nach einem halben synodischen Umlaufe die Entfernung desselben von der Erde dieselbe wird. Er nimmt an, dass der Deferent excentrisch ist und die Excentricitätslinie sich so dreht, dass das Apogäum des Deferenten zur Zeit der Syzygien nach dem mittleren Orte des Mondes gerichtet ist. Die Bewegung des Mondes erfolgt dann, indem nunmehr auch die Neigung der Mondbahn berücksichtigt wird, nach PTOLEMÄUS in folgender Weise. Die um 5° gegen die Ekliptik geneigte Mondbahn dreht sich täglich um den Betrag $\mu_2 - \mu = \omega = 190{\cdot}687''$ zurück; das Apogäum des Deferenten, gezählt vom momentanen Knoten, geht täglich um den Betrag: doppelte Entfernung von Sonne und Mond — Bewegung in Breite zurück. Ist $\odot$ die mittlere tägliche Bewegung der Sonne in Länge, so ist die Aenderung der Entfernung von Sonne und Mond (Winkelabstand am Himmel) $E = \mu - \odot$, daher das Zurückweichen des Apogäums des Deferenten gleich $2E - \mu_2$. Die Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels, gezählt vom momentanen Apogäum des Deferenten ist gleich $2E$, folglich ist die tägliche siderische Bewegung desselben

$$2E - [(2E - \mu_2) + \omega] = \mu_2 - \omega = \mu,$$

wie es sein soll.

Zur Bestimmung der Grösse der zweiten Ungleichheit wurden die Entfernungen des Mondes von der Sonne gemessen, wenn dieselben nahe 90° und die Bewegung des Mondes sehr nahe gleich seiner mittleren war; denn da in diesem Falle der Mond sich gegen die Erde hin bewegen muss, damit die Bewegung des Mondes gleich derjenigen des Epicykelmittelpunktes wird, so muss sich der Mond in der von der Erde an den Epicykel gezogenen Tangente be-

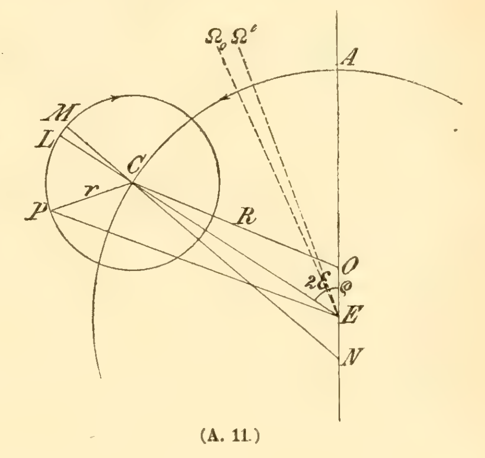
[1]) In demselben ist der erste Teil die Mittelpunktsgleichung, der zweite Teil die Evection.

finden. Ist nun R der Halbmesser des Deferenten, r derjenige des Epicykels und ρ die Excentricität des Deferenten, so wird für die Quadraturen die Entfernung des Epicykelmittelpunktes von der Erde $R - \rho$, für die Syzygien $R + \rho$ sein; sind die zugehörigen beobachteten grössten Differenzen zwischen dem wahren und mittleren Orte $a = 7\frac{2}{3}°$ und $b = 5°$, so wird (vergl. Fig. 12)

$$r = (R - \rho) \sin a = (R + \rho) \sin b; \quad \frac{\rho}{R} = \frac{\tang \frac{1}{2}(a - b)}{\tang \frac{1}{2}(a + b)}.$$

PTOLEMÄUS findet für $R = 1$, $\rho = 0{\cdot}210$, $r = 0{\cdot}105$.

Endlich nimmt PTOLEMÄUS an, dass man als die Richtung des instantanen Apogäums nicht die Richtung ECL (Fig. 11) anzusehen habe, sondern dass als Apogäum, von welchem aus die Anomalien zu rechnen sind, ein Punkt M des Epicykels gilt, welcher von einem Punkt N aus gesehen wird, für den $EN = EO$ ist.



(A. 11.)

Zur Ermittelung des wahren Ortes des Mondes t Tage nach der Epoche hat man daher zu rechnen:

Mittlere Länge des Mondes $L = L_0 + \mu t$,
Anomalie des Mondes $A = A_0 + \mu_1 t$,
Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = \Omega_0 - \omega t$.

Mittlere Länge des Mondes — mittlere Länge der Sonne $= E$.

$$EC = \rho \cos 2E + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 2E}; \quad \tang MCL = \frac{\rho \sin 2E}{EC + \rho \cos 2E},$$

wodurch der Ort des anzunehmenden Apogäums M besimmt wird. Weiter wird

$$LCP = MCP + MCL = A + MCL$$
$$\tang CEP = \frac{r \sin LCP}{CE + r \cos LCP}.$$

Wahre Länge des Mondes = mittlere Länge des Mondes + CEP.

Für die Darstellung der Bewegung der Planeten wählt PTOLEMÄUS, um alle auftretenden Ungleichheiten erklären zu können, die Bewegung des Epicykels längs eines excentrischen Deferenten (s. pag. 22). In E (Fig. 5) befindet sich die Erde, O ist der Mittelpunkt des Deferenten, die Bewegung des Epicykelmittelpunktes C' in diesem erfolgt so, dass die von einem Punkte O_1 aus gesehenen Winkel $\Upsilon O_1 C'$ proportional der Zeit wachsen, d. h. es ist O_1 der »Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung«, wobei die Lage von O_1 dadurch bestimmt ist, dass $O_1 O = OE$ ist, d. h. der Mittelpunkt des Deferenten theilt die Entfernung des Mittelpunktes der gleichmässigen Bewegung von der Erde in zwei gleiche Theile (während beim Monde der Abstand des Deferentenmittelpunktes vom Punkte N in Fig. 11 durch den Erdort in zwei gleiche Theile getheilt wird). Der Planet bewegt sich im Epicykel in dem Sinne $lL_1L'P$, so dass er (zur Zeit der Opposition) in der Erdnähe p retrograd wird. Die Ursache, aus welcher PTOLEMÄUS die gleichförmige Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten (das Wachsen der Winkel $\Upsilon OC'$ proportional der Zeit) aufgab und sich zur

Einführung des Punktes O_1 des Mittelpunktes der gleichmässigen Bewegung[1]) veranlasst sah, wird aus folgendem klar:

Befindet sich zu einer gewissen Zeit der Epicykelmittelpunkt in C', der Planet in P, so ist die wahre Länge des Gestirnes ΥEP; es ist aber

$$\Upsilon EP = \Upsilon EC' + C'EP = \Upsilon O_1C' - O_1C'E + C'EP.$$

Wenn O_1 der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung ist, so wird $\Upsilon O_1C'$ die mittlere Länge sein, und der Unterschied

$$\text{Wahre Länge} - \text{Mittlere Länge} = C'EP - O_1C'E$$

setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine, $C'EP$ durch das Verhältniss der Halbmesser von Epicykel und Deferenten und von der Grösse der Excentricität OE abhängt, der andere $O_1C'E$ aber von der Entfernung O_1E. Unter der Voraussetzung nun, dass O_1 mit O zusammenfällt, fand Ptolemäus den Winkel $O_1C'E$ immer zu klein, und aus den Beobachtungen selbst leitete er die obige Annahme über die Lage des Punktes O_1 ab.

Der Ort eines Planeten lässt sich voraus berechnen, wenn die mittlere Länge desselben L_0 für eine gewisse Epoche und die mittlere tägliche siderische Bewegung μ, ferner die Anomalie $A_0 = (C)C'P$ (Abstand vom instantanen mittleren Apogäum: Richtung O_1C') für die Epoche nebst der mittleren täglichen Bewegung der Anomalie μ_1, und die Länge des Apogäums des Deferenten $\Upsilon EC = \Pi$ bekannt ist, und wenn endlich der Halbmesser R des Deferenten, derjenige r des Epicykels und die Excentricität $O_1E = 2e$, also $O_1O = OE = e$ bekannt sind. Man hat dann für t Tage nach der Epoche:

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Länge} \quad & \Upsilon O_1C' = L = L_0 + \mu t \\ \text{Anomalie} \quad & (C)C'P = A = A_0 + \mu_1 t \qquad (1) \\ & CO_1C' = M = L - \Pi\,^{2)}. \end{aligned}$$

Nennt man die Winkel $C'EP = x$ und $CEC' = v$ ferner den Abstand des Epicykelmittelpunktes von der Erde $EC' = \rho$, so ist

$$O_1C' = \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 M} - e \cos M \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho \sin v &= O_1C' \sin M \\ \rho \cos v &= O_1C' \cos M + 2e \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= \frac{r \sin (A + M - v)}{\rho + r \cos (A + M - v)} \\ \text{Wahre Länge} &= L - (M - v) + x \end{aligned} \qquad (4)$$

Zur Bestimmung der für diese Rechnung nöthigen oben genannten Constanten, welche man analog unserer heutigen Ausdrucksweise »Elemente des Planeten« nennen kann, wählt Ptolemäus für einen der oberen Planeten Saturn, Jupiter und Mars die Beobachtungen dreier Oppositionen. Nennt man die drei Lagen der Epicykelmittelpunkte A', B', C', so werden die Entfernungen OA', OB', OC' gleich sein, nicht aber die Strecken O_1A', O_1B', O_1C'; Ptolemäus reducirt daher zur Berechnung die Epicykelmittelpunkte auf den um O_1 beschriebenen Kreis[3]), welcher von den drei Linien O_1A', O_1B', O_1C' in den Punkten (A) (B) (C) getroffen werden möge. In diesem Kreise sind die Bögen $(A)(B)$, $(B)(C)$ der Zeit proportional (als die zu den Winkeln $(A)O_1(B)$, $(B)O_1(C)$,

[1]) Ptolemäus misst die Winkel als Längen auf einem um O_1 beschriebenen Kreise $(B)(C)$, dem »Kreise der gleichmässigen Bewegung«, der später den Namen »Aequant« erhielt, daher die spätere Bezeichnung für O_1 als *punctum aequantis*.

[2]) $\Pi = \Pi_0 +$ Präcession.

[3]) Den bereits erwähnten Aequanten: in Fig. 5 ist nur der eine Epicykel um C' gezeichnet; dass die Richtungen EA', EA, OA', OA, O_1A hier zusammenfallen ist natürlich belanglos.

gehörigen Bögen) und können mit der bekannten mittleren Bewegung berechnet werden; die Winkel am Erdorte $(A)E(B)$, $(B)E(C)$ unterscheiden sich von den wahren Bewegungen $A'EB'$, $B'EC'$ (der Planet wird ja in der Richtung Ep in C' gesehen) um die sehr kleinen Winkel $(A)EA'$, $(B)EB'$, $(C)EC'$. Vernachlässigt man diese in erster Linie und setzt die Winkel $(A)E(B)$, $(B)E(C)$ gleich den aus den Beobachtungen zu entnehmenden wahren Bewegungen, so kann man in Fig. 8 ABC als den Aequanten, O als dessen Mittelpunkt und E als den Erdort ansehen und erhält nach pag. 29 einen genäherten Werth der Grösse und der Richtung von $O_1E = 2e$ (Fig. 5). Rechnet man nun hiermit nach den Formeln (2) und (3) den Winkel v, ferner wie z. B. aus dem Dreieck $EO_1(C)$ ersichtlich ist

$$(C)E \sin(C)EO_1 = R \sin M;$$
$$(C)E \cos(C)EO_1 = R \cos M + 2e$$

für alle Beobachtungen, so erhält man den Winkel $(C)EC' = (C)EO_1 - v$, und wenn die wahren Bewegungen um diese Beträge corrigirt werden, so erhält man dann die richtigen Werthe der Winkel $(A)E(B)$, $(B)E(C)$, mit denen die Rechnung wiederholt werden kann. Ergeben sich nun von den früheren sehr verschiedene Werthe für O_1E und den Winkel $O_1E(C)$, so müsste man auch die Berechnung des Winkels $(C)EC'$ wiederholen. Diesen Vorgang, der auch bei anderen Fällen in der astronomischen Praxis auftritt, nennt man die »Rechnung durch successive Näherungen«. Den ersten genäherten Werth von $2e$ und v erhält man hier durch die Annahme $(A)E(B)$, $(B)E(C)$ gleich den wahren Bewegungen; mit dieser »ersten Näherung« wird man die Werthe der Winkel $(A)E(B)$, $(B)E(C)$ verbessern und erhält mit dieser zweiten Annahme die »zweite Näherung« u. s. w.

Die Durchführbarkeit dieses Vorganges ist jedoch an eine Bedingung gebunden. Mit der Grösse $2e$ wächst auch die Grösse des Winkels $O_1C'E$ und die des Winkels $(C)EC'$; aber man sieht, dass einer ziemlich grossen Aenderung von $2e$ eine nahe proportionale Veränderung von $O_1C'E$, aber nur eine sehr kleine Aenderung von $(C)EC'$ entspricht[1]). Dieses hängt damit zusammen, dass

$$\sin(C)EC' : \sin O_1C'E = (C)C' : (C)E$$

ist, und dass daher auch die Aenderungen von $(C)EC'$ gegenüber $O_1C'E$ nur sehr klein werden. Der in der ersten oder doch wenigstens zweiten Näherung für $2e$ erhaltene Werth von O_1E wird daher schon ausreichend sein zu einer genügend richtigen Bestimmung von $(C)EC'$. Würde sich aber z. B. ergeben haben, dass sich $(C)EC'$ ebenso stark ändert wie $O_1C'E$, d. h. würde jede Aenderung von $O_1C'E$ eine ebenso grosse Aenderung von $(C)EC$ bewirken und umgekehrt, so würde man nie zu einem richtigen Werth von $(C)EC'$ und daher ebensowenig zu einem richtigen Werth von O_1E kommen. In dem ersten, bei dem vorliegenden Beispiel stattfindenden Falle, sagt man, die Berechnung ist »convergent«, da man sich durch die aufeinander folgenden Näherungen den wahren Werthen nähert; man sagt, sie ist um so rascher convergent, je rascher man den wahren Werth erreicht, und bei allen astronomischen Rechnungen, welche durch Näherungen geführt werden müssen, und deren wir in der Folge mehreren begegnen werden, muss man auf eine möglichst rasche Convergenz bedacht sein. Wenn man sich bei einer Aufgabe durch aufeinander folgende Näherungen der Wahrheit nicht nähern könnte, so sagt man, die Entwickelungen sind »divergent«.

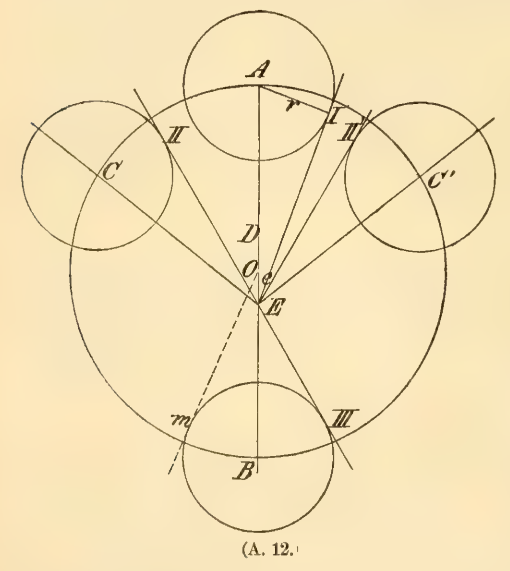
---

[1]) Dasselbe gilt natürlich auch von den beiden anderen Orten.

Zur Bestimmung des Werthes von r kann man eine Beobachtung P (Fig. 5) ausserhalb der Opposition wählen, für welche die wahre Länge ΥEP aus der Beobachtung und die mittlere Länge $\Upsilon O_1 C'$ mittels der täglichen, siderischen Bewegung bekannt sind. Man rechnet dann die Formeln (1), (2), (3) und bestimmt aus den Gleichungen (4) den Werth von r. Ptolemäus fand für

		Saturn	Jupiter	Mars	
die mittlere tägliche siderische Bewegung	$\mu =$	$2' \, 0''\cdot 56$	$4' \, 59''\cdot 24$	$31' \, 26''\cdot 615$	
die mittlere Bewegung in Anomalie	$\mu_1 =$	$57' \, 7''\cdot 73$	$54' \, 9''\cdot 05$	$27' \, 41''\cdot 672$	
Excentricität	$e =$	0·114	0·092	0·200	Halbmesser des Deferenten = 1
Halbmesser d. Epicykels	$r =$	0·109	0·192	0·658	
Länge des Apogäums des Deferenten	$\Pi_0 =$	$14° \, 18'$ ♏	$2° \, 9'$ ♍	$16° \, 40'$ ♋	Epoche: 1 Thot des Jahres 1 Nabonasser
Mittlere Länge . . .	$L_0 =$	$26° \, 43'$ ♑	$4° \, 41'$ ♎	$3° \, 22'$ ♈	
Anomalie	$A_0 =$	$34° \, 2'$	$146° \, 4'$	$327° \, 13'$	

Für die unteren Planeten Mercur und Venus kann man direkt die grössten Elongationen oder Digressionen des Planeten von seinem mittleren Orte beobachten; da findet sich aber, dass dieselben nicht immer gleich sind; die grösste Elongation wäre für einen Beobachter in O: BOm (Fig. 12); wenn dieser Winkel verschieden ist für verschiedene Lagen von B, so kann dies einfach daraus erklärt werden, dass der Beobachtungsort (die Erde) sich nicht in O, sondern excentrisch in E befindet, denn dann wird die grösste Elongation AEI in A kleiner als diejenige $BEIII$ in B, erstere überhaupt am kleinsten, letztere am grössten sein, wenn AB die Verlängerung der Verbindungslinie OE ist. In gleichen Winkelabständen von OA, wie z. B. in C und C', werden die grössten Elongationen $CEII$ nnd $C'EII'$ gleich sein. Wäre die Bewegung des Planeten um den Epicykelmittelpunkt ein Kreis, so müsste offenbar die östliche und westliche Digression dieselbe sein. Plolemäus findet sie jedoch verschieden; weniger gross sind die Abweichungen bei der Venus als beim Mercur. Abgesehen davon, dass diese Fehler theilweise dem Umstande zuzuschreiben sind, dass Ptolemäus die Digressionen vom mittleren statt vom wahren Sonnenorte nimmt, rühren die Differenzen offenbar von der Ellipticität der Planetenbahn her[1]). Ptolemäus



(A. 12.)

[1]) Sei für eine nahe kreisförmige Planetenbahn, unter Voraussetzung einer elliptischen Erdbahn (Fig. 13) S die Sonne, P die kreisförmige Planetenbahn, E die Erdbahn, so müssen die beiderseitigen grössten Digressionen von der wahren Sonne gleich sein; in A' erscheint das Maximum in B' das Minimum der grössten Digression; in E und E' müssen dieselben gleich sein; die Richtung des Apogäums und die Excentricität gelten für die Erdbahn. Ist die Bahn des Planeten P auch elliptisch, jedoch nicht so stark wie die Erdbahn, und sind die Apsidenlinien nur wenig gegen einander geneigt, so werden die Verhältnisse nur insofern geändert, als die

nimmt jedoch auf diese Abweichungen bei der Venus nur insofern Rücksicht, als er für die Bestimmung des Apogäums des Deferenten immer zwei entgegengesetzt liegende Digressionen wählt; also, wenn für die mittlere Sonne in C eine westliche Digression beobachtet wurde, für die Stellung der Sonne in C' die östliche Digression verwendet wird. Aus den zu diesen gehörigen beobachteten Sonnenorten (EC, EC') findet sich nun die Richtung des Apogäums; aus Beobachtungen von grössten Digressionen, welche zu jenen Zeiten angestellt wurden, wo der mittlere Ort der Sonne (des Planeten) mit dem Orte des Perigäums und Apogäums des Deferenten zusammenfiel, erhält man die Excentricität e und den Halbmesser des Epicykels r; denn man hat (Fig. 12), wenn $AEI = a$ die grösste Digression im Apogäum, $BEIII = b$ diejenige im Perigäum ist

$$r = (R + e) \sin a = (R - e) \sin b$$

und daher

$$e = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b - a)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b + a)} R.$$

Zur Bestimmung der mittleren Anomalie für eine gewisse Zeit wird wieder eine Beobachtung ausserhalb der Digression verwendet.

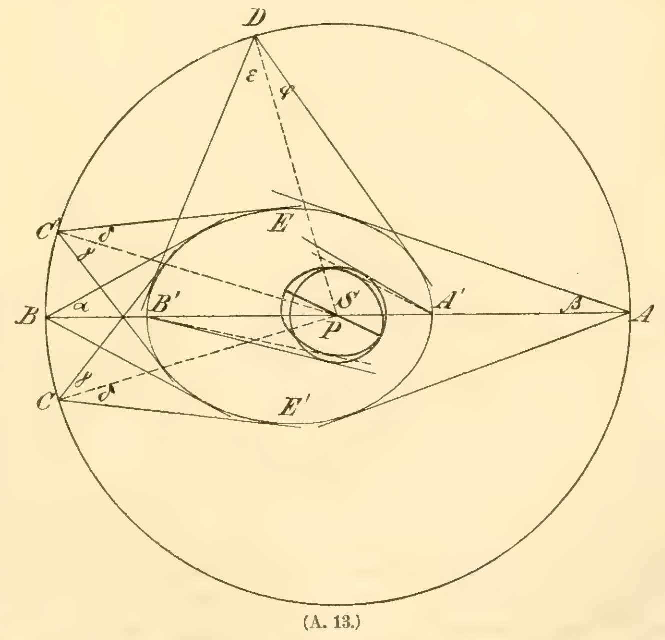
Für Venus findet überdies PTOLEMÄUS den Mittelpunkt D der gleichmässigen Bewegung so gelegen, dass $OD = OE$ ist; die Elemente der Venus sind nach PTOLEMÄUS

$\mu = 59' \, 8''{\cdot}287$ $\quad \mu_1 = 36' \, 59''{\cdot}431$
$2e = 0{\cdot}042$ $\quad r = 0{\cdot}720$ für $R = 1$
$\Pi_0 = 16° \, 10'$ Stier, $L_0 = 0° \, 45'$ Fische, $A_0 = 71° \, 7'$ für die gleiche Epoche wie oben.

Für den Mercur wird dieselbe Methode zur Bestimmung der Lage der Apsidenlinie und der Grösse der Excentricität und des Epicykelhalbmessers ange-

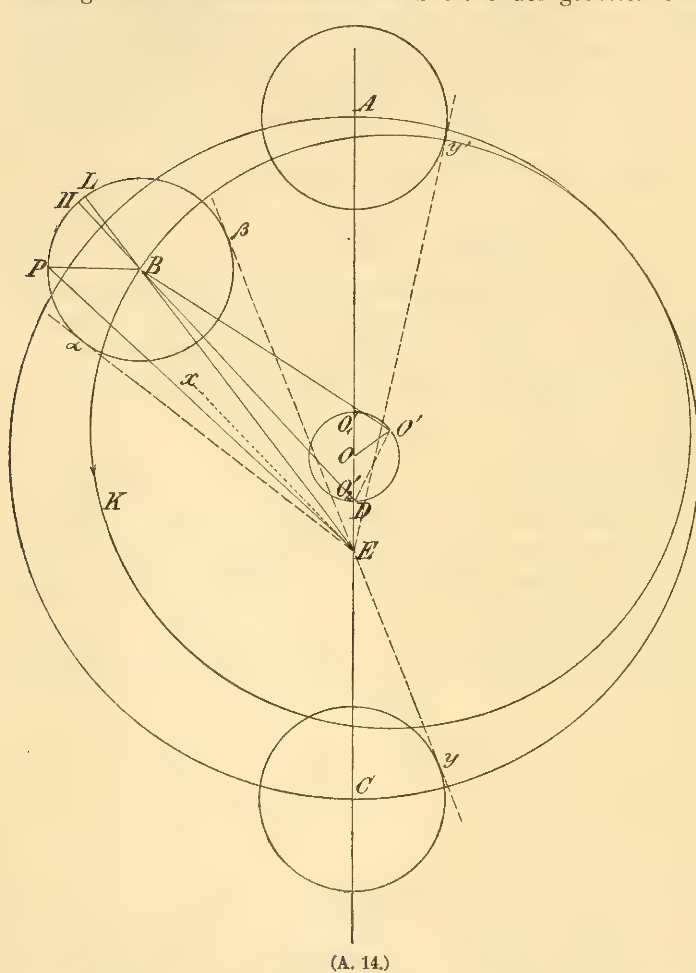
---

Richtung der Apsidenlinie und die Excentricität nicht rein gegeben werden. Wenn jedoch die Planetenbahn viel stärker excentrisch ist, wie beim Mercur, so werden die Verhältnisse wesentlich andere. Sei dann S die Sonne, EE' stelle die elliptische Planetenbahn vor und $ABCD$ sei die als kreisförmig angenommene Erdbahn. Ist die Erde in A, so wird die grösste Digression β; ist die Erde in B, so wird die grösste Digression α nicht immer ein Maximum, denn man sieht, dass auch grössere Digressionen ε auf der einen Seite mit kleineren φ auf der anderen Seite auftreten können, und dass nicht immer $\alpha > \frac{1}{2}(\varepsilon + \varphi)$ sein muss. In der Richtung AB aber werden die östliche und westliche Digression von der wahren Sonne gleich sein und in gleichen Winkelabständen von AB, in C und C' werden wechselweise die östlichen und westlichen Digressionen (γ oder δ) einander gleich.



(A. 13.)

wandt. PTOLEMÄUS findet das Apogäum in 10° Waage, ferner folgt für OA (Fig. 14) $= 1$, $OE = 0·095$, $BP = 0·357$. Wäre wie bei Venus der Punkt O fest, so könnte die Summe der östlichen und westlichen grössten Digressionen für denselben Ort der Sonne nicht grösser als die doppelte grösste Digression im Widder (46° 30′) und nicht kleiner als die doppelte grösste Digression in der Waage (38° 6′) sein. PTOLEMÄUS fand aber für den mittleren Ort der Sonne in 10° Zwillinge und 10° Wassermann die Summe der grössten östlichen und westlichen Digressionen gleich 47° 45′. Dies deutet darauf hin, dass in dieser Stellung der Sonne der Mittelpunkt des Epicykels der Erde näher ist, und PTOLEMÄUS nimmt, um diese Ungleichheit zu erklären, an, dass sich der Mittelpunkt O des Deferenten bewegt; dass er immer auf der entgegengesetzten Seite von der Apsidenlinie C ist, wie der Epicykelmittelpunkt B, daher stets der Erde etwas genähert wird; dass aber O' in die Linie AC fällt, wenn der Epicykelmittelpunkt in A oder C ist. Wird daher eine kreisförmige Bewegung angenommen, durch welche ja alle Ungleichheiten erklärt werden sollten, so muss die Umlaufszeit von O' gleich einem Jahre, der Drehungssinn der entgegengesetzte sein.



(A. 14.)

Sei daher zu einer gewissen Zeit der Ort der mittleren Sonne A, so ist der Mittelpunkt des Deferenten in O_1'; sei A_0 die Anomalie des Mercur zu dieser Zeit. Nach der Zeit t ist $AOO' = \mu t$ und O' der Mittelpunkt des Deferenten K; wenn ferner D der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung (dessen Lage PTOLEMÄUS hier aus den Beobachtungen anders, der Erde näher, wie bei den übrigen Planeten fand), so ist auch $ADB = \mu t$, B der Mittelpunkt des Epicykels, Π das momentane Apogäum und die Anomalie $\Pi BP = A_0 + \mu_1 t$. Der Punkt O bedeutet daher jetzt nicht den Mittelpunkt des Deferenten, da aber $OO_1' = OO_2'$ ist, so ist, wenn $OO' = \rho$ gesetzt wird, nunmehr $e = 0·095$ $r = 0·357$ für $R + \rho = 1$. Für ρ und den Abstand des Mittelpunktes der gleichmässigen Bewegung von der Erde

DE findet PTOLEMÄUS je $\frac{1}{2}e$. Die Mercurselemente werden daher zusammengestellt

$$\mu = 59' \, 8''\cdot 287 \qquad \mu_1 = 3° \, 6' \, 24''\cdot 117$$

für den Halbmesser des Deferenten $R = 1$

$$e = 0\cdot 099, \qquad r = 0\cdot 375, \qquad \rho = \tfrac{1}{2}e \qquad DE = \tfrac{1}{2}e$$

$$\Pi_0 = 1° \, 10' \text{ Waage}, \qquad L_0 = 0° \, 45' \text{ Fische}, \qquad A_0 = 21° \, 55'$$

für obige Epoche. Für die Berechnung eines Mercurortes t Tage nach der Epoche hat man:

$$AOO' = ADB = \mu t = M; \qquad ADO' = \tfrac{1}{2}M; \qquad DO' = e \cos \tfrac{1}{2}M;$$
$$O'B \sin O'BD = OD \sin \tfrac{3}{2}M$$

daher für $O'B = 1$

$$\sin O'BD = e \cos \tfrac{1}{2}M \sin \tfrac{3}{2}M$$
$$BD = \frac{\sin(\frac{3}{2}M + O'BD)}{\sin \frac{3}{2}M} \tag{1}$$

$$BE \cos v = BD \cos M + \frac{e}{2}$$
$$BE \sin v = BD \sin M; \tag{2}$$

ferner

$$\sin BEP = \frac{PB}{BE} \sin(LBP - BEP)$$

und da

$$LBP = A + LB\Pi = A + M - v,$$

so ist

$$\operatorname{tang} BEP = \frac{r \sin(A + M - v)}{BE + r \cos(A + M - v)}. \tag{3}$$

Die Bestimmung der Retrogradationszeit und der Grösse des retrograden Bogens kann mittels der Regel des APOLLONIUS leicht vorgenommen werden. Es ist (Fig. 5)

$$\tfrac{1}{2}FG : OG = \mu : \mu_1.$$

Nun ist

$$LO = R + r, \quad MO = R - r$$

$$R^2 - r^2 = LO \cdot MO = FO \cdot GO = GO(GO + FG) = GO^2\left(1 + \frac{FG}{GO}\right) = GO^2\left(1 + 2\frac{\mu}{\mu_1}\right);$$

folglich

$$OG = \sqrt{(R^2 - r^2) : \left(1 + 2\,\frac{\mu}{\mu_1}\right)}; \qquad FG = 2\,OG \cdot \frac{\mu}{\mu_1}$$

$$\cos CGF = \frac{1}{2}\,\frac{FG}{r} = \frac{OG}{r} \cdot \frac{\mu}{\mu_1}$$

$$\sin CGF = \frac{1}{r}\sqrt{\left[r^2 - \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 \frac{R^2 - r^2}{1 + 2\frac{\mu}{\mu_1}}\right]}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 r^2 - \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 R^2} : \sqrt{1 + 2\,\frac{\mu}{\mu_1}} \tag{1}$$

$$\operatorname{tang} COF = \frac{r \sin CGF}{OG + \frac{1}{2}FG} = \frac{r}{OG} \cdot \frac{\sin CGF}{1 + \frac{\mu}{\mu_1}},$$

woraus folgt

$$\operatorname{tang} COF = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}\sqrt{r^2 - \left(\frac{\mu : \mu_1}{1 + \mu : \mu_1}\right)^2 R^2} \tag{2}$$

Die Anomalie, in welcher der Planet stationär wird, folgt aus

$$A_0 = MCG = CGF - COF$$

die Zeit, welche der Planet braucht, um diesen Bogen zurückzulegen ist $A_0 : \mu_1$, also die Zeit zwischen zwei Stationen, d. h. die Zeit der Retrogradation

$$T = 2\,\frac{CGF - COF}{\mu_1}. \tag{3}$$

Hätte sich der Epicykelmittelpunkt C nicht bewegt, so entspräche der Bewegung des Planeten auch auf dem Bogen $G_1 G$ der Gesichtswinkel $G_1 OG = 2COF$; in der Zwischenzeit rückte aber der Epicykelmittelpunkt um

$$C_1 EC = \frac{\mu}{\mu_1}\, G_1 CG = 2\,\frac{\mu}{\mu_1}\, A_0$$

vor; daher ist die Grösse des retrograden Bogens

$$B = 2COF - 2\,\frac{\mu}{\mu_1}\, A_0 = 2\left[COF\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \frac{\mu}{\mu_1}\, CGF\right]. \tag{4}$$

Natürlich gilt dies nur für die mittlere Entfernung $CO = R$; für eine andere Entfernung ρ wird in den Formeln (1) (2) (3) (4) statt der wahren Bewegung μ des Epicykelmittelpunktes dessen scheinbare $\mu' = \frac{R}{\rho}\,\mu$ zu substituiren sein, und natürlich ρ an Stelle von R. Man hat daher an Stelle von R überall zu setzen

für das Apogäum	für die mittlere Entfernung	für das Perigäum
$\rho = R + e$	$\rho = R$	$\rho = R - e$
$\mu' = \frac{R}{R + e}\,\mu$	$\mu' = \mu$	$\mu' = \frac{R}{R - e}\,\mu$

Ptolemäus findet:

	Retrograder Bogen			Zeit der Retrogradation			Bewegung des mittleren Ortes in der Zwischenzeit		
	im Apogäum	in der mittleren Entf.	im Perigäum	im Apogäum	i. d. mittl. Entf.	im Perigäum	im Apogäum	in der mittleren Entf.	im Perigäum
Saturn .	7° 4′ 10″	7° 16′ 20″	7° 18′ 10″	$140\frac{2}{3}^d$	138^d	136^d	4° 41′ 50″	4° 38′ 0″	4° 33′ 30″
Jupiter .	9° 49′ 14″	9° 52′ 16″	9° 54′ 40″	123_d	121^d	118^d	10° 13′ 10″	10° 2′ 48″	9° 48′ 40″
Mars .	19° 53′ 32″	16° 18′ 44″	11° 12′ 14″	80	73^d	$64\frac{1}{2}^d$	41° 56′ 42″	38° 15′ 6″	33° 45′ 48″
Venus .	16° 25′ 26″	15° 17′ 34″	14° 4′ 38″	43	$41\frac{2}{3}$	$40\frac{2}{3}^d$	42° 18′ 6″	41° 10′ 38″	40° 9′ 0″
Mercur .	7° 54′ 22″	22° 17′ 10″	15° 12′ 46″	21^d	$22\frac{1}{2}^d$	23	20° 33′ 42″	22° 9′ 58″	22° 43′ 0″

Diese Resultate stimmen mit der Erfahrung recht gut überein, was eigentlich nicht Wunder nehmen kann, da ja das System nur eine Transposition des wahren ist, allerdings mit beträchtlichen Vernachlässigungen.

Um nun noch die Breitenbewegungen der Planeten zu erklären, nimmt Ptolemäus an, dass die Ebene des Deferenten gegen die Ekliptik und die Ebene des Epicykels gegen diejenige des Deferenten um gewisse Winkel geneigt sind. Denken wir uns für die oberen Planeten den Deferenten $A''E''$ (Fig. 15) um einen gewissen Winkel I gegen die Ekliptik $E''m$ geneigt, den Epicykel $a''b''$ parallel zur Ekliptik, so also, dass der Winkel $b''A''E''$ auch gleich I ist, so müssen die Erscheinungen dieselben sein, wie sie in der Natur auftreten. Nun muss aber der Epicykel beständig parallel zur Ekliptik bleiben. Diese gleichmässig fortschreitende Bewegung bei unveränderlicher, absoluter Lage im Raume war jedoch ein den Alten fremdartiger Gedanke. Ptolemäus denkt sich vielmehr, dass der Epicykel ab mit seiner Projection auf den Deferenten $(\alpha\beta)$ fest verbunden ist, diese aber so im Umkreis des Deferenten herumgeführt wird, dass die Apsidenlinie $E\alpha$ mit dem Epicykel fest verbunden bleibt, woraus noth-

wendig folgen musste, dass die Knotenlinie sich mit dreht. Das einfachste wäre nun gewesen, eine Zurückdrehung der Knotenlinie anzunehmen, statt dessen nimmt PTOLEMÄUS an, dass sich der Durchmesser $a'\, b'$ in einem kleinen, auf der Ebene des Deferenten senkrecht stehenden Kreise dreht, dessen Mittelpunkt bei b ist. In I ist der Punkt b oberhalb des Deferenten, gegen II hin wird er sich dem Deferenten nähern, in II fällt b in den Deferenten hinein. Nun setzt sich die Bewegung im selben Sinne fort: gegen III hin wird b unter den Deferenten herabsinken, über III hinaus sich demselben wieder nähern und nach dem Durchgange durch denselben in IV gegen I hin wieder steigen. Die Periode der Bewegung in diesem kleinen Kreise ist also gleich der Umlaufszeit des Epicykels im Deferenten. Um jedoch durch diese Bewegung im Kreise keine Verschiebung in Länge zu bewirken, bemerkt PTOLEMÄUS, dass die Kreise ihre Mittelpunkte entsprechend verschoben haben. Für den Durchmesser $c\,d$ nimmt PTOLEMÄUS an, dass er immer parallel zur Ekliptik bleibt

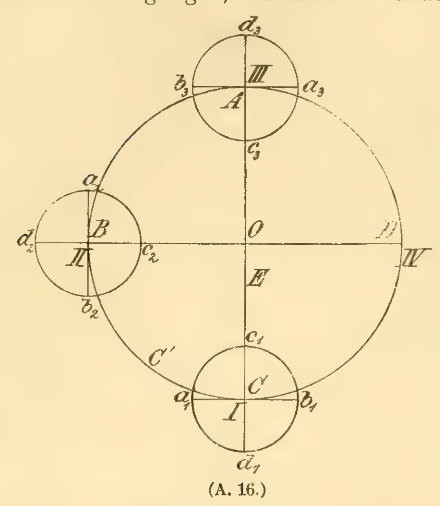
(A. 15.)

Die Lage der Knoten der Deferentenebene wird dadurch bestimmt, dass die nördlichsten Punkte des Deferenten (welche ja von den Knoten um 90° abstehen) für Saturn und Jupiter im Anfang der Waage, für Mars zu Ende des Krebses liegen.

Die Neigung i des Epicykels gegen den Deferenten findet PTOLEMÄUS jedoch von I verschieden; für Saturn ist $I = 2\frac{1}{2}°$, $i = 4\frac{1}{2}°$; für Jupiter $I = 1\frac{1}{2}°$, $i = 2\frac{1}{2}°$; für Mars $I = 1°$, $i = 2\frac{1}{4}°$. Dass PTOLEMÄUS für I und i verschiedene Werthe findet, ist selbstverständlich nur eine Folge der Beobachtungsfehler.

Für Venus und Mercur hat der Deferent keine constante Neigung; PTOLEMÄUS fand nämlich, dass Venus durch den Deferenten stets gegen Norden, Mercur gegen Süden getragen werde, und dass diese Erscheinung nur dann nicht eintritt, wenn

sich der Epicykelmittelpunkt 90° vom Apogäum oder Perigäum des Deferenten befindet. Daraus schliesst er, dass die Knotenlinie des Deferenten 90° von der Apsidenlinie absteht und dass der Deferent um diese Linie schwankt bis zu einer Maximalneigung *I*, welche für Venus $\frac{1}{6}$° nördlich, für Mercur $\frac{3}{4}$° südlich beträgt.



(A. 16.)

Ist der Epicykel in *B* (Fig. 16) so fällt der Deferent mit der Ekliptik zusammen, in dem Maasse, als sich der Epicykel von *B* gegen *C* hin bewegt, steigt der Deferent über die Ekliptik bis zur Maximalelongation *I*, fällt dann wieder, und wenn der Epicykel in *D* ist, so ist die Neigung des Deferenten wieder Null. Bei der weiteren Bewegung des Epicykels gegen *A* wird der Deferent auf der Seite von *C* noch weiter sinken, also nunmehr bei *A* über die Ekliptik hinaufsteigen, woraus man sieht, [dass, wenn die Periode der Bewegung des Deferenten gleich ist derjenigen der Bewegung des Epicykels, dessen Mittelpunkt immer oberhalb der Ekliptik liegt. Die Knotenlinie des Epicykels ist nach Ptolemäus parallel zur Apsidenlinie des Deferenten, die Neigung derart, dass für Venus der linke Theil des Epicykels nördlich von der Ekliptik liegt, für Mercur der rechte Theil.

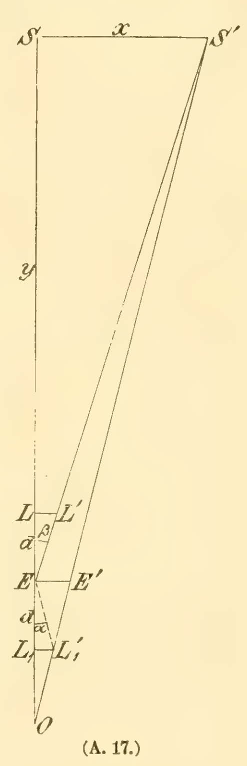
Die beiden aufeinander senkrechten Halbmesser *cd* und *ab* werden sich wieder in kleinen Kreisen bewegen, sodass *c* in *I* im Deferenten, in *II* am meisten oberhalb, in *III* im Deferenten, in *IV* am meisten unterhalb desselben ist. Für Venus wird der in Länge vorausgehende Halbmesser *b* bei *II* im Deferenten sein, bei *III* oberhalb, bei *IV* im Deferenten, bei *I* unterhalb; für Mercur ist der Halbmesser *b* bei *I* oberhalb, bei *III* unterhalb der Ekliptik. Im Apogäum und Perigäum wird daher die Apsidenlinie des Epicykels in den Deferenten fallen; der darauf senkrechte Halbmesser wird gegen diesen geneigt sein und eine gewisse Breite des Planeten hervorbringen, welche Ptolemäus λόξωσις nennt. In den Knoten des Deferenten (*IV* und *II*) fällt dieser zur Apsidenlinie des Epicykels senkrechte Durchmesser in die Ekliptik, und die Apsidenlinie des Epicykels *cd* ist gegen die Ebene des Deferenten geneigt, und bewirkt eine Neigung des Epicykels und eine Breite des Planeten, welche Ptolemäus ἔγκλισις nennt. Die ἔγκλισις ist in *B* und *D* am grössten, in *A* und *C* gleich Null, die λόξωσις in *A* und *C* am grössten, in *B* und *D* gleich Null. Die aus diesen Neigungen entstehenden Breiten werden nun von Ptolemäus für verschiedene Anomalien berechnet und tabuliert; in irgend einem Punkte *C′* des Deferenten combinieren sich ἔγκλισις und λόξωσις; sei erstere für die oben stattfindende Anomalie gleich β_1, die zweite gleich β_2, so wird man die wahre Breite etwa gleich $\beta_1 \sin CC' + \beta_2 \cos CC'$ finden[1]).

Bei Ptolemäus finden wir zuerst die Bestimmung der Entfernung eines Gestirns aus seiner Parallaxe (s. d.). Es gelang ihm jedoch nur für den Mond, eine messbare Parallaxe zu constatiren; er fand die Höhenparallaxe des Mondes 1°7′ in 50° scheinbarer Zenithdistanz für eine Beobachtung, in welcher

---

[1]) Näheres hierüber findet man in Herz, Geschichte der Bahnbestimmungen von Planeten und Kometen, I. Theil, pag. 143 ff.

die Entfernung des Mondes von der Erde sehr nahe $\frac{2}{3}$ der Entfernung des Apogäums des Deferenten von der Erde war. Daraus findet PTOLEMÄUS für die mittlere Entfernung in den Syzygien (CE Fig. 5) 59 Erdhalbmesser; die grösste Entfernung des Mondes, wenn der Epicykel im Apogäum des Deferenten, der Mond im Apogäum des Epicykels ist, wird gleich $64\frac{1}{6}$ Erdhalbmesser, die kleinste Entfernung, wenn der Epicykel im Perigäum des Deferenten, der Mond im Perigäum des Epicykels ist, wird gleich 33 Erdhalbmesser[1]). Für die Sonne und die Planeten fand PTOLEMÄUS keine merkliche Parallaxe; die von ihm angegebene Reihenfolge der Planeten, wonach Saturn der entfernteste ist, und nach ihm Jupiter, Mars, Sonne, Venus und Mercur folgen, gründet sich nicht auf Messungen von Entfernungen; die Stellung der Sonne zwischen den Planeten wird dadurch gerechtfertigt, dass dann für die Planeten eine natürliche Scheidung entsteht, zwischen jenen, welche in jede beliebige Entfernung von der Sonne (Winkelabstand am Himmel) kommen können, von denen, welche nur bis zu einer gewissen Entfernung (grösste Elongation oder Digression) gelangen. Für die Sonne jedoch wurde die Entfernung wirklich bestimmt, aber auf eine andere Weise, nämlich indirekt, durch Beobachtung der Finsternisse. Schon HIPPARCH hatte dieselben verwendet, um die Entfernung des Mondes zu finden, indem er, wie PTOLEMÄUS berichtet, aus den Erscheinungen einer Sonnenfinsterniss mit zwei hypothetischen Werthen für die Entfernung der Sonne zwei Werthe für diejenige des Mondes findet. PTOLEMÄUS erhält umgekehrt aus den Bestimmungen der Parallaxe des Mondes die Entfernung desselben, und mit dieser die Entfernung der Sonne, nachdem er aus den Finsternissbeobachtungen die Grösse des von der Erde geworfenen Schattens in einer gewissen Entfernung von der Erde ermittelt hatte.



(A. 17.)

Eine Mondfinsterniss findet natürlich statt, wenn der Mond in den Erdschatten tritt; sieht man den Querschnitt des letzteren in der Entfernung d von der Erde als Kreis an, dessen sphärischer Halbmesser gleich α ist, und ist der scheinbare Halbmesser des Mondes in derselben Entfernung β, so wird ein Theil des Mondes verfinstert, wenn seine Breite kleiner als $\alpha + \beta$ ist, und zwar wird ein Theil $\gamma = \alpha + \beta - b$ verfinstert, wenn b die Breite des Mondmittelpunktes ist. Man kann daher α finden, wenn die Breite b, der scheinbare Halbmesser β und die Grösse γ des verfinsterten Stückes des Mondes bekannt sind. PTOLEMÄUS fand $\alpha = 40\frac{2}{3}'$ in der Entfernung $64\frac{1}{6}$ Erdhalbmesser; ferner giebt er an, dass in derselben Entfernung des Mondes dessen scheinbarer Halbmesser gleich dem scheinbaren Halbmesser der Sonne $\beta = 15\frac{2}{3}'$ ist. Sei nunmehr SS' (Fig. 17) die Sonne, EE' die Erde, EOE' der Erdschatten, $EL_1 = d = 64\frac{1}{6} EE' = EL$, so ist $L_1' E L_1 = \alpha$ und wenn LL' der Mond ist, $LEL' = SES' = \beta$. Da nun, wenn $SS' = x$, $ES = y$, $EE' = 1$ gesetzt wird,

$$x = y \, tang \, \beta \qquad x - 1 = y \, tang \, L_1 O L_1' = y \, \frac{1 - d \, tang \, \alpha}{d}$$

ist, so folgt

[1]) Thatsächlich schwankt die Entfernung zwischen 55 und 64 Erdhalbmessern.

$$x = y\, tang\, \beta = 1 + \frac{y}{d}(1 - d\, tang\, \alpha)$$

und damit

$$y = 1 : \left(tang\, \alpha + tang\, \beta - \frac{1}{d}\right).$$

Ptolemäus findet $y = 1210$ Erdhalbmesser $= 19$ Mondweiten; da ferner $x = 5\frac{1}{2}$ Erdhalbmesser ist, so folgt weiter

Halbmesser des Mondes: Halbmesser der Erde: Halbmesser der Sonne $= 1 : 3\frac{2}{5} : 18\frac{4}{5}$.

Hipparch und Ptolemäus brachten die wissenschaftliche Astronomie auf eine Stufe, welche sie sehr lange einnehmen sollte, denn mehr als ein Jahrtausend verging, ohne dass viel nennenswerthes Neues geleistet worden wäre, und obzwar sich die Astronomie noch am wenigsten über Vernachlässigung zu beklagen hatte, indem sie mehr als vielleicht alle anderen Wissenschaften gepflegt wurde, war doch — bis auf wenige Ausnahmen — alles nur Nachbildung des Bestehenden, Verbesserung von Planetentafeln auf Grund von neuen Beobachtungen mit Zugrundelegung des Ptolemäischen Systems. In dieser Art haben sich aber ganz besonders die Araber und Mongolen verdient gemacht, jene beiden vielgeschmähten Völker, denen man gerne alles Böse, das über Europa einbrach, zuschreibt.

Nur wenige dürftige Nachrichten über griechische und astronomische Schriftsteller, und noch weniger Werke von denselben sind uns erhalten. Zu erwähnen wären der Römer Censorinus (um 240 n. Chr.), dessen Schrift »De die natali« eine wichtige Quelle für die Chronologie der alten Völker bildet, der alexandrinische Astronom Theon der Jüngere (um 365 n. Chr.), der einen Commentar zum Almagest des Ptolemäus schrieb, und dessen ebenso berühmte als unglückliche Tochter Hypatia, welche in Alexandrien Mathematik und Astronomie lehrte, aber als Heidin von den sie hassenden Christen auf grausame Weise misshandelt und getödtet wurde, und Andere. Wichtiger ist Martianus Capella (aus dem 5. Jahrh. n. Chr.), welcher das Ptolemäische Planetensystem verlässt. Nach ihm bewegen sich um die Erde nur die drei oberen Planeten Saturn, Jupiter und Mars, ferner die Sonne und der Mond. Die beiden Planeten Venus und Mercur jedoch bewegen sich um die Sonne und mit dieser um die Erde. Von ihm ist uns ein Werk erhalten: »Satyricon in quo de nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares«, in welchem er die Umlaufszeiten, täglichen Bewegungen, Orte der Apsiden in runden Zahlen, merkwürdiger Weise aber identisch mit Plinius giebt. Zu erwähnen ist, dass er die Entfernung des Mondes 100 mal grösser als die Erde (es ist nicht gesagt, ob der Erddurchmesser oder Erdumfang gemeint ist) setzt; dass er die Sonne 12 Mal weiter als den Mond annimmt, weil die Bewegung des Mondes 12 Mal schneller ist. Für die Entfernungen der übrigen Planeten nimmt er an, dass Mars 27 Mal, Jupiter 144 Mal, Saturn 336 Mal weiter ist, als der Mond; für Mercur und Venus giebt er keine Zahlen; da sie sich um die Sonne bewegen, so sind ja ihre mittleren Entfernungen von der Erde gleich derjenigen der Sonne, während sich ihre grössten und kleinsten Entfernungen aus den gegebenen grössten Elongationen (für Mercur 23°, für Venus 46°) finden lassen. Die Entfernungen der oberen Planeten verhalten sich also bei Martianus Capella, wie man sieht, verkehrt wie die siderischen Umlaufszeiten.

Andere Werke aus jenen Zeiten, welche man als astronomische bezeichnen könnte, sind nicht anzuführen. Einestheils war die Zeit der Völkerwanderung

wenig geeignet, ruhige und ernste Studien zu befördern, und andrerseits waren selbst die doch nur in Handschriften vorhandenen geistigen Schätze der Vorzeiten vor Vernichtung nicht geschützt und die meisten mögen auch den namenlosen Verwüstungen während der fortwährenden Kriege zum Opfer gefallen sein. Auch aus der der Völkerwanderung folgenden kurzen Zeit der Ruhe sind nur wenige Werke erhalten, denn bald machten die Eroberungszüge der Araber dieser Ruhe ein Ende und das wenige, was aus früheren Zeiten noch erhalten worden war, oder was spätere Schriftsteller vielleicht hinzufügten, fiel nunmehr dem religiösen Fanatismus zum Opfer. Was durch Jahrhunderte hindurch in emsigem Fleiss gesammelt worden war, war in der kürzesten Zeit zerstört, und als die Araber endlich in ihren Eroberungszügen innehielten, und die Eroberer allmählich die Civilisation der Eroberten anzunehmen begannen, da war von den alten Schätzen nicht mehr viel vorhanden. In der folgenden Zeit jedoch haben sich die Araber ganz bedeutende Verdienste um die Astronomie erworben: Das noch Vorhandene hüteten sie als ein Heiligthum; insbesondere war es der Amalgest des PTOLEMÄUS, welcher bei ihnen in hohem Ansehen stand, und welcher auch im Abendland zuerst in einer arabischen Uebersetzung bekannt wurde. Neues allerdings fügten sie nicht viel hinzu. Zu erwähnen ist nur die Lehre von der »Trepidation der Fixsterne« durch THEBIT; denn die Annahme der Entdeckung der »Variation« in der Bewegung des Mondes durch ABUL WEFA ist nur auf eine irrthümliche Auslegung zurückzuführen. Selbst die Trepidation scheint wahrscheinlich älteren Datums zu sein, und THEON dem Jüngeren zuzufallen, wie aus einer Stelle in ALPETRAGIUS' Planetentheorieen geschlossen werden könnte; doch erlangt sie erst Bedeutung in den arabischen Planetentafeln. Das bedeutendste Verdienst der Araber besteht in der Neubestimmung der astronomischen Constanten auf Grund neuerer Beobachtungen und in der Anlage neuer Planetentafeln unter Zugrundelegung dieser Constanten, immer aber des unveränderten PTOLEMÄI'schen Systemes.

ALFRAGANUS[1]) (um 900 n. Chr.) gab einen Auszug aus dem Almagest des PTOLEMÄUS, ohne jedoch auf dessen theoretische Untersuchungen einzugehen. Die Schiefe der Ekliptik giebt er nach ALMAMON (um 800 n. Chr.) zu 23° 35′, die Präcession nach PTOLEMÄUS zu 1° in 100 Jahren. Für die Bewegungen der Planeten adoptirt er die Umlaufszeiten, mittleren Bewegungen, sowie auch die sämmtlichen Dimensionen der epicyklischen Theorie (Excentricität der Deferenten und Halbmesser der Epicykeln) nach PTOLEMÄUS. Die Entfernungen von Sonne und Mond nimmt ALFRAGAN nach PTOLEMÄUS an und schliesst hieraus auf die Entfernungen der übrigen Gestirne unter der willkürlichen Annahme, dass die grösste Entfernung eines Planeten gleich ist der kleinsten Entfernung des nächst weiteren. Mit diesen Zahlen werden dann für die mittleren Entfernungen und den angegebenen scheinbaren Halbmesser der Planeten die wahren Grössen derselben gerechnet. ALFRAGAN findet:

	Mond	Mercur	Venus	Sonne	Mars	Jupiter	Saturn	
für die kleinste Entfernung	$33\frac{1}{3}$	$64\frac{1}{6}$	167	1120	1220	8876	14405	Erdhalbmesser
für die grösste Entfernung	$64\frac{1}{6}$	167	1120	1220	8876	14405	20110	Erdhalbmesser

[1]) Eigentlich ACHMED MOHAMMED EBN KOTHAIR, oder AL FERGANI (der Rechner); die Zeitangaben schwanken zwischen 800 und 950; SÉDILLOT setzt ihn 950, also nach ALBATEGNIUS.

	Mond	Mercur	Venus	Sonne	Mars	Jupiter	Saturn	
für den scheinbaren Durchmesser	31′·4[1]	2′·1	3′·1	31′·4	1′·6	2′·6	1′·8	
für d. wahre Grösse des Durchmessers	$\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{25}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{4}{9}$	$5\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$4\frac{9}{16}$	$4\frac{1}{2}$	Erddurchmesser
für die wahre Grösse d. Planeten	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{22000}$	$\frac{1}{39}$	166	$1\frac{5}{8}$	95	91	

Die Entfernung der Fixsterne wird gleich der grössten Entfernung des Saturn, also gleich 20110 Erdhalbmesser angenommen, und der scheinbare Durchmesser derjenigen erster Grösse gleich $\frac{1}{20}$ des Sonnendurchmessers, also $1\frac{1}{2}'$, und damit der wahre Durchmesser derselben gleich $4\frac{3}{4}$ Erddurchmessern angenommen, so dass die Sterne erster Grösse 107 Mal grösser sind als die Erde. Ferner wird angeführt, dass die Sterne der 6 Grössenklassen der Reihe nach: 107, 90, 72, 54, 36 und 18 Mal grösser sind als die Erde, wobei die Differenz zwischen den einzelnen Grössenklassen constant gleich 18 angenommen worden zu sein scheint.

Albategnius[2]) (um 890 n. Chr.) beobachtete in Aracta (jetzt Racca) einem Orte, dessen geographische Breite er gleich 36° und dessen Länge er gleich $\frac{2}{3}$ Stunden oder 10° östlich von Alexandrien angiebt. Er beobachtete Aequinoctien und Solstitien, und bestimmte daraus die Schiefe der Ekliptik gleich 23° 35′, die Jahreslänge gleich $365^d\ 5^h\ 46{\cdot}4^m$, die mittlere tägliche Bewegung der Sonne gleich 59′ 8″·346, die Excentricität der Sonnenbahn gleich $\frac{1}{28}$ und die Länge des Sonnenapogäums 82° 17′. Die hierfür angegebenen Methoden sind identisch mit den von Hipparch gewählten. Der Unterschied gegen dessen Bestimmungen gleich 16° 47′ wird der Präcession zugeschrieben[3]), und da die Zwischenzeit nahe 1020 Jahre beträgt, so folgt dieselbe gleich 1° in 61 Jahren. Indem er übrigens die Länge der Fixsterne gegen Ptolemäus um 11° 50′ geändert fand, folgt die Präcession zu 1° in 66 Jahren, welchen Werth er als definitiv annahm. Um für die Ptolemäi'sche Theorie des Mondes, welche er ebenfalls unverändert annahm, die Constanten zu verificiren, beobachtete Albategnius eine Reihe von Sonnenfinsternissen, seine Resultate weichen von denen des Ptolemäus nur sehr wenig ab.

Von Constanten für die Theorie der Planeten giebt Albategnius die Halbmesser der Epicykeln, und zwar für Saturn 0·1081, für Jupiter 0·1917, für Mars 0·6654, für Venus 0·7359, für Mercur 0·3751 für den Halbmesser des Deferenten gleich 1. Man findet jedoch weder die Beobachtungen, aus denen er diese Resultate ableitete, noch auch die Rechnungen. Ja, aus der ganzen Fassung des 50. Kapitels liesse sich folgern, dass Albategnius gar keine Planetenbeobachtungen gemacht hatte, denn er führt hier überall, sogar bei den grössten Elongationen, die Werthe anderer an[4]).

Eine wirkliche, auf Beobachtungen gegründete Neubestimmung von Entfernungen finden wir nur für die Sonne. Hier werden auch die Mondfinsternisse mitgetheilt, welche zur Bestimmung dienten, ebenso wie die Sonnenfinsternisse, aus denen Albategnius die Unrichtigkeit der Werthe des Ptolemäus fand. Albategnius erhielt zunächst:

[1]) Für den Mond in der Erdferne. Der Text ist hier stellenweise verdorben.

[2]) Eigentlich Mohammed Ben Geber Albatani.

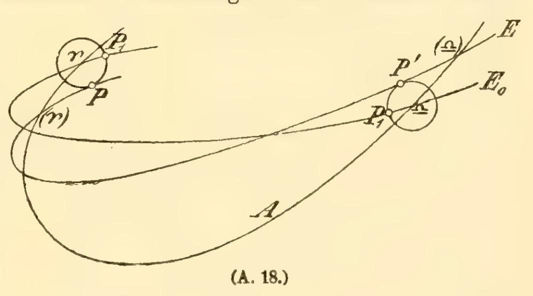
[3]) Von einer Entdeckung der Bewegung des Sonnenapogäums, welche ihm einige moderne Schriftsteller zuschreiben, ist hier keine Rede.

[4]) Es heisst nur: fore dicitur, oder dicunt, invenerunt, ajunt sese invenisse u. s. w.; nur bei der Bestimmung des scheinbaren Jupiterhalbmessers wird gesagt, invenimus.

	in der grössten Entfernung	in der kleinsten Entfernung
den Halbmesser der Sonne	31′ 20″	33′ 40″
den Halbmesser des Mondes . . .	29′ 30″	35′ 20″
den Halbmesser des Mondschattens .	38′ 20″	46′ 0″

Die beobachteten Mondfinsternisse, welche zur Bestimmung der Entfernung dienten, fielen in eine Zeit, zu welcher die Sonne in ihrer grössten Entfernung und der Mondhalbmesser gleich dem Sonnenhalbmesser war; es war also (in Fig. 17) $\beta = 15' \, 40''$; hierfür findet ALBATEGNIUS $\alpha = 43' \, 40''$, $d = 60{\cdot}967$. Mit diesen Werthen würde die Sonnenparallaxe gleich 2′ 13″, die Entfernung der Sonne gleich 1551 Erdhalbmesser folgen. Statt dessen fand ALBATEGNIUS die grösste Entfernung gleich 1156, die kleinste 1070 Erdhalbmesser, ausserdem geht aus der Discussion dieser Stelle hervor, dass ALBATEGNIUS wohl den PTOLEMÄIschen Werth $64\frac{1}{6}$ für die grösste Entfernung des Mondes annimmt, den aus der Epicykeltheorie hieraus folgenden ($33\frac{1}{3}$) jedoch verwirft, und statt dessen den nach dem umgekehrten Verhältniss der scheinbaren Halbmesser $(35 \cdot 3 : 29 \cdot 5)$ folgenden, nämlich 54 Erdhalbmesser als die kleinste Entfernung des Mondes beibehält. Es muss übrigens bemerkt werden, dass nach den Untersuchungen HALLEY's[1]) die Fundamente der Rechnung nicht richtig sind, indem sich der Mond nicht in der mittleren Entfernung, sondern in den mittleren Anomalien 94° 10′ bezw. 91° 5′ und die Sonne nicht in der Erdferne, sondern in den Anomalien 43° bezw. 54° befand.

Aus diesen Entfernungen und den aus der Epicykelntheorie folgenden Verhältnissen für die grössten und kleinsten Entfernungen der Planeten werden unter derselben Voraussetzung wie bei ALFRAGAN, dass nämlich die grösste Entfernung eines Planeten gleich ist der kleinsten Entfernung des nächst weiteren, die Entfernungen der Planeten und die wahren Grössen derselben abgeleitet. Die Resultate sind von denjenigen ALFRAGAN's nicht wesentlich verschieden. Die Entfernung der Fixsterne wird zu 19000 Erdhalbmesser angegeben, die Sterne erster Grösse sind 102 Mal so gross als die Erde, die Sterne 6. Grösse 16 Mal so gross.



(A. 18.)

ALBATEGNIUS und PTOLEMÄUS hatten in Folge von Beobachtungsfehlern verschiedene Werthe für die jährliche Präcession gefunden; THEBIT BEN CHORA (gegen Ende des 9. Jahrhunderts) nahm nun diese Veränderlichkeit in der Präcession als reell an und erklärte sie durch eine Schwankung, eine »Trepidation«. PEURBACH theilt uns die Theorie des THEBIT in seinen »*Theoricae novae planetarum*« mit. Hiernach nimmt der letztere ausser der achten Sphäre noch eine neunte an, in welcher eine feste Ekliptik gelegen ist, welche um 23° 33′ 30″ gegen den in ihr gelegenen festen Aequator geneigt ist; die Schnittpunkte dieser beiden grössten Kreise sind die festen Aequinoctialpunkte. Diese sind Mittelpunkte von kleinen Kreisen, deren Halbmesser 4° 18′ 33″ ist, in welchen sich 2 feste Punkte *PP′* (Fig. 18) der achten Sphäre bewegen. Diese hat daher eine doppelte Bewegung: 1. sie nimmt Theil an der täglichen Be-

[1]) Phil. Transact. 1693, pag. 913 ff.

wegung der neunten Sphäre, der Aequator der achten Sphäre liegt daher immer in derselben Ebene wie der Aequator der neunten Sphäre; 2. sie dreht sich um die Aequinoctialpunkte der neunten Sphäre. Wenn die beiden Punkte PP' der achten Sphäre in die Ekliptik der neunten Sphäre fallen (nach P_1P_1'), so fällt die Ekliptik der achten Sphäre mit der festen Ekliptik der neunten Sphäre zusammen, und die actuellen Aequinoctialpunkte fallen mit den festen Aequinoctialpunkten zusammen. Wenn bei ihrer Bewegung die beiden festen Punkte der achten Sphäre aus der festen Ekliptik der neunten Sphäre heraustreten (nach PP' kommen), so fallen die Schnittpunkte (♈) (♎) der beweglichen Ekliptik nicht mehr mit den festen Punkten ♈, ♎ zusammen; da nun die Bewegung der Punkte PP' in den kleinen Kreisen gleichmässig vor sich geht, so wird das Vorwärts- und Rückwärtsschreiten der Punkte (♈) (♎) ungleichmässig, pendelartig sein, und gleichzeitig ist dadurch eine Schwankung der Neigung zwischen gewissen Grenzen erklärt. Die Umlaufszeit der Punkte PP' in den kleinen Kreisen soll THEBIT gleich 4056 Jahre 331 Tage angenommen haben. Die aus dieser Bewegung entstehende Vor- und Rückwärtsbewegung der Aequinoctialpunkte findet zwischen den Grenzen 10° 45′, zu beiden Seiten der festen Aequinoctialpunkte statt. Da die Fixsterne an der Bewegung der achten Sphäre Theil nehmen, also eine unveränderliche Lage gegen E (nicht gegen E_0) haben, so wird deren Lage gegen den Aequator verändert; die Längen, welche ja von (♈) aus gezählt werden, ändern sich ebenfalls, während die Breiten unverändert bleiben. Die ursprüngliche Theorie der Trepidation nach THEBIT enthält demnach überhaupt keine fortschreitende Bewegung der Aequinoctialpunkte und ersetzt die Präcession durch die Trepidation; erst spätere Schriftsteller combinirten beide Bewegungen. Noch bei ARZACHEL[1]) (um 1080 n. Chr.) findet sich dieselbe Meinung einer einfachen Trepidation, ohne Präcession; bei ihm ist aber die Periode nur 1500 Jahre.

Als eine der wichtigsten Entdeckungen der Araber ist lange Zeit die Entdeckung der dritten Ungleichheit in der Bewegung des Mondes, der Variation, durch ABOUL WEFA (im 10. Jahrhundert n. Chr.) angesehen worden. Obschon bald nach der im Jahre 1836 durch SÉDILLOT in den Comptes rendus bekannt gemachten angeblichen Entdeckung dieser muhazât genannten Gleichung ernste Zweifel in die richtige Auslegung dieser Stelle gesetzt worden sind, und dieselbe thatsächlich nur ein bereits von PTOLEMÄUS berücksichtigter Theil der Evection ist, findet man auch noch jetzt die ältere Meinung wiederholt adoptirt[2]).

Nicht unbedeutende Verdienste erwarb sich der im 11. Jahrhundert lebende ALHAZEN[3]) durch seine Untersuchungen über astronomische Refraction. ALPETRAGIUS (um 1150 n. Chr. in Marocco) stellte ein neues Planetensystem auf, das aber weniger den Zweck hatte, die Bewegungen darzustellen, als sie aus physikalischen Principien zu erklären. Er nimmt die Bewegung der Planeten in Ebenen an, deren Pole Q sphärische Schneckenlinien um die Ekliptikpole Q_0 beschreiben, wodurch in Verbindung mit passend gewählten mittleren Bewegungen und Abständen der Pole Q_0Q sich ebensowohl die Retrogradationen wie die Breitenbewegungen erklären lassen. Doch ist selbstverständlich keine genügende Uebereinstimmung zu erreichen, da ebenso wie in der EUDOXI'schen

---

[1]) ARZACHEL, eigentlich AL ZERKALI, lebte in Toledo.

[2]) Näheres hierüber s. z. B. HERZ, Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, II. Theil, pag. 17.

[3]) Eigentlich ABU ALI HASSAN, er lebte in Kairo.

Theorie ein Element (Entfernung $Q_0 Q$) zwei verschiedene Bewegungen (in Länge und Breite) bestimmen sollte. ALPETRAGIUS begnügt sich auch mit den darauf bezüglichen Andeutungen, ohne die Theorie durch Rechnung zu verfolgen.

Besonders fleissig jedoch waren die Araber als Beobachter, sie verglichen sorgfältig die Tafeln mit dem Himmel und construirten neue Planetentafeln, ohne an der Theorie etwas zu ändern, sobald sie die früheren als fehlerhaft erkannten. Unter denselben sind besonders zu erwähnen die Toledanischen Tafeln von ARZACHEL und die Hakemitischen von IBN JUNIS (um 1000 n. Chr.)[1]).

Nicht minder fleissig in diesem Theile der Astronomie waren die Mongolen. Als die arabische Cultur sich nach Westen verbreitete, und insbesondere Nordafrika (Marocco) und Spanien durch die Araber zu hoher Blüthe gelangten, übernahmen das Erbe derselben in Asien die Mongolen. HOLAGU ILEKHAN gründete (um 1250 n. Chr.) in Meragha eine grosse, mit den besten Instrumenten damaliger Zeit ausgestattete Sternwarte, an welcher nach ihm NASSIREDDIN wirkte, der neue Planetentafeln, die Ilekhanischen genannt, construirte. ULUGH BEIGH (um 1400) baute eine Sternwarte in Samarkand, beobachtete selbst an derselben und construirte ebenfalls neue Tafeln, sowie nach seinen Beobachtungen auch einen Sternkatalog.

Während im fernen Osten die Künste und Wissenschaften blühten, während arabische Civilisation Spanien zu einem blühenden und gesegneten Lande machte, in Cordova, Toledo und anderen Städten Spaniens bereits weltberühmte mohammedanische Hochschulen und Akademien bestanden, von denen z. B. diejenige von Cordova der christlichen Welt einen Papst (SYLVESTER II.) gab, entwickelte sich die Cultur in dem westlichen Europa nur sehr langsam und blieb noch lange auf sehr niedriger Stufe. Trotz der Pflege, welche namentlich KARL DER GROSSE und später die Hohenstaufen, besonders Kaiser FRIEDRICH II. den Wissenschaften angedeihen liessen, konnten sie sich nicht recht entfalten, da es noch lange dauerte, bis der rohe, kriegerische Sinn des Mittelalters den milderen Sitten der Civilisation Platz machte; und selbst als schon die Beschäftigung mit den Wissenschaften und Künsten bei dem »freien Mann« nicht mehr als eine Schwäche verhasst war, als sich ein allgemeineres Interesse für die Wissenschaften zu regen begann, da waren es — wie ehedem zu CICERO's Zeiten in Rom — wieder nur Commentare über Schriften anderer, welche das Gesammtwissen jener Zeit repräsentirten. JOHANNES CAMPANUS (um 1030) soll ein Buch »De sphaera et theoricis planetarum« geschrieben haben; GUILELMUS ABBAS HIRSAUGIENSIS (um 1100) schrieb »Libri tres philosophicorum et astronomicorum institutionum«; von JOHANNES A SACROBOSCO (1230) rührt ein Buch »De sphaera« her, eigentlich ein für die damalige Zeit recht gutes und auch viel verwendetes Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Ausserdem haben sich aus jener Zeit eine grössere Anzahl anderer Werke erhalten, deren Autoren zumeist den Mönchsorden angehörten.

Die Bedeutung der letzteren für die Wissenschaften wird von verschiedenen Seiten sehr verschieden beurtheilt. Dass sie sich um die Pflege der Wissenschaften ein nicht zu unterschätzendes Verdienst erworben, in einer Zeit, wo ausserhalb der Klostermauern keine Pflegestätte für dieselben war, ist nicht zu leugnen. Es ist jedoch zum mindesten fraglich, ob die in den Klosterzellen entstandenen Werke, welche stets vom Hauche des religiösen Fanatismus beein-

---

[1]) Die Zeit ist auch hier unsicher, er wirkte in Kairo unter dem Kalifen HAKEM.

flusst waren, an wissenschaftlichem Werthe gleichzustellen sind jenen alten Werken, welche in anderen Klosterzellen von fanatischeren Mönchen zerstört wurden, indem alte Pergamente abgeschabt wurden, um Platz für Klostergesänge zu gewinnen.

Noch einmal wurde der beginnende Fortschritt in seinem Keime erstickt, als die grosse Bewegung der Kreuzzüge das rauhe, kriegerische Handwerk in den Vordergrund drängte und den Sinn für die Wissenschaft eindämmte, und als um dieselbe Zeit die in Europa nach einander auftretenden verheerenden Krankheiten (das heilige Feuer, die orientalische Pest, der Aussatz, der schwarze Tod) die blühendsten Gegenden in menschenleere Wüsten, die civilisirtesten Länder in Wildnisse verwandelten. Bis zum Beginn des 15. Jahrhunderts finden wir kein auch nur nennenswerthes astronomisches Werk, hingegen ein mächtiges Emporblühen der Astrologie, der Sterndeutekunst, an deren Vorhersagungen sich die vom Unglück gebeugten und durch religiösen Fanatismus abergläubisch gemachten Menschen klammerten.

Nur ein bedeutendes Werk — allerdings aus Spanien hervorgegangen — welches man vielleicht als das letzte grosse praktische Werk in der Epicyklentheorie, und als das letzte grosse Werk der maurischen Schule bezeichnen kann, haben wir aus jener Zeit zu nennen: »Die Alfonsinischen Tafeln«. Im Laufe der Zeit wuchsen die Fehler der älteren Planetentafeln an, so dass sie mit den Beobachtungen nicht mehr stimmten. ALFONS X. der Weise, von Castilien, beschloss demnach, neue Planetentafeln construiren zu lassen und berief zu diesem Zwecke an 50 arabische, jüdische und christliche Astronomen nach Toledo, welche unter der Leitung des Astronomen ISAAC BEN SAID, genannt HASSAN, daran arbeiteten, und die Tafeln im Jahre 1252 fertig stellten. Eine theoretische Behandlung der Planetenbewegungen, auf Grund deren diese Tafeln abgeleitet wurden, ist denselben nicht beigegeben, doch ersieht man aus der dazu gehörigen Gebrauchsanleitung, dass sie sich von den PTOLEMÄischen nicht wesentlich unterscheiden[1]. Natürlich sind andere Constanten (geänderte mittlere Bewegungen, Orte der Apogäen u. s. w.) gegeben, dagegen ist die Einrichtung der Tafeln, gegenüber den früheren, nicht geändert, und nur die Präcession ist durch die Combination mit der Trepidation anders berechnet. Die Richtungen der Apsiden sind für alle Planeten absolut unveränderlich (auch hier ist noch von einer Bewegung der Apsiden keine Rede), ihre Länge ändert sich aber in Folge der Präcession und Trepidation. Die Präcession beträgt 26''·449 jährlich (die Umlaufszeit der Aequinoctialpunkte daher 49000 Jahre), die jährliche Bewegung der Pole Q (die Trepidation) in dem kleinen Kreise 185''·143 (daher ihre Umlaufszeit 7000 Jahre), die grösste aus dieser Bewegung entstehende Verschiebung der wahren Aequinoctialpunkte gegen die mittlere beträgt $\pm 9°$; die Rückrechnung des analytischen Ausdruckes für den Frühlingspunkt aus den Tafeln giebt für das Jahr T nach Chr. $26''\cdot449\, T + 9° \sin [T_0 + 0\cdot0514°\, T]$. Für die jährliche Aenderung der Längen folgt daraus: Um Christi Geb. nahe 55''; für die Zeit 1250 nahe 38''; um 3000 würde dieselbe Null, sodann würden die Längenänderungen negativ, d. h. die Längen sämmtlicher Gestirne nehmen ab und zwar bis 3950, wo die jährliche Aenderung wieder Null wird, worauf die Längen wieder wachsen. Um 7000 wird die jährliche Aenderung wieder 55''.

---

[1]) Eine genauere Analyse derselben s. HERZ: Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; II. Theil, pag. 38.

Eine theoretische Untersuchung der Planetenbewegungen gab GEORG PEURBACH oder PURBACHIUS[1]) (1423—1461) in seinem Werk »Theoricae novae planetarum«, welches man ganz wohl als den Text zu den Alfonsinischen Tafeln betrachten kann. Die Theorieen werden hier in sehr klarer Weise dargestellt, und vielleicht gerade dadurch der Uebergang zur nächsten Epoche, das Verständniss für das heliocentrische System erleichtert. Bemerkenswerth ist, dass PEURBACH ausdrücklich die Veränderlichkeit der Excentricität der Sonnenbahn ausspricht. Auch sonst hatte er sich sehr bedeutende Verdienste um die Astronomie erworben; nebst der Uebersetzung der 6 ersten Bücher des Almagest des PTOLEMÄUS, welche ihn fortwährend beschäftigte, schrieb er: *Tabulae eclipsium, Canones gnomoni, Tabulae directionum Planetarum.* Nicht minder berühmt war sein Schüler und Freund JOHANN MÜLLER, genannt DE MONTE REGIO oder REGIOMONTAN[2]) (1436—1476); nach dem frühzeitigen Tode seines Lehrers übernahm er dessen Lehrstelle, vollendete die angefangene Uebersetzung des Almagest und gab einen Commentar zu demselben. Ferner gab er Kalender und Ephemeriden heraus, welche von den Seefahrern stark benutzt wurden. Die erste Längenbestimmung durch Monddistanzen soll AMERIGO VESPUCCI 1499 in Venezuela nach den Ephemeriden REGIOMONTAN's vorgenommen haben.

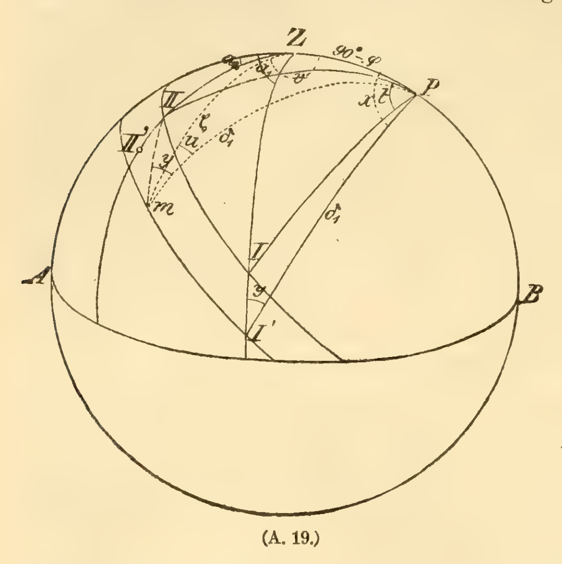
Bis zu den Zeiten REGIOMONTAN's hatte man über die wirklichen Entfernungen der Kometen nur Vermuthungen ausgesprochen. Noch bis zu ihm waren die Meinungen, ob die Kometen terrestrischen Ursprunges oder gleich den Planeten Himmelskörper seien, blosse Meinungen, ohne dass man für eine derselben einen Beweis geben konnte. REGIOMONTAN war der erste, der die Bestimmung der Parallaxe der Kometen durch Beobachtungen vorzunehmen suchte. Von den verschiedenen Methoden, welche er gab und die auch von den späteren Astronomen verwendet wurden, sind die wichtigsten die folgenden: 1) Es werden zwei Zenithdistanzen mit den gleichzeitigen Azimuthen in verschiedenen Stundenwinkeln gemessen; 2) Aus dem beobachteten Azimuthe und der Zenithdistanz für einen bekannten Stundenwinkel findet sich direkt die Höhenparallaxe. Hier ist die Rechnung sehr einfach: in dem sphärischen Dreieck Zenith—Pol—Stern ist eine Seite (die Zenithdistanz des Pols) nebst den beiden anliegenden Winkeln (Stundenwinkel und Azimuth) bekannt, woraus die wahre Zenithdistanz gerechnet werden kann, deren Vergleichung mit der gemessenen scheinbaren Zenithdistanz die Höhenparallaxe giebt; 3) Es wird die Länge des Himmelskörpers (direkt mit den hierzu dienenden Instrumenten) gemessen, wenn derselbe in Länge 90° von dem aufgehenden Punkte der Ekliptik entfernt ist (sich im Nonagesimus befindet); dann ist seine Parallaxe in Länge gleich Null. Bestimmt man dann seine Länge zu einer andern Zeit, so erhält man in der Differenz sofort die

---

[1]) Oesterreicher von Geburt, hatte er in Wien seine Studien begonnen, sie in Italien vollendet, und bekleidete nach seiner Rückkehr eine Lehrstelle der Mathematik und Astronomie an der Universität in Wien.

[2]) Geboren in Königsberg in Franken, kam er frühzeitig als Schüler zu PEURBACH, dessen Freund und Mitarbeiter er bald wurde. 1461 übernahm er die Stelle PEURBACH's, ging noch in demselben Jahre mit dem Cardinal BESSARION, einem Gönner und Förderer der Astronomie, nach Italien, kehrte 1465 nach Wien zurück, wo er aber nicht lange blieb, da ihn MATHIAS CORVINUS nach Ofen berief. 1471 verliess er diesen Ort und ging nach Nürnberg, wo ihm der reiche Patricier B. WALTHER eine Sternwarte und Druckerei errichtete, auch mit ihm beobachtete. 1475 folgte er einem Rufe des Papstes SIXTUS IV., behufs der Reform des Kalenders, nach Rom, wo er aber schon 1476 starb.

Parallaxe in Länge, aus welcher die Höhenparallaxe bestimmt wird[1]). Die am meisten verwendete Methode war die erste, da man bei derselben die Stundenwinkel nicht zu kennen brauchte, und die Differenz der Stundenwinkel sich aus der Zwischenzeit ergab. Sei AB (Fig. 19) der Horizont, Z das Zenith, P der Weltpol, seien ferner I und II die beiden wahren Orte des Gestirns im Parallelkreise, so sind die scheinbaren Orte in Folge der Parallaxe I' und II' in den betreffenden Höhenkreisen ZI, ZII gelegen. Gemessen sind nun die Winkel $AZI = a_1$, $AZII = a_2$, und die Zenithdistanzen $ZI' = z_1$ und $ZII' = z_2$; bekannt ist ferner die Differenz der Stundenwinkel $IIPI = t$ gleich der Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen, und der Bogen $ZP = 90° - \varphi$ gleich dem Complement der Polhöhe des Beobachtungsorts. RÉGIOMONTAN überträgt nun das Dreieck PII' nach $PIIm$; aus dem Dreieck ZPI' findet man aus der scheinbaren Zenithdistanz z_1 und dem bekannten Azimuth a_1 die scheinbare Poldistanz $p_1 = 90° - \delta_1 = PI' = Pm$, ferner die Winkel x und y; und da $ZPm = x - mPI' = x - IIPI = x - t$ ist, so werden in dem Dreieck ZPm die beiden Seiten ZP, Pm und der Winkel ZPm bekannt, woraus man die Winkel u, v und die Seite ζ berechnen kann, und dann erhält man aus dem Dreieck $ZIIm$, in welchem die Seite ζ und die beiden anliegenden Winkel $IImZ = y - u$ und $IIZm = 180° - v - a_2$ bekannt sind, die Seiten ZII und mII. Es ist aber $mII = II'$ die Höhenparallaxe für die erste Beobachtung und $IIII' = ZII' - ZII$ die Höhenparallaxe für die zweite Beobachtung.



(A. 19.)

REGIOMONTAN konnte dann nach seinen Untersuchungen die Behauptung, dass die Entfernung der Kometen nicht kleiner sei als die des Mondes als erwiesen und die gegentheiligen Ansichten als widerlegt hinstellen. Allerdings nahm er dabei noch nicht auf die astronomische Refraction Rücksicht.

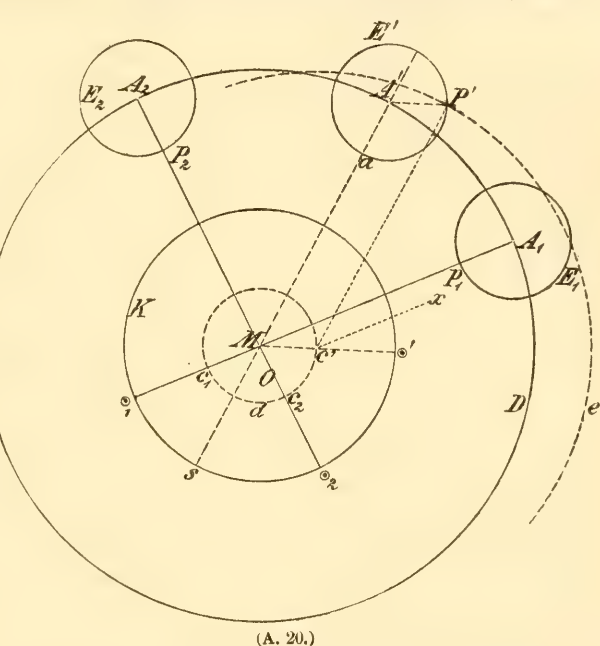
In diese Zeit (um 1450) fällt eine der wichtigsten Erfindungen, welche nicht nur für die Astronomie, sondern überhaupt für alle Wissenschaften von den bedeutendsten Folgen war, und welche allein den nunmehr folgenden raschen Aufschwung der Wissenschaften ermöglichte: die Erfindung der Buchdruckerkunst. An Stelle des mühevollen und höchst beschwerlichen, oft auch unverlässlichen Abschreibens trat die Vervielfältigung durch den Druck. Zu den ersten in dieser Weise verbreiteten astronomischen Werken gehörten der Almagest des PTOLEMÄUS und PEURBACH's Theoricae novae planetarum.

Fast gleichzeitig hiermit fällt die erste grosse Umwälzung in der Astronomie, die Aufstellung und wissenschaftliche Begründung des heliocentrischen Systems

[1]) Diese Methode ist dem Wesen nach identisch mit derjenigen, dass man die Rectascension eines Gestirns bestimmt, wenn es im Meridian steht, und dann eine Bestimmung ausserhalb des Meridians macht. Die Tangente im Nonagesimus ist horizontal, da der Nonagesimus derjenige Punkt der Ekliptik ist, der im Höhenkreise des Pols der Ekliptik liegt.

durch NICOLAUS COPERNICUS[1]) (1472—1543). Sein bedeutendstes, wenn auch nicht einziges Verdienst besteht darin, dass er die Bewegung der Erde um die Sonne annahm. COPERNICUS zeigte die Identität der sich unter den beiden Annahmen darbietenden Erscheinungen (s. pag. 23) und adoptirte das heliocentrische System, welches eine einfachere Erklärung der Erscheinungen gab, indem dadurch in der Bewegung der Planeten eine Ungleichheit als parallactische (durch den veränderlichen Stand des Beobachters bedingte) auftrat, demnach ein Epicykel bei jedem Planeten wegfiel und auch die Breitenbewegungen sich einfacher erklären liessen. Allerdings blieben noch andere Ungleichheiten übrig, zu deren Erklärung er noch die excentrische Lage der wahren Bahnen, bezw. die Bewegung in kleinen Epicykeln herbeiziehen musste.

Sieht man für den Uebergang von dem geocentrischen auf das heliocentrische System für einen Augenblick von der Excentricität des Deferenten ab; sei im PTOLEMÄI'schen System für einen oberen Planeten die Erde in M (Fig. 20), ferner K die Sonnenbahn, D der Deferent, E_1 der Epicykel. Zur Zeit der Retrogradation befindet sich der Planet in P_1 und gleichzeitig die Sonne an der entgegengesetzten Seite der Himmelskugel in $\odot_1$. Ist bis zur nächsten Retrogradation der Mittelpunkt des Epicykels nach A_2 gekommen, so ist der Planet in P_2, die Sonne in $\odot_2$, und die Zeit, welche der Planet zu einem Umlaufe im Epicykel braucht, gleich



(A. 20.)

einem Jahre plus der Zeit, welche die Sonne braucht, um den Bogen $\odot_1\odot_2$ zurückzulegen. Da nun der Planet im Epicykel und die Sonne in ihrer Bahn sich gleichförmig bewegen, so werden die Bögen aP' und $s\odot'$ (in einer anderen Stellung des Epicykels) einander gleich, also die Richtungen $A'P'$ und $M\odot'$ parallel sein. Denkt man sich nun einen Punkt c gleichförmig in einem dem Epicykel gleichen Kreise um M so bewegt, dass seine Lage gegen M stets dieselbe ist, wie diejenige des Planeten gegen den Mittelpunkt des Epicykels, so werden die gleichzeitigen Orte c_1P_1, $c'P'$, c_2P_2 dieselbe Entfernung haben, und es hat sich die Gerade c_1P_1, während c_1 nach c' kam, um $P_1MA' = xc'P'$ gedreht. Daraus ersieht man, dass man den De-

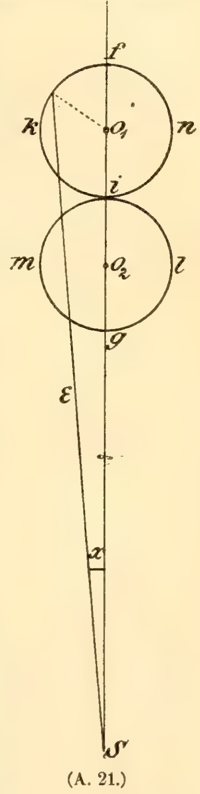
[1]) Geboren am 19. Februar in Thorn, bezog er 1491 die hohe Schule zu Krakau, welche er 1495 verliess. Er unternahm dann zu wiederholten Malen auf längere Zeit Reisen nach Italien und besuchte Bologna, Rom und Padua. 1505 kehrte er nach Deutschland zurück, wo er seit 1498 eine Domherrnstelle in Frauenburg bekleidete, blieb jedoch zunächst bis 1512 auf dem Bischofssitze seines Oheims in Heilsberg, und von diesem Jahre ab mit geringen Unterbrechungen bis zu seinem am 24. Mai 1543 erfolgten Tode in Frauenburg.

ferenten D mit dem Epicykel E ersetzen kann durch einen Deferenten d und einen Epicykel e, für welche die Halbmesser und Geschwindigkeiten oder Umlaufszeiten vertauscht sind. Aber jetzt werden die Richtungen nach den Epicykelmittelpunkten zusammenfallen mit den Richtungen nach den Sonnenorten, wie dies im PTOLEMÄI'schen System für die unteren Planeten direkt der Fall ist. Da aber in diesem die wahre Grösse der Entfernungen unbestimmt bleibt und immer nur die Verhältnisse der Excentricitäten und Epicykelhalbmesser zum Halbmesser des Deferenten für jeden einzelnen Planeten sich ergeben, so kann man den Deferentenhalbmesser nach Belieben so gross nehmen, dass der Halbmesser des Epicykels E gleich dem Halbmesser der Erdbahn wird, und dann fallen die Kreise d und K zusammen, d. h. der Mittelpunkt des Epicykels fällt in den jeweiligen Sonnenort. Daraus folgt dann, dass alle Planeten sich um die Sonne, und diese selbst sich um die Erde M bewegt. Es ist auch klar, dass die sämmtlichen Verhältnisse unverändert bleiben, wenn die Erde nicht in M, sondern excentrisch in O sich befindet, indem dann nur der kleine Deferent, so wie früher der grosse D excentrisch ist. Dieses System der gemeinschaftlichen Bewegung der Sonne mit allen Planeten um die Erde bildet gleichsam den Uebergang von PTOLEMÄUS zu COPERNICUS, es findet sich auch in der Astronomie vor, aber merkwürdigerweise erst nach COPERNICUS bei TYCHO BRAHE. Der Uebergang auf das heliocentrische System ist aber nicht schwer, wenn, wie dies pag. 22 gezeigt war, die Bewegung der Sonne als eine scheinbare, völlig der wahren Bewegung der Erde entsprechend aufgefasst wird. Der Analogieschluss von der Bewegung aller anderen Planeten auf diejenige der Erde wird aber wesentlich dadurch unterstützt, dass der Masse nach die Erde von der Sonne allein, noch vielmehr von der mit ihr vereinigten Masse aller anderen Planeten weitaus überwogen wird, und ein Grund für eine exceptionelle Stellung der Erde im Weltraume sich wissenschaftlich nicht angeben lässt. Der Einwand, dass von den verschiedenen Punkten der Erdbahn aus die Richtungen nach den Fixsternen sich ändern müssten, ist COPERNICUS nicht entgangen. Er selbst führt ihn auch an und bemerkt hierzu, dass sich eine solche Aenderung (jährliche Parallaxe) wegen der ausserordentlichen Entfernung der Fixsterne nicht zeigt.

Schon vor COPERNICUS trat das heliocentrische System ganz oder theilweise auf. Als Vorläufer führt man PHILOLAUS und NICETAS an, ein bedeutender Astronom unserer Zeit führt das heliocentrische System sogar bis auf PLATO zurück! Nachweislich findet sich dasselbe im Alterthum jedoch erst bei ARISTARCH. Ein theilweise heliocentrisches System (Bewegung von Mercur und Venus um die Sonne) findet sich, wie erwähnt, bei MARTIANUS CAPELLA, vielleicht schon früher bei den Aegyptern. Unmittelbar vor COPERNICUS wird auch der Cardinal NICOLAUS VON CUSA (um 1440 n. Chr.) wiederholt als sein Vorgänger genannt. Allein in seinen Werken findet sich nirgends auch nur eine Stelle, welche auf ein heliocentrisches System hindeuten könnte. COPERNICUS selbst sagt in der Vorrede, dass er zur Aufstellung seiner Meinung dadurch ermuthigt wurde, dass schon andere vor ihm die Ruhe der Erde behufs besserer Erklärung der Welterscheinungen aufgegeben haben. Angeregt wurde er wohl durch diese einzelnen, ihm jedenfalls bekannten Lehrmeinungen anderer zur Conception seines Systems; dasselbe aufgestellt, in feste, wissenschaftliche Form gebracht und in mathematisches Gewand gekleidet zu haben, ist einzig und allein das Verdienst des COPERNICUS. Allein es war dies nicht sein einziges Verdienst. Noch eine grosse Reihe kleinerer aber auch wichtiger Neuerungen und Entdeckungen verdanken wir ihm. Er erkannte die eigene Bewegung der Apsiden (unabhängig von der

Präcession), er verbesserte die Methode zur Bestimmung des Sonnenapogäums und gab für die zweite Ungleichheit in der Mondbewegung (die Evection) eine von der früheren verschiedene Darstellung, durch welche die Entfernungen des Mondes von der Erde viel richtiger wiedergegeben wurden. Allerdings finden sich auch in seiner Theorie gewisse Unrichtigkeiten, welche von Beobachtungsfehlern herrühren, die er nicht erkannt hat. Dahin ist seine Theorie der »Libration der Aequinoctien« und die Annahme der Veränderlichkeit der Neigungen der Planetenbahnen zu rechnen.

Da COPERNICUS die Präcession veränderlich findet, so bezieht er die Längen der Fixsterne ebenso wie die Bewegungen der Planeten nicht auf die Aequinoctien (tropisch), sondern auf einen als Anfangspunkt gewählten Fixstern (siderisch). Durch Addition der Entfernung dieses Fixsterns vom jeweiligen Frühlingspunkte erhält er dann auch die von dem letzteren gezählte wahre Länge des Gestirns. Als Anfangspunkt der Zählung wählt er den ersten Stern im Sternbilde des Widders (γ Arietis).



(A. 21.)

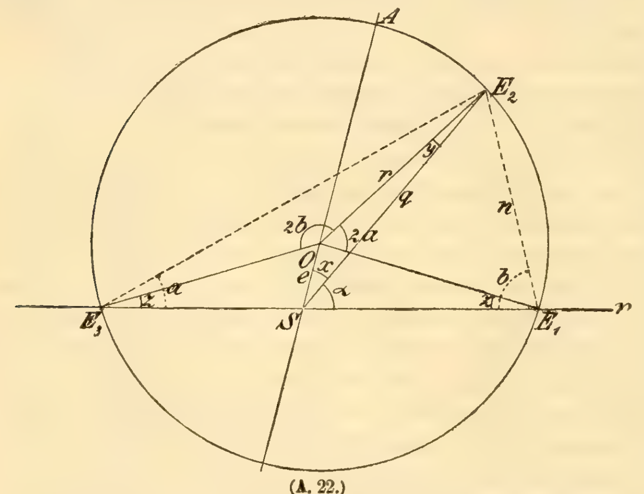
Die Erde hat eine dreifache Bewegung und zwar 1) um ihre Axe, wodurch die täglichen Erscheinungen an der Himmelskugel erklärt werden; 2) um die Sonne; bei dieser würde aber nach COPERNICUS die Lage der Erdaxe im Raume nicht unverrückt bleiben. Errichtet man im Sonnenmittelpunkte auf die Ebene der Erdbahn eine Senkrechte — sie sei s — so wird dieselbe von der verlängerten Erdaxe — A — geschnitten; bei der jährlichen Bewegung der Erde würde sich nun nicht deren Mittelpunkt allein um die Sonne drehen, sondern es dreht sich die ganze Ebene, welche durch s und A gelegt wird, um die Sonne, sodass die Erdaxe einen Kegel und der Punkt am Himmel, in welchem A die Himmelskugel trifft (der eine Weltpol) einen kleinen Kreis um den Schnittpunkt von s mit der Himmelskugel (dem Pole der Ekliptik) beschreiben würde. Damit nun die Erdaxe, wie dieses in der That der Fall ist, durch lange Zeiträume immer denselben Punkt am Himmel trifft, d. h. der Pol des Aequators auch am Himmel fest wäre, muss die Erdaxe eine dritte, kegelförmige Bewegung haben, die der jährlichen Bewegung entgegengesetzt ist. Wäre die Periode dieser Bewegung auch ein Jahr, so würden die Weltpole völlig fest sein; die Beobachtungen zeigen aber eine langsame retrograde Bewegung, und um diese zu erklären, wird die Umlaufszeit der Erdaxe in diesem Kegel etwas kleiner angenommen, ausserdem aber nicht ganz gleichmässig, weil die fortgesetzten Bestimmungen der Präcession und Schiefe der Ekliptik immer andere Werthe für dieselbe ergaben. COPERNICUS findet aus der Discussion der sämmtlichen Bestimmungen seiner Vorgänger, dass wenn S (Fig. 21) der Pol der Ekliptik ist, der Pol des Aequators einen aus zwei kleinen sich berührenden Kreisen zusammengesetzten Weg $fkilgminf$ am Himmel beschreibt, und ausserdem die Linie Sf sich um S dreht, sodass Sf der grösste, Sg der kleinste Werth der Schiefe der Ekliptik wird und die Abweichung des wahren Weltpoles von seinem mittleren Orte, die »Libration der Erdaxe«, bis zum Winkel fSm anwachsen kann. Es folgt daraus, dass, während die Schiefe der Ekliptik alle Werthe erlangt (der Weltpol von f wieder nach f zurückgekehrt ist), was in der Zeit von 3434 Jahren stattfindet, die Libration zwei Mal ihren grössten und kleinsten Werth erreicht

hat, indem diese bereits alle möglichen Werthe durchläuft, wenn der Pol von f nach g gekommen ist. Indem nun COPERNICUS die jährliche gleichmässige Bewegung des Poles (daher auch der Aequinoctialpunkte), die eigentliche Präcession gleich $50''\cdot2$, den grössten Werth der Schiefe der Ekliptik $23°\ 52'$, ihren kleinsten Werth $23°\ 28'$, den Halbmesser der kleinen Kreise gleich $6'$ und die jährliche Bewegung der Weltpole in diesem gleich $377''\cdot4$ annimmt, lässt sich daraus der Werth von ε und x (die wahre Schiefe und die Libration in Länge) für jede andere Zeit berechnen. Den Werthen der Copernicanischen Tafel wird sehr nahe entsprochen durch die Ausdrücke:

Länge von γ Arietis $\lambda = +\ 5°\ 32' + 50''\cdot2\ T + 70'\ sin\,(754''\cdot8\ T + 13°\ 30')$.
Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23°\ 40' + 12'\ cos\,(377''\cdot4\ T + 6°\ 45')$.

wo T in Sonnenjahren seit Christi Geburt auszudrücken ist.

Bei der Bewegung der Erde um die Sonne findet COPERNICUS zwei Ungleichheiten. Die Erste ist die bereits von PTOLEMÄUS gekannte und bestimmte Ungleichheit in der Geschwindigkeit der Bewegung. Zur Erklärung derselben nimmt COPERNICUS an, dass sich die Erde in einem excentrischen Kreise bewegt; die Richtung und Grösse der Excentricität kann auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie dieses PTOLEMÄUS für die Sonnenbahn macht, da ja, wie erwähnt, die beiden Annahmen sich für die Rechnung völlig decken, und nur alle geocentrischen Richtungen



(A. 22.)

der Sonne von den entsprechenden heliocentrischen Richtungen der Erde um 180° verschieden sind. Allein da COPERNICUS ganz richtig bemerkt, dass die Bestimmung der Momente der Solstitien nur äusserst ungenau ist, so wählt er zur Bestimmung der Elemente der Erdbahn Beobachtungen, welche genügend weit von den Aequinoctien entfernt sind, dabei aber noch hinreichend sicher bestimmt werden können. Als solche bezeichnet er die Momente des Eintritts der Sonne in jene Punkte, welche 45° von den Aequinoctien abstehen[1]). Sei nun S (Fig. 22) der Ort der Sonne, O der Mittelpunkt der excentrischen Erdbahn, $S\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte, also E_1 die Stellung der Erde zur Zeit des Frühlingsäquinoctiums, E_2 dieselbe für eine andere Zeit, so ist der Winkel $E_1 S E_2 = \alpha$ durch die Beobachtung bekannt (gleich der scheinbaren Bewegung der Sonne in der Zwischenzeit, also 45°), während der Winkel $E_2 O E_1 = 2a$ gleich der mittleren Bewegung der Erde in der Zwischenzeit, also gleich $\odot t_1$ ist, wenn $\odot$ die mittlere tägliche siderische Bewegung der Sonne und t_1 die Zwischenzeit, ausgedrückt in Tagen, ist. Wenn ferner die

[1]) Den Eintritt der Sonne in diese Punkte kann man allerdings nicht beobachten, aber mit der bekannten Schiefe der Ekliptik kann man die Deklination der Sonne für diesen Punkt bestimmen und die Momente beobachten, für welche die Sonne diese Deklination erlangt. Eine Unsicherheit entsteht hier, wenn die Refraction nicht berücksichtigt wird.

Zeit t_2 zwischen den beiden Aequinoctien bekannt ist, so ist auch der Winkel $E_1 O E_3 = \odot t_2$ und somit auch der Winkel $E_2 O E_3 = 2b$ bekannt, während der Winkel $E_2 S E_3 = 180° - \alpha$ ist. Hieraus kann man dann die Strecke $SO = e$ und den Ort des Aphels A der Erde bestimmen.

Es ist nämlich:

$$E_2 E_3 E_1 = a, \quad E_2 E_1 E_3 = b, \quad E_3 E_2 E_1 = 180° - (a + b) = c.$$

Nennt man

$$O E_2 S = y, \quad E_1 E_2 = n, \quad S E_2 = q, \quad O S E_2 = x,$$

so wird

$$2a + y = \alpha + z \qquad z = 90° - \tfrac{1}{2} E_1 O E_3 = 90° - c,$$

folglich

$$y = 90° + \alpha - c - 2a = \alpha + (b - a) - 90°$$

und da

$$n = 2r \sin a \qquad q : n = \sin b : \sin \alpha,$$

ist, so wird

$$q = \frac{2r \sin a \sin b}{\sin \alpha}; \quad e \sin x = r \sin y, \quad e \cos x = q - r \cos y,$$

Länge des Aphels der Erde $A = \alpha + x$.

COPERNICUS findet für die mittlere Länge der Sonne zur Zeit der Epoche Chr. Geb. 272° 31′, ferner $\odot = 59' \, 8''\cdot19$, $e = 0\cdot0323$; Ort des Apogäums der Sonne 96° 40′.

Aus der Bestimmung der von den verschiedenen Beobachtern seit PTOLEMÄUS gefundenen Werthe für die Excentricität und die Lage des Apogäums fand COPERNICUS eine stete Verkleinerung der Excentricität und eine fortwährende Drehung des Apogäums (gegen die Fixsterne, also nach Berücksichtigung der Präcession). Die Geschwindigkeit der Aenderungen ist aber nicht dieselbe, und da COPERNICUS aus den Beobachtungen zu erkennen glaubte, dass zu den Zeiten des PTOLEMÄUS das rascheste, zu seinen Zeiten das langsamste Vorschreiten des Apogäums gleichzeitig mit der geringsten Aenderung der Excentricität, hingegen zu den Zeiten des ALBATEGNIUS und ALFRAGAN eine mittlere Aenderung des Apogäums mit der raschesten Aenderung der Excentricität stattfand, so nahm er ähnlich wie bei der Präcession und Libration an, dass die mittlere Apsidenlinie in einer fortschreitenden Bewegung begriffen ist, die wahre Apsidenlinie aber um die mittlere Sf (Fig. 21) schwankt, und zwar so, dass der Mittelpunkt der Erdbahn sich in einem Kreise nfk rückläufig bewegt[1]); zu den Zeiten des PTOLEMÄUS fiel der Mittelpunkt mit f zusammen, zu COPERNICUS Zeiten war er in k; die Geschwindigkeit der Bewegung nimmt COPERNICUS ohne weitere Rechnung gleich der Geschwindigkeit der Libration, also täglich $754''\cdot8$, weil die aus den Beobachtungen sich ergebende Schwankung sehr nahe die Periode der Libration zeigte. Da nun hieraus $f O_1 k = \omega = 165° \, 38'$ folgt, und $Sf = e_1 = 0\cdot0414$, $Sk = e_3 = 0\cdot0323$ ist, so folgt, wenn $O_1 k = \rho$, $O_1 S = e_0$, $Si = e_2$, $O_1 fk = a$, $O_1 Sk = x$ gesetzt wird,

$$a = 90° - \tfrac{1}{2}\omega; \quad \sin(a + x) = \frac{e_1}{e_3} \sin a; \quad \rho = e_3 \frac{\sin x}{\sin \omega}$$

und wenn der beobachtete und wegen Präcession und Libration corrigirte Ort des Aphels wegen x verbessert wird, die mittlere Bewegung des Aphels. COPERNICUS fand $\rho = 0\cdot00475$, $e_0 = 0\cdot03685$, $e_1 = e_0 + \rho = 0\cdot0416$; $e_2 = e_0 - \rho = 0\cdot0321$, den Maximalwerth von $x = 7° \, 28'$; die fortschreitende Bewegung des Aphels gleich $24''\cdot337$ jährlich.

---

[1]) Der Kreis mgl ist dabei wegzudenken.

Nennt man nun den Winkelabstand eines Gestirnes von seinem instantanen Aphel dessen Anomalie, so wird für die Erde, da sich das Aphel in derselben Richtung bewegt, wie das Gestirn, die tägliche Bewegung der Anomalie etwas kleiner sein, als die tägliche siderische Bewegung; sie beträgt $\mu_1 = 59'8''\cdot123$ und die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche Chr. Geb. war $M_0 = 211° 19'$. Hiernach hat man dann für die Berechnung eines Erdortes:

Mittlere Länge der Erde . . .	$L = 272° 31' + 3548''\cdot189\,t$	t = Anzahl der Tage seit Chr. Geb.
Mittlere Anomalie	$M = 211° 19' + 3548''\cdot123\,t$	
Mittlere Anomalie der Libration und des Bahnmittelpunktes . .	$A = 13° 30' + 754''\cdot806\,t$	

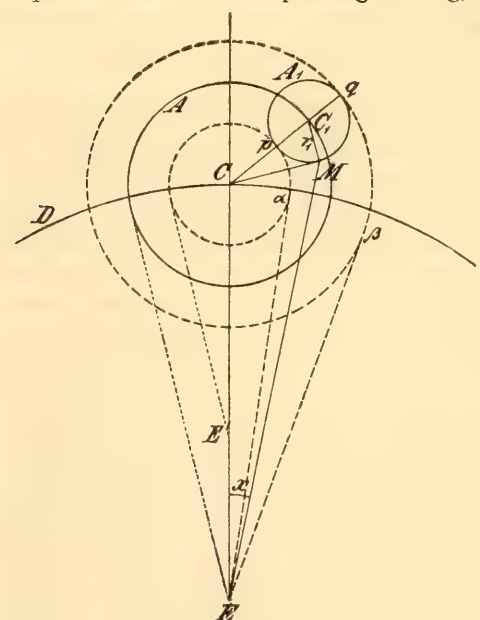
$$e \sin x = \rho \sin A$$

$$e \cos x = e_0 + \rho \cos A$$

$$M' = M + x; \quad \tang y = \frac{e \sin M'}{1 + e \cos M'}.$$

Wahre Länge der Erde gleich $L - y$ gezählt von γ Arietis.

In der Theorie des Mondes erklärt Copernicus die erste Ungleichheit, die *aequatio centri* = Mittelpunktsgleichung, genau so wie Ptolemäus durch einen Epicykel, und bestimmt auch die Grösse desselben aus Finsternissen auf dieselbe Art. Für die zweite Ungleichheit, die Evection, wählt Copernicus jedoch nicht die excentrische Lage des Deferenten, sondern einen Epicykel auf dem ersten, den er den Epicepicykel nennt, wodurch er den sehr wichtigen Vorteil erreicht, dass die Schwankungen in den Entfernungen des Mondes viel kleiner sind. Hiernach bewegt sich der Epicykel A (Fig. 23) auf dem Deferenten D, dessen Mittelpunkt E mit der Erde zusammenfällt, mit der mittleren täglichen siderischen Bewegung $\mu_1 = 13° 10' 34''\cdot952$, der Mittelpunkt C_1 des Epicykels A_1 bewegt sich mit der täglichen anomalistischen Bewegung $\mu_2 = 13° 3' 53''\cdot942$ in entgegengesetztem Sinne (die Anomalie vom instantanen Apogäum gezählt); endlich bewegt sich der Mond in dem Umfange des zweiten Epicykels so, dass er in den Syzygien dem Mittelpunkt C am nächsten, in den Quadraturen von C am weitesten entfernt ist. Der Mond vollführt also in dem Epicykel A_1 zwei Umläufe während einer Lunation, seine tägliche Bewegung im Epicykel ist also gleich der doppelt genommenen täglichen Abstandsänderung von Sonne und Mond, also da die letztere $\delta = 12° 11' 26''\cdot763$ ist, gleich 2δ. Nun ist für die Epoche Chr. Geb. die mittlere Länge des Mondes $M_1{}^{(0)} = 122° 19'$, die mittlere Anomalie $M_2{}^{(0)} = 207° 7'$ die Entfernung des mittleren Mondortes vom mittleren Sonnenorte $D = 209° 58'$, daher t Tage nach Chr. Geb.



(A. 23.)

$$M_1 = M_1{}^{(0)} + \mu_1 t \qquad M_2 = M_2{}^{(0)} + \mu_2 t \qquad D = D_0 + \delta t.$$

Da in den Finsternissen der Mond stets in dem dem Mittelpunkte C nächst gelegenen Punkte p des Epicepicykels ist, so werden alle diese Werthe in einem

Kreise gelegen sein, den man mit dem Halbmesser Cp um C beschreibt. Aus den Beobachtungen der Finsternisse erhält man daher nicht den Halbmesser des Epicykels CC_1 sondern nur den Werth Cp. COPERNICUS findet aus 3 beobachteten Finsternissen für $CE = 1 : Cp = 0{\cdot}08604$, die grösste hieraus folgende Ungleichheit ist $CE\alpha = 5°$. In den Quadraturen befindet sich der Mond in dem entferntesten Punkte q, demnach für verschiedene Lagen des Mittelpunkts C, in dem mit dem Halbmesser Cq um C beschriebenen Kreise. Da nun die grösste Gleichung in den Quadraturen

$$CE\beta = 7° \, 40'$$

ist, so folgt

$$C\beta = Cq = \sin 7° \, 40' = 0{\cdot}13341,$$

somit da

$$r_1 = C_1 p = C_1 q = \tfrac{1}{2}(Cq - Cp) \quad \text{und} \quad r = CC_1 = \tfrac{1}{2}(Cq + Cp)$$

$$r = 0{\cdot}1097 \qquad r_1 = 0{\cdot}0237.$$

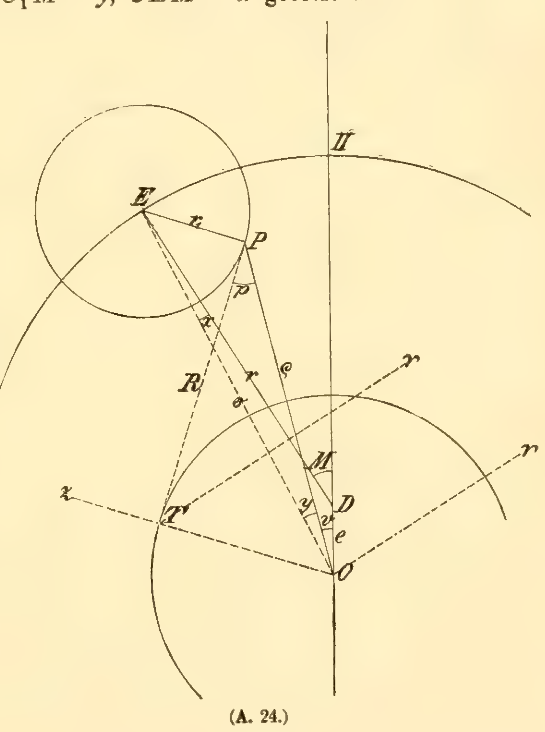
Man hat nun zur Berechnung eines Mondortes, da die Anomalie $CC_1M = 2D$ ist, wenn $CM = \tau$, $EM = R$, $CC_1M = y$, $CEM = x$ gesetzt wird

$$\tau \sin y = r_1 \sin 2D$$
$$\tau \cos y = r - r_1 \cos 2D$$
$$MCE = 180° - (M_2 + y)$$
$$R \sin x = \tau \sin (M_2 + y)$$
$$R \cos x = CE + \tau \cos (M_2 + y).$$

Wahre Länge des Mondes $= M_1 - x$.

Die Berechnung der Mondbreiten unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen des PTOLEMÄUS.

Die Maximalentfernung des Mondes ist hier $1 + (r + r_1) = 1{\cdot}1334$, die Minimalentfernung $1 - (r + r_1) = 0{\cdot}8666$, demnach das Verhältniss der Entfernungen 1·31, während es bei PTOLEMÄUS 1·93 ist. An Stelle von r_1 war nämlich bei PTOLEMÄUS die Excentricität $EE' = e$ des Deferenten (die Entfernungen sind $1 + r + e$ und $1 - r - e$). Um aber dieselben Erscheinungen zu erklären, muss e bedeutend grösser angenommen werden. Es ist nämlich



(A. 24.)

$$EE' = e = C_1 p \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(7° \, 40' + 5°) = r_1 \operatorname{cosec} 6° \, 20' = 9{\cdot}0652 \, r_1.$$

Auch für die Planeten liess COPERNICUS den »Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung« fallen, weil durch die Einführung desselben »thatsächlich die Bewegung im Deferenten ungleichmässig wird«. Statt dessen führt COPERNICUS für die drei oberen Planeten einen Epicykel ein, in welchem die Geschwindigkeit des Planeten gleich ist der Geschwindigkeit des Epicykelmittelpunktes im Deferenten. Dieser selbst ist excentrisch, für die drei oberen Planeten mit festem Mittelpunkt, für die beiden unteren mit beweglichem Mittelpunkt. Sei für die oberen Planeten O (Fig. 24) der Ort der Sonne, D der Mittelpunkt des De-

ferenten, demnach Π der Ort des Aphels, E der Mittelpunkt des Epicykels, und sei für diese Zeit P der Ort des Planeten im Epicykel, wenn $\sphericalangle DEP = ED\Pi$ gemacht wird. Man kann nun die wahre heliocentrische Anomalie $v = PO\Pi$ aus der mittleren heliocentrischen Anomalie ΠOE berechnen, wenn die Strecken $OD = e$ und $EP = r_1$ bekannt sind. Es ist, wenn L die mittlere Länge, M die mittlere Anomalie bedeutet

$$\Pi = \Pi_0 + \pi t \qquad L = L_0 + \mu t \qquad M = L - \Pi$$
$$\sigma \sin x = e \sin M \qquad \rho \sin y = r_1 \sin (M + x)$$
$$\sigma \cos x = r + e \cos M \qquad \rho \cos y = \sigma - r_1 \cos (M + x)$$
$$v = M - (x + y)$$
$$\text{wahre heliocentrische Länge } l = v + \Pi.$$

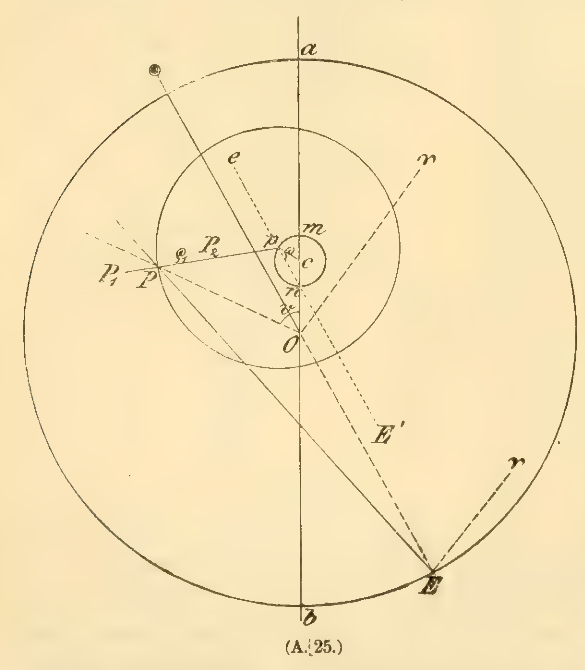
Nennt man nun den Unterschied $TOP = l_1 - l = p$, wo l_1 die wahre heliocentrische Länge der Erde ist, und ist λ die wahre geocentrische Länge des Planeten, so ist $\lambda = \Upsilon TP$, $l = \Upsilon OP$, und es ist daher

$$OPT = p = \lambda - l.$$

Den Winkel p nennt Copernicus die Parallaxe der Erdbahn; dieselbe bestimmt sich aus den Gleichungen

$$R \sin p = R_0 \sin (l_1 - l)$$
$$R \cos p = \rho - R_0 \cos (l_1 - l)$$
$$\lambda = l + p,$$

wo R die geocentrische Entfernung des Planeten und $R_0 = OT$ der Halbmesser der Erdbahn ist. Die Bestimmung von e und M für eine gewisse Epoche wird aus den Beobachtungen dreier Oppositionen nach Ptolemäus vorgenommen; für die drei oberen Planeten nimmt dann Copernicus $r_1 = \frac{1}{3}e$; die Bestimmung r in Einheiten von R_0 folgt aus einer Beobachtung ausserhalb der Opposition.



(A. 25.)

Für die unteren Planeten Venus und Mercur ist der Mittelpunkt der Kreisbahn excentrisch, aber nicht fest, sondern selbst in einem kleinen Kreise mp (Fig. 25) beweglich, dessen Halbmesser ρ für Venus gleich $\frac{1}{3}Oc$, für Mercur kleiner als $\frac{1}{3}Oc$ ist. Der Mittelpunkt der Bahn ist für die Venus in m, für den Mercur in n, wenn die Erde (oder Sonne) in a oder b, d. h. in der Richtung des Aphels oder Perihels der Planetenbahn sich befindet. Die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Bahn in dem kleinen Kreise mpn ist daher gleich der doppelten scheinbaren Geschwindigkeit der Sonne; daher ist, wenn $mcp = 2bOE$ gemacht wird, der Mittelpunkt der Bahn in p, wenn die Erde in E ist, und wenn $pe \parallel EO$ gezogen wird, epP gleich dem heliocentrischen Winkelabstand zwischen dem Erdorte und dem mittleren Planetenorte. Den Winkel epP nennt Copernicus

die Commutation, und die Veränderung dieser Entfernung die Bewegung der Commutation. Ist dieselbe μ', so ist für die unteren Planeten $\mu' = \mu - \odot$, indem das Gestirn der Erde täglich um diesen Betrag voraneilt. (Für die oberen Planeten ist $\mu' = \odot - \mu$, um welchen Betrag das Gestirn gegen die Erde zurückbleibt). Man hat weiter für die Berechnung eines Ortes

Mittlere geocentrische Länge der Sonne $l_\odot = l_\odot{}^0 + \odot t$
Mittlere heliocentrische Länge der Erde $l_1 = 180^\circ + l_\odot$
Winkel der Commutation $M' = M_0' + \mu' t$.

Ist ferner die Länge des Aphels Oa gleich $\Pi = \Pi^0 + \pi t$ so ist

$$mcp = 2(l_1 - \Pi); \qquad epP = M'$$

und man hat, wenn $pP = r$, $OP = \sigma$, und $\sphericalangle \odot OP = B$ gesetzt wird, mit den Bezeichnungen der Figur

$$\sigma \sin v = r \sin(l_1 + M' - \Pi) + \rho \sin 2(l_1 - \Pi)$$
$$\sigma \cos v = r \cos(l_1 + M' - \Pi) + \rho \cos 2(l_1 - \Pi) + 3\rho$$
$$B = v + \Pi - M.$$

Dann erhält man, wenn wieder die geocentrische Distanz des Planeten $EP = R$, der Halbmesser der Erdbahn $OE = R_0$ und $\sphericalangle PEO = q$ gesetzt wird, die geocentrische Länge aus den Formeln

$$R \sin q = \sigma \sin B$$
$$R \cos q = \sigma \cos B - R_0$$
$$\lambda = M + q\text{[1]}.$$

Für den Mercur kommt noch hinzu, dass sich der Planet nicht in P befindet, sondern in dem Durchmesser pP des Deferenten durch ein gewisses Stück $P_1P_2 = 2\rho_1$ hin und her bewegt, und zwar ist die Periode der Bewegung ebenfalls ein halbes Jahr, indem der Planet in P_2 ist, so oft die Erde sich in der Richtung des Aphels oder Perihels der Mercursbahn (in a oder b) befindet. Der jeweilige Abstand r^1 des Mercur von dem Mittelpunkt p seiner instantanen Bahn wird demnach

$$r^1 = r - \rho_1 \cos 2(l_1 - \Pi)$$

und es ist $Oc = e$ verschieden von 3ρ; man hat daher für den Mercur:

$$\sigma \sin v = r^1 \sin(l_1 + M' - \Pi) + \rho \sin 2(l_1 - \Pi)$$
$$\sigma \cos v = r^1 \cos(l_1 + M' - \Pi) + e + \rho \cos 2(l_1 - \Pi)$$
$$B = v + \Pi - M$$
$$R \sin q = \sigma \sin B$$
$$R \cos q = \sigma \cos B - R_0$$
$$\lambda = M + q.$$

Nach COPERNICUS ist:

für den	μ'	M_0'	μ	l_0	Π_0	π	r	e	
Saturn	57′ 7″·735	205° 49′	2′ 0″·454	118° 20′	224° 55′	+ 36″	9·1742	0·7835	$r_1 = 0{\cdot}2612$
Iupiter	54′ 9″·064	98° 16′	4′ 59″·125	10° 47′	154° 9′	+ 10″	5·2191	0·3586	$r_1 = 0{\cdot}1195$
Mars .	27′ 41″·673	238° 22′	31′ 26″·516	150° 53′	107° 52′	+ 28″	1·5198	0·2219	$r_1 = 0{\cdot}0740$
Venus	36′ 59″·476	126° 45′	96′ 7″·665	39° 16′	48° 20′	—	0·7193	0·0312	$\rho = 0{\cdot}0104$
Mercur	186′ 24″·228	46° 24′	245′ 32″·417	318° 55′	182° 55′	+ 57″	0·3763	0·0736	$\rho = 0{\cdot}0212$ $\rho_1 = 0{\cdot}0190$

[1]) Die Formeln für die Ermittelung der geocentrischen Länge sind dadurch verschieden, dass in den letzteren die Strecken EP, OP auf EO projicirt wurden, in den vorhergehenden aber die Strecken EP, OE auf OP.

Eine bedeutende Vereinfachung erhielt die Theorie der Breitenbewegungen in dem heliocentrischen System. Der Unterschied zwischen ἔγκλισις und λόξωσις konnte verschwinden, nachdem ja die Bahnlage sich nicht geändert hatte, ob nun die Erde sich in der Richtung der Apsiden oder in anderen Punkten der Planetenbahn befand. Allein COPERNICUS nahm die von PTOLEMÄUS gefundenen Differenzen in den Neigungen der Bahnen als reell an (während sie nur in Beobachtungsfehlern ihre Ursachen hatten), wodurch er in der Apsidenrichtung und senkrecht dazu verschiedene Neigungen, die er Deklination und Obliquation nennt, erhielt; zur Erklärung musste er dann eine schwingende Bewegung der Bahn um die Knotenlinie annehmen. Auch die Deviation, in Folge deren Venus beständig gegen Norden, Mercur stets gegen Süden getragen wird, behält COPERNICUS noch bei[1]).

Das COPERNICANI'sche System brachte nicht gleich die Vortheile, die wir heute in demselben finden, denn noch waren die Kreisbahnen das erklärende Element, und die Ungleichheiten mussten durch Epicykeln dargestellt werden. Dadurch wurde das System allerdings nicht schlechter, sondern nur complicirter gemacht, denn durch Superposition einer genügenden Anzahl von Epicykeln kann jede periodische Bewegung dargestellt werden, wobei allerdings für jede der Coordinaten (Bewegung in Länge, in Breite, und Darstellung der Entfernungen) ein eigenes epicyklisches System nöthig würde. Das System erhielt auch gleich anfangs eine ziemlich rasche Verbreitung. COPERNICUS selbst sagt, dass er von den beiden Kirchenfürsten, dem gelehrten Cardinal NICOLAUS SCHOMBERG von Capua, und dem Bischof TIEDEMANN GIESE von Kulm wesentlich zur Herausgabe des Werkes ermuntert wurde, und die Dedication seines Werkes »De revolutionibus orbium coelestium«, in welchem er sein System auseinander setzte, an Papst PAUL III. beweist, dass selbst das Oberhaupt der katholischen Kirche sich damals der neuen Lehre günstig zeigte. Zu den ersten Anhängern desselben unter den Männern der Wissenschaft gehörten REINHOLD[2]) und RHAETICUS[3]). Der erstere, welcher übrigens auch eine neue mit Commentaren und Figuren versehene Ausgabe von PEURBACH's »Theoricae novae planetarum« besorgte, rechnete unter Zugrundelegung der COPERNICANI'schen Lehre neue Tafeln, die »*Tabulae Prutenicae*«. Der letztere war überhaupt einer der ersten, welcher von COPERNICUS selbst den Inhalt seines Werkes erfuhr; er schrieb an SCHONER eine kurze Zusammenfassung desselben, worin er auf die besonderen Vorzüge der COPERNICANIschen Lehre hinweist, und welche später als »*Narratio Prima*« dem Werke beigedruckt wurde. SCHONER[4]) scheint aber doch ein starrer Anhänger des alten PTOLEMÄI'schen Systems geblieben zu sein; er gab Planetentafeln, eigentlich einen Abdruck der ALFONSINI'schen heraus, hierzu eine Theorie der Planeten nach PEURBACH, wobei er zur Förderung der Anschauung für die Bewegung jedes Planeten das ganze Epicykelsystem desselben nebst der Bewegung der achten Sphäre durch Modelle vorstellte, welche jedoch den Ausspruch ALFONS X.

[1]) Näheres hierüber s. HERZ, Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, II. Theil, pag. 94 ff.

[2]) Geboren 1511 in Thüringen; seit 1536 war er bis zu seinem 1553 erfolgten Tode Professor der Mathematik in Wittenberg.

[3]) Geboren 1514 in Feldkirch; auch er war 1537 Professor der Mathematik in Wittenberg geworden, ging 1542 in gleicher Eigenschaft nach Leipzig, blieb jedoch auch hier nicht lange, sondern ging nach Polen und Ungarn, und starb 1576 in Kaschau.

[4]) 1477 in Nürnberg geboren. Seit 1526 bekleidete er bis zu seinem 1547 erfolgten Tode eine mathematische Lehrstelle in Nürnberg.

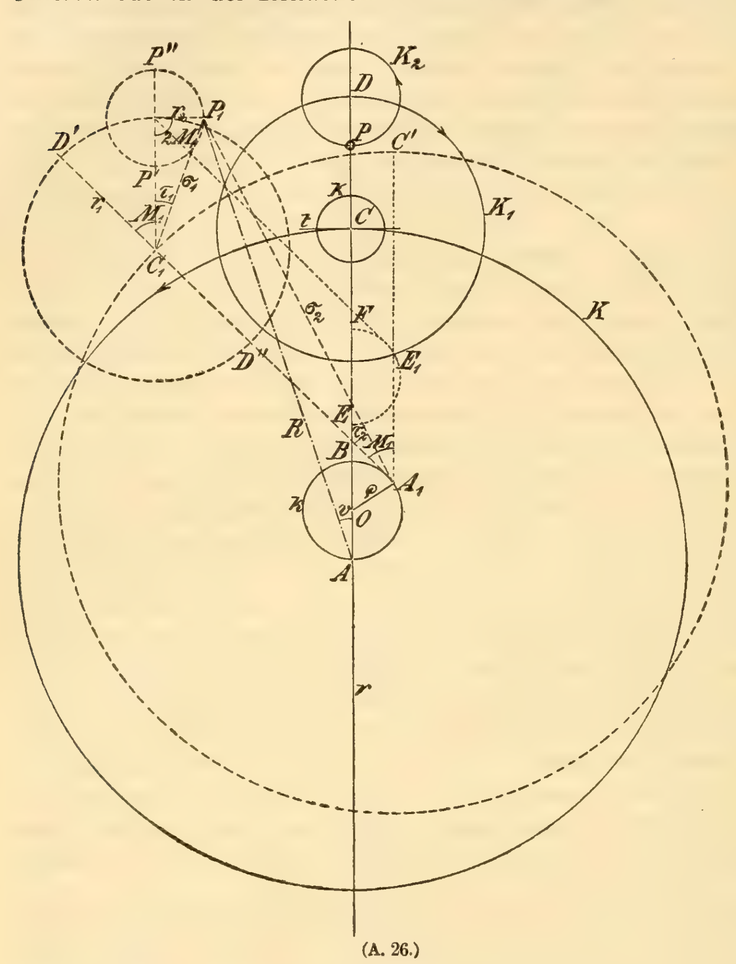
»Wenn Gott mich bei Erschaffung der Welt zu Rathe gezogen hätte, so hätte ich es einfacher gemacht«, nur zu sehr zu rechtfertigen schienen.

Es scheint jedoch die Kirche sehr bald eine entschieden ablehnende, vielleicht schon jetzt jene feindliche Haltung gegen das COPERNICANI'sche System eingenommen zu haben, welche bald in offene Feindseligkeiten ausbrach. Es ist sehr wahrscheinlich, dass dies die Ursache war, warum TYCHO BRAHE sein gewissermaassen vermittelndes System aufstellte, nach welchem die 5 Planeten Mercur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn sich um die Sonne bewegen, und diese selbst so wie der Mond um die Erde, ein System, das später in der Zeit der Meinungskämpfe wiederholt auftritt (bei REIMARUS URSUS, LANSBERG, RÖSLIN u. a.)

TYCHO BRAHE[1]) beobachtete von 1576 bis 1597 in der für ihn von FRIEDRICH II. von Dänemark zu diesem Zwecke erbauten Uranienburg auf der Insel Hveen, und später (nach dem Tode seines fürstlichen Gönners) in Prag. Seine theoretischen Arbeiten sind in den beiden Werken »über den neuen Stern von 1572« und »über den Kometen von 1577« niedergelegt. Die Schiefe der Ekliptik findet er 23° 31½'; bezüglich der Ungleichheiten in der Präcessionsbewegung schliesst er sich der Theorie des COPERNICUS an. Für die Bestimmung des Apogäums und der Excentricität der Sonnenbahn schlägt er ebenfalls den von COPERNICUS angegebenen Weg ein. Er findet die Länge des Apogäums der Sonnenbahn 95½°, die Excentricität gleich 0·03584, jedoch nimmt er eine eigene Bewegung des Apogäums (unabhängig von der Präcessionsbewegung) nicht an, und schreibt die verschiedenen erhaltenen Werthe nur Beobachtungsfehlern, besonders aber der Vernachlässigung der Refraction zu. Er selbst giebt eine Tafel der Refraction für verschiedene Höhen, wie er sie aus den Beobachtungen ableitete. Er findet jedoch die Refraction verschieden für Fixsterne, für die Sonne und den Mond. Für die Sonne ist z. B. die Horizontalrefraction 34', für den Mond 33', für die Fixsterne nur 30'. In der Höhe von 10° wird sie für die Sonne gleich 10', für den Mond 10¾', für die Fixsterne nur 5½'. Die Bestimmung der Refraction nimmt TYCHO sowohl für die Sonne als auch für die Fixsterne so vor, dass er das Gestirn im Meridian beobachtet, wo seine Refraction als verschwindend angenommen werden kann, und gleichzeitig Azimuthe und Zenithdistanzen ausserhalb des Meridians misst, für die Sonne natür-

[1]) Zu Knudstrup in Dänemark am 14. December 1546 geboren, bezog er 1559 die Universität Kopenhagen, 1562 diejenige in Leipzig, wo er die Rechte studiren sollte, sich aber mehr mit Astronomie befasste. 1565 kehrte er in sein Vaterland zurück, wo er aber auf den Widerstand seiner adelsstolzen Familie bei seinen astronomischen Beschäftigungen stiess. Er ging wieder nach Deutschland zurück, wo er sich abwechselnd in Rostock, Wittenberg und Augsburg aufhielt; 1570 kehrte er nach Dänemark zurück, wo ihm sein Onkel STEEN BILDE unweit Knudstrup eine Sternwarte baute. Seine bald darauf erfolgte Verheirathung mit einer Bürgerlichen (CHRISTINE) entzweite ihn abermals mit seiner Familie. Er ging wieder nach Deutschland, und besuchte auch die Schweiz und Venedig. Nach seiner Rückkehr 1575 beschenkte ihn König FRIEDRICH II. dem er durch den Landgrafen WILHELM IV. von Hessen empfohlen war, mit der Insel Hveen, wo ebenfalls mit Unterstützung des Königs eine grosse Sternwarte, die Uranienburg, gebaut wurde. Auf ihr beobachtete TYCHO mit LONGOMONTAN und TENGNAGEL bis 1596. Nach dem Tode FRIEDRICH II. änderten sich die Verhältnisse für ihn, und er verliess 1597 sein Vaterland, ging nach Rostock, wo er sich nahe ein Jahr aufhielt, und dann nach Prag 1599, wo ihm Kaiser RUDOLPH II. das in der Nähe gelegene Schloss Benatek schenkte und eine Sternwarte erbauen liess, welche er bald aus Mangel an Platz mit einem Palais in Prag, das ihm der Kaiser zu diesem Zweck überliess, vertauschte. LONGOMONTAN und TENGNAGEL waren ihm nach Prag gefolgt, und bald gesellte sich KEPLER hinzu, doch starb TYCHO schon wenige Monate darauf am 24. October 1601.

lich zur Zeit der Solstitien, wo sich die Deklination derselben im Laufe der Beobachtungszeit nur wenig ändert. Für die Sonne schlug er übrigens noch den Weg ein, dass er ihre Rectascension sowohl beim Meridiandurchgange als auch beim Auf- und Untergange mittels einer Aequinoctialarmille bestimmt. Die Unterschiede in der Refraction für die Sonne und die Fixsterne rührten einestheils von den Beobachtungsfehlern, andererseits aber auch davon her, dass er die Sonnenparallaxe mit einem falschen Werthe — er nimmt die Horizontalparallaxe gleich 3′ an — einführte.



(A. 26.)

Vielleicht die wichtigste Entdeckung Tycho's ist die Entdeckung zweier neuer Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes: der »Variation« und der »jährlichen Gleichung«. Die Bewegung des Mondes erfolgt nach Tycho in folgender Weise: In A (Fig. 26) ist die Erde, der Mittelpunkt des Deferenten beschreibt einen kleinen Kreis AA_1B derart, dass er zur Zeit der Syzygien in A ist (mit der Erde zusammenfällt). Die Geschwindigkeit der täglichen Bewegung des Deferentenmittelpunktes in diesem kleinen Kreise ist demnach gleich der doppelten täglichen Aenderung der Entfernung des Mondes von der Sonne. Nach einer gewissen Zeit wird der Mittelpunkt des Deferenten nach A_1 gekommen sein, sodass AOA_1 gleich der doppelten Entfernung Sonne—Mond ($= 2D$) ist. In dem Deferenten bewegt sich der Epicykelmittelpunkt C mit der anomalistischen Geschwindigkeit und der Mittelpunkt D eines zweiten Epicykels in dem ersten Epicykel ebenfalls mit der anomalistischen Geschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne. In dem zweiten Epicykel endlich bewegt sich der Mond. Es ist für die Zeit des Apogäums des Mondes der Mittelpunkt D von der Erde am weitesten, der Punkt P selbst aber dem Mittelpunkt C am nächsten.

Sieht man zunächst von dem zweiten Epicykel ab, so könnte das System des Deferenten K und des Epicykels K_1 durch einen excentrischen Kreis ersetzt

werden, dessen Excentricität $AE = CD$ ist. Wir wollen die Halbmesser der Kreise k, K, K_1, K_2 bezw. mit ρ, r, r_1, r_2 bezeichnen, wobei $r = 1$ angenommen werden soll. Es wäre also die Excentricität der Mondbahn im Apogäum und Perigäum gleich r_1, die grösste Mittelpunktsgleichung x_s bestimmt durch $\sin x_s = r_1$; nachdem aber inzwischen der Mond dem Mittelpunkte C bald um r_2 näher gerückt, bald um ebensoviel entfernter ist und überhaupt alle zwischenliegenden Entfernungen annehmen kann, so wird die grösste Mittelpunktsgleichung schwanken zwischen den durch $\sin x_s^{(1)} = r_1 + r_2$ und $\sin x_s^{(2)} = r_1 - r_2$ bestimmten Grenzen. Die grösstmögliche Mittelpunktsgleichung wird demnach $x_s^{(1)}$. Für eine andere Lage des Deferentenmittelpunktes (A_1) ist die Linie OC, von welcher bei TYCHO die Anomalien gezählt werden, nach A_1C' gerückt, und die Bahn des Punktes D um A, ist ebenfalls durch einen excentrischen Kreis darstellbar, dessen Mittelpunkt in E_1 liegt. Die wahre Excentricität der Bahn von D ist demnach AE_1 und die grösste Mittelpunktsgleichung schwankt zwischen $\arcsin(AE_1 + r_2)$ und $\arcsin(AE_1 - r_2)$. Für die Quadraturen ist der Mittelpunkt des Deferenten nach B gekommen und die Bahn des Punktes D ist ein excentrischer Kreis, dessen Mittelpunkt in F liegt, dessen Excentricität also gleich $AF = r_1 + 2\rho$ ist, dessen grösste Mittelpunktsgleichung daher durch $\sin x_q = r_1 + 2\rho$ gegeben wäre. In Folge der Bewegung des Mondes im Kreise K_2 ist daher der grösste Werth derselben bestimmt durch $\sin x_q^{(1)} = (2\rho + r_1 + r_2)$. Man hat demnach für die beobachteten grössten Mittelpunktsgleichungen (4° 58′ und 7° 28′ nach TYCHO)

in den Syzygien $\sin x_s = \sin 4° 58' = 0{\cdot}08700 = r_1 + r_2$

in den Quadraturen $\sin x_q = \sin 7° 28' = 0{\cdot}13048 = 2\rho + r_1 + r_2$,

woraus sich $\rho = 0{\cdot}02174$ findet. Unter Berücksichtigung der einfachen Mittelpunktsgleichung hätte TYCHO daher mit einem excentrischen Kreise ausgereicht, dessen Mittelpunkt sich in dem Kreise EE_1F bewegt, und dessen Halbmesser $r_1 + r_2 = 0{\cdot}08700$ gewesen wäre. TYCHO fand aber, dass die Beobachtungen besser dargestellt würden, wenn er den excentrischen Kreis durch einen Epicykel ersetzte, dessen Halbmesser er in zwei Theile zerlegte, sodass $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ ist, woraus $r_1 = 0{\cdot}05800$, $r_2 = 0{\cdot}02900$ folgt; durch diese Annahme wird überdies die Entfernung A_1P_1 stets kleiner bleiben als $r + r_1 + r_2$ und stets grösser als $r - r_1 - r_2$, weil die Strecke C_1P'' nie in die Richtung C_1D', die Strecke C_1P' nie in die Richtung C_1D'' fällt. Damit ist aber die Mondtheorie noch nicht erledigt. Aus vielen Beobachtungen fand TYCHO, dass er den Mittelpunkt C des ersten Epicykels etwas verschieben müsse und zwar in der Richtung der Tangente vor- oder rückwärts und zwar um den Betrag $40\frac{1}{2}' \sin 2D$ (die Bewegung wird durch den kleinen Kreis $\varkappa$ definirt, erfolgt aber in Tangente t) um welchen Betrag demnach die Längen des Mondes vergrössert erscheinen. Diese von TYCHO mit dem Namen »Variation« belegte Ungleichheit ist auch ihrer Grösse nach von TYCHO fast genau bestimmt worden, während das von der doppelten Anomalie abhängige Glied etwas fehlerhaft ist. Man hat nämlich zur Berechnung nach der TYCHONI'schen Zerlegung:

Mittlere Länge des Mondes $M = M^{(0)} + \mu\tau$

Mittlere Anomalie des Mondes $M_1 = M_1^{(0)} + \mu_1\tau$

$$\sigma_1 \sin\tau_1 = r_2 \sin 2M_1 \qquad \sigma_2 \sin\tau_2 = \sigma_1 \sin(M_1 + \tau_1)$$

$$\sigma_1 \cos\tau_1 = r_1 - r_2 \cos 2M_1 \qquad \sigma_2 \cos\tau_2 = r + \sigma_1 \cos(M_1 + \tau_1)$$

$$\sphericalangle D'C_1P_1 = M_1 + \tau_1 \qquad \sphericalangle P_1A_1C' = M_1 - \tau_2.$$

Nun bildet man die verbesserte Länge des Mondes $M' = M - \tau_2$ und zieh davon die wahre Länge der Sonne ab, d. h. man bildet den Abstand von

Sonne und Mond, wo für den Mond bereits die Prosthaphärese des Epicykels berücksichtigt wird, also

$$D = M' - l$$

dann hat man

$$R \sin v = \sigma_2 \sin (M_1 - \tau_2) - \rho \sin 2D$$
$$R \cos v = \sigma_2 \cos (M_1 - \tau_2) + \rho - \rho \cos 2D.$$

Hieraus oder direkt durch Projection aller Strecken auf AD und auf eine dazu senkrechte Richtung erhält man:

$$R \sin v = r \sin M_1 - r_2 \sin 2M_1 - \rho \sin 2D$$
$$R \cos v = r \cos M_1 + r_1 - r_2 \cos 2M_1 + \rho - \rho \cos 2D$$

und daraus

$$R \sin (M_1 - v) = (r_1 + r_2 + \rho) \sin M_1 + \rho \sin (2D - M_1)$$
$$R \cos (M_1 - v) = r + (r_1 - r_2 + \rho) \cos M_1 - \rho \cos (2D - M_1).$$

Entwickelt man $tang(M_1 - v)$ nach Potenzen von $r_1 : r$, $r_2 : r$, $\rho : r$, bleibt bei den zweiten Potenzen stehen und setzt $r = 1$, so erhält man:

$$v = M_1 - \frac{r_1 + r_2 + \rho}{arc\, 1'} \sin M_1 + \tfrac{1}{2} \frac{(r_1 + \rho)^2 - r_2^2}{arc\, 1'} \sin 2M_1 - \frac{\rho}{arc\, 1'} \sin (2D - M_1)$$
$$- \tfrac{1}{2} \frac{\rho^2}{arc\, 1'} \sin (4D - 2M_1) + \frac{\rho(r_1 + \rho)}{arc\, 1'} \sin 2(D - M_1) - \frac{\rho r_2}{arc\, 1'} \sin 2D$$

und durch Substitution der Werthe für r_1, r_2, ρ:

$$v = M - 6° 13'{\cdot}8 \sin M_1 + 9'{\cdot}5 \sin 2M_1 - 1° 14'{\cdot}7 \sin (2D - M_1)$$
$$- 0'{\cdot}8 \sin (4D - 2M_1) + 6'{\cdot}0 \sin 2(D - M_1) - 2'{\cdot}2 \sin 2D. \qquad (a)$$

Bringt man noch an v die Variation $+ 40'{\cdot}5 \sin 2D$ an, so wird, wenn die Länge des Apogäums $AC = \Pi$ gesetzt wird

$$\text{Wahre Länge des Mondes} = \Pi + v + 40'{\cdot}5 \sin 2D. \qquad (b)$$

TYCHO hatte ausserdem noch eine andere Ungleichheit in der Bewegung des Mondes bemerkt, die er dadurch berücksichtigt, dass er für die Bewegung der Mondorte eine andere Zeitgleichung (s. d.) verwendet, wie für die Sonnenörter. Rechnet man aus der von TYCHO gegebenen Zeitgleichungstabelle für die Reduction der wahren Zeit auf mittlere Zeit den analytischen Ausdruck, so findet sich

$$Z = - 8^{m}{\cdot}179 \sin (\odot - 95° 10') - 10^{m}{\cdot}16 \sin 2\odot$$
$$+ 0^{m}{\cdot}22 \sin 4\odot - 0^{m}{\cdot}12 \cos 4\odot,$$

sodass, wenn w die wahre, t die mittlere Zeit bedeutet,

$$t = w + Z$$

ist. Der Ausdruck für Z ist thatsächlich ziemlich vollständig und enthält sowohl die Reduction wegen der ungleichmässigen Bewegung der Sonne in der Ekliptik (erstes Glied) als auch die Reduction auf den Aequator. Für den Mond wird aus der wahren Zeit eine mittlere Zeit t_1 mittels einer Zeitgleichungstabelle gefunden, für welche

$$t_1 = w + Z_1$$

ist, und für welche sich aus der Tabelle der analytische Ausdruck

$$Z_1 = - 595^{s}{\cdot}93 \sin 2\odot + 12^{s}{\cdot}817 \sin 4\odot$$

ergiebt, in welcher also die Mittelpunktsgleichung der Sonne unberücksichtigt bleibt. Nun wäre der wirkliche mittlere Ort des Mondes t Tage nach der Epoche $M' = M_0 + \mu t$, der von TYCHO gerechnete ist aber $M_1 = M_0 + \mu t_1$, wobei $t_1 = w + Z_1 = t + (Z_1 - Z)$ ist, folglich

$$M_1 = M_0 + \mu t + (Z_1 - Z)\mu$$

daher

$$M_1 - M' = (Z_1 - Z)\mu.$$

Da nun, wenn $v_\odot$ die vom Apogäum der Sonne gezählte Anomalie der Sonne bedeutet,

$$\mu (Z_1 - Z) = + 269''\cdot 4 \sin (\odot - 95^\circ 10') = + 4'\cdot 5 \sin v_\odot$$

ist, so wird die wegen Zeitgleichung corrigirte, von TYCHO angewendete mittlere Länge des Mondes M gleich der uncorrigirten (wirklichen) mittleren Länge zur Beobachtungszeit vermehrt um $4'\cdot 5 \sin v_\odot$. Der in Gleichung (a) auftretende Werth von M enthält bereits implicite das letzte Glied, sodass nach TYCHO:

$$\begin{gathered}\text{Wahre Länge des Mondes} = \text{Mittlere Länge des Mondes} \\ - 6^\circ 13'\cdot 8 \sin M_1 + 9'\cdot 5 \sin 2M_1 - 1^\circ 14'\cdot 7 \sin (2D - M_1) \\ - 0'\cdot 8 \sin (4D - 2M_1) [+ 6'\cdot 0 \sin 2 (D - M_1)] + 38'\cdot 3 \sin 2D + 4'\cdot 5 \sin v_\odot.\end{gathered}$$

Der wahre Werth der Mondgleichung lautet:

$$\begin{gathered}- 6^\circ 17'\cdot 3 \sin M_1 + 12'\cdot 8 \sin 2M_1 - 1^\circ 16'\cdot 5 \sin (2D - M_1) + 0'\cdot 5 \sin (4D - 2M_1) \\ - 2' \sin D + 39'\cdot 5 \sin 2D + 11'\cdot 2 \sin v_\odot.\end{gathered}$$

Die letzten beiden Ausdrücke repräsentiren die Variation und die jährliche Gleichung; die erstere ist daher bei TYCHO sehr nahe richtig, die zweite um mehr als die Hälfte zu klein.

Um die Breiten des Mondes darzustellen, sah sich TYCHO veranlasst, die Neigung der Mondbahn veränderlich anzunehmen. Er fand nämlich, dass die grössten Breiten des Mondes in den Syzygien 4° 58'·5, in den Quadraturen 5° 17'·5 waren. Die hieraus sich ergebende Veränderlichkeit der Neigung beträgt 19', weshalb TYCHO annimmt, dass sich die Pole der Mondbahn in einem kleinen Kreise bewegen, dessen Halbmesser 9'·5 ist, und dessen Mittelpunkt vom Pole der Ekliptik 5° 8' absteht.

Die Entfernung des Mondes findet TYCHO in der Erdnähe $52\frac{1}{4}$, in der Erdferne $60\frac{1}{6}$, das Verhältniss der grössten und kleinsten Entfernung gleich 1·16. Dagegen findet er für den scheinbaren Halbmesser des Mondes in der grössten Entfernung von der Erde 32' 32'', in der kleinsten 36' 0'', also das Verhältniss derselben gleich 1·11. Die Entfernung der Sonne von der Erde nimmt TYCHO gleich 1150 Erdhalbmessern, und dieses ist auch die mittlere Entfernung von Mercur und Venus. Die mittlere Entfernung des Mars ist 1745, des Jupiter 3990, des Saturn 10550 Erdhalbmesser, die Entfernung der Fixsternsphäre gleich 14000 Erdhalbmessern.

TYCHO BRAHE war der erste, der den Lauf eines Kometen durch Rechnung verfolgte. Da er keine messbare Parallaxe für den Kometen von 1577 fand, so nahm er als erwiesen an, dass er zu den Weltkörpern gehöre, und schloss, dass er eine Kreisbahn ausserhalb der Venusbahn um die Sonne beschreibe, deren Halbmesser kleiner als die Entfernung der Erde von der Sonne sei. TYCHO fand jedoch ferner, dass der Komet sich in dieser Bahn nicht gleichförmig bewegte, auch schien ihm eine Zerlegung in zwei einfache Bewegungen (auf einem Epicykel) nicht geeignet, denn er glich die Bewegung empirisch derart aus, dass die Veränderungen derselben ziemlich regelmässig stattfänden. Er gab auch eine »Ephemeride« des Kometen, in welcher ausser dieser heliocentrischen Bewegung auch die geocentrischen Längen und Breiten nebst den täglichen Veränderungen derselben angeführt erschienen. Die Richtung der Kometenschweife, welche FRACASTOR († 1553) und APIAN (1495—1552) von der Sonne weggerichtet fanden, findet TYCHO von der Venus weggerichtet, eine Erscheinung, die sich wohl durch die Krümmung der Kometenschweife erklären lässt.

Auch Wilhelm IV., Landgraf von Hessen[1]) (1532–1592), welcher sich in Kassel eine Sternwarte erbaute und daselbst anfänglich mit Schoner, später mit Rothmann († 1596) und Bürgi (1552—1632) beobachtete, scheint sich eher dem Tychoni'schen System angeschlossen zu haben, wie sich aus dem von Rothmann verfassten Werke über den Kometen von 1585 folgern lässt. Ueberhaupt scheinen die Arbeiten Tycho's seit seinem Besuche bei Wilhelm von Hessen im Jahre 1575 von wesentlichem Einfluss auf den letzteren gewesen zu sein. Bemerkenswerth ist, dass in dem eben erwähnten Werke über den Kometen von 1585 sich auch eine Ephemeride des Kometen ähnlich der von Tycho für den Kometen von 1577 gegebenen findet. Besondere Verdienste erwarb sich Wilhelm von Hessen auch noch durch die sorgfältige und wiederholte Beobachtung von Fixsternen. Dabei wurde die alte Methode der direkten Bestimmung von Länge und Breite verlassen; es wurden die Deklinationen aus Meridianhöhen, die Rectascensionen aus den Differenzen der Durchgangszeiten durch den Meridian ermittelt, wobei also, wie es scheint, zum ersten Male für die direkte Rectascensionsbestimmung die Uhr verwendet wurde, und schliesslich aus den Aequatorcoordinaten die Eklipticalcoordinaten abgeleitet. Bei der Bestimmung der Deklinationen hatte Wilhelm von Hessen bereits die Refraction berücksichtigt. Bürgi soll sich überdies besondere Verdienste durch die Construction guter Uhren sowie durch die Erfindung eines den Logarithmen ähnlichen Algorithmus erworben haben.

Unterdessen war in der Kirche ein Umschwung eingetreten. Die Copernicani-sche Lehre war mehr als irgend eine andere wissenschaftliche Reform geeignet, den Sieg der Wissenschaft über den Dogmatismus anzubahnen. Und wenn erst das durch die Kirche sanctionirte Dogma von der Bewegung der Sonne fallen gelassen wurde, so lag für die Kirche die Gefahr nahe, dass auch bald andere Dogmen nachfolgen könnten. Es trat demnach eine den Fortschritt der Wissenschaften hemmende Reaction ein; die Wissenschaft musste dem Dogma der Religion untergeordnet werden, für die Physik war Aristoteles, für die Astronomie Ptolemäus die unanfechtbare Autorität. Im Jahre 1600 fiel der gelehrte und aufgeklärte Giordano Bruno, ein Anhänger des Copernicani'schen Systems, dieser Richtung zum Opfer, am 17. Februar wurde er von der Inquisition dem Scheiterhaufen übergeben. Es war damals ziemlich gefährlich — am meisten allerdings in dem unter geistlicher Herrschaft stehenden Italien — das heliocentrische System anzuerkennen, und viele stellten sich aus Utilitätsgründen auf den Tychoni'schen Standpunkt.

Die Tychoni'sche Planetentheorie, welche im Grunde genommen für die oberen Planeten nur eine Transposition des Copernicani'schen, für die unteren Planeten identisch mit dem Ptolemäi'schen ist, findet sich auseinandergesetzt in

[1]) 1532 dem Landgrafen Philipp dem Grossmüthigen geboren, studirte er anfänglich in Cassel, ging 1546 nach Strassburg, ergriff jedoch im folgenden Jahre, nachdem sein Vater in Gefangenschaft gerathen, die Zügel der Regierung, befreite seinen Vater 1552 und widmete sich wieder den Studien. Für einige Zeit war der von ihm aus Nürnberg berufene Schoner in Kassel und beobachtete auf der daselbst 1561 erbauten Sternwarte sehr fleissig. 1566 vermählte sich Wilhelm IV. mit Sabine von Württemberg und übernahm 1567 nach dem Tode seines Vaters die Regierung. Durch den Besuch Tycho's neuerdings angeeifert, berief er 1577 Rothmann und den Uhrmacher Bürgi. Nachdem der erstere 1590 von der Sternwarte schied, hatte Bürgi fortan die sämmtlichen Arbeiten an der Sternwarte zu besorgen, und blieb auch nach dem am 25. August 1592 erfolgten Tode des Landgrafen Wilhelm nach dem Wunsche des neuen Landgrafen Moritz in seiner seitherigen Stellung.

der *Astronomia danica* von LONGOMONTAN[1]), einem Schüler und späteren Mitarbeiter TYCHO's. In diesem Werke, welches eigentlich ein Lehrbuch der Astronomie ist, werden die drei Weltsysteme zusammengestellt und schliesslich dem TYCHONI'schen, vielleicht auch mit Rücksicht auf die herrschende Strömung, der Vorzug gegeben. Einen Hauptgrund für die Verwerfung des COPERNICANIschen Systems findet LONGOMONTAN darin, dass sich unter der Annahme der Bewegung der Erde in einer Bahn, deren Halbmesser nach COPERNICUS gleich 1150 Erdhalbmessern ist, für die Fixsterne, wenn man ihre jährliche Parallaxe auch nur zu einer Bogenminute annimmt, eine Entfernung von nahe 8 Millionen Erdhalbmessern ergeben würde, woraus wieder, da ihr scheinbarer Durchmesser gleich 1′ gefunden wurde, der wahre Durchmesser derselben 2300 Erdhalbmesser, also grösser als der Durchmesser der ganzen Erdbahn folgen müsste, was als absurd bezeichnet wird. Doch werden wiederholt alle drei Theorien als Beispiele verwendet, so für den Saturn das PTOLEMÄI'sche, für den Jupiter das COPERNICANI'sche, für den Mars das TYCHONI'sche System. Bei Mercur und Venus werden alle drei Systeme (eigentlich die beiden, da ja das TYCHONI'sche und PTOLEMÄI'sche hier identisch sind und sich nur durch die Anwendung eines Epicepicykels im concentrischen Kreise, statt eines einfachen Epicykels im excentrischen Kreise unterscheiden) angewandt, woraus man sieht, dass LONGOMONTAN die Frage als eine rein physikalische, vielleicht noch nicht gelöste, betrachtet, während die geometrische Darstellung in allen drei Formen identisch ist.

Für den Mond wendet LONGOMONTAN die TYCHONI'sche Bewegungsform unverändert an, giebt aber noch eine andere »neue« Darstellung, welche sich jedoch von der TYCHONI'schen nur dadurch unterscheidet, dass der erste Epicykel durch einen excentrischen Kreis ersetzt wird. Die Variation wird unverändert nach TYCHO berechnet. Sonderbar ist, das LONGOMONTAN die von TYCHO nur für den Mond verwendete, also unvollständige, um einen Theil der jährlichen Gleichung des Mondes verminderte Zeitgleichung für die Reduction der wahren auf die mittlere Zeit für alle Beobachtungen anwendet.

Recht gut sind in diesem Lehrbuche bereits die Aufgaben der sphärischen Astronomie behandelt. Für die geographische Ortsbestimmung werden die folgenden Methoden zusammengestellt: Zeitbestimmung. Erste Methode: Messung von Sonnenhöhen oder Sternhöhen, möglichst weit vom Meridian und nicht zu nahe dem Horizonte, ersteres, weil die Beobachtungen im Meridian selbst wegen der langsamen Höhenänderung die Zeit sehr unsicher geben, letzteres wegen der Unsicherheit der Refraction. Zweite Methode: Beobachtung der Zeit des Meridiandurchganges des Gestirns. Polhöhenbestimmung. Erste Methode: Messung von Meridianhöhen der Sonne oder eines bekannten Sternes; die Messungen müssen in der Nähe des Meridians gemacht werden, weil die Höhen daselbst lange Zeit nahe constant sind und ein Fehler in der Zeitangabe beinahe belanglos ist. Zweite Methode: Beobachtung des gleichzeitigen Durchgangs zweier bekannter Sterne durch denselben Vertical, wenn die Höhe eines derselben gemessen wird, wobei die Zeit selbst nicht bekannt zu sein braucht. Dritte Methode: Beobachtung der Zeit des Durchgangs zweier Sterne durch denselben Vertical, ohne Höhenmessung. Vierte Methode: Gleichzeitige Beobachtung zweier bekannter Sternpaare in demselben Höhenkreise, wobei weder

---

[1]) CHRISTIAN SEVERIN, genannt LONGOMONTAN, geboren 1562 in dem dänischen Dorfe Longberg, war lange Zeit sowohl in Hveen als auch in Prag Mitarbeiter TYCHO's; später wurde er Professor in Kopenhagen, wo er 1647 starb.

die Zeit noch die Höhen selbst bekannt zu sein brauchen. Azimuthbestimmung. Erste Methode: Mittels des Gnomon, d. h. durch Messung von correspondirenden Sonnenhöhen. Zweite Methode: Aus einer beobachteten Sonnenhöhe bei gegebener Deklination der Sonne. Bestimmung der geographischen Länge. Erste Methode: Aus den Beobachtungen von Mondfinsternissen. Zweite Methode: Durch die Messung von Monddistanzen, zu welchem Zwecke 15 Ekliptikalsterne als besonders passende Vergleichssterne mit ihren Längen und Breiten angeführt werden. Bestimmung der Sterncoordinaten. Erste Methode: Durch Bestimmung der Höhe und des Azimuthes des zu bestimmenden Sterns bei bekannter Zeit. Zweite Methode: Messung der Meridianhöhe des unbekannten Sterns und Bestimmung seiner Entfernung von einem anderen bekannten Stern. Dritte Methode: Messung der Entfernung von zwei bekannten Sternen.

Die Reductionen der Beobachtungen sind jedoch von den unsrigen noch sehr weit verschieden, was besonders durch die angestrebte Genauigkeit bedingt wird. Bei der Bestimmung der Polhöhe aus Meridianhöhen von Sternen konnte die Zeit ganz unberücksichtigt bleiben; bei den Reductionen der gemessenen Monddistanzen berücksichtigte oder eigentlich eliminirte man die Mondparallaxe einfach dadurch, dass man die Anhaltsterne in der Nähe der Ekliptik nahm und die Messung der Distanz nur vornahm, wenn die Parallaxe in Länge gleich Null, d. h. wenn der Mond im Nonagesimus war.

Unbekümmert um die damals herrschende kirchliche Strömung und um die für ihn in Italien daraus erwachsenden Gefahren bekannte sich Galileo Galilei[1]) (1564—1642) zu dem durch einige seiner eigenen Entdeckungen neuerdings erwiesenen Copernicani'schen System. Seine Entdeckungen in der Astronomie erstreckten sich sowohl auf das praktische, als auch auf das theoretische Gebiet, auf letzteres allerdings nur indirekt. Von fundamentaler Bedeutung für seine praktischen Erfolge war aber die um diese Zeit erfolgte Erfindung des Fernrohres. Als Galilei die Kunde erhielt, dass in Holland ein Instrument construirt worden sei, mit dessen Hilfe man entfernte Gegenstände deutlich wahrnehmen könne, fertigte er sich ein ähnliches Instrument, bestehend aus einer Sammellinse als Objectivglas und einer Zerstreuungslinse als Ocular, das später nach ihm benannte Galilei'sche oder richtiger holländische Fernrohr. Im *Nuncius Sidereus* theilt Galilei mit, dass sein erstes von ihm construirtes Fernrohr eine 9fache Vergrösserung bot, bei dem zweiten erhielt er schon eine 60fache, und

[1]) Geboren am 15. Februar 1564 zu Pisa, bezog er in seinem 19. Jahre daselbst die Universität, wo er Medizin studiren sollte, er widmete sich jedoch mehr den mathematischen Studien, so dass er bereits 1589 die Professur der Mathematik in Pisa erhielt. Seine Neider und Feinde brachten es jedoch dahin, dass er 1592 Pisa verliess und nach Padua ging, wo er anfänglich für 6 Jahre und nach dieser Zeit unter Verdopplung seines Gehaltes für Lebenszeit als Professor der Mathematik angestellt wurde. 1615 begannen die Anklagen gegen Galilei; das erste Mal blieb es bei einer Ermahnung, von der Copernicani'schen Lehre abzustehen; obschon er sich nicht fügte, konnte er doch Rom ungehindert verlassen, durfte aber öffentlich das Copernicani'sche System nicht lehren. Unter Papst Paul V. wurde er auch nicht weiter behelligt. Als Urban VIII., der als Cardinal Galilei günstig gesinnt war, den päpstlichen Stuhl bestieg, schöpfte er neuerdings Muth und gab seine »Dialoge« über das Ptolemäi'sche und Copernicani'sche System heraus (1632). Dadurch machte er sich jedoch wieder unter der hohen Geistlichkeit viele Feinde; der Papst selbst war gegen ihn sehr erbittert; er wurde noch im selben Jahre vor ein geistliches Richtercollegium citirt und musste 1633 seine Meinung abschwören. 1636 kehrte er nach Arcetri bei Florenz zurück, erblindete jedoch noch im selben Jahre an beiden Augen und starb am 8. Januar 1642.

das dritte gab bereits eine 1000fache Vergrösserung (dabei ist die Flächenvergrösserung gemeint). Dieses Fernrohr richtete er nun auf den Himmel und entdeckte am Monde die Unebenheiten, Mondberge, deren Höhe er auch zu bestimmen versuchte. Er fand nämlich bei streifender Incidenz des Sonnenlichtes noch einzelne, ausserhalb der Schattengrenze befindliche isolirte beleuchtete Punkte auf der Mondoberfläche, und zwar in der Dichotomie in der Entfernung von etwa $\frac{1}{20}$ des scheinbaren Monddurchmessers. Da der selenocentrische Abstand dieser Punkte von der Schattengrenze $5\frac{1}{2}°$ ist (weil $tang\ 5\frac{1}{2}° = 0{\cdot}1$ ist), so musste die Entfernung dieser noch erleuchteten Spitzen vom Mondmittelpunkte $r\ sec\ 5\frac{1}{2}°$ sein, wenn r den linearen Mondhalbmesser bedeutet, daher die Höhe der Spitzen über der Mondoberfläche gleich $r(sec\ 5\frac{1}{2}° - 1) = 0{\cdot}005\,r$; für den Mondhalbmesser nimmt GALILEI $\frac{1}{7}$ des Erdhalbmessers oder 1000 italienische Meilen an, woraus sich für die Höhe dieser Spitzen 5 italienische Meilen finden würde; GALILEI giebt 4 Meilen. Er fand ferner, dass uns der Mond beständig dieselbe Seite zuwendet, dass er sich also um seine Axe drehe, und zwar in derselben Zeit, in welcher er den Umlauf um die Erde vollführt; er fand aber weiter, dass sich der Anblick des Mondes im Laufe der Zeiten etwas ändert, so als wenn wir ihn von etwas verschiedenen Standpunkten betrachten würden, so dass wir in Folge dieser Erscheinung, der sogen. Libration des Mondes, im Ganzen etwas mehr als die Hälfte der Mondoberfläche kennen.

GALILEI entdeckte ferner die Sonnenflecken, ihre Ortsveränderungen auf der Sonne und daraus die Rotation der letzteren; er entdeckte die 4 Jupitersatelliten, welche er zu Ehren seines fürstlichen Freundes MEDICI die Mediceischen Sterne nannte. Auch schlägt er bereits die Beobachtung ihrer Verfinsterungen zur Längenbestimmung auf der See vor; da nämlich eine Verfinsterung derselben an verschiedenen Orten zu demselben absoluten Zeitmomente wahrgenommen werden muss, aber die Ortszeiten der Verfinsterungen um den Längenunterschied der Beobachtungsorte verschieden sein werden, so giebt die Differenz der Ortszeiten für dieselbe Verfinsterung unmittelbar die Längendifferenz der Beobachtungsorte. Ueberdies lieferte ihm diese neu entdeckte, bisher unbekannte Welt einen der stärksten Beweise für das COPERNICANI'sche System, indem dadurch der Einwand widerlegt wurde, dass sich die Erde als Mittelpunkt der Bewegung des Mondes nicht mit diesem um die Sonne bewegen könne. Einen weiteren Beweis bot ihm die Entdeckung der Venusphasen, welche er, um sich die Priorität der Entdeckung zu wahren, zuerst in Form eines Anagramms: »*Haec immatura a me jam frustra leguntur o y*« publicirte, dessen Bedeutung durch Umstellung der Buchstaben »*Cynthiae figuras aemulatur mater amorum*« (die Figur des Mondes ahmt die Venus nach) ist. Auch die Entdeckung der eigenthümlichen Gestalt des Saturn publicirte er in einem Anagramm, dessen Bedeutung »*Altissimum planetam tergeminum observavi*« (den äussersten Planeten beobachtete ich dreifach) war. Bei einer späteren Gelegenheit sah er diesen Planeten aber wieder nur einfach, ohne die seitlichen Anhänge, welche Erscheinung er sich nicht zu erklären vermochte; die richtige Lösung gab erst HUYGHENS.

Auch unter den Fixternen machte er ziemlich bemerkenswerthe Entdeckungen. Das erste, was sich ihm darbot, war die überraschende Thatsache, dass die Durchmesser der Fixsterne mit freiem Auge um vieles zu gross geschätzt wurden und dass sie, wie er sich ausdrückt, »während andere Objecte 100fach vergrössert erscheinen, doch nur kaum 4 oder 5fach vergrössert werden.« Er fand in dem Sternhaufen der Plejaden 40 Sterne, erkannte, dass die Milchstrasse eine

Anhäufung von Sternen wäre, und hielt dem entsprechend auch den von ihm gesehenen Orionnebel für einen Sternhaufen.

Allein viele dieser Entdeckungen geschahen fast gleichzeitig auch durch andere, und es wurde ihm die Priorität einiger derselben streitig gemacht. Simon Marius[1]) (1570—1624) entdeckte unabhängig von Galilei die Jupiterstrabanten und beschreibt deren Bewegung in dem Werke *Mundus Jovialis.* Auch ihre Umlaufszeiten fanden Galilei und Marius bereits ziemlich richtig, zu $1^d\,18\frac{1}{2}^h$, $3^d\,13\frac{1}{3}^h$, $7^d\,4^h$ und $16^d\,18^h$, ihre Entfernungen vom Jupiter bezw. gleich $3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, 9 und $15\frac{1}{3}$ Jupitershalbmesser. Marius entdeckte den Andromedanebel, die Phasen des Mercur. Die Entdeckung dei Sonnenflecken hatten ausser Galilei auch noch gleichzeitig Christoph Scheiner[2]) (1575—1650), und Johann Fabricius[3]) (1587—1615) gemacht. Der erstere theilte als Mitglied des Jesuitencollegiums seinem Principal P. Busaeus seine Entdeckung mit, welche derselbe als unmöglich verwarf, da »nichts davon im Aristoteles stehe«. Als Scheiner später seine Beobachtung bestätigt fand, theilte er dieselbe unter dem angenommenen Namen Apelles dem Augsburger Rathsherrn Marcus Welser mit, der die Briefe drucken liess.

Auch die Entdeckung der veränderlichen Sterne fällt in diese Zeit. Neue Sterne waren schon früher von Aristill, Hipparch und Tycho (von letzterem 1572) und später von Kepler (1604) beobachtet worden; zwischen die beiden letzten (1596) fällt die von David Fabricius (1564—1617) gemachte Entdeckung der Veränderlichkeit des Sterns *o Ceti,* der wegen seines ausserordentlich starken Helligkeitswechsels (zwischen 2. und 9. Grösse) auch *Mira Ceti* genannt wurde. Endlich mag bei dieser Gelegenheit noch einer Neuerung aus jener Zeit gedacht werden, nämlich der von Joh. Bayer (1572—1625) in seiner Uranometria gewählten Sternbezeichnung mittels griechischer Buchstaben, welche sich als die praktischste noch bis auf den heutigen Tag erhalten hat.

Während aber Galilei's Entdeckungen in der praktischen Astronomie theilweise wenigstens fast gleichzeitig auch von anderen gemacht worden waren, bleibt Galilei das unbestrittene Verdienst, eine andere Wissenschaft aus rudimentären Anfängen eigentlich erst gegründet zu haben, nämlich die Mechanik. Während die Astronomie, wenigstens die »geometrische Astronomie«, wenn man die Zerlegung der complicirten Bewegungen der Himmelskörper in einfache so nennen darf, bereits weit vorgeschritten war, hatte man nur dunkle und unklare

---

[1]) Zu Gunzenhausen geboren, ging er 1601 mit Unterstützung seines Gönners, des Kurfürsten Georg Friedrich von Brandenburg-Anspach, nach Prag und Padua, und lebte nach seiner Rückkehr von 1604—1624 als Hofastronom in Anspach.

[2]) 1575 zu Walda in Schwaben geboren, trat er frühzeitig in den Jesuitenorden, wurde Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau, und 1610—1616 in gleicher Eigenschaft in Ingolstadt, darauf einige Jahre in Rom, und war schliesslich Rector des Jesuitencollegiums zu Neisse in Schlesien.

[3]) David Fabricius, bekannt durch seine Beziehungen zu Kepler, war 1564 zu Esens in Ostfriesland geboren, wurde 1584 Pfarrer in Resterhaave, wo er sich verheirathete und 1587 den Sohn Johann erhielt. In seinen Mussestunden beschäftigte er sich mit Astronomie. 1603 kam er auf die Pfarrei in Osteel, wo er die Beobachtungen fortsetzte, an denen sich nun auch schon sein Sohn betheiligte. Dieser ging 1605 nach Wittenberg, um Medizin zu studiren, kehrte aber bald zurück, um sich bei einem Vater in der Astronomie weiter auszubilden, entdeckte die Sonnenflecken 1610, ging 1613 wieder nach Wittenberg, starb aber schon 1615. Bald darauf, am 7. Mai 1617, wurde David Fabricius aus Rache von einem Bauern seiner Gemeinde erschlagen.

Begriffe über die Ursachen dieser Bewegungen. PLINIUS hatte zwar versucht, eine physikalische Erklärung für die Bewegungserscheinungen der Himmelskörper zu geben, nach welcher die Stationen und Retrogradationen durch eine »Feuerkraft« der Sonne hervorgebracht werden, welche im Gedrittschein des Planeten mit der Sonne die Fortsetzung der geraden Bewegung derselben verhindert. Doch können wir diese »Erklärung« nicht als eine solche ansehen. PLUTARCH (50—125 n. Chr.) hatte hierüber viel richtigere Ansichten; wenn er auch das Gesetz der Trägheit und die Theorie der Anziehung nicht mit aller Bestimmtheit erfasst hat, so hat er sie gewiss geahnt, worauf viele Stellen seiner Schriften hindeuten: »den Mond sichert vor dem Falle seine eigene Bewegung und die reissende Geschwindigkeit seines Laufes, wie das, was auf eine Schleuder gelegt wird, durch den raschen Umschwung gehindert wird, herabzufallen; denn jeder Körper trägt seine natürliche Bewegung, so lange er nicht durch eine andere Kraft aus seiner Richtung gebracht wird . . . Man hätte eher Grund zur Verwunderung, wenn er unverrückt auf derselben Stelle bliebe, wie die Erde . . . Uebrigens muss die Erde, wenn jeder schwere Körper dieselbe Neigung hat und mit allen Theilen nach seinem eigenen Mittelpunkt strebt, nicht nothwendig die Mitte des Weltalls einnehmen, die Erde wird auch als selbständiges Ganze alle schweren Körper als ihre Theile anziehen. Wenn in die Höhe geworfene Körper wieder zu ihr zurücksinken, so ist das nicht ein Beweis dafür, dass sie die Mitte der Welt einnimmt, sondern nur dafür, dass die von ihr abgestossenen und wieder zu ihr zurückkehrenden Theile eine Gemeinschaft und natürliche Verwandtschaft mit der Erde haben. Wie die Sonne ihre Bestandtheile an sich zieht, so nimmt auch die Erde den Stein als einen ihr zugehörigen Theil auf und trägt ihn mit sich.« So lange aber die Mechanik nicht ebenfalls weitere Fortschritte gemacht hatte, konnte an eine weitere Discussion der Ursachen der Bewegung nicht geschritten werden. Wohl waren schon vor GALILEI durch TARTALEA, UBALDI und besonders STEVIN (1548—1620) specielle Untersuchungen über einzelne Gesetze der Bewegung der Körper vorgenommen worden, aber immer blieb noch der Unterschied zwischen »natürlicher« und »gewaltsamer« Bewegung, die Bewegung *sursum* und *deorsum* und andere derartige Begriffe aus der ARISTOTELI'schen Physik bestehen, und GALILEI konnte daher die Mechanik als eine »neue Wissenschaft« bezeichnen. Er stellte mit aller Klarheit das Gesetz der Trägheit und das Gesetz der Zusammensetzung der Bewegungen nach dem Bewegungsparallelogramm auf. Er untersuchte die Beziehungen zwischen Zeit, Weg und Geschwindigkeit bei der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung, den Fall auf der schiefen Ebene; er zeigte den Isochronismus der Sehnen des Kreises, beschreibt dann die aus einer gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammengesetzte Wurfbewegung in der Parabel, untersuchte die Gesetze der Schwingungen eines Pendels und bahnte durch diese physikalischen Untersuchungen eigentlich erst die darauf folgende Entdeckung NEWTON's über die Ursachen der Bewegungen im Weltraum an. Er war einer der stärksten Vertreter der COPERNICANI'schen Weltordnung; in seinem *Systema Cosmicum* führt er in Form eines Dialogs die Gründe für und gegen dasselbe an, und schliesslich trägt dasselbe gegen das PTOLEMÄI'sche und TYCHONI'sche den Sieg davon. GALILEI geisselt in diesem Werk mit scharfen Worten und ziemlich sarkastisch — der Vertreter der PTOLEMÄI'schen Weltanschauung spielt darin eine sehr einfältige Rolle — den Autoritätsglauben derjenigen, welche den neueren Entdeckungen keine Beweiskraft zugestehen wollen, und denen das von den Alten übernommene Wissen

und die Dogmen der Religion unanfechtbare Wahrheiten repräsentiren. Dadurch erbitterte er allerdings seine mächtigen Gegner, und da er die Unklugheit hatte, denselben nicht auszuweichen, sondern sich ihnen im Gegentheil auszuliefern, so entging er mit genauer Noth dem Schicksale des GIORDANO BRUNO.

Auch in Deutschland scheinen sich selbst die eifrigsten Anhänger des COPERNICANI'schen Systems offen nicht unbedingt für dasselbe erklärt zu haben. Das vermittelnde System von TYCHO, welches auch von REIMARUS URSUS, RÖSLIN u. a. adoptirt wurde, ist bereits erwähnt. MAESTLIN[1]) (1550—1631) der Lehrer KEPLER's, sprach an manchen Stellen auch von der ruhenden Erde, während er, wie aus seiner Abhandlung über den Kometen von 1577 folgt, ein Anhänger des heliocentrischen Systems war; er nimmt für den Kometen eine Kreisbahn zwischen Erde und Venus an, ausserdem aber, um die Ungleichheit zu erklären, eine Libration in der Richtung der Tangente, welche jedoch TYCHO nicht für ausreichend findet. Selbst KEPLER[2]) (1571—1631), welcher gewiss von Niemandem für einen Anhänger des PTOLEMÄI'schen Systems erklärt werden kann, giebt in seinem Werke über den Mars die Deductionen in den ersten drei Theilen für alle »Hypothesen«, für die PTOLEMÄI'sche, TYCHONI'sche und COPERNICANI'sche, gleichsam als wären alle als Hypothesen gleichwerthig, wodurch er gewiss sein Werk vor der Kritik und den Angriffen der Unverständigen schützte. Auch wurde er wiederholt von Freunden gewarnt, sich offen zum COPERNICANI'schen System zu bekennen. Er beweist jedoch auch die Richtigkeit des heliocentrischen Systems ähnlich wie GALILEI aus den Verhältnissen der Bahnen, aus den Lichtgestalten der Venus und des Mercur, durch die Jupiterstrabanten u. s. w. und widerlegt den Einwand, dass sich eine jährliche Parallaxe der Fixsterne ergeben müsste durch die grosse Entfernung der Fixsterne, nach welcher jene nicht grösser als 10″ gefunden werden würde.

---

[1]) Geboren zu Göppingen; er studirte in Tübingen Theologie und Mathematik, erwarb 1571 die Magisterwürde, stand seit 1576 als Diakonus zu Baknang in Württemberg, bekam 1580 die Professur der Mathematik in Heidelberg und 1583 dieselbe in Tübingen, wo er bis zu seinem Tode blieb.

[2]) JOHANNES KEPLER wurde am 27 Dezember 1571 zu Weil der Stadt in Württemberg geboren; nach seines Vaters Tode bezog er die Klosterschule zu Maulbronn, hierauf 1589 die Univer sität Tübingen. 1591 wurde er Magister und 1594 Professor der Mathematik in Graz. 1596 verheirathete er sich mit der jungen Witwe BARBARA MÜLLER, deren Familie das bei Graz gelegene Schlösschen Mühleck gehörte. Allein schon 1598 wurden die Protestanten aus Steiermark ausgewiesen, und obwohl bei KEPLER eine Ausnahme gemacht worden war, sah er doch bald ein, dass er auf die Dauer nicht in Graz bleiben könne, und so setzte er sich mit TYCHO in Verbindung, um nach Prag zu kommen. Im October 1600 übersiedelte er nach Prag, wo er nun Gelegenheit hatte, den reichen Beobachtungsschatz TYCHO's zu verwerthen Fast die ganze Zeit war durch seine Untersuchungen über den Planeten Mars ausgefüllt, worüber er eifrig mit D. FABRICIUS correspondirte. Da ihm seine Besoldung jedoch sehr unregelmässig ausbezahlt wurde, hatte er schon um jene Zeit stets mit pecuniären Schwierigkeiten zu kämpfen. Nach dem Tode seines Gönners, des Kaisers RUDOLPH II. wurde er von dessen Nachfolger MATTHIAS als sein Mathematicus bestätigt, und ihm Linz zum Aufenthaltsorte angewiesen. Im Sommer 1620 musste er nach Württemberg reisen, da gegen seine Mutter ein Hexenprocess angestrengt worden war; es gelang auch KEPLER die Tortur zu hintertreiben, ja endlich ihre Freisprechung herbeizuführen. Inzwischen waren die Rückstände seines Gehaltes auf mehrere tausend Gulden angelaufen, wegen deren Bezahlung er an WALLENSTEIN gewiesen wurde; er zog zu diesem nach Sagan, bekam aber auch hier kein Geld, sondern wurde beständig hingehalten, und eine ihm angebotene Professur in Rostock wollte er nicht annehmen 1631 reiste er zum Reichstage nach Regensburg, um zur Erlangung der rückständigen Besoldung weitere Schritte zu thun, wurde aber bald nach seiner Ankunft krank und starb daselbst am 15. November 1631.

Allein Kepler begnügt sich nicht mit der von Copernicus aufgestellten Theorie. Ihm waren die Epicykeln desselben noch ein Stein des Anstosses, und er sagt in seinem »Mysterium Cosmographicum«, dass man damals der Wahrheit noch nicht viel näher wäre, als die Alten. Er suchte nicht eine einfache Zerlegung der complicirten Bewegungen in Länge, sondern er suchte wirkliche Bahnen. Vor ihm begnügte man sich mit der Darstellung der Bewegung der Planeten in Länge und eventuell in Breite, die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde sah man als unbestimmbar an, so lange sich die Parallaxe derselben nicht bestimmen liess; sie ergaben sich nur nebenbei. Kepler gab sich mit diesen Methoden nicht zufrieden, er fand Mittel um auch die wahren Entfernungen von der Erde zu bestimmen — wenigstens für denjenigen Himmelskörper, welcher ihm das Hauptmaterial zu seinen theoretischen Untersuchungen bot, für den Mars — und das Bestreben, die beobachteten Längen und die Entfernungen richtig darzustellen, führte ihn auf die Bestimmung der richtigen Form der Bahn. Andererseits suchte er auch nach physikalischen Ursachen, welche die Bewegung der Himmelskörper bewirken könnten, und wenn er sich auch hier in Conjecturen verlor, welche allerdings sehr sinnreich, oft aber auch als höchst phantastisch bezeichnet werden müssen, so führten sie ihn nach manchen Irrgängen doch endlich zu den wahren Gesetzen der Bewegungen. Unermüdlich war Kepler in der Aufstellung neuer physikalischer Hypothesen; wurde eine frühere durch die Beobachtungen nicht bestätigt, so suchte er nach der Ursache der Nichtübereinstimmung; am besten wird sein Streben in dieser Richtung durch seine eigenen Worte in einem solchen Falle charakterisirt: *Itaque causae physicae* cap. 45 *in fumos abeunt.*

Seine ersten Untersuchungen über die allgemeine Weltordnung betrafen die Beziehungen zwischen den Entfernungen der Planeten von der Sonne, und den Beziehungen zwischen diesen Entfernungen und den Umlaufszeiten.

Anfangs nahm Kepler, um Verhältnisse zwischen den Entfernungen zu finden, an, dass zwischen Mercur und Venus einerseits, und zwischen Mars und Jupiter andererseits je ein Planet die Sonne umkreisen müsse, welchen man wegen seiner geringen Grösse niemals sehen könne. Da er jedoch auch unter dieser Annahme zu keinem Resultat kam, so brachte er die Bahnen der Planeten mit den regulären Körpern in Verbindung. Er ordnete jedem Planeten eine Kugelschale zu, derart, dass die äussere Kugel derselben mit der grössten, die innere mit der kleinsten Entfernung des Planeten von der Sonne beschrieben wurde; dann lassen sich nach ihm die fünf regulären Körper so einschalten, dass jeder derselben einem Planeten um- und dem nächstfolgenden eingeschrieben ist. Die Reihenfolge ist dann: Mercur, Octaëder, Venus, Icosaëder, Erde, Dodecaëder, Mars, Tetraëder, Jupiter, Hexaëder, Saturn. Da es nur 5 reguläre Körper giebt, so schliesst Kepler, dass es auch nur 6 Planeten geben kann; in der That stimmen die den 5 regulären Körpern ein- und umschriebenen Kugeln mässig gut mit den Entfernungen der Planeten überein. Um ein Urteil über die bei dieser Vergleichung zu erlangende oder nöthige Genauigkeit zu erhalten, mag erwähnt werden, dass die Uebereinstimmung fast gleich gut blieb, ob nun Kepler die beiden Kugeln der Erdbahn für sich allein ein- und umschrieb, oder ob er sie in einer Distanz wählte, dass sich die Erde mit dem sie umkreisenden Monde in dem Zwischenraum bewegen konnte.

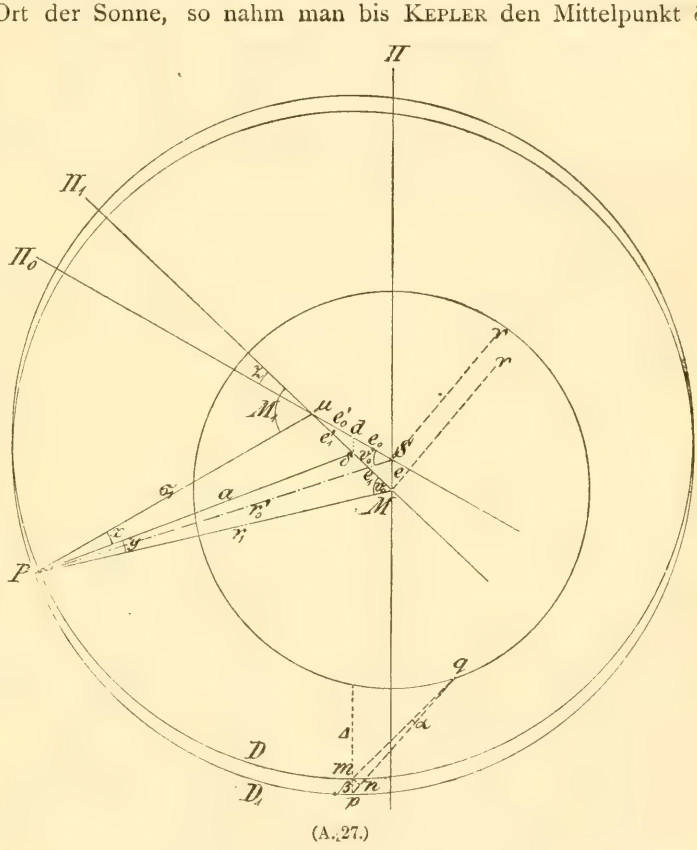
Hieran schloss nun Kepler Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den Entfernungen der Planeten und ihren Geschwindigkeiten. Erst versuchte er die einfache Proportionalität, d. h. den Satz, dass die Umlaufszeiten den Ent-

fernungen verkehrt proportional wären. Diesen Satz fand er natürlich sofort unrichtig. Besser stimmte ihm eine andere Annahme, die sich kurz in folgenden Worten aussprechen lässt: Sind a_1, a_2 die mittleren Entfernungen zweier Planeten (wobei $a_2 > a_1$), deren Umlaufszeiten t_1, t_2 sind, so wird $t_1 : \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = a_1 : a_2$; auch diese Annahme ist unrichtig, und wurde später (in den »Harmonices mundi«) von Kepler selbst widerlegt. Bereits im Mysterium cosmographicum führte Kepler die Bewegung der Planeten auf eine in der Sonne befindliche Kraft zurück, welche sich von der Sonne aus verbreitet, sodass sie in grösseren Entfernungen immer schwächer wird. Aus dieser Annahme, welche bereits den Uebergang zu seinen folgenden physikalischen Untersuchungen bildet, leitete er auch das obige Gesetz zwischen den Geschwindigkeiten und Entfernungen ab, beweist aber dann auch die Nothwendigkeit der Einführung des von dem Mittelpunkte des excentrischen Kreises verschiedenen Punktes der gleichmässigen Bewegung. Indem nämlich nicht nur bei verschiedenen, sondern auch bei einem und demselben Planeten die bewegende Kraft der Sonne in verschiedenen Entfernungen verschieden ist, wird im Aphel des excentrischen Kreises die Wirkung der Sonne schwächer, im Perihel stärker als in der mittleren Entfernung sein, demnach die Bewegung im excentrischen Kreise ungleichmässig, langsamer im Aphel, schneller im Perihel, so aber, dass von einem anderen Punkte, dessen Entfernung von der Sonne durch den Bahnmittelpunkt halbirt wird (Bisection), die Bewegung in der Bahn gleichmässig erscheinen wird. In der ersten Ausgabe des Mysterium cosmographicum machte Kepler noch Ausnahmen für den Mercur und die Venus, in der zweiten Ausgabe bemerkt er jedoch, dass dieses Gesetz ausnahmslos stattfinden müsse, und dass die für die inneren Planeten bei Copernicus nöthigen Ausnahmen durch Fehler der Beobachtung und Theorie entstanden wären.

Als Kepler im Jahre 1600 zu Tycho nach Prag kam, und ihm die Aufgabe zufiel, den Mars zu beobachten und die Theorie desselben zu prüfen, fand er, dass unter der Annahme der Bisection der Excentricität die Theorie Abweichungen von der Beobachtung ergab, welche die bei den Tychoni'schen Beobachtungen vorauszusetzenden Beobachtungsfehler weit übertrafen. Kepler stellte sich nun die Aufgabe, die Theorie des Mars von Grund aus neu aufzubauen, wobei er drei wichtige Bedingungen zu erfüllen trachtete: 1) die gefundene Bahn sollte den von Kepler aufgestellten theoretischen Principien über die bewegende Kraft der Sonne genügen, 2) die Unterschiede zwischen den aus der Theorie berechneten und den beobachteten Längen und Breiten sollten 2′ nicht übersteigen, 3) die Unterschiede zwischen den aus der Theorie gefundenen und den beobachteten Entfernungen sollten etwa den tausendsten Theil der Entfernungen — diese Grenze ergab sich im Laufe der Untersuchungen selbst — nicht überschreiten. Der Planet Mars war zu diesen Untersuchungen besonders geeignet, da er in den Oppositionen der Erde sehr nahe kommt und eine grosse Excentricität hat, weshalb Ungleichheiten besonders hervortreten. Fast 10 Jahre hatte Kepler diesen Untersuchungen gewidmet, mit unermüdlicher Ausdauer hatte er unter den verschiedensten Annahmen die mühseligsten Rechnungen durchgeführt; bald stimmten die beobachteten Längen nicht, bald die Entfernungen, — aber endlich krönte doch der Erfolg seine Bemühungen. Der Erfolg war die Aufstellung der beiden ersten, berühmten, nach ihm genannten Gesetze der Planetenbewegungen, welche er in seinem Werke »Astronomia nova seu Physica Coelestis, tradita Commentariis de Motibus stellae Martis« publicirte.

Aus seinem ersten Hauptprincip, dass die Sonne die bewegende Kraft für die Planeten wäre, zog KEPLER zunächst ausser den bereits erwähnten zwei Schlüssen, dass die Geschwindigkeit des Planeten umgekehrt proportional seiner Entfernung von der Sonne sein müsse, und dass der Bahnmittelpunkt die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt der gleichmässigen und dem Mittelpunkt der wahren Bewegung halbiren müsse, auch den wichtigen Schluss, dass der Mittelpunkt der wahren Bewegung nicht der mittlere Ort der Sonne sein könne, wie dies vorher immer angenommen worden war, sondern dass es der wahre Ort der Sonne sein müsse. Hiermit leitete KEPLER seine »Astronomia nova« ein.

Sei S (Fig. 27) der wahre Ort der Sonne, M der Mittelpunkt der Erdbahn, also der mittlere Ort der Sonne, so nahm man bis KEPLER den Mittelpunkt δ der Planetenbahn und den Mittelpunkt μ der gleichmässigen Bewegung in einer Geraden mit M an; $M\Pi_1$ war die Richtung der Apsidenlinie der Planetenbahn, δ der Mittelpunkt des excentrischen Kreises D_1 (der Planetenbahn), für einen Ort P des Planeten war $\Pi_1 \mu P$ die Anomalie[1]) M_1, $MP\mu$ die Prosthaphärese oder Mittelpunktsgleichung u. s. w., und es war die mittlere Länge $L = M_1 + \Pi_1$, die wahre Länge $\lambda = v_1 + \Pi_1$, wenn Π_1 die Länge des Aphels $\Upsilon M \Pi_1$ bedeutet.



(A. 27.)

In dieser Figur ist v_1 statt v_0 zu lesen.

KEPLER bezog nun seinem physikalischen Principe gemäss die Apsidenlinie und die Längen auf den wahren Sonnenort S; er fand, dass die heliocentrische Länge fast ganz ebenso dargestellt wird, wenn man den Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung μ beibehält, aber für die Bahn selbst denjenigen Kreis wählt, dessen Mittelpunkt d in der Verbindungslinie $S\mu$ so gelegen ist, dass $Sd : d\mu = M\delta : \delta\mu$ ist, und dessen Halbmesser gleich demjenigen der früheren Bahn bleibt. Damit nahm nun KEPLER eigentlich an, dass man früher unrichtige Bahnen erhalten hatte (die beiden Kreise decken sich ja nicht), wodurch aber

[1]) Anomalie wird nunmehr beständig für den Winkel zwischen der Richtung des Aphels und der Richtung nach dem Planeten gebraucht.

in den heliocentrischen Längen nur geringe Aenderungen, hingegen in Folge der bedeutenden Aenderungen in den heliocentrischen Entfernungen (den Radien Vectoren) ganz merkliche Aenderungen in den geocentrischen Längen und Entfernungen auftreten müssten. KEPLER fand die Differenz der heliocentrischen Längen in den beiden Annahmen höchstens 5′, diejenigen in den geocentrischen jedoch bis zu 1° 3′. Durch Rechnung erhält man diese Abweichungen mit den in Fig. 27 gemachten Bezeichnungen für beliebige Theilung der Excentricität $\left(e_1 \gtreqless e_1'\right)$ folgendermaassen. Es ist, wenn $\sphericalangle \Pi M \Pi_1 = \pi$ gesetzt wird:

$$\sphericalangle \mu PM = M_1 - v_1; \quad MPS = v_0' + z - v_1;$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{a^2 - e_1'^2 \sin^2 M_1} - e_1' \cos M_1 \\ r_1 \sin(M_1 - v_1) &= (e_1 + e_1') \sin M_1 \\ r_1 \cos(M_1 - v_1) &= (e_1 + e_1') \cos M_1 + \sigma \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} r_0' \sin(v_0' - v_1 + z) &= e \sin(v_1 + \pi) \\ r_0' \cos(v_0' - v_1 + z) &= r_1 - e \cos(v_1 + \pi). \end{aligned} \tag{2}$$

Für die Reihenentwicklung hat man hieraus

$$\sigma_1 = a - e_1' \cos M_1 - \frac{1}{2} \frac{e_1'^2}{a} \sin M_1^2$$

$$v_1 = M_1 - \frac{e_1 + e_1'}{\sigma_1} \sin M_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{e_1 + e_1'}{\sigma_1}\right)^2 \sin 2M_1$$

$$r_1 = \sigma_1 + (e_1 + e_1') \cos M_1,$$

folglich

$$\begin{aligned} v_1 &= M_1 - \frac{e_1 + e_1'}{a} \sin M_1 + \frac{1}{2} \frac{(e_1 + e_1')e_1}{a^2} \sin 2M_1 \\ r_1 &= a + e_1 \cos M_1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} v_0' = v_1 - z + \frac{e}{a} \sin(M_1 + \pi) - \frac{ee_1'}{a^2} \sin M_1 \cos(M_1 + \pi) - \frac{ee_1}{a^2} \sin(2M_1 + \pi) \\ + \frac{1}{2} \frac{e^2}{a^2} \sin 2(M_1 + \pi) \\ r_0' = a + e_1 \cos M_1 - e \cos(M_1 + \pi) \end{aligned} \tag{4}$$

und da, wenn $\Pi = \Upsilon S \Pi$ die Länge des Perihels der Erdbahn ist, $v'_0 + \Pi S \Pi_0 + \Pi = v_0' + \pi + z + \Pi = \lambda_0'$ die wahre heliocentrische Länge, und $L = M_1 + \Pi_1 = M_1 + \Pi + \pi$ die mittlere heliocentrische Länge ist, so wird

$$\begin{aligned} \lambda_0' = L - \frac{e_1 + e_1'}{a} \sin M_1 + \frac{1}{2} \frac{e_1(e_1 + e_1')}{a^2} \sin 2M_1 + \frac{1}{2} \frac{ee_1'}{a^2} \sin \pi + \\ \frac{e}{a} \sin(M_1 + \pi) - \frac{1}{2} \frac{e(e_1' + 2e_1)}{a^2} \sin(2M_1 + \pi) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{a^2} \sin 2(M_1 + \pi). \end{aligned} \tag{5a}$$

Nimmt man jedoch an, dass sich der Himmelskörper in dem Deferenten D bewegt, dessen Mittelpunkt d ist, so wird man die in der Figur mit σ_1, r_1, M_1, v_1 bezeichneten Grössen in Bezug auf den excentrischen Kreis D, dessen Mittelpunkt d und den Sonnenmittelpunkt S zu nehmen haben. Seien diese Grössen σ_0, r_0, M_0, v_0, wobei jetzt die Länge des Aphels Π_0 sein wird, so hat man

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{a^2 - e_0'^2 \sin^2 M_0} - e_0' \cos M_0 \\ r_0 \sin(M_0 - v_0) &= (e_0 + e_0') \sin M_0 \\ r_0 \cos(M_0 - v_0) &= (e_0 + e_0') \cos M_0 + \sigma_0 \end{aligned}$$

und aus dem Dreieck $MS\mu$

$$\begin{aligned} (e_0 + e_0') \sin z &= e \sin \pi \\ (e_0 + e_0') \cos z &= (e_1 + e_1') - e \cos \pi. \end{aligned}$$

Da nun $M_0 = M_1 - z$ ist, weil $M_1 = L - \Pi_1$; $M_0 = L - \Pi_0$ ist, so wird

$$v_0 = M_0 - \frac{e_0 + e_0'}{a} \sin(M_1 - z) + \frac{1}{2} \frac{(e_0 + e_0')}{a^2} e_0 \sin 2(M_1 - z)$$

und wenn man hier zunächst entwickelt, die Werthe für $\sin z$, $\cos z$ substituirt und die wahre Länge $\lambda_0 = v_0 + \Pi_0$ bestimmt:

$$\lambda_0 = L - \frac{e_1 + e_1'}{a} \sin M_1 + \frac{e}{a} \sin(M_1 + \pi) + \frac{1}{2} \frac{(e_1 + e_1')^2 e_0}{a^2 (e_0 + e_0')} \sin 2M_1$$
$$- \frac{e_0 e (e_1 + e_1')}{a^2 (e_0 + e_0')} \sin(2M_1 + \pi) + \frac{1}{2} \frac{e^2 e_0}{a^2 (e_0 + e_0')} \sin 2(M_1 + \pi) \tag{5b}$$

und wenn man auf die Beziehung $e_1 : e_1' : (e_1 + e_1') = e_0 : e_0' : (e_0 + e_0')$ Rücksicht nimmt:

$$\lambda_0' - \lambda_0 = -\frac{1}{2} \frac{e e_1'}{a^2} \sin(2M_1 + \pi) + \frac{1}{2} \frac{e e_1'}{a^2} \sin \pi + \frac{1}{2} \frac{e^2 e_0'}{a^2 (e_0 + e_0')} \sin 2(M_1 + \pi)$$

also von der zweiten Ordnung der Excentricitäten, während sich

$$r_0 = a + e_1 \cos M_1 - \frac{e e_0}{e_0 + e_0'} \cos(M_1 + \pi),$$

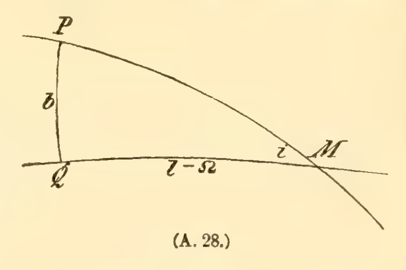
daher

$$r_0' - r_0 = -\frac{e e_0'}{e_0 + e_0'} \cos(M_1 + \pi)$$

ergiebt. Die aus $r_0' - r_0 = \beta$ entstehende Aenderung in der geocentrischen Länge ist gegeben durch den Winkel α, der seinen grössten Werth erhält, wenn die Erde im Aphel, der Mars im Perihel ist, wo die Entfernung der beiden Himmelskörper $\Delta = 0{\cdot}36$ ist. Der Winkel α ist, wenn $\sphericalangle mpq = \varphi$ gesetzt wird, gegeben durch (s. Fig. 27)

$$\alpha = \frac{mn}{mq} = \frac{\beta \sin \varphi}{\Delta \sec \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\Delta} \sin 2\varphi = -\frac{1}{2} \frac{e e_0'}{e_0 + e_0'} \cdot \frac{1}{\Delta} \cos(M_1 + \pi) \sin 2\varphi.$$

In den Oppositionen ist φ gleich oder sehr nahe gleich null, folglich wird die Differenz α verschwinden; man erhält daher aus den in den Oppositionen beobachteten Längen sowohl die Werthe von e_1, e_1' und Π_1 richtig, wenn man die Momente bestimmt, in welchen der Ort des Planeten genau um 180° verschieden ist von dem mittleren Orte der Sonne; man erhält ebenso die Werthe von e_0, e_0' und Π_0 richtig, wenn man die Momente bestimmt, in welchen der Ort des Planeten genau um 180° verschieden ist von dem wahren Orte der Sonne. Es folgt aber daraus auch, dass man aus den Beobachtungen in den Oppositionen nicht bestimmen kann, welche Theorie die richtige ist. Der Maximalwerth von α ausserhalb der Oppositionen findet statt für $\varphi = 45°$, $M_1 + \pi = 180°$ und wird gleich $\frac{1}{2} \frac{e e_0'}{e_0 + e_0'} \frac{1}{\Delta \, arc\, 1'}$ und findet sich für den Mars gleich 1° 4′, während der Maximalwerth von $\lambda_0' - \lambda_0$ sich aus der obigen Formel zu 5′ ergiebt.



(A. 28.)

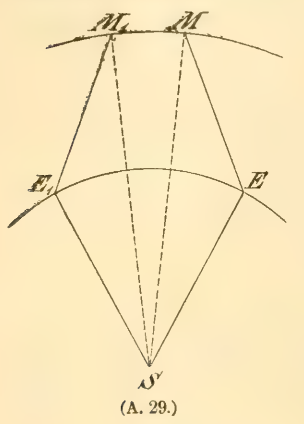
Es wurde bereits erwähnt, dass KEPLER sein Streben dahin richtete, dass seine Theorie auch die Entfernungen des Mars von der Sonne richtig darstelle. Zu diesem Zweck suchte er nun diese Entfernungen auch durch die Beobachtungen direkt zu bestimmen. Er verwendete hierzu vier verschiedene Methoden: 1) Der Planet sei in einer Opposition in der geocentrischen Breite β beobachtet. Da zur Zeit der Opposition die geocentrische Länge gleich der heliocentrischen Länge ist (der Planet erscheint ja von der Erde und von der

Sonne aus gesehen in derselben Richtung), so kennt man gleichzeitig seine heliocentrische Länge l; ist die Länge des aufsteigenden Knotens Ω, und die Neigung der Bahn i, bekannt, so hat man in dem Dreiecke MPQ (Fig. 28), in welchem MQ ein Stück der Ekliptik ist, MP ein Stück der Bahnebene, P der Ort des Planeten und Q der Fusspunkt des von P auf die Ekliptik gefällten Perpendikels

$$tang\, b = tang\, i\, sin\, (l - \Omega),$$

womit auch die heliocentrische Breite b bekannt wird, und dann folgt aus dem Dreiecke: Sonne — Erde — Planet, welches auf der Ebene der Ekliptik senkrecht steht,

$$r = R \frac{sin\, \beta}{sin\, (\beta - b)}.$$



(A. 29.)

Diese Methode ist aber nur von sehr beschränkter Genauigkeit, da die Breiten nur kleine Winkel sind, und die Linien Sonne—Planet und Erde—Planet sich unter dem sehr schiefen Winkel $\beta - b$ schneiden.

2) Ist die heliocentrische Länge $l = \Upsilon CP$ (Fig. 31, pag. 87) und die geocentrische Länge $\lambda_1 = \Upsilon E_1 P$ bekannt, und ebenso die geocentrischen Coordinaten der Sonne $\Upsilon E_1 C = \odot$ und $E_1 C = R$, so ist $CPE_1 = l - \lambda_1$, $CE_1 P = \lambda_1 - \odot$, daher

$$r = R \frac{sin\, (\lambda_1 - \odot)}{sin\, (l - \lambda_1)}.$$

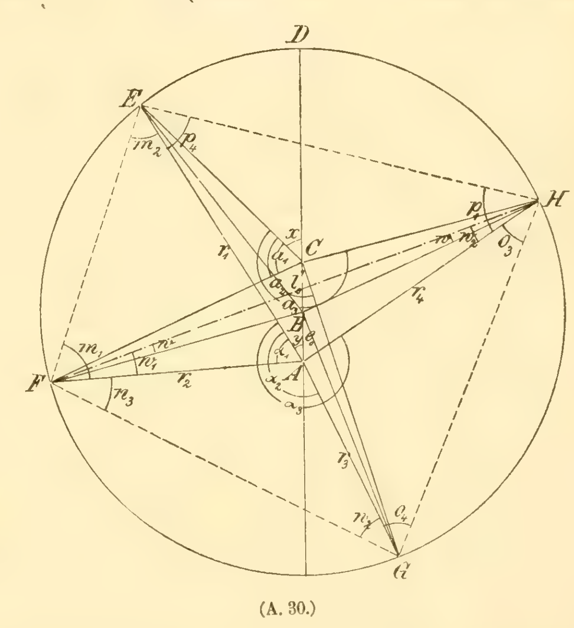
3) Sei S (Fig. 29) die Sonne, EE_1 die Erdbahn, MM_1 die Marsbahn und wird der Planet mehrmals vor und nach der Opposition beobachtet, so dass die geocentrischen Längen des Planeten bekannt werden, so kennt man die Winkel MES und $M_1 E_1 S$, ausserdem sind aus der Theorie der Erdbewegung der Winkel ESE_1 und die Entfernungen SE und SE_1 bekannt, und man kann nun die Entfernungen SM und SM_1 so bestimmen, dass der zwischen den beiden Strahlen befindliche Bogen MM_1 gleich dem thatsächlich vom Mars in der Zwischenzeit durchlaufenen heliocentrischen Bogen ist. Sollte das Resultat hierfür einen anderen Werth ergeben, so müssen die Entfernungen SM und SM_1 so lange verändert werden, bis die genannte Bedingung erfüllt wird.

4) Der Planet wird in denselben Punkten seiner Bahn zu drei verschiedenen Zeiten (aus drei verschiedenen Erdorten) beobachtet, woraus sich sowohl die Verhältnisse der Entfernungen der Erde von der Sonne, als auch die Entfernung des Planeten von der Sonne ergiebt (s. pag. 87).

Der von KEPLER für die Bestimmung der wahren Marsbahn eingeschlagene Weg war nun der folgende:

I. Zunächst bestimmte KEPLER die Lage der Bahnebene. Steht der Planet in der Ekliptik, so wird sowohl seine geocentrische als auch seine heliocentrische Breite gleich null; und umgekehrt: hat der Planet die geocentrische Breite null, so befindet er sich in der Ekliptik, d. h. in einem Knoten seiner Bahn. Die heliocentrische Länge des Planeten ist dann gleich der Länge seiner Knoten, und wenn eine solche Beobachtung genau zur Zeit der Opposition fällt, so ist die heliocentrische Länge desselben gleich seiner geocentrischen, daher giebt die beobachtete g e o c e n t r i s c h e L ä n g e d e s z u r Z e i t e i n e r O p p o s i t i o n g e n a u i n d e r E k l i p t i k s t e h e n d e n P l a n e t e n d i e L ä n g e s e i n e r K n o t e n. Eine solche Beobachtung fand KEPLER unter den TYCHONI'schen Beobachtungen des Mars; eine kleine Abweichung von der Ekliptik (Breite gleich 5') konnte

leicht berücksichtigt werden. KEPLER fand für die Richtung der Knotenlinie $16\frac{1}{3}$ ♉♏; da aber zur Beobachtungszeit die mittlere Länge des Planeten $27\frac{1}{4}°$ ♏, die wahre Länge (vom wahren Sonnenorte aus gemessen) nach der TYCHONIschen Reduction $15\frac{3}{4}°$ ♏ war, so folgerte KEPLER, dass die Richtung der Knotenlinie durch den wahren und nicht durch den mittleren Sonnenort gehe; er hatte hieraus eine erste Bestätigung seiner Ansicht, dass die Bewegungen der Himmelskörper auf den wahren Sonnenort zu beziehen seien. Zur Bestimmung der Neigung der Bahn verwendete KEPLER drei verschiedene Methoden, von denen die einfachste diejenige war, den Planeten zu beobachten, wenn die Erde genau in seiner Knotenlinie (geocentrische Länge der Sonne gleich $16\frac{1}{3}°$ ♉♏, und er selbst in Quadratur mit der Sonne (Abstand von der Sonne 90°) war da dann die Richtung nach dem Planeten und die Projection derselben auf die Ekliptik senkrecht stehen auf der Richtung Erde — Sonne, also auf der Knotenlinie des Planeten, so giebt die geocentrische Breite des Planeten direkt die Neigung. Ist der Planet nicht 90° von der Knotenlinie entfernt, sondern ist der Abstand in der Ekliptik ω, die beobachtete geocentrische Breite β, so findet sich die Neigung i aus $tang\, i = tang\, \beta\, cosec\, \omega$.



(A. 30.)

II. Nun bestimmte KEPLER aus vier beobachteten Oppositionen die Bahn des Mars in der folgenden Weise: Aus den beobachteten geocentrischen Längen (welche gleich den wahren heliocentrischen sind) werden die Zwischenwinkel α_1, α_2, α_3 (Fig. 30) und aus den Zwischenzeiten die mittleren Bewegungen a_1, a_2, a_3 bekannt. Dann erhält man aus dem Dreieck ACF

$$r_2 = \frac{e\, sin\,(a_1 + x)}{sin\,(a_1 - \alpha_1 + x - y)}\,,$$

wenn für eine angenommene Apsidenrichtung die Winkel $DCE = x$, $DAE = y$ angenommen oder bereits genähert bekannt sind (nimmt man $AC = e = 1$, so erhält man alle Längen in dieser Einheit ausgedrückt). Dann folgt z. B. aus dem Dreieck EFA

$$tang\,\tfrac{1}{2}(m_1 - m_2) = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\, cotg\, \frac{1}{2}\alpha_1\,; \qquad \frac{1}{2}(m_1 + m_2) = 90° - \frac{1}{2}\alpha_1$$

und da das Viereck $EFGH$ ein Sehnenviereck ist, so muss $m_1 + m_2 + n_2 + n_3 + o_3 + o_4 + p_4 + p_1 = 180°$ (α) sein. Ist dieses nicht der Fall, so ist dies ein Zeichen, dass die Winkel x und y falsch gewählt sind, dann wird y so lange variirt, bis diese Bedingung erfüllt ist. Mit diesen Werthen von x und y, sie seien x_1 und y_1, wird die Lage des Punktes B bestimmt. Hierfür hat man z. B. in dem Dreieck AFH aus den bekannten beiden Seiten r_2, r_4 und dem bekannten

Zwischenwinkel FAH die Strecke $FH = d$ und die Winkel w_1 und w_2 zu bestimmen; man hat

$$tang\frac{1}{2}(w_1 - w_2) = -\frac{r_4 - r_2}{r_4 + r_2} cotg\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1); \quad \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1) - 90°$$

$$d^2 = r_2^2 + r_4^2 - 2r_2 r_4 \cos(\alpha_3 - \alpha_1),$$

dann hat man in dem gleichschenkeligen Dreieck FHB, wenn die Winkel an der Basis mit w bezeichnet werden

$$w = 90° - \tfrac{1}{2}FBH = 90° - (n_2 + o_4); \quad a = \tfrac{1}{2}d \sec w$$

und nunmehr aus dem Dreieck FAB

$$e_0 \sin(\alpha_1 + y_2) = a \sin(w_1 - w),$$
$$e_0 \cos(\alpha_1 + y_2) = r_2 - a\cos(w_1 - w).$$

Erhält man aus diesen Gleichungen y_2 identisch mit y_1, so waren die Werthe x_1, y_1 die richtigen und dann ist e_0 die Excentricität des Bahnmittelpunktes. Ist y_2 nicht gleich y, so wird man mit einer neuen Hypothese für x und y, d. h. mit einer neuen Annahme über x die ganze Rechnung wiederholen, und zwar so oft, bis für correspondirende Werthe von x, y, d. h. für Werthe, welche der Gleichung (α) genügen, auch $y_2 = y_1$ wird. KEPLER erhielt auf diese Art

$$\Pi = 28°48'55''\ ♌, \quad e_0 = 0{\cdot}11332, \quad e_0' = 0{\cdot}07232, \quad e = 0{\cdot}18564 \text{ für } a = 1, \quad \text{(I)}$$

welches Resultat die vier verwendeten Oppositionen darstellte, welches er aber sofort für unrichtig erklären musste, da die erste Hauptbedingung, die Bisection der Excentricität ($e_0 = e'_0$) nicht erfüllt war. KEPLER prüfte dennoch das Resultat an 12 verschiedenen beobachteten Oppositionen in den verschiedensten mittleren Anomalien, und fand die Fehler der Rechnung im Maximum 2′, also die Darstellung der heliocentrischen Längen völlig genügend. Nunmehr prüfte er das Resultat noch in anderer Richtung. Er bestimmte 1) aus zwei Oppositionen in der Nähe der Apsiden die heliocentrischen Entfernungen nach der ersten Methode (pag 84) und fand für die grösste Entfernung 1·6300, für die kleinste 1·3930, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne gleich 1 gesetzt, und daraus die mittlere Entfernung des Mars $a = 1{\cdot}511$, und die Excentricität der Bahn AB in derselben Einheit $e = 0{\cdot}1207$, also für $a = 1 : e_0 = 0{\cdot}080$ verschieden von dem früheren Werth[1]). 2) Zu denjenigen Zeiten, in denen Mars in den Apsiden, aber ausserhalb der Opposition war, wurden die geocentrischen Längen beobachtet, die heliocentrischen gerechnet und dann nach der zweiten Methode (pag. 84) die heliocentrischen Entfernungen bestimmt; hieraus ergiebt sich die Excentricität e_0 zwischen 0·083 und 0·101, demnach ebenfalls anders.

Da hiernach mit den aus den Beobachtungen gefolgerten Entfernungen sich andere Werthe für die Excentricität ergeben, so müssen umgekehrt die aus der Hypothese I gefolgerten Werthe der heliocentrischen Entfernungen und daher auch die geocentrischen Längen ausserhalb der Opposition falsch sein; unter der Annahme der ganzen Excentricität aus I ($e = 0{\cdot}18564$) und der Bisection der Excentricität ($e_0 = e_0'$) erhielt aber KEPLER in den angeführten 12 Oppositionen Fehler in den heliocentrischen Längen, welche bis auf 9′ steigen, welche Differenzen er nicht den Beobachtungsfehlern zuschreiben konnte, und so sah er sich genöthigt, eine andere Bahn des Mars zu suchen, und die Bahn I als eine vorläufige anzusehen, welche er die »stellvertretende Hypothese« nennt. Thatsächlich erhält man in dieser stellvertretenden Hypothese (s. pag. 82)

[1]) Dieses Resultat ist aus dem bereits erwähnten Grunde wenig beweisend.

$$v_0 = M_0 - \frac{e_0 + e_0'}{a} \sin M_0 + \frac{1}{2} \frac{(e_0 + e_0')e_0}{a^2} \sin 2 M_0$$

$$r_0 = a + \frac{1}{4} \frac{e_0^2 + 2 e_0 e_0'}{a} + e_0 \cos M_0 - \frac{1}{4} \frac{e_0^2 + 2 e_0 e_0'}{a} \cos 2 M_0,$$

während in der elliptischen Theorie, mit welcher wir dieselben vergleichen wollen,

$$v = M_0 - \frac{2e}{a} \sin M_0 + \frac{5}{4} \frac{e^2}{a^2} \sin 2 M_0$$

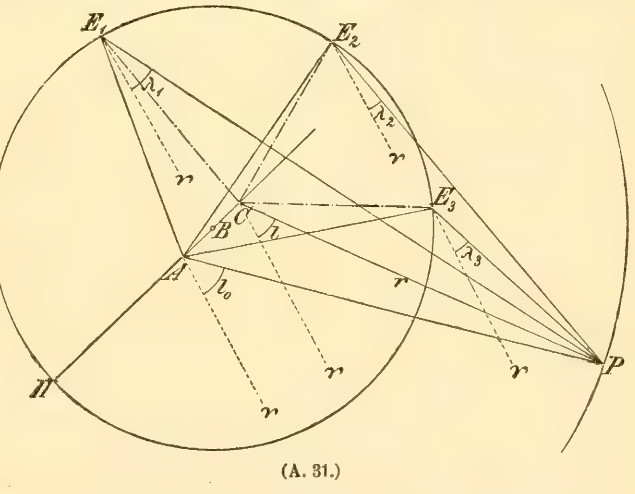
$$r = a + \frac{1}{2} \frac{e^2}{a} + e \cos M_0 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{a} \cos 2 M_0$$

ist, wenn $2e$ die ganze Excentricität bedeutet. Da aber für jede beliebige Annahme über e_0 und e_0' ($e_0 \lesseqgtr e_0'$) stets $e_0 + e_0' = 2e$ ist, so wird

$$v = v_0 + \frac{e}{a^2} \left(\frac{5}{4} e - e_0 \right) \sin 2 M_0$$

$$r = r_0 + (e - e_0) \cos M_0 - \frac{1}{2} \frac{2e^2 - e_0'^2}{a} \sin^2 M_0,$$

woraus man sieht, dass die heliocentrischen Längen nicht nur in der stellvertretenden Hypothese, sondern in jeder anderen beliebigen recht gut dargestellt werden, dass aber in der stellvertretenden Hypothese die Darstellung am besten wird, weil für sie sehr nahe $e_0 = \frac{5}{4} e$ ist, dass hingegen für diese die Fehler in den Radienvectoren bis 0·0248 ansteigen, während sie für die Bisection der Excentricität wegen $e = e_0$ nur 0·0043 betragen.



(A. 31.)

III. Ehe aber KEPLER zu einer weiteren Untersuchung der Marsbahn schritt, ging er daran, die Erdbahn näher zu untersuchen. In der Theorie der Erdbewegung wurde nämlich vorausgesetzt, dass die Bewegung um den Mittelpunkt des excentrischen Kreises gleichförmig stattfinde, welche Voraussetzung gemäss den von KEPLER angenommenen physikalischen Principien unstatthaft war. KEPLER suchte nun direkt aus den Beobachtungen die Lage des Mittelpunktes der gleichmässigen Bewegung gegenüber dem Bahnmittelpunkte zu bestimmen. Er suchte drei Beobachtungen des Mars, welche der Zeit nach genau um die Umlaufszeit desselben von einander entfernt waren; der Planet stand dann in seiner Bahn genau an derselben Stelle P (Fig. 31), während inzwischen die Erde an drei verschiedenen Punkten ihrer Bahn in E_1, E_2, E_3 angelangt war. Ist A der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung, B der Mittelpunkt der Erdbahn, C die Sonne, und kennt man das Verhältniss der Strecken $AC : CP$ und die Richtung AC (Länge des Apogäums der Sonne), so kann man in dem Dreieck ACP den Winkel CPA bestimmen, und hat dann die von dem Punkte der gleichmässigen Bewegung der Erde gemessene Länge des Planeten $l_0 = \Upsilon AP$

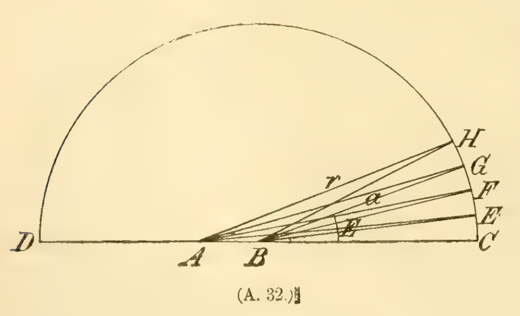
= heliocentrische Länge des Planeten — CPA. Ferner ist der geocentrische Ort des Planeten $\lambda_i = \Upsilon E_i P$ beobachtet, und die mittlere Länge der Erde $\Upsilon AE_i = \odot_i$ bekannt, man hat daher im Dreieck PE_iA:

$$a_i = \frac{R_i}{r'} = \frac{sin\,(l_0 - \lambda_i)}{sin\,(\odot_i - \lambda_i)}; \quad i = 1, 2, 3$$

Würden sich die drei Strecken a_1, a_2, a_3 gleich ergeben, so fiele der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung in den Mittelpunkt der Erdbahn B. Nun ergeben sich aber diese Entfernungen nicht gleich, aber es war jetzt leicht, den Mittelpunkt B des dem bekannten Dreieck E_1, E_2, E_3 umschriebenen Kreises nach der bereits öfter erwähnten Methode und damit die Excentricität AB zu finden. Verwendet man statt der mittleren Bewegungen in den Zwischenzeiten die Differenzen der wahren Bewegungen E_1CE_2, E_2CE_3 und die heliocentrische Länge des Mars $\Upsilon CP = l$, so erhält man die heliocentrischen Entfernungen CE_1, CE_2, CE_3 und damit wieder den Halbmesser des umschriebenen Kreises $E_1E_2E_3$, und ferner den Abstand CB des Kreismittelpunkts von der Sonne. KEPLER fand AB und BC sehr nahe in derselben Richtung und einander gleich, und setzt dann $AB = BC = 0{\cdot}01800$ für den Halbmesser der Erdbahn $BE = 1$. Gleichzeitig findet sich dann das Verhältniss $CP : BE$ für denjenigen Ort des Mars, in welchem er zur Zeit dieser Beobachtungen stand.

In derselben Weise werden dann noch aus Beobachtungen des Mars in drei anderen Punkten seiner Bahn die Excentricität der Erdbahn und die Entfernung des Mars von der Sonne abgeleitet (letztere für die Bestimmung der Marsbahn selbst) und zunächst für das weitere eine Tafel für die Bewegung der Sonne: die wahre Anomalie $EC\Pi$ *(anomalia coaequata)* und die Entfernung CE für gegebene Werthe der mittleren Anomalie $EA\Pi$ *(anomalia media)*.

Nach diesen geometrischen Deductionen geht KEPLER wieder auf seine physikalische Theorie von der bewegenden Kraft über und führt die Beziehung ein, dass die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn (im excentrischen Kreise) verkehrt proportional der Entfernung von der Sonne ist. Um hiernach den Ort der Erde zu bestimmen, schlägt KEPLER zwei Wege ein. 1) Er bestimmt die 360 heliocentrischen Entfernungen r_0, r_1, $r_2 \ldots r_{359}$ für jeden Grad der Anomalie, dann ist $r = \Sigma r_i : 360$ die mittlere Entfernung, welcher die Bewegung von 1° entspricht; in der Entfernung r_i ist dann die Bewegung $x_i = r : r_i$ ausgedrückt in Graden. Bestimmt man hiernach $x_0, x_1, x_2 \ldots x_{179}$ und addirt die sämmtlichen Werthe, so muss ihre Summe 180° sein, und die Werthe $x_0 = CBE$ (Fig. 32), $x_0 + x_1 = CBF$, $x_0 + x_1 + x_2 = CBG \ldots$ geben auf dem excentrischen Kreise diejenigen Punkte $E, F, G \ldots$ in welchen sich die Erde nach gleichen Zeitintervallen (entsprechend der mittleren Bewegung 1°) befindet.



(A. 32.)

Mit diesen werden die »optischen Ungleichheiten« BEA, BFA, BGA, ... ermittelt, wobei also der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung durch das physikalische Gesetz der Geschwindigkeiten ersetzt ist. 2) Die oben gebildete Summe umfasst nicht alle zwischenliegenden, sondern nur einzelne Werthe der Radienvectoren, weshalb sich auch die Werthe $x_0, x_1, x_2 \ldots$ sprungweise ändern. Um diese Ungenauigkeit zu beheben, ersetzt KEPLER die Summe der

sämmtlichen bis zu einem gewissen Punkte G des Kreises genommenen Radienvectoren durch die zwischen dem letzten Radiusvector AG und AC eingeschlossene Fläche; hiernach folgt dann, dass sich die Zeiten t und T, welche die Erde braucht, um den Bogen CG (entsprechend dem Centriwinkel E) und den halben Umfang CHD zu durchlaufen, wie die Flächen CGA, $CHDA$ verhalten, oder

$$\begin{aligned} t : T &= area\,(CBG + ABG) : \tfrac{1}{2}\pi a^2 \\ &= (\tfrac{1}{2}a^2 E\, arc\, 1'' + \tfrac{1}{2} ea \sin E) : \tfrac{1}{2}\pi a^2 \\ &= \left(E\, arc\, 1'' + \frac{e}{a}\sin E\right) : \pi \end{aligned}$$

und demnach, da $\pi : arc\, 1'' = 180°$, und $180° : T = \mu$, gleich der mittleren täglichen Bewegung der Erde ist

$$\mu t = M = E + \frac{e}{a\, arc\, 1''}\sin E. \tag{A}$$

KEPLER drückt dies dadurch aus, dass er sagt, die Fläche des Sectors CGA ist das Maass für die Zeit oder die mittlere Anomalie, welche zu dem Bogen CG des Kreises gehört. Für ihn ist jedoch dieses Gesetz, jetzt als zweites KEPLER'sches Gesetz bezeichnet, nur ein näherungsweiser Ersatz für die Summirung von unendlich vielen Radienvectoren. Diesem Umstande schreibt er auch die auftretenden Abweichungen der Rechnung von seinen oben erwähnten Tafeln zu.

IV. Nunmehr schreitet KEPLER mit dieser verbesserten Theorie der Erde und den gleichzeitig mit den Radienvectoren der Erde erhaltenen heliocentrischen Oertern des Mars an die Neubestimmung der Marsbahn. Er bestimmte 1) aus 3 wahren heliocentrischen Orten E_1, E_2, E_3 (Fig. 31: hier sind jetzt E_1, E_2, E_3 drei Orte des Planeten, bestimmt durch die gefundenen Entfernungen CE_1, CE_2 und CE_3 und die wahren Zwischenwinkel E_1CE_2, E_2CE_3) die Lage der Apsidenlinie und die Excentricität; letztere folgte 0·09768 für den Bahnhalbmesser = 1. 2) Bestimmte er aus zwei in der Nähe der Apsiden beobachteten Distanzen direkt die grösste und kleinste Entfernung des Mars von der Sonne, woraus sich die Excentricität 0·09264, also sehr nahe die halbe Excentricität der stellvertretenden Hypothese ergab. In Folge dieser verschiedenen Resultate rechnete KEPLER nunmehr mit der Excentricität 0·09264 und unter der Annahme der Proportionalität der Flächen und Zeiten die übrigen Radienvectoren, und fand, dass die Rechnung sämmtliche zu gross gab und dass die Abweichung um so grösser war, je näher die Anomalie 90° war. Hieraus schloss er, dass die Marsbahn kein Kreis, sondern ein Oval wäre.

Man hat aus der Gleichung (A) die Reihe

$$E = M - \frac{e}{a}\sin M + \frac{1}{2}\frac{e^2}{a^2}\sin 2M$$

und da im Kreise

$$r' \sin x = e \sin E, \quad r' \cos x = a + e \cos E, \quad v' = E - x$$

ist, so wird

$$v' = M - 2\frac{e}{a}\sin M + \frac{3}{2}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \sin 2M$$

$$r' = a + e \cos M + \frac{3}{2}\frac{e^2}{a}\sin^2 M,$$

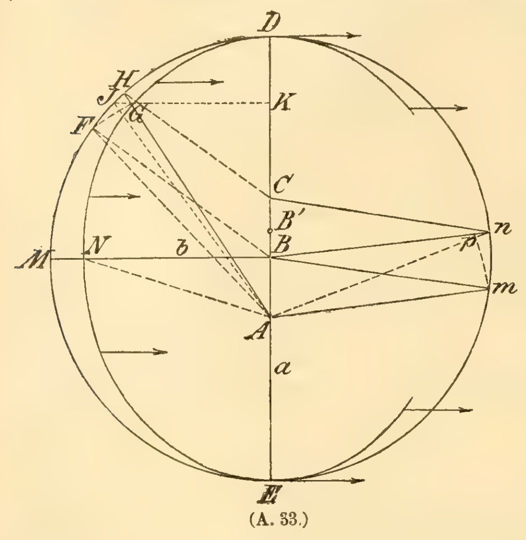
während in der Ellipse

$$v = M - 2\frac{e}{a}\sin M + \frac{5}{4}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \sin 2M$$

$$r = a + e \cos M + \frac{e^2}{a}\sin^2 M$$

ist, demnach ist $r' = r + \frac{1}{2} \frac{e^2}{a} \sin^2 M$, also der erhaltene Werth für r' stets zu gross.

Das Oval construirte KEPLER in der Weise, dass die Richtung des Planeten (AH, Fig. 33), d. h. die heliocentrischen Längen durch die stellvertretende Hypothese bestimmt wurden, indem $DCH = M$ ist und H auf dem um B' beschriebenen Kreise liegt, wenn $AB' = 0{\cdot}11332$ ist, während die Radienvectoren AF so bestimmt wurden, als wenn der Planet sich gleichmässig im excentrischen Kreise bewegen würde; wurde also $DBF = M$ gemacht, so gab AF die heliocentrische Entfernung des Planeten, und es sollte G der Ort des Himmelskörpers sein, wenn $AG = AF$ gemacht wurde. Die Pfeilhöhe des Möndchens $DMEN$ bestimmt sich leicht, wenn man $Am = Cn$ gleich dem Halbmesser Bm des Kreises macht, denn dann sind die Dreiecke BCn und ABm gleichschenklig; $Am \parallel Bn$, $Bm \parallel Cn$ und für die mittlere Anomalie $DCn = DBm$ ist An die wahre Richtung des Planeten, Am die heliocentrische Entfernung, und macht man $Ap = Am$, so fällt der Schnittpunkt p sehr nahe in Bn und es ist auch



(A. 33.)

$$Bm : AB = mp : np.$$

Da aber $mp = AB$ ist, so wird die Pfeilhöhe

$$np = \frac{e^2}{a} = 0{\cdot}00858.$$

Die Rechnungen im Oval werden aber sehr complicirt, denn man müsste die Fläche des Sectors DGA (Fig. 33) für jeden Punkt G der Bahn bestimmen können. Nun schliesst KEPLER in folgender Weise: Wäre die Bahn eine Ellipse, so hätte man, wenn man von G das Perpendikel JGK auf DE fällt:

$$DGK : DIK = DGE : DIE = BN : BM = b : a,$$

daher

$$DGK = \frac{b}{a} DIK,$$

ferner

$$\triangle GKA : \triangle IKA = GK : IK = b : a,$$

folglich auch

$$\triangle GKA = \frac{b}{a} \triangle IKA,$$

demnach die Sectorfläche

$$DGA = \frac{b}{a} DIA$$

und da ebenfalls die Fläche

$$DGEK = \frac{b}{a} DMEK$$

ist, so wäre

$$t : T = DGA : DGEK = DIA : DMEK,$$

d. h. man könnte in der Gleichung (A) für E den Bogen DJ des Kreises setzen; oder umgekehrt, zu einer gewissen Zeit t, welcher die mittlere Anomalie $M = M_0 + \mu t$ entspricht, erhält man aus der Gleichung (A) einen Bogen E, welcher, auf dem Kreise DME aufgetragen einen Punkt J bestimmt, aus dem das Perpendikel JK den Punkt G in der Ellipse bestimmen würde, in welchem sich der Planet befindet. KEPLER substituirt nun für das Oval eine solche Curve, für welche $GK : JK = b : a$ ist und für welche die Pfeilhöhe $a - b = 0{\cdot}00858$ ist[1]). Das Resultat war abermals ein negatives, denn wieder erhielt er die Radienvectoren unrichtig, dieses Mal sämmtlich zu klein, wie am einfachsten daraus folgt, das für die wahre Ellipse die Pfeilhöhe nur die Hälfte (0·00429) ist, die verwendete Curve daher ganz innerhalb dieser Ellipse liegt. KEPLER schrieb nun die Schuld dem Umstande zu, dass auch hier wieder die Summe der Radienvectoren nicht richtig durch die Fläche wiedergegeben wird, und schlug neuerdings den bereits oben beschriebenen arithmetischen Weg ein, und zwar für 6 verschiedene Annahmen, die sich theils durch den für die Excentricität e angenommenen Werth theils durch die Art und Weise der Berechnung der Radienvectoren selbst unterscheiden — immer mit gleich negativem Erfolg.

Indem KEPLER nunmehr seine physikalischen Untersuchungen, auf die er seine Theorie der Bewegung im Oval gestützt hatte, nochmals auf ihre Richtigkeit prüfte, fiel er, wie er selbst sagt, durch einen Zufall auf die Secante (1·00429) der grössten optischen Gleichung 5° 18′; es ist aber die grösste optische Gleichung BNA und Sec. $BNA = AN : BN$, daher $AN - BN = 0{\cdot}00429\ BN$, woraus folgt, dass, wenn $AN = BM$ ist, $MN = 0{\cdot}00429$ sein muss, d. h. die Pfeilhöhe des Möndchens ist nur die Hälfte der für das Oval gültigen. Diese Pfeilhöhe entspricht aber der Ellipse, für welche A ein Brennpunkt ist, denn für diese ist, wenn, wie bisher die Halbaxen mit a, b bezeichnet werden,

$$MN = a - b = a\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e}{a}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a} = 0{\cdot}00429.$$

Somit konnte KEPLER das erste — der Zeit nach zweite — Gesetz aufstellen: Die Bahnen der Himmelskörper sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

KEPLER führte nun die folgenden Bezeichnungen ein: die mittlere Anomalie *(anomalia media)* ist die der Zeit proportionale Bewegung des Himmelskörpers, gemessen durch die Fläche des elliptischen Sectors DGA vom Aphel aus. Die excentrische Anomalie (Anomalie aus dem Mittelpunkte, eigentlich *anomalia eccentri)*, ist der Winkel DBJ, gemessen durch den Bogen DJ im Kreise. Die wahre Anomalie *(anomalia coaequata)* ist der Winkel, unter welchem der Bogen DG von der Sonne aus gesehen wird, also der Winkel DAG. AG ist die wahre Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne, sein Radiusvector, welche Bezeichnungen noch jetzt mit der Modifikation gebräuchlich sind, dass die Anomalien vom Perihel statt wie bei KEPLER vom Aphel gezählt werden.

Führt man statt der linearen Excentricität e die numerische $\frac{e}{a} = e'$ ein und lässt dann den Accent wieder weg, so werden die zur Rechnung dienenden Formeln (in der jetzt üblichen Form, Anomalien vom Perihel)

$$M = M_0 + \mu t = E - \frac{e}{arc\,1''} \sin E \qquad (1)$$

[1]) Diese Curve ist eine Ellipse, deren Brennpunkte aber nicht nach A und C fallen, denn für diesen Fall würde die Pfeilhöhe eine andere.

$$r = a(1 - e\cos E),$$
$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E, \quad r\cos v = a(\cos E - e). \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) giebt die mittlere Anomalie oder die Zeit aus der excentrischen Anomalie; die direkte Lösung der umgekehrten Aufgabe, die excentrische Anomalie zu einer gegebenen Zeit zu bestimmen, erklärt bereits KEPLFR für unmöglich; sie hat seither den Namen des KEPLER'schen Problems erhalten und wurde vielfach durch Reihenentwickelungen und Näherungen gelöst, so vorzugsweise von BESSEL und ENCKE.

Hiermit hatte KEPLER die Bewegung eines Himmelskörpers völlig genau beschrieben. Für die Beziehungen zwischen den Bewegungen und Entfernungen verschiedener Himmelskörper musste sich KEPLER noch lange mit der pag. 80 angeführten Näherung begnügen; wieder fast ein Jahrzehnt später fand KEPLER die wirkliche Beziehung, welche er in dem 1619 erschienenen Werke »Harmonices mundi« mittheilt. Dieselbe besteht darin, dass das Verhältniss der Umlaufszeiten gleich demjenigen der $\frac{3}{2}$ten Potenzen der mittleren Entfernungen von der Sonne ist, oder dass sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der grossen Halbaxen verhalten. Diese Beziehung giebt das dritte KEPLER'sche Gesetz[1]).

In seinem 1621 erschienenen Lehrbuch »Epitome Astronomiae Copernicanae« wurden diese Gesetze dann ebenfalls wieder aufgeführt, auf die übrigen Planeten ausgedehnt, und speciell die Gültigkeit des dritten Gesetzes bei den Nebenplaneten aus den für die Jupiterssatalliten geltenden Entfernungen und Umlaufszeiten bewiesen. Die von KEPLER angenommenen Elemente für die Hauptplaneten waren:

	Mittlere tägliche siderische Bewegung	Mittlere Entfernung	Numerische Excentricität	Ort des Aphels	Neigung der Bahn
Saturn	0° 2′ 0″·60	9·5100	0·05700	25° 48′ ♐	2° 32′
Jupiter	0° 4′ 58″·43	5·1965	0·04822	7° — ♎	1° 20′
Mars	0° 31′ 26″·65	1·5235	0·09263	29° 20′ ♌	1° 50′
Erde	0° 59′ 8″·33	1·0000	0.01800	5° 30′ ♋	—
Venus	1° 36′ 7″·65	0·7240	0·00694	2° — ♒	3° 22′
Mercur	4° 5′ 32″·42	0·3881	0·21000	15° — ♐	6° 54′

Die von KEPLER construirten Planetentafeln, die er zu Ehren seines Kaiserlichen Gönners RUDOLPH II. die RUDOLPHINI'schen Tafeln nannte, waren bereits sehr gut und wurden durch fast hundert Jahre von keinen andern übertroffen.

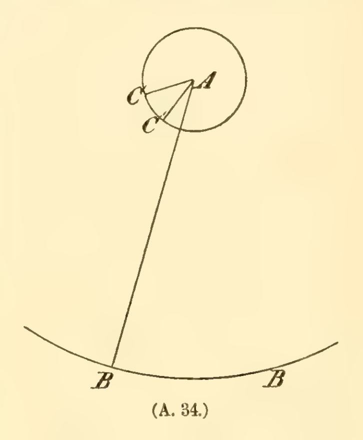
Für den Mond nahm KEPLER die TYHONI'schen Werthe für Mittelpunktsgleichung und die Evection an, die Variation etwas vergrössert; er liess aber ebenfalls die epicyklische Darstellung fallen. Bei der jährlichen Gleichung bemerkte KEPLER, dass durch Weglassung der Mittelpunktsgleichung der Sonne in der Zeitgleichung (pag. 70) die Beobachtungen wohl besser, aber noch nicht völlig genau dargestellt werden, und dass es nöthig ist, eine Zeitgleichung Z_2 zu verwenden, welche sich von der Gleichung Z_1 um mehr unterscheidet, als Z_1 von der wahren Zeitgleichung Z. Es wurde daher die Correction der mittleren Länge des Mondes mehr als doppelt so gross, sie wird $11'\sin v_{\odot}$, also beinahe richtig. Auch die Breitenstörung berücksichtigt KEPLER, doch ist seine Dar-

[1]) Die strenge Ableitung der drei Gesetze s. Mechanik des Himmels.

stellung von der TYCHONI'schen in der Form etwas verschieden, die Resultate jedoch sind völlig identisch[1]).

Minder glücklich war KEPLER bei der Bestimmung der wahren Bahn der Kometen. Seit REGIOMONTAN war von den Astronomen fast allgemein die Annahme acceptirt worden, dass die Kometen zu den Weltkörpern zu zählen seien, und schon TYCHO hatte, wie erwähnt, versucht eine Kreisbahn zu bestimmen. KEPLER verliess die Kreisbahn, da er es für unmöglich hielt, dass ein Himmelskörper, der sich in einem Kreise bewege, nicht wiedererscheinen sollte; er wählte deshalb für die Kometen geradlinige Bahnen, und bestimmte dieselben auch für die Kometen von 1607 und 1618.

Bezüglich der Präcession ist zu bemerken, dass sich KEPLER anfänglich noch der COPERNICANI'schen Meinung anschloss, dass die Erde eine vierfache Bewegung haben müsse, bald aber kam er hiervon ab und nahm eine parallele Verschiebung der Erdaxe im Weltraum an. Die Präcessionsbewegung wird dann durch eine kleine Drehung derselben, also eine Drehung der Weltpole um die Pole der Ekliptik A erklärt, wodurch eine gleichförmige Verschiebung der Aequinoctialpunkte, also eine Präcession der Aequinoctien entsteht. Um aber auch die Veränderlichkeit der Schiefe der Ekliptik zu erklären, nimmt er an, dass sich um eine mittlere Lage A (Fig. 34) der Pole der Ekliptik die wahren Pole C gleichmässig drehen. Die mittlere Schiefe der Ekliptik AB bestimmt KEPLER aus der physikalischen Hypothese, dass für dieselbe die Summe der Flächenräume der heissen und der beiden kalten Zonen gleich sei der Summe der Flächen der gemässigten Zonen, woraus $AB = 24° 17' 42''$ folgt. Aus den von HIPPARCH und REGIOMONTAN gefundenen wahren Werthen für die Schiefe der Ekliptik findet er dann den Halbmesser des kleinen Kreises $AC = 2° 3' 44''$ und die Umlaufszeit des Punktes C um A nahe 58000 Jahre.



(A. 34.)

Während KEPLER die Entfernungen der Himmelskörper durch seine Methode in Einheiten der Erdbahnhalbaxe ausdrücken konnte, konnte er die Entfernung der Sonne von der Erde selbst in Einheiten des Erdhalbmessers nicht bestimmen, da die Sonnenparallaxe zu klein ist. Er ging nun in folgender Weise vor. Ist D der wahre Sonnenhalbmesser, A die Entfernung der Erde von der Sonne und α der scheinbare Sonnenhalbmesser (15'), so ist $tg\,\alpha = D:A$ und daraus findet sich $A = 229{\cdot}18 D = mD$. Nun schloss KEPLER, dass sich die Entfernung der Erde von der Sonne zum Erdhalbmesser verhalte, wie der Sonnenkörper zum Erdkörper, und da hieraus, wenn der Erdhalbmesser d gesetzt wird

$$\frac{D^3}{d^3} = \frac{mD}{d} \quad \text{oder} \quad d^2 = \frac{D^2}{m}, \quad D = d\sqrt{m}$$

wird, so folgt

$$A = m\sqrt{m}d \quad \text{oder} \quad D = 15\,d, \quad A = 3469\,d.$$

Weiter schliesst KEPLER, dass sich die Entfernung des Mondes von der Erde zum Erdhalbmesser verhalte, wie der Erdkörper zum Mondkörper, und da die Entfernung Erde — Mond = 229·18 Mondhalbmesser ist, wenn der Mondhalb-

[1]) S. HERZ, Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, II. Theil, pag. 208 ff.

messer auch 15′ angenommen wird, so wird dann, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde mit A', der Mondhalbmesser mit δ bezeichnet wird

$$\frac{A'}{d} = \frac{d^3}{\delta^3}, \quad A' = \frac{d^4}{\delta^3} = m\delta \quad \text{folglich} \quad \delta = \frac{d}{\sqrt[4]{m}}, \quad A' = d\sqrt[4]{m^3}.$$

woraus $d = 3{\cdot}891\,\delta$; $A' = 58{\cdot}9\,d$ folgt. Endlich nimmt KEPLER an, dass die Entfernung der Fixsterne so oft die Saturnsbahn fasst, als diese den Sonnendurchmesser, und da die Saturnsbahn gleich 2179 Sonnendurchmesser ist, so wäre die Entfernung der Fixsternsphäre 4750000 Sonnendurchmesser, oder 20730 Erdbahnhalbmesser, daher die jährliche Parallaxe der Fixsterne 9″·95 (nach KEPLER 10″), also eine damals nicht zu bestimmende Grösse.

Auch in der in jenen Zeiten erst durch J. SCALIGER[1]) (1540—1609) als Wissenschaft begründeten Chronologie leistete KEPLER nicht unerhebliches; es mag hier nur erwähnt werden, dass er sich für die im Jahre 1582 von GREGOR XIII. durchgeführte Kalenderreform erklärte und dass er aus historischen und astronomischen Angaben fand, dass das Geburtsjahr Christi fünf Jahre vor Beginn der gewöhnlichen Zeitrechnung (aera ab incarnatione) zu setzen ist[2]).

Für die praktische Astronomie ist von besonderer Wichtigkeit die von KEPLER auf rein theoretischem Wege gemachte Entdeckung des Fernrohrs. In seinen beiden Werken »Astronomiae pars optica« und »Dioptrice« untersucht er eingehend die Brechung der Lichtstrahlen, und stellt auch ein, allerdings unrichtiges, Brechungsgesetz auf, leitet daraus den Gang der Lichtstrahlen in Linsen ab, wodurch er dann durch Combination zweier Convexlinsen auf das astronomische Fernrohr geführt wurde. Dasselbe stand freilich damals an Leistungsfähigkeit dem gleichzeitig erfundenen GALILEI'schen oder holländischen Fernrohre nach, aber es war der Keim zu dem heute ausnahmslos bei den astronomischen Beobachtungen verwendeten.

Nebst diesen für die Fortschritte der praktischen Astronomie, der Beobachtungskunst wichtigen Entdeckungen muss hier noch in Kürze einer anderen in jener Zeit eingeführten Neuerung gedacht werden, welche nicht minder wichtig für den Fortschritt der rechnenden Astronomie war, nämlich der Erfindung der Logarithmen, welche fast gleichzeitig von dem schon genannten J. BÜRGI (1552—1632), von J. NEPER (1550—1617) und H. BRIGGS (1556—1630) gemacht wurde. Alle drei Systeme unterscheiden sich in der Form, während sie im Wesen als identisch bezeichnet werden müssen. Die Praxis bürgerte sich bald in der Astronomie ein und schon KEPLER giebt in den Tabulae Rudolphinae eine solche Logarithmentafel zur Erleichterung der astronomischen Rechnungen.

Eng verknüpft mit seinen Untersuchungen über die Bahnen der Himmelskörper sind bei KEPLER seine Annahmen über die physikalischen Ursachen dieser Bewegungen, über die in der Natur waltenden Kräfte. Wenngleich KEPLER sich durch die Nichtübereinstimmung der Beobachtungen mit seiner Theorie wiederholt veranlasst fand, seine Ansichten zu modificiren, so liegt ihnen doch das eine unveränderte Princip von der Anziehung der Himmelskörper, ähnlich derjenigen von magnetischen Körpern, zu Grunde. »Gravitas« ist bei KEPLER eine Kraft, oder ein Vermögen, in Folge dessen die Körper das Bestreben haben, sich zu nähern und gegen einander zu bewegen; diese Kraft ist bei näheren

---

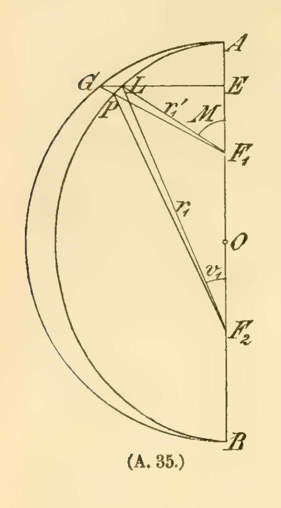
[1]) Geboren in Caen; er studirte in Bordeaux und Paris, erhielt 1593 eine Professur in Leiden, wo er bis zu seinem Tode blieb.

[2]) Eigentlich könnte man nur sagen: »mindestens 4 Jahre vor dem Beginn der gewöhnlichen Zeitrechnung«.

Körpern stärker als bei weiter von einander entfernten Körpern; die Annäherung ist eine wechselseitige, beide Körper bewegen sich gegen einander, und zwar sind die von den Körpern dabei zurückgelegten Wege umgekehrt proportional ihren Massen. Allein KEPLER war nicht im Stande, aus dieser anziehenden Kraft auch das Entfernen der Körper von der Sonne nach dem Durchgange derselben durch das Perihel zu erklären, und nahm zu diesem Zwecke eine die Planeten um die Sonne bewegende, beständig im Weltraume parallel wirkende Kraft an, und zwar nach derjenigen Richtung, in welcher sich der Planet im Perihel bewegt [in der Richtung der Pfeile (Fig. 33)]. Durch diese wird in demjenigen Theile der Bahn, in welchem sich das Perihel befindet, die Geschwindigkeit grösser, in der anderen Bahnhälfte kleiner, während die Entfernungen der Planeten von der Sonne bei seiner Bewegung vom Aphel bis zum Perihel beständig verkleinert, in der zweiten Hälfte wieder vergrössert werden. Der Effect seiner anziehenden Kräfte, der »Gravitas«, ist aber bei KEPLER nur für ruhende Körper der universellen Attraction NEWTON's vergleichbar. Durch die Rotation des Centralkörpers tritt in KEPLER's »Gravitas« eine wesentliche Modifikation ein, es tritt eine Tangentialkraft (die aber nicht als Beharrungsvermögen aufzufassen ist) auf. Andrerseits vermischt sich mit diesen Ansichten KEPLER's Annahme einer intelligibeln Welt, einer Sensitivität der Natur, welche ebenfalls zu motorischen Kräften Anlass giebt. Diese Annahme bildet überdies den ganzen Inhalt von KEPLER's Astrologie. Seit den Zeiten der Araber war die Astrologie oder Sterndeutekunst (s. diese) zu einer förmlichen Wissenschaft ausgebildet worden, durch welche man nach bestimmten Regeln die Geschicke der Welt und der Menschen vorausbestimmen zu können glaubte. Aber schon lange vor KEPLER trat ein mschwung der Meinung auf, und schon mehr als 100 Jahre vorher hatte z. B. der aufgeklärte und gelehrte Graf JOHANN PICUS VON MIRANDULA (1463—1494) die Lehren der Astrologie als eitel und unverständig bezeichnet, aber noch zu KEPLER's Zeiten — und noch lange später — war dieser Aberglaube nicht erloschen. Auch KEPLER wurde von abergläubischen Fürsten über künftige Geschicke befragt, und musste »Kalender schreiben«, d. h. Prognosen, und dass er, der berühmte Astronom, auch Astrolog war, wird ihm von manchen als Schwäche, von anderen als Täuschung ausgelegt, und wieder andere sprechen von seiner »Doppelnatur«. Dass er einen gewissen Hang zu mystischen Spekulationen hatte, ist nicht zu leugnen, aber seine Astrologie, und man muss diese gewiss von der Astrologie überhaupt unterscheiden, sowie er sich auch stets dagegen verwahrte zu den Astrologen gezählt zu werden, erstreckte sich nur auf den Glauben an einen geheimnissvollen Einfluss der Constellationen (Oppositionen, Conjunctionen Quadraturen u. s. w.), sowie der Töne auf das Gemüth des Menschen. KEPLER's Meinung lässt sich dahin aussprechen, dass er den Constellationen einen gewissen Einfluss auf die Welt und auf die Menschen zuschrieb, welchem der Mensch jedoch (ebenso wie dem Einflusse der Musik) seinen Willen und seine Energie entgegensetzen kann. Von einer Vorhersagung von Ereignissen kann demnach keine Rede sein, und in allen seinen sogenannten Prognosen zieht KEPLER mehr oder weniger — je nach dem Stand der Fragenden — die Frage ins Lächerliche, und benutzt die Gelegenheit, um ungestraft Sittenpredigten zu halten und Wahrheiten zu sagen, zu welchem Zwecke mancher auch heute nicht ungern den Astrologen spielen möchte.

Die durch KEPLER aufgestellten Gesetze der Planetenbewegungen fanden nicht allgemeine Anerkennung. Die Schuld mag theils darin gelegen sein, dass das COPERNICANI'sche System, auf welches sie sich stützten, selbst in jener Zeit

öffentlich noch angefeindet war, theils dass ihre Ableitung sowohl als auch ihre Form von der bis dahin üblichen wesentlich abweichend und etwas fremdartig war, und die Beobachtungen noch kein hinreichend sicheres Material zur Beurtheilung ihrer Richtigkeit boten; auch traten wiederholt noch die alten epicyklischen Theorien, wie bei LANSBERG, oder neue den KEPLER'schen ähnliche Ansichten wie bei BULLIALDUS, SETH WARDUS, CASSINI u. A. auf.



(A. 35.)

LANSBERG[1]) gab kurz vor seinem Tode »Tabulae perpetuae motuum coelestium« heraus, welche auf Grund des COPERNICANI'schen Systems und — allerdings mit einigen Aenderungen — mit Beibehaltung der alten Epicykeln den Lauf der Planeten darstellen sollten; auf Grund neuerer Beobachtungen angelegt, waren dieselben auch eine Zeit lang ziemlich verlässlich.

BULLIALDUS (1605—1694) nimmt ebenfalls die Bewegung der Planeten in Ellipsen an, ersetzt aber das complicirte zweite KEPLER'sche Gesetz durch eine gleichmässige Bewegung um den zweiten Brennpunkt. Da nun nach der Grundeigenschaft der Ellipse (s. Fig. 35).

$$F_1 L = r_1' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos M} = a(1 - e \cos M - e^2 \sin^2 M)$$

ist, so wird

$$F_2 L = r_1 = 2a - r_1' = a(1 + e \cos M + e^2 \sin^2 M)$$

noch in der zweiten Potenz der Excentricität übereinstimmend mit der KEPLER-schen Annahme. Da ferner

$$\sin(M - v_1) = 2ae \frac{\sin M}{r_1} = 2e \sin M - e^2 \sin 2M,$$

also

$$v_1 = M - 2e \sin M + e^2 \sin 2M$$

ist, so wird, wenn v die wahre Anomalie für die KEPLER'sche Annahme ist,

$$v_1 = v - \tfrac{1}{4} e^2 \sin 2M.$$

BULLIALDUS zerlegt jedoch zur Vereinfachung der Rechnung die Bewegung in eine epicyklische, sodass die Bewegung des Epicykelmittelpunkts G im Kreise AGB gleichmässig stattfindet und der Planet sich in einem Epicykel um G bewegt. Wenn dessen Halbmesser $\rho = \frac{1}{4}e^2$, die Geschwindigkeit des Planeten im Epicykel gleich der doppelten Geschwindigkeit des Epicykelmittelpunkts, und die Bewegungsrichtung des ersteren entgegengesetzt derjenigen des letzteren gewählt wird, so ist, wie schon D. FABRICIUS zeigte, die Bahn eine Ellipse, für welche F_2 ein Brennpunkt ist; doch findet für diese Bewegung das Gesetz der Flächen nicht statt.

BULLIALDUS nimmt aber eine Correction mit dem entgegengesetzten Zeichen, so dass ein Planetenort erhalten wird, für welchen die wahre Anomalie wohl die aus dem KEPLER'schen Gesetz der Flächen folgende ist, der aber dann nicht in der Ellipse liegt.

JEAN DOMINIQUE CASSINI[2]) (1625—1712) ersetzte die elliptische Form der Planetenbahnen durch eine andere Curve, bei welcher das Produkt der Leit-

---

[1]) Geboren 1561 zu Gent, gestorben 1632 in Middelburg, wo er protestantischer Prediger war.

[2]) J. D. CASSINI war am 8. Juni 1625 zu Perinaldo bei Nizza geboren; nachdem er den ersten Unterricht von den Jesuiten erhalten hatte, ging er 1641 an die Universität Bologna, an welcher er 1650 Professor der Astronomie wurde. 1669 kam er als erster Direktor der neu

strahlen von den beiden Brennpunkten eine constante Grösse ist; diese Curve ist aber, wie schon D. GREGORY in seinen »Astronomiae physicae et geometricae elementa« (1702) bemerkt, zur Darstellung der Planetenbahnen überhaupt ungeeignet, nur für sehr kleine Excentricitäten wird sie ellipsenähnlich; bei grösseren Excentricitäten wird sie an den Endpunkten der kleinen Axe eingedrückt, und geht dann durch die einfache Schleifenform, die Lemniscate (∞) in eine aus zwei getrennten ovalförmigen Zügen bestehende Curve über. CASSINI war jedoch wie sein Vorgänger P. GASSENDI[1]) (1592—1655), der in seiner »Institutio astronomica« ein sehr werthvolles Lehrbuch, eine übersichtliche Zusammenstellung alles bis dahin Bekannten lieferte, ein sehr guter Beobachter. GASSENDI beobachtete den Saturnsring fleissig, hielt jedoch die beiden seitlichen Anhänge für Satelliten. Er beobachtete die Kometen von 1618 und 1652/53 und bestimmte für letzteren wie KEPLER eine geradlinige Bahn. Auch beobachtete er den von KEPLER vorhergesagten Mercursdurchgang (1631 Nov. 7). CASSINI bestimmte die Rotationsdauer der Planeten, und fand für Jupiter $9^h\,56^m$, für Mars $24^h\,37^m$, für Venus nahe 24^h. Nachdem HUYGHENS[2]) (1629—1695), dessen vorzüglichstes Verdienst für die Astronomie die Einführung des Pendels als Zeitregulator war, die wahre Natur des Saturnringes erkannt und einen Mond des Saturn entdeckt hatte, fand CASSINI 4 weitere Saturnssatelliten auf; auch entdeckte der letztere das Zodiacallicht, und gab zum ersten Male Tafeln für die Trabanten des Jupiter. GASSENDI sowie CASSINI waren Anhänger des geocentrischen Systems; GASSENDI jedoch, welcher Geistlicher war, sowie sein späterer Nachfolger BOSCOVICH erklärten sich nur zum Schein als Gegner des COPERNICANI'schen Systems, »da die heilige Schrift die Ruhe der Erde und die Bewegung der Sonne befiehlt und ein heiliges Decret besteht, nach welchem dieses nicht nur von der scheinbaren, sondern auch von der wahren Ruhe zu verstehen ist, und diejenigen, welche dieses Decret respectiren, das TYCHONI'sche System annehmen und vertheidigen müssen.«

Im Allgemeinen sind aus den nächsten Decennien nach KEPLER weniger theoretische Untersuchungen zu erwähnen, es war mehr eine Zeit fleissigen Beobachtens, wesentlich gefördert durch die Begründung grösserer Sternwarten. HEVEL[3]) (1611—1687) hatte sich eine eigene Sternwarte gebaut, wo er vorzugsweise den Mond beobachtete; das Resultat war seine Selenographie, die erste ausführliche Beschreibung der Mondoberfläche. In Paris wurde 1667 die Sternwarte gegründet, deren erster Director der schon genannte J. D. CASSINI war. 1656 wurde die neue Sternwarte in Kopenhagen, deren Bau schon unter LONGO-

---

gegründeten Sternwarte nach Paris, wo er am 14. September 1712 starb. Seine Entdeckungen sind fast durchgehend in der praktischen Astronomie, da er kein Theoretiker war. Um NEWTON's Theorie kümmerte er sich ebenso wenig wie um COPERNICUS, da er stets ein starrer Anhänger des PTOLEMÄI'schen Systems war.

[1]) Seit 1613 Professor der Philosophie in Aix und seit 1625 der Mathematik in Paris.

[2]) CHRISTIAN HUYGHENS, geboren am 14. April 1629 im Haag, bezog in seinem 16. Jahr die Universität Leiden. 1649 machte er mit dem Grafen von Nassau eine Reise durch Europa. Bald nach seiner Rückkehr gab er seine ersten, mehr mathematischen Arbeiten heraus, wandte sich aber bald auch der Construction der Fernröhre und Pendeluhren zu, und leistete in beiden vorzügliches; 1665 kam er nach Paris, kehrte 1670 auf kurze Zeit in seine Vaterstadt zurück, ging dann wieder nach Paris, welches er jedoch 1681 nach Aufhebung des Edictes von Nantes gänzlich verliess; er blieb alsdann bis zu seinem am 8. Juli 1695 erfolgten Tode im Haag.

[3]) Er war in Danzig geboren, wo er auch seine Sternwarte 1641 erbaute. 1679 verlor er dieselbe durch eine Feuersbrunst; er erbaute aber sofort eine neue, auf der er 1681 bereits wieder beobachten konnte.

MONTAN begonnen worden war, vollendet, als erster nach ihrer Vollendung wirkte an derselben OLAUS RÖMER[1]) (1644—1710), welcher aus den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupitertrabanten die Geschwindigkeit des Lichtes ableitete. 1676 wurde die Sternwarte in Greenwich vollendet, deren Leitung FLAMSTEED (1646—1719) übergeben wurde, der hier jene ausgedehnte Beobachtungsreihe durchführte, welche in dem nach seinem Tode erschienenen *Atlas coelestis* und in seiner ebenfalls nach seinem Tode herausgegebenen *Historia coelestis* niedergelegt sind. Endlich wurde 1706 die Sternwarte in Berlin vollendet, an welcher als erster Beobachter G. KIRCH (1639—1710) wirkte[2]).

Es ist selbstverständlich, dass diese Institute mit den besten Instrumenten ihrer Zeit ausgerüstet wurden. Es kann auch nicht Wunder nehmen, dass gerade in diese Zeit der vorzugsweise praktischen Bethätigung bedeutende Fortschritte in der Vervollkommnung der Instrumente zu verzeichnen sind. Wenngleich die eigentliche Ausbildung der Beobachtungs- vorzugsweise aber Reductionsmethoden erst in spätere Zeiten fällt, und Beobachtungen, welche mit den heutigen verglichen werden könnten, erst seit BRADLAY datiren, so sind doch auch an dieser Stelle bedeutende Verbesserungen zu erwähnen.

Die erste Verbindung des Fernrohrs mit einem (unbeweglichen) Fadennetz datirt aus dem Jahre 1640 und rührt von GASCOIGNE her, der derartige Netze zur Messung der Durchmesser von Mars und Jupiter verwendete. Bald darauf wurden auch diese festen Netze in Verbindung mit Uhren zur Bestimmung der Durchgangszeiten von Sternen benutzt. Im Jahre 1658 hatte HUYGHENS das Pendel als Zeitmessinstrument vorgeschlagen, und wenngleich die Vervollkommnung desselben in einer für Messungen brauchbaren Form erst aus dem Jahre 1673 stammt, so scheinen doch bereits 1662 Versuche mit Pendeluhren zur Beobachtung von Durchgangszeiten an festen, aus dünnen Silberfäden hergestellten Netzen vorgenommen worden zu sein[3]), und nicht lange darauf wurden auch die Fadennetze auf beweglichen Schlitten (s. Mikrometer) von AUZOUT und PICARD eingeführt.

Von den theoretischen Untersuchungen, welche in diese Zeit fallen, wurde bereits derjenigen Bestrebungen gedacht, welche als nächste Folge der neuen Planetentheorien KEPLER's auftraten. Es bleibt noch zu erwähnen, dass auch die von KEPLER begründete Methode der Untersuchung der Kometenbewegungen von HEVEL in seiner »Kometographie« weiter ausgebildet wurde, und diesen zur Hypothese von parabolischen Kometenbahnen führte, bei denen jedoch noch nicht an eine Aehnlichkeit mit den elliptischen Planetenbahnen im physikalischen Sinn gedacht werden kann, da die Sonne keineswegs im Brennpunkt der Parabel steht; erst DÖRFEL erkannte in seiner Untersuchung der Bahn des grossen Kometen von 1680 diese Thatsache, aber ebenfalls ohne Rechnung, mehr intuitiv.

Erst das Ende des 17. Jahrhunderts brachte den Abschluss der theoretischen Untersuchungen über die den Lauf der Gestirne bestimmenden Gesetze, den Abschluss derjenigen Reformation der Astronomie, welche 200 Jahre früher von COPERNICUS mit der Einführung des heliocentrischen Systems begonnen worden war. KEPLER hatte durch die empirische Auffindung seiner drei Gesetze über

---

[1]) Geboren in Kopenhagen, kam er 1672 nach Frankreich, wo er bis 1681 blieb, in welchem Jahre er als Professor der Mathematik in Kopenhagen in sein Vaterland zurückkehrte.

[2]) Zunächst folgten dann noch die Sternwarten von Petersburg (1725), Wien (1755) und Oxford (RADCLIFFE Obs. 1771).

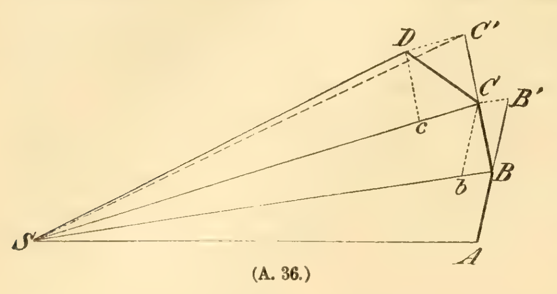
[3]) S. LA HIRE, »*Des dates de l'invention des micromètres*« in den Memoiren der Pariser Academie 1717 (pag. 78).

die Planetenbewegungen auch die letzten Epicykeln entfernt, von denen die ersten bereits durch die COPERNICANI'sche Annahme verschwanden, und die Form der Planetenbahnen und den Ort der Planeten in diesen zu jeder beliebigen Zeit richtig dargestellt; er hatte auch bereits geahnt, dass sich dieselben aus einer zwischen den Himmelskörpern wirkenden Kraft ableiten lassen, den mathematischen Ausdruck für diese Kraft, die Abhängigkeit derselben von der Lage und Grösse der auf einander wirkenden Himmelskörper hat aber erst 100 Jahre später JSAAC NEWTON[1]) (1643—1727) festgestellt. NEWTON stand aber bereits auf einem anderen Standpunkt als KEPLER, denn zu NEWTON's Zeiten waren schon die Principien der Mechanik, namentlich durch GALILEI und HUYGHENS, zur vollen Klarheit gebracht worden, und die Hauptschwierigkeit für die Conception richtiger astronomischer Ansichten lag ja in früheren Zeiten darin, dass man als Bedingung für die Bewegung eines Körpers eine in der Richtung seiner Bewegung (also in der Richtung der Tangente an seine Bahncurve) wirkende Kraft annehmen zu müssen glaubte. Als einmal das Gesetz der Trägheit aufgestellt war, und die Wirkung der Kraft nur dahin angenommen zu werden brauchte, die Bewegung des Körpers von der geraden Linie abzulenken, da handelte es sich nur mehr um die Bestimmung der Grösse der für einen gewissen Fall nöthigen Stärke und Richtung der Kraft. KEPLER hatte auch bereits die Idee von einem Attractionscentrum; aber es scheint, dass er die eben erwähnten mechanischen Principien, wenngleich sie zum grossen Theil schon etwas früher aufgestellt worden waren, noch nicht richtig erfasst hatte. Bei ihm findet man noch immer, wie schon erwähnt, Kräfte, welche in der Richtung der Tangente wirken und die Geschwindigkeit des Planeten vergrössern bezw verkleinern. Nun hatte NEWTON, vielleicht angeregt durch die erwähnten Bemerkungen KEPLER's, die Idee des Attractionscentrums aufgegriffen, und aus dieser Annahme unter Zuziehung der aus den Beobachtungen abgeleiteten 3 KEPLER'schen Gesetze, sein universelles Attractionsgesetz aufgestellt. Er zeigte zunächst in seinen, zum ersten Mal 1686 erschienenen »*Philosophiae naturalis principia mathematica*«, dass, nach welchem Gesetze immer ein Körper gegen ein fixes Attractionscentrum angezogen wird, derselbe eine Bahn beschreibt, bei welcher die von den Radienvectoren bestrichenen Flächen den Zeiten proportional sein müssten.

Sei S (Fig. 36) das Attractionscentrum, A der gegen S hin angezogene Körper, so wird er, wenn er vermöge einer anfänglichen Geschwindigkeit nach B gekommen ist, das Bestreben haben, in dem nächsten gleichen Zeittheilchen τ ein gleiches Stück $BB' = AB$ zurückzulegen, während er in Folge der Anziehung des Centrums S sich in demselben Zeittheilchen τ um das Stück Bb demselben nähern würde. Das Resultat ist die Bewegung in der Diagonale BC des

[1]) ISAAC NEWTON, geboren am 5. Januar 1643 zu Whoolstorpe in Lincolnshire. Nachdem er seine Jugend mit nur dürftigem Unterricht, mehr den landwirthschaftlichen Arbeiten zugewendet, verbracht hatte, bezog er 1660 die Universität Cambridge; 1666 verliess er diese Stadt wegen einer in ihr ausgebrochenen, pestartigen Krankheit, kehrte jedoch bald zurück und übernahm 1669 die ihm angebotene Professur der Mathematik in Cambridge, welche er bis 1695 ohne wesentliche materielle Verbesserung seiner nicht besonders günstigen finanziellen Lage bekleidete. Von da an ging es ihm jedoch besser; er kam anfänglich als Münzwardein, später als Vorsteher der Königl. Münze mit einem hohen Jahresgehalt nach London. 1725 zog er sich seiner geschwächten Gesundheit wegen auf ein Landgut in die Nähe Londons zurück, doch kam er häufig nach London. Nach einem dieser Besuche 1727 stellte sich bei dem nunmehr 85 jährigen Greise durch die Uebermüdung ein heftiger Rückfall seiner Krankheit ein, welcher er am 20. März 1727 erlag.

Parallelogramms $BB'Cb$, so dass der Körper thatsächlich nach dem zweiten Zeittheilchen τ nach C gekommen ist. In dem nächsten, wieder gleichen Zeittheilchen τ würde der Körper ohne die Wirkung der Attraction von S nach C' gekommen sein, sodass $CC' = CB$ ist, die Attraction von S würde aber eine Annäherung um ein von Bb z. B. verschiedenes Stück Cc bewirken, und der Körper gelangt daher nach D. Wie immer nun aber Bb und Cc beschaffen sein mögen, so werden die in den gleichen Zeittheilchen τ beschriebenen Flächen ASB, BSC, CSD einander gleich sein, denn es ist *area* SCD = *area* SCC',



(A. 36.)

weil die Spitzen C', D der beiden Dreiecke in einer zur Basis SC parallelen Geraden liegen, ferner *area* SCC' = *area* SCB, weil die beiden Dreiecke die gleiche Basis $BC = CC'$ haben, woraus $SCD = SCB$ folgt. Wirkt die Kraft continuirlich, so wird die Bahn eine continuirlich gekrümmte und die Dreiecke sind als Flächen, welche in gleichen unendlich kleinen Zeittheilchen beschrieben werden, zu betrachten. Umgekehrt werden dann in jeder Bewegung, in welcher die Flächen sich wie die Zeiten verhalten, die Bewegungen durch anziehende Kräfte, die gegen ein festes Attractionscentrum gerichtet sind, bewirkt. Die Grösse der anziehenden Kraft, welches immer auch ihr Gesetz ist, wird gemessen durch den zurückgelegten Weg und wird daher proportional der Grösse des gegen das Anziehungscentrums zurückgelegten Stückes $B'C = Bb$. In einer Kreisbahn vom Halbmesser a wird aber $Bb = \frac{CB^2}{2SB}$, folglich die Kraft $P = m \cdot \frac{CB^2}{2SB}$, wenn m einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, und da $CB = a\alpha$ ist, wenn $\sphericalangle CSB = \alpha$ gesetzt wird, so ist

$$P = m\frac{a^2\alpha^2}{2a} = \tfrac{1}{2}m \cdot a\alpha^2.$$

Da nun weiter der in dem Zeittheilchen τ zurückgelegte Weg, α gefunden wird durch $\alpha = v\tau$, wenn v die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, so ist

$$P = \tfrac{1}{2}m \cdot av^2\tau^2 = A \cdot av^2$$

und indem $v = 360° : T$ ist, wenn T die Umlaufszeit bedeutet, so folgt endlich $P = B \cdot \frac{a}{T^2}$. Da für einen anderen Körper in der Entfernung a_1 mit der Umlaufszeit T_1 die Kraft $P_1 = B\frac{a_1}{T_1^2}$ ist, so wird

$$P_1 : P = \frac{a_1}{T_1^2} : \frac{a}{T^2},$$

d. h. die Kräfte, welche von einem fixen Attractionscentrum auf zwei Körper ausgeübt werden, die sich in verschiedenen Entfernungen um dasselbe bewegen, verhalten sich, wie direkt die Entfernungen und verkehrt die Quadrate der Umlaufszeiten. Kennt man nun ein Gesetz, welches den Zusammenhang zwischen den Entfernungen und Umlaufszeiten giebt, so kann man daraus die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung bestimmen. Ein solches Gesetz ist für die um die Sonne kreisenden Himmelskörper das dritte Kepler'sche Gesetz. Da nach diesem $T = Ka^{\frac{3}{2}}$ ist, so wird

wenn die Produkte der verschiedenen Proportionalitätsfaktoren durch einen neuen Faktor ersetzt werden:

$$P = \frac{C}{a^2}$$

sein, d. h. die Kräfte, welche die Sonne auf verschiedene Himmelskörper übt, verhalten sich wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen der Himmelskörper von der Sonne. Allgemein findet man übrigens sofort, dass, wenn $T = Ka^n$ wäre, $P = C : a^{2n-1}$ sein wird, ein bereits von NEWTON erhaltenes Resultat. Dass diese Kraft eine allgemein wirkende ist, zeigt NEWTON dadurch, dass er nachweist, dass der Fall der Körper zur Erde sowie die Bewegung des Mondes um die Erde nur verschiedene Aeusserungen einer und derselben Kraft wären. Ist die Beschleunigung der Schwere auf der Erdoberfläche g, so ist der in einer Secunde on einem frei fallenden Körper zurückgelegte Weg auf d er Erdoberfläche (Entfernung ρ vom Erdmittelpunkt) $\frac{1}{2}g$, daher wäre der Fallraum in einer Secunde in der Entfernung r des Mondes von der Erde $\frac{1}{2}g\frac{\rho^2}{r^2}$; das vom Mond in der selben Zeit gegen die Erde zurückgelegte Stück Bb wurde aber oben gleich

$$\frac{CB^2}{2SB} = \frac{r^2\alpha^2}{2r} = \frac{1}{2}r\alpha^2$$

gefunden, wo α der in einer Secunde vom Mond zurückgelegte Weg ist, daher $\alpha = 2\pi : T$, wenn die Umlaufzeit T in Zeitsecunden ausgedrückt wird. Wollte man g aus der Bewegung des Mondes ableiten, so müsste

$$\frac{1}{2}g\frac{\rho^2}{r^2} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}; \quad g = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 \rho$$

sein, T beträgt 2360628^s, $\frac{r}{\rho}$ ist 60·4 und ρ folgt aus der Länge l eines Grades gleich $180l : \pi$, demnach

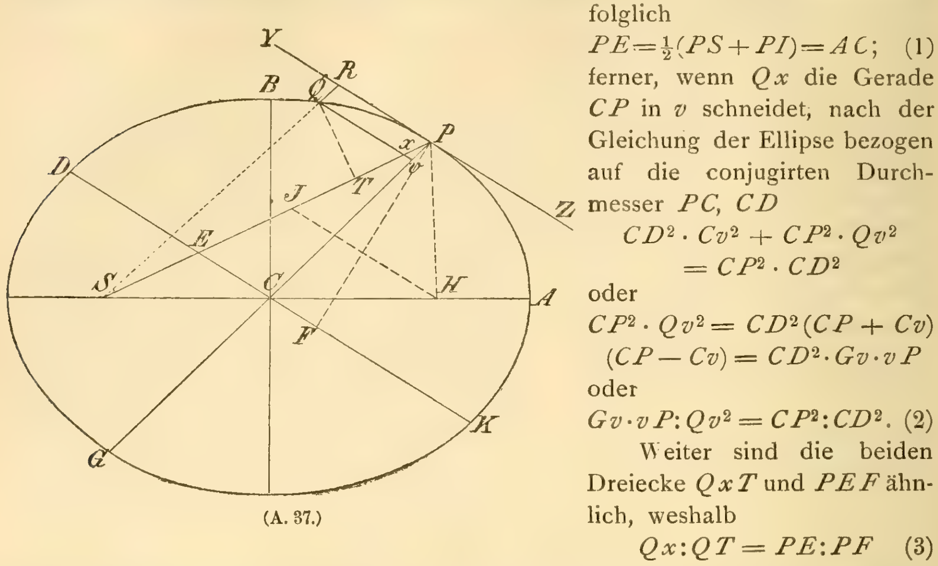
$$g = \frac{4\pi}{T^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 \cdot 180\, l = 0{\cdot}00008944\, l.$$

Anfänglich hatte nun NEWTON einen unrichtigen Werth für l, den damals bekannten Werth 297251 Par. Fuss substituirt und erhielt daraus den Werth von $g = 26{\cdot}59$ Par. Fuss, welcher mit dem von GALILEI gefundenen (30 Fuss) schlecht stimmte; erst viel später, als das Resultat der PICARD'schen Gradmessung von 1671 bekannt wurde, wonach $l = 342360$ Par. Fuss wäre, fand er in genügender Uebereinstimmung 30·62 Par. Fuss, wonach er die Identität der allgemeinen Gravitation mit der Erdschwere als erwiesen betrachten konnte.

Mit grösseren mathematischen Schwierigkeiten war der Nachweis verbunden, dass unter der Annahme des gefundenen Gesetzes die wahren Bahnen der Himmelskörper Ellipsen sein müssen. NEWTON führte die Rechnung umgekehrt, er suchte das Gesetz der Anziehung, welches stattfinden muss, wenn ein Körper sich in verschiedenen Curven um das Attractionscentrum bewegt (in Kreisen, in Ellipsen) für verschiedene Lagen des letzteren. Für die Bewegung in einer Ellipse, in deren Brennpunkt das Attractionscentrum sich befindet, ist die Ableitung die folgende:

Sei S (Fig. 37) die Sonne, P der Ort des Planeten, H der zweite Brennpunkt der Ellipse, so ist der Körper nach dem Zeittheilchen τ nach Q gekommen, also aus der geradlinigen Richtung der Tangente PR um die Strecke QR gegen S hin gefallen, wenn $QR \parallel PS$ ist. Macht man $HJ \parallel YZ$, so wird, da das Perpendikel PF auf YZ den Winkel der beiden Leitstrahlen PS, PH halbirt, PJH ein gleichschenkliges Dreieck, daher $PJ = PH$, und ferner wenn

DK der zu CP conjugirte Durchmesser ist, wegen $SC = CH$ auch $SE = EJ$, folglich



(A. 37.)

$$PE = \tfrac{1}{2}(PS + PI) = AC; \quad (1)$$

ferner, wenn Qx die Gerade CP in v schneidet, nach der Gleichung der Ellipse bezogen auf die conjugirten Durchmesser PC, CD

$$CD^2 \cdot Cv^2 + CP^2 \cdot Qv^2 = CP^2 \cdot CD^2$$

oder

$$CP^2 \cdot Qv^2 = CD^2(CP + Cv)(CP - Cv) = CD^2 \cdot Gv \cdot vP$$

oder

$$Gv \cdot vP : Qv^2 = CP^2 : CD^2. \quad (2)$$

Weiter sind die beiden Dreiecke QxT und PEF ähnlich, weshalb

$$Qx : QT = PE : PF \quad (3)$$

ist und endlich ist das Rechteck aus den beiden Halbaxen flächengleich mit dem Parallelogramm aus zwei conjugirten Durchmessern, daher

$$AC \cdot CB = CD \cdot PC \sin PCD = CD \cdot PF. \quad (4)$$

Gemäss diesen Eigenschaften der Ellipse hat man, wenn $2L$ den Parameter der Ellipse bedeutet

$$2L \cdot QR : 2L \cdot Pv = QR : Pv = Px : Pv = PE : PC = AC : PC$$

nach (1),

$$2L \cdot Pv : Gv \cdot Pv = 2L : Gv$$
$$Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$$

nach (2),

$$Qv^2 : Qx^2 = 1,$$

wenn schliesslich Q und P zusammenfallen

$$Qx^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : BC^2$$

nach (3) und (4), folglich durch Multiplikation

$$2L \cdot QR : QT^2 = AC \cdot 2L \cdot PC^2 \cdot CD^2 : PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2$$

und da

$$2L \cdot AC = 2BC^2 \text{ ist,}$$
$$2L \cdot QR : QT^2 = 2PC : Gv,$$

also in der Grenze, beim Zusammenfallen von Q mit P

$$2L \cdot QR = QT^2,$$
$$QR = \frac{QT^2}{2L} = \frac{QT^2 \cdot SP^2}{2L \cdot SP^2}.$$

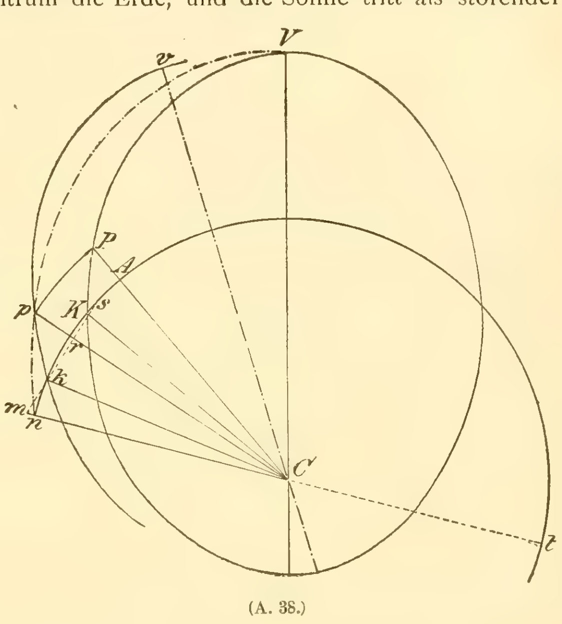
Da aber $QT \cdot SP$ die doppelte in jedem Zeitheilchen τ zurückgelegte, also constante Fläche $QSP = 2\varphi$ und L ebenfalls für die Ellipse eine Constante ist, so wird

$$QR = \frac{2\varphi^2}{L} \cdot \frac{1}{SP^2} = \frac{C}{SP^2}$$

d. h. verkehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Körpers vom Attractionscentrum.

Indem Newton nun noch hinzufügt, dass die von einem Körper ausgehende Wirkung proportional der Masse dieses Körpers ist, waren die Grundlagen fest-

gelegt, aus denen man die Bewegungen der Himmelskörper ableiten konnte, nunmehr aber auch unter Berücksichtigung der Wirkung aller Himmelskörper auf einander. Allein die Erfahrung zeigte, dass die Wirkung der Planeten unter einander gegenüber der Wirkung der Sonne eine ausserordentlich viel schwächere sein müsste, woraus geschlossen werden konnte, dass die Massen der Planeten im Verhältniss zur Sonnenmasse nur sehr gering sein konnten. Umgekehrt konnte daher bei der Betrachtung der Bewegung der Planeten von der störenden Wirkung der übrigen abgesehen werden. Nicht dasselbe gilt für den Mond, für diesen ist das Attractionscentrum die Erde, und die Sonne tritt als störender Himmelskörper auf. Trotz ihrer viel grösseren Entfernung wird aber ihre Einwirkung sehr merklich in Folge ihrer bedeutend grösseren Masse und bereits NEWTON hatte erkannt, dass die Unregelmässigkeiten im Laufe des Mondes die Evection, Variation, jährliche Gleichung, und die Breitenstörung, ebenso aber auch die Drehung der Knoten und Apsiden eine Folge dieser störenden Kraft wären, und hatte versucht, diese Störungen oder Ungleichheiten durch die Gravitation zu erklären. Für die Bewegung der Apsiden musste er aber ebenfalls den bereits im vorigen angedeuteten Weg einschlagen, nämlich den Ausdruck der Kraft aus der Bewegung ableiten.



(A. 38.)

Sei C (Fig. 38) das Attractionscentrum, CV die Richtung des Apogäums für einen gegebenen Augenblick, und die von dem Körper beschriebene Ellipse VPK, deren Brennpunkt C ist. Die Bewegung in PK kann angesehen werden als die Folge eines gegen C gerichteten Falles um das Stück PA und einer dazu senkrecht gerichteten Bewegung AK. Die Strecke PA ist bestimmt durch die Grösse der gegen C gerichteten Kraft. Ist zu einer anderen Zeit die Ellipse nach vpk gekommen, so wird der Himmelskörper in p sein, wenn $CP = Cp$ ist, und er hat thatsächlich den Weg Vp zurückgelegt. Wird angenommen, dass die Drehung der Apsiden der Zeit proportional ist, so wird $VCv = \varsigma \cdot VCP$, demnach, da $vCp = VCP$ ist, $VCp = VCP\,(\varsigma + 1)$. In dem nächsten Zeittheilchen wird der Körper nicht den Weg pk zurücklegen, sondern er wird in einem Punkte n angelangt sein, wenn $nC = kC = KC$ und $VCn = (\varsigma + 1)\, VCK = \sigma \cdot VKC$ ist, wo der Kürze wegen $\varsigma + 1 = \sigma$ gesetzt wurde.

In Folge der Centralkraft, welche den Körper in der Ellipse vpk erhalten würde, wäre der Körper gegen C hin um das Stück pr gefallen, und hätte sich in der dazu senkrechten Richtung um rk fortbewegt; findet aber die Bewegung des Körpers in pn statt, so deutet dieses darauf hin, dass der Körper sich in der Richtung rk in Folge der erlangten Geschwindigkeit bis m bewegt haben würde, dass er aber noch ein weiteres Stück mn gegen C hin gefallen ist, und das Stück mn ist das Maass der Kraft, welche gegen C wirkend, die Drehung

der Apsiden (und die Vergrösserung der Geschwindigkeit in der zum Radiusvector senkrechten Richtung) bewirkt hat.

Zur Bestimmung der Strecke mn hat man, wenn man den Kreis $nkKt$ fortsetzt und das Perpendikel mr bis zu diesem Kreise nach s verlängert: $mn \cdot mt = mk \cdot ms$, folglich $mn = \frac{mk \cdot ms}{mt}$. Wird die in dem kleinen Zeittheilchen τ in der Ellipse beschriebene Fläche mit φ bezeichnet, so ist $2\varphi = pC \cdot kr$, folglich

$$kr = \frac{2\varphi}{pC},$$

$$mr = \sigma \cdot kr = \sigma \cdot \frac{2\varphi}{pC}; \qquad mk = mr - kr = (\sigma - 1)\frac{2\varphi}{pC};$$

$$ms = mr + kr = (\sigma + 1)\frac{2\varphi}{pC},$$

demnach, da für immer kleiner werdende Zeittheilchen mt sich immer mehr und mehr dem Werth $2 \cdot pC$ nähert.

$$mn = (\sigma^2 - 1)\frac{4\varphi^2}{2pC^3}.$$

Da die Flächengeschwindigkeit φ constant ist, so wird die die Drehung der Apsiden bewirkende Kraft, welche proportional mn ist, umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des Himmelskörpers vom Attractionscentrum.

Die Grösse des Winkels, um welchen die Apsiden sich drehen, ist durch die Verhältnisszahl ς gegeben. Diese Drehung wird bestimmt durch das Verhältniss der Strecken mn, um welche der Himmelskörper in Folge der Drehung der Ellipse und der Strecke pr, welche er in der ungedrehten Ellipse gegen C hin fiel. Es war aber gefunden (s. pag. 102)

$$pr = \frac{4\varphi^2}{2L \cdot r^2}; \qquad mn = (\sigma^2 - 1)\frac{4\varphi^2}{2r^3},$$

wenn man mit r den Radiusvector $CP = Cp$ bezeichnet. Nennt man P die Kraft, welche die Bewegung in der ruhenden (ungestörten) Ellipse, und m_1 die Kraft, welche die Drehung der Apsiden (Störung) bewirkt, so wird

$$m_1 : P = mn : pr = \frac{\sigma^2 - 1}{r} : \frac{1}{L},$$

folglich

$$P + m_1 : P = \frac{1}{L} + \frac{\sigma^2 - 1}{r} : \frac{1}{L} = 1 + \frac{L}{r}(\sigma^2 - 1).$$

Ist P_0 die Kraft, welche in der mittleren Entfernung a in der ungestörten Bahn auftritt, $P_1 = P + m_1$ die Kraft in irgend einem Punkte der gestörten Bahn, so wird

$$P_1 : P_0 = \frac{1}{r^2} + \frac{(\sigma^2 - 1)L}{r^3} : \frac{1}{a^2},$$

und wenn P_0 als Einheit der Kraft gewählt und $r = a + x$ gesetzt wird:

$$P_1 = \frac{a^2}{r^2} + \frac{(\sigma^2 - 1)La^2}{r^3} = \frac{[(a + x) + (\sigma^2 - 1)L]a^2}{r^3}.$$

Um nunmehr aus einem gegebenen Kraftgesetze die Bewegungen der Apsiden abzuleiten, bringt NEWTON den, dieses Gesetz darstellenden Ausdruck X auf die Form $X\frac{r^3}{r^3}$, und vergleicht den Zähler Xr^3 mit dem Zähler des Ausdruckes für P_1. Sei

$$Xr^3 = A + B_0 x + B_1 x^2 + \ldots,$$

so muss

$$A + B_0 x + B_1 x^2 + \ldots = a^3 + La^2(\sigma^2 - 1) + a^2 x$$

sein, folglich, da diese Gleichung für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$ bestehen muss:

$$A = a^3 + La^2(\sigma^2 - 1); \qquad B_0 x + B_1 x^2 + \ldots = a^2 x,$$

woraus sich

$$\frac{A}{a(B_0 + B_1 x + \ldots)} = 1 + \frac{L}{a}(\sigma^2 - 1),$$

und demnach für wenig excentrische (sehr nahe kreisförmige) Bahnen, für welche $\frac{L}{a}$ sehr nahe 1, und x sehr klein ist

$$\sigma^2 = \frac{A}{aB_0}$$

ergiebt. Würde in der ungestörten Bahn der Weg von 360° (ein voller Umlauf) beschrieben werden, so wird in Folge der Kraft X der zurückgelegte Winkel $\sigma \cdot 360°$ und daher die Apsidenrichtung sich um den Winkel $\varsigma \cdot 360°$ gedreht haben; ist $\varsigma = \sigma - 1$ positiv, so findet eine Vorwärtsbewegung der Apsiden (im Sinne der Bewegung der Himmelskörper) statt, ist ς negativ, so wäre die Bewegung der Apsiden retrograd.

Als erstes Beispiel wählt NEWTON die Centralkraft constant,

$$X = c\frac{r^3}{r^3} = \frac{c(a^3 + 3a^2 x + 3ax^2 + x^3)}{r^3},$$

daher

$$A = ca^3, \quad B_0 = 3ca^2, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

folglich eine retrograde Bewegung der Apsiden um $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) 360° = -152° \, 9'{\cdot}2$.

Als zweites Beispiel wird die Centralkraft proportional r^{n-2} gesetzt; es wird

$$X = c\frac{r^{n+1}}{r^3} = \frac{c\left[a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n x + \ldots\right]}{r^3},$$

und da hier $A = ca^{n+1}$, $B_0 = \binom{n+1}{1} ca^n$ ist, so ist $\varsigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}} - 1$.

Der einzige Fall, für welchen eine Drehung der Apsiden nicht stattfindet, ist demnach $n = 0$, d. h. die Kraft proportional r^{-2}, also in dem von NEWTON aus den KEPLER'schen Gesetzen abgeleiteten Gravitationsgesetze. Würde n nur um $\pm 0{\cdot}001$ von 2 abweichen, d. h. das Attractionsgesetz $\frac{1}{r^{2 \pm 0{\cdot}001}}$ sein, so würde $\varsigma = \frac{1}{\sqrt{1+n}} - 1 = -\frac{1}{2}n$, und es würde eine Drehung der Apsiden stattfinden, welche für jeden Umlauf des Planeten $360° (\mp 0{\cdot}0005) = \mp 10'{\cdot}8$ betragen würde. Eine derartige Abweichung vom NEWTON'schen Attractionsgesetz müsste sich demnach in einer relativ sehr raschen Drehung der Apsiden verrathen.

Als drittes Beispiel wählt NEWTON den Fall, dass das Attractionsgesetz aus zwei Gliedern besteht. Sei also:

$$X = \frac{c_1}{r^n} + \frac{c_2}{r^p} = \frac{c_1 r^{-n+3} + c_2 r^{-p+3}}{r^3}$$

$$= \frac{c_1 a^{-n+3} + c_2 a^{-p+3} + x\left[\binom{-n+3}{1} c_1 a^{-n+2} + \binom{-p+3}{1} c_2 a^{-p+2}\right]}{r^3},$$

folglich

$$A = c_1 a^{-n+3} + c_2 a^{-p+3}; \quad B_0 = \binom{-n+3}{1} c_1 a^{-n+2} + \binom{-p+3}{1} c_2 a^{-p+2},$$

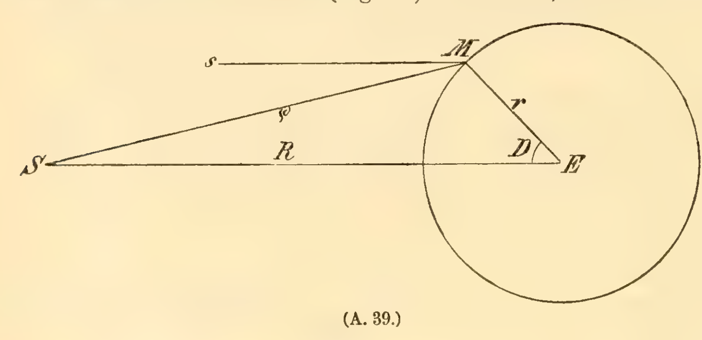
daher

$$\sigma^2 = -\frac{c_1 a^{-n+3} + c_2 a^{-p+3}}{(n-3) c_1 a^{-n+3} + (p-3) c_2 a^{-p+3}} = -\frac{1 + \frac{c_2}{c_1} a^{n-p}}{(n-3) + (p-3) \frac{c_2}{c_1} a^{n-p}}.$$

Wenn $n = 2$ ist, d. h. das eine Glied das einfache NEWTON'sche Gravitationsgesetz darstellt, so wird

$$\sigma^2 = \frac{1 + \frac{c_2}{c_1} a^{2-p}}{1 - (p-3) \frac{c_2}{c_1} a^{2-p}}.$$

Dieser Fall tritt thatsächlich bei den Himmelskörpern, am auffallendsten beim Monde ein. Sei S (Fig. 39) die Sonne, E die Erde, M der Mond; der letztere wird von der Erde in der Richtung ME und von der Sonne in der Richtung MS angezogen. Da aber auch die Erde E von der Sonne angezogen wird, so wird nur der Ueberschuss der Sonnenanziehung auf den Mond über diejenige auf die Erde eine gegen S hin gerichtete störende Kraft ergeben oder aber der Ueberschuss der Sonnenanziehung auf die Erde über diejenige auf den Mond eine von S weggerichtete störende Kraft erzeugen[1]). Kräfte, die nach verschiedenen Richtungen wirken, lassen sich aber nicht unmittelbar addiren, und müssen in Componenten zerlegt werden, die nach bestimmten Richtungen wirken. NEWTON zerlegt daher die Kraft MS in 2 Componenten, von denen die eine in der Richtung ME wirkt, die andere in der Richtung $Ms \parallel ES$.



(A. 39.)

Sei die Anziehung, welche die Erde auf den Mond ausübt P; die Anziehung, welche die Sonne auf die Erde ausübt p, die Anziehung der Sonne auf den Mond m, und die beiden Componenten m_1 in der Richtung ME und m_2 in der Richtung Ms, so wird die Summe der Kräfte in der Richtung ME gleich $X = P + m_1$, die Anziehung in der Richtung ES gleich $Y = p - m_2$ oder in der entgegengesetzten Richtung $Y = m_2 - p$. Das Verhältniss der Kräfte p und P bestimmt NEWTON aus den Entfernungen und Umlaufszeiten nach dem Satz pag. 100. Hiernach ist $P_0 : p = \frac{a}{t^2} : \frac{A}{T^2}$, wenn P_0 die Kraft in der mittleren Entfernung a des Mondes bedeutet, und A die mittlere Entfernung der Sonne, t, T die siderischen Umlaufszeiten des Mondes

---

[1]) Die Masse des angezogenen Körpers bleibt dabei ganz gleichgültig; denn ist die Anziehung auf die Masseneinheit F, so ist sie auf die Masse μ allerdings μF, da aber wieder die Masse μ bewegt werden muss, so wird die jede Masseneinheit bewegende sogen. »beschleunigende Kraft« wieder $\frac{\mu F}{\mu} = F$. Hingegen ist die anziehende Kraft abhängig von der Masse des anziehenden Körpers, und dieser direkt proportional.

um die Erde und dieser um die Sonne sind; es wird daher $p = P_0 \left(\frac{A}{a}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^2$. Weiter sind die anziehenden Kräfte, welche die Sonne auf die Erde und auf den Mond ausübt, im verkehrt quadratischen Verhältnisse der Entfernungen, also:

$$m : p = R^2 : \rho^2 \quad \text{daher} \quad m = P_0 \left(\frac{A}{a}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)^2\left(\frac{t}{T}\right)^2.$$

Die beiden Componenten m_1, m_2 werden aus m durch das Kräftedreieck abgeleitet, welches dem Dreieck MES ähnlich ist: es ist also $m_1 : m_2 : m = a : A : \rho$ also wenn $A : R = 1$, d. h. die Sonnenbahn als kreisförmig angenommen wird:

$$m_1 = P_0 \left(\frac{A}{\rho}\right)^3\left(\frac{t}{T}\right)^2.$$

Das Verhältniss $\frac{A}{\rho}$ ist nur wenig veränderlich, da man hinreichend genau $\frac{a}{A} = \frac{1}{400}$ annehmen kann, und demnach $\frac{A}{\rho}$ zwischen den Grenzen $\frac{400}{401}$ und $\frac{400}{399}$ liegt. NEWTON nimmt daher für $\frac{A}{\rho}$ die Einheit und folglich für m_1 den mittleren Werth

$$m_1 = P_0 \left(\frac{t}{T}\right)^2$$

und mit den Werthen $t = 27^d\, 7^h\, 43^m$, $T = 365^d\, 6^h\, 9^m$,

$$m_1 = \frac{1}{178\frac{29}{40}} P_0 = 0{\cdot}005595\, P_0.$$

Ebenso findet man

$$m_2 = m\,\frac{A}{\rho} = p\left(\frac{A}{\rho}\right)^3,$$

daher

$$m_2 - p = p\left[\left(\frac{A}{\rho}\right)^3 - 1\right] = P_0\left(\frac{A}{a}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^2\left[\left(\frac{A}{\rho}\right)^3 - 1\right].$$

Hier darf nun A nicht gleich ρ gesetzt werden, weil der Werth von $m_2 - p$ eben durch die Abweichung des Distanzverhältnisses von der Einheit bestimmt wird. Man erhält aber aus dem Dreieck SME, wenn für R und r wieder die Mittelwerthe A und a gesetzt werden und der Winkel SEM mit D bezeichnet wird

$$\rho = \sqrt{A^2 + a^2 - 2Aa\cos D}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{A}\left(1 - 2\frac{a}{A}\cos D + \frac{a^2}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A^3}{\rho^3} = 1 + 3\frac{a}{A}\cos D$$

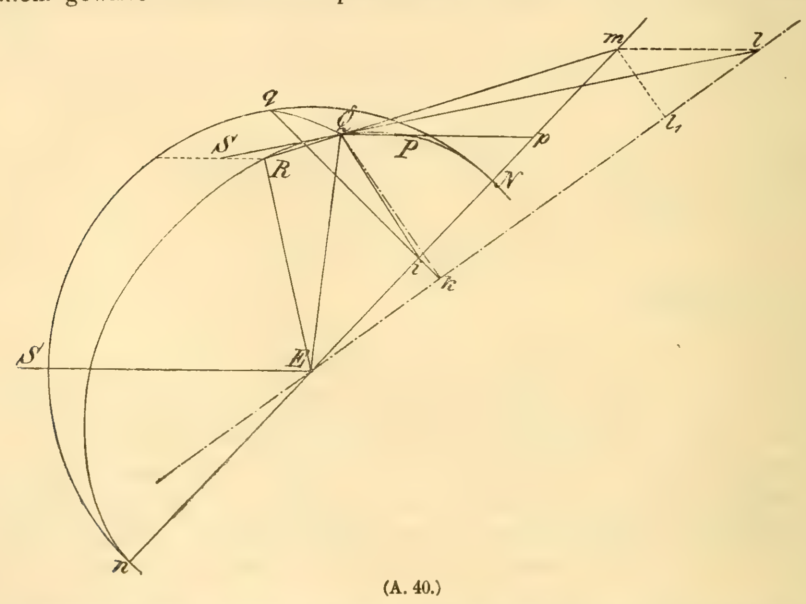
$$m_2 - p = 3P_0\left(\frac{t}{T}\right)^2 \cos D = \frac{P_0 \cos D}{59{\cdot}575} = 0{\cdot}016785\, P_0 \cos D.$$

Die Kräfte $P + m_1$ und $m_2 - p$[1]) werden sich nun zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, wodurch bewirkt wird, dass die Resultirende nicht mehr stets gegen E gerichtet ist, wodurch einerseits das Gesetz der Proportionalität der Flächen mit der Zeit aufgehoben, andererseits eine Abweichung der Bewegung von der Ellipse bewirkt wird. NEWTON versuchte die aus den veränderlichen Kräften resultirenden Veränderungen in den Geschwindigkeiten und Krümmungen der Bahn abzuleiten und seinem Scharfsinn gelang es auch, eine grosse Reihe allgemeiner

[1]) NEWTON erhält diese Resultate geometrisch, und muss dann zwischen $m_2 - p$ und $p - m_2$ unterscheiden; durch das Auftreten des Factors $\cos D$ wird diese Unterscheidung unnöthig.

Gesetze zu finden[1]). Hingegen stiess er bei der Summation der Wirkungen auf für ihn noch unübersteigliche Schwierigkeiten, und er musste sich begnügen, diese Summationen durch geometrische Repräsentation und Ersetzung der Summen durch Flächen von Curven vorzunehmen, die er selbst aber nur genähert ermitteln konnte. Nichtsdestoweniger geben seine geometrischen Methoden einen für jene Zeiten ausreichenden Beweis, dass die grössten Ungleichheiten: Evection, Variation, jährliche Gleichung beim Monde einfach aus dem Principe der Gravitation folgen und dass daher diese Kraft selbst nicht nur die Bewegung der Hauptplaneten um die Sonne und der Nebenplaneten um die Hauptplaneten regelt und bestimmt, sondern auch die in diesen Bewegungen constatirten Unregelmässigkeiten wenigstens qualitativ durch die Attraction anderer Himmelskörper bestimmt sind. Am einfachsten gestalteten sich die Untersuchungen über die Bewegung der Bahnlage (Knoten und Neigung) und der Apsiden.

Sei NPn (Fig. 40) die Mondbahn, Nqn ihre Projection auf die Ekliptik, die einem gewissen Momente entsprechende Bahnebene ist bestimmt durch die



(A. 40.)

beiden aufeinander folgenden Punkte P, Q und den Ort der Erde E, und diese Ebene EPQ wird die Ekliptik EqS in einer Geraden Nn schneiden, welche durch den Schnittpunkt p der Verlängerung von PQ mit der Ekliptik bestimmt ist. Wäre keine störende Kraft vorhanden, so würde im nächsten Zeittheilchen τ die Bewegung in derselben Ebene in QR fortgesetzt. In Folge der störenden Kraft der Sonne wird der Mond aus dieser Ebene herausgerissen; er wird den Weg QS zurücklegen, wobei RS die Wegstrecke ist, welche er in Folge der

[1]) Die Untersuchungen lassen sich in aller Strenge nur analytisch durchführen. Es wurden, selbst in neuerer Zeit, wiederholt Versuche gemacht, die auftretenden Störungen in elementarer Weise zu erklären, so von AIRY, HERSCHEL u. A. Man kann diese Darlegungen ganz wohl als annehmbare Versinnbildlichungen der Wirkungen betrachten; als Erklärungen im strengsten Sinne des Wortes, oder gar als Beweise, dass in Folge der auftretenden Kräfte die Störungen eben in dieser Weise bestimmt sind, kann man diese Versuche keinenfalls ansehen. So kann z. B. eine specielle Eigenthümlichkeit der störenden Kräfte, die sich der geometrischen Repräsentation vollständig entzieht, die Resultate völlig verändern. Eine derartig auffallende Erscheinung tritt in der von HALL gefundenen, scheinbar abnormen Bewegung beim

störenden Kraft der Sonne in derselben Zeit τ gegen die Sonne hin zurücklegt. Die neue Bahnebene ist daher QSE, die neue Knotenlinie wird erhalten, wenn man QS bis zum Schnittpunkte mit der Ekliptik nach l verlängert und ist daher El.

Ist q die Projection von Q auf die Ekliptik und fällt man von Q und q die Perpendikel Qi, qi, Qk und qk auf die ungestörte und gestörte Knotenlinie, EN und El, so wird die ungestörte Neigung Qiq, die gestörte Qkq sein, und es handelt sich darum, die Aenderungen aus den wirkenden Kräften abzuleiten. Da die Componente m_1 der Sonnenanziehung eine Veränderung der Bahnlage nicht bewirken kann, weil sie ganz in die Bahnebene hineinfällt, so wird die Strecke RS nur unter der Einwirkung der Componente $m_2 - p$ zurückgelegt und kann daher aus dem bekannten Verhältnisse $m_2 - p : P_0$ und der unter der Einwirkung der letzteren zurückgelegten Strecke QR (Fig. 37) ermittelt werden. Nimmt man die Bahn als kreisförmig an, so wird $r = L = a$; $\varphi = \frac{1}{2}a^2\alpha$, wenn $QER = \alpha$ gesetzt wird, folglich

$$RS = 2\frac{a\alpha^2}{2} \cdot \frac{m_2 - p}{P_0} = \frac{a}{59{\cdot}575} \cos D\alpha^2.$$

Nun ist $ml : mQ = RS : RQ$ und da $RQ = a\alpha$ ist:

$$ml = mQ\,\frac{\cos D}{59{\cdot}575}\,\alpha.$$

Bezeichnet man den Winkel NEl mit ω, so wird

$$mE \cdot \omega = ml_1 = ml \sin mll_1,$$

folglich

$$\omega = \frac{mQ}{mE} \cdot \frac{\cos D}{59{\cdot}575} \cdot \sin mll_1 \cdot \alpha.$$

Es ist aber

$$\frac{mQ}{mE} = \sin mEQ; \quad \sphericalangle mll_1 = \sphericalangle SEn.$$

Bei der geometrischen Betrachtung ist nun zu unterscheiden, ob N der aufsteigende oder niedersteigende Knoten der Mondbahn ist; im ersteren Falle liegt der Teil NQn der Mondbahn oberhalb der Ekliptik (auf der Seite des Nordpoles); es ist $NEQ = u$ das Argument der Breite, und SEn der Abstand der Sonne vom niedersteigenden Knoten der Mondbahn, daher, wenn man mit ☉ und ☊ die Längen der Sonne und des aufsteigenden Knotens der Mondbahn bezeichnet: $mll_1 = 180° + ☊ - ☉$, folglich

$$\omega = \frac{\alpha}{59{\cdot}575} \cos D \sin u \sin\,(☉ - ☊). \tag{1}$$

Im zweiten Falle ist $NEQ = u - 180°$ (weil n der aufsteigende Knoten ist, und der von n über N bis Q gezählte Bogen gleich u ist) und $mll_1 = ☊ - ☉$, womit, wie man sofort sieht, ω denselben Werth erhält.

---

7. Saturnssatelliten auf, welche durch die Untersuchungen NEWCOMB's vollständig erklärt wurde (s. »Mechanik d. Himmels«). Aus diesem Grunde scheint es besser, auf eine vollständig populäre Darstellung der Störungen ganz zu verzichten, als Erklärungen zu geben, die sich in vielen Fällen als der Correctur bedürftig zeigen. Vollends aus den instantanen auf die Gesammtänderungen (Integrale) zu schliessen, muss in allen Fällen der höheren Rechnung überlassen bleiben. Hingegen lassen sich unter Zuhülfenahme einiger der Elementarmathematik angehörenden Sätze (ohne Zuhülfenahme der höheren Analysis) die instantanen Aenderungen der osculirenden Elemente recht gut darstellen. Diese für Knoten und Neigung von NEWTON (für die übrigen Elemente von LAGRANGE) gegebenen Ableitungen werden im folgenden auseinander gesetzt.

Wegen der Kleinheit des Winkels ω können nun die beiden Perpendikel qi und qk als zusammenfallend angenommen werden, und dann ist die Aenderung i der Neigung gegeben durch

$$\iota = qiQ - qkQ = iQk = \frac{ik}{Qi} \sin Qki.$$

Es ist aber $ik = Ei \cdot \omega = EQ \cos u \cdot \omega = r \cos u \cdot \omega$; $Qi = r \sin u$, $Qki = i$ folglich, da eine Neigungsverminderung stattfindet:

$$\iota = -\frac{\alpha}{59{\cdot}575} \cos D \cos u \sin (\odot - \Omega) \sin i. \tag{2}$$

Aus dieser Form für die Elementaränderungen in dem kleinen Zeittheilchen τ lassen sich die Gesammtbewegungen von Knoten und Neigung nicht leicht ableiten; man sieht, dass ω und ι bald positiv, bald negativ sind. (Die Knotenbewegung ist dabei positiv, wenn sie entgegengesetzt der Bewegung der Himmelskörper, also retrograd ist). ω wird null, wenn $u = 0$ d. h. der Mond in der Ekliptik, wenn $\odot - \Omega = 0$, d. h. die Sonne in der Richtung der Knoten der Mondbahn, und endlich, wenn $D = 90°$ ist, d. h. wenn Sonne und Mond n Quadratur sind; ι verschwindet, wenn $\odot - \Omega = 0$, wenn $D = 90°$ oder $u = 90°$ ist. In diesen drei Fällen gehen ω und ι vom positiven ins negative über, weil ein Faktor sein Zeichen wechselt. Ob die retrograde oder direkte Bewegung des Knotens, ob die Vergrösserung oder Verkleinerung der Neigung überwiegt ist nun durch eine specielle Untersuchung zu finden. NEWTON bediente sich, um die Summation durchzuführen, wie schon erwähnt, einer graphischen Integration durch Curven, und findet als mittlere stündliche Bewegung der Knoten $16''{\cdot}59°$ er berücksichtigt sodann noch die durch die Variation entstandene Formänderung und die durch die ungleichförmige Bewegung in der Bahn bedingte Verschiedenheit in der Geschwindigkeit des Mondes, erhält mit Berücksichtigung dieser Umstände $16''{\cdot}28$ als stündliche Bewegung der Knoten, daher als mittlere Bewegung in einem Jahre $19° \, 18'$.

Das Resultat ist aus den obigen Formeln einfach in folgender Weise zu erhalten. Man ersetzt die Produkte der trigonometrischen Functionen durch Summen[1]) mittels der Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\cos A \cos B &= \tfrac{1}{2} [\cos (A - B) + \cos (A + B)] \\
\sin A \sin B &= \tfrac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)] \\
\sin A \cos B &= \tfrac{1}{2} [\sin (A + B) + \sin (A - B)] \\
\cos A \sin B &= \tfrac{1}{2} [\sin (A + B) - \sin (A - B)]
\end{aligned}$$

und erhält

$$\begin{aligned}
\omega = \frac{1}{4} \frac{\alpha}{59{\cdot}575} [&+ \cos (\odot - \Omega - u - D) + \cos (\odot - \Omega - u + D) \\
&- \cos (\odot - \Omega + u + D) - \cos (\odot - \Omega + u - D)]
\end{aligned}$$

und daher, wenn die Länge des Mondes mit ☾ bezeichnet und berücksichtigt wird, dass $D = \odot - ☾$, $u = ☾ - \Omega$ ist

$$\omega = \frac{1}{238} \alpha [1 + \cos 2D - \cos 2(☾ - \Omega) - \cos 2(\odot - \Omega)] \tag{3}$$

und ebenso

$$\iota = \frac{1}{238} \alpha [\sin 2D + \sin 2(☾ - \Omega) + \sin 2(\odot - \Omega)] \sin i. \tag{4}$$

In der Folge werden die störenden Kräfte, sowie die durch dieselben bedingten unendlich kleinen Aenderungen der Elemente immer wieder in dieser Form auf-

[1]) Dies hat den Zweck, den Gang der Functionen einfacher zu gestalten, wodurch die Summirung erleichtert wird.

treten; die störenden Kräfte werden abhängig von der relativen Lage der Himmelskörper, welche durch trigonometrische Functionen der Winkel zwischen den Verbindungslinien selbst, oder zwischen diesen Verbindungslinien und festen Richtungen oder Ebenen gegeben sind. Die beiden Beispiele für die kleinen Aenderungen von Knoten und Neigung werden die Bedeutung der störenden Kräfte als Functionen der Orte der Himmelskörper für den Augenblick ausreichend klargestellt haben. Es handelt sich nun darum, aus diesen Aenderungen in unendlich kleinen Zeiträumen auf die in endlichen Zeiträumen bewirkten Aenderungen zu schliessen. Dies ist nun Sache der Integralrechnung[1]). Es ist jedoch ohne weiteres klar, dass irgend einer der Ausdrücke, z. B. $\alpha \cos 2 (\odot - \Omega)$ während eines ganzen Umlaufes des Argumentes dieselben positiven und negativen Werthe durchläuft, und dass daher die Summe aller Werthe, nachdem das Argument 360° durchlaufen hat $(\cos 0° + \cos 1° + \cos 2° + \ldots + \cos 357° + \cos 358° + \cos 359°)$ wieder 0 ist. Die drei letzten in (3) auftretenden Glieder, und der in (4) auftretende Ausdruck geben daher für die Summen der einzelnen Incremente, d. h. für die Gesammtänderungen zu verschiedenen Zeiten bald wachsende, bald wieder abnehmende Werthe, sodass sich in Folge dessen die Neigung nur periodisch vergrössert und verkleinert, und demnach um einen mittleren Werth schwankt, was ebenso von den drei letzten Gliedern in der Knotenbewegung gilt. Allein hier tritt noch ein stets wachsendes Increment $\frac{\alpha}{238}$ auf; summiren sich die Incremente α der Mondbewegung bis zu einem vollen Umlaufe, so wird die Summe der Incremente ω der Knotenbewegung zu $\frac{360°}{238}$ angewachsen sein (abgesehen von den periodisch wachsenden und abnehmenden, kürzer als periodisch bezeichneten Gliedern). Während eines siderischen Umlaufs des Mondes wird der Knoten $\frac{1}{238}$ der Kreisperipherie zurückgelegt haben; daher ist die Umlaufszeit des Knotens 238 mal diejenige des Mondes, also, jene zu $27^d\, 7^h\, 43^m$ angenommen, gleich $6503^d = 17{\cdot}8$ Jahre. Die Bewegung des Knotens wird daher bereits in dieser rohen Näherung ziemlich richtig wiedergegeben.

Anders verhält es sich mit dem Resultate für die Bewegung des Perigäums. In der pag. 106 gegebenen Formel ist das Zusatzglied zu bestimmen.

Um die Grösse der hier zu betrachtenden Kraft zu erhalten, muss nämlich die störende Kraft der Sonne in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in der Richtung *ME* (Fig. 39), die andere senkrecht dazu wirkt; da nun $\sphericalangle MSE$ immer sehr klein ist, so ist der Winkel zwischen der Richtung der Kraft *m* und *ME* sehr nahe *D*, folglich die auf einander senkrecht stehenden

[1]) Es genügt hier die einfachsten Fundamentalformeln zu erwähnen. Es ist:

$$\int a\,dt = at + C \quad (\alpha) \qquad \int at^n\,dt = a\frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad (\beta)$$

$$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C \quad (\gamma) \qquad \int\frac{dt}{t} = \log t + C \quad (\delta)$$

$$\int \sin(at+b)\,dt = -\frac{\cos(at+b)}{a} + C \quad (\varepsilon) \qquad \int \cos(at+b)\,dt = +\frac{\sin(at+b)}{a} + C \quad (\zeta)$$

$$\int\frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = a \arcsin t + C \quad (\eta) \qquad \int\frac{a\,dt}{1+t^2} = a \operatorname{arctg} t + C \quad (\vartheta)$$

$$\int[f(t) + \varphi(t) + \psi(t) + \ldots]\,dt = \int f(t)\,dt + \int\varphi(t)\,dt + \int\psi(t)\,dt + \ldots \quad (\varkappa)$$

$$\int f(t)\varphi'(t)\,dt = f(t)\varphi(t) - \int\varphi(t)f'(t)\,dt \quad (\lambda) \quad \text{(theilweise Integration)},$$

wobei C die willkürliche Integrationsconstante bedeutet.

Componenten $m \cos D$ und $m \sin D$, von denen die letztere nicht weiter in Betracht kommt. Die erstere, vermindert um die in derselben Richtung wirkende Attractionscomponente der Sonne auf die Erde: $p \cos D$, wirkt der Erdanziehung entgegen, sodass die in der Richtung ME wirkende Gesammtkraft

$$X = P_0 - \pi \qquad \pi = (m - p) \cos D$$

wird. Es ist aber (s. pag. 107)

$$m - p = p \left[\left(\frac{A}{\rho}\right)^2 - 1\right] = 2\,\frac{a}{A}\,p \cos D = 2 P_0 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \cos D = 0{\cdot}01119\, P_0 \cos D$$

$$\pi = 0{\cdot}01119\, P_0 \cos^2 D = 0{\cdot}005595\, P_0 (1 + \cos 2D),$$

daher mit Vernachlässigung des nur oscillirende Bewegungen erzeugenden periodischen Gliedes: $\pi = 0{\cdot}005595\, P_0 = \alpha P_0$ also von r unabhängig; man hat daher für das Zusatzglied $p = 0$ zu setzen und es wird

$$X = \frac{c_1}{r^2} + c_2; \qquad \sigma^2 = \frac{1 + \frac{c_2}{c_1} a^2}{1 + 3\,\frac{c_2}{c_1} a^2}.$$

Die Anziehung der Erde ist $P_0 = \frac{c_1}{a^2}$, das Zusatzglied wird $c_2 = -\alpha P_0 = -\frac{\alpha c_1}{a^2}$, folglich $\frac{c_2}{c_1} a^2 = -\alpha$ demnach $\sigma^2 = \frac{1 - \alpha}{1 - 3\alpha} = 1 + 2\alpha;\ \varsigma = \alpha$.

Während eines Umlaufes des Mondes wird sich daher die Apsidenrichtung um $\alpha \cdot 360° = 2°$, daher in einem Jahre um $27°$ gedreht haben. Die von Newton erhaltene Bewegung des Apogäums beträgt daher etwa die Hälfte des wahren Werthes: Qualitativ war die Erscheinung der Bewegung der Apsiden aus dem Attractionsgesetze erklärt, quantitativ noch nicht.

Die Erscheinung der Retrogradation der Knoten reicht vollständig hin, um die Präcession der Aequinoctien zu erklären. Newton nimmt zunächst an, dass sich um einen kugelförmigen Hauptplaneten eine grosse Anzahl von Nebenplaneten in nahe derselben, gegen die Bahnebene geneigten Ebene bewegen; für alle diese Trabanten wird eine Retrogradation der Knoten stattfinden, deren mittlerer Werth durch die Grösse des Verhältnisses $\frac{m_2 - p}{P_0}$ bestimmt ist. Dieses ist wesentlich bedingt durch den Ausdruck $\left(\frac{t}{T}\right)^2$, also verschieden für Nebenplaneten, die sich in verschiedenen Entfernungen befinden, weil für diese die Umlaufszeiten t verschieden sind. Nimmt man nun aber an, dass die sämmtlichen Nebenplaneten mit einander fest verbunden sind, und einen Wulst um den Hauptplaneten bilden, wie ein solcher durch die Rotation eines flüssigen Körpers in dem Aequator desselben entsteht, so werden die Knoten der gemeinschaftlichen Bahnebene dieser Trabanten, des Wulstes, also der Aequatorebene auf der Bahnebene des Planeten, auf der Ekliptik in einer rückschreitenden und überdies um den jeweiligen mittleren Ort oscillirenden Bewegung begriffen sein, welche eben die Präcession und Nutation ist. Die Grösse der Präcession liesse sich auch numerisch bestimmen[1]). Ist t die siderische Umlaufszeit des Mondes, τ die Umlaufszeit des fictiven, in der Aequatorebene der Erde rotirenden, den Wulst ersetzenden Planeten, so wird das Verhältniss der Kräfte $\left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ sein, und da $\tau = 1^d$, $t = 27^d\, 7^h\, 43^m$ ist, so wird dieses Verhältniss $\left(\frac{1}{27{\cdot}32158}\right)^2 = 0{\cdot}0013394$,

[1]) Newton geht darauf nicht ein.

und da die Retrogradation der Knoten in einem Jahr gleich 19° 21′·5 ist, so wäre die daraus folgende Präcession der Aequinoctien gleich 93″[1]).

Dass die Erde am Aequator eine Ueberhöhung haben müsse, welche eben die Ursache der Präcession ist, hatte bereits HUYGHENS erkannt, und für die Abplattung[2]) den Werth $\frac{1}{587}$ angegeben. Man gelangt hierzu durch die folgende einfache Ueberlegung. Zwei geradlinige Kanäle, von denen der eine vom Pol, der andere von einem Punkte des Aequators zum Erdmittelpunkte gezogen werden, bilden ein communicirendes Gefäss, in welchem eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht stehen kann, wenn die in den beiden Kanälen befindlichen Drucke einander gleich sind; der Druck in dem Aequatorealkanal wird aber durch eine in Folge der Rotation auftretende Fliehkraft vermindert, welche Verminderung durch eine Vergrösserung der Masse, also Verlängerung der Säule compensirt werden muss. NEWTON findet die Fliehkraft im Aequator $\frac{1}{289}$ der Anziehungskraft der Erde, und damit für die Abplattung den Werth $\frac{1}{230}$.

War in dieser Weise die feste Grundform der Erde aus den Principien der Gravitation der Theilchen zum Ganzen abgeleitet, so waren noch die Formveränderungen des veränderlichen Theiles, des Meeres, d. i. die Gezeiten (Ebbe und Fluth) aus demselben Princip abzuleiten. Da die zu den Zeiten der Syzygien fallenden Gezeiten bedeutend grösser sind, als die zu den Zeiten der Quadraturen auftretenden, so ist in dem einen Falle die Summe der Anziehungen von Sonne und Mond, im anderen die Differenz derselben wirksam. In Betracht zu ziehen ist ja nur die Differenz der Anziehungen, welche der Mond oder die Sonne auf ein Theilchen der Erde gegenüber denjenigen auf den Erdmittelpunkt ausübt. Wird die letztere in der Richtung gegen die Sonne mit p, die erstere mit m_2 bezeichnet, und die entsprechenden auf den Mond bezüglichen Grössen mit p', m'_2 so ist für $D = 0$ oder 180°:

$$q = m_2 - p = p\left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^3 - 1\right] = p\left[\left(\frac{\rho \pm a}{\rho}\right)^3 - 1\right] = \pm\, 3\,\frac{a}{\rho}\,p,$$

wenn a der Erdhalbmesser ist[3]) und ebenso

$$q' = m_2' - p' = \pm\, 3\,\frac{a}{\rho'}\,p'.$$

Wirken diese Kräfte daher auf der, gegen den Mond (oder die Sonne) zugekehrten Erdhälfte als Anziehungen, so wirken sie auf der entgegengesetzten Seite gleichsam als Abstossungen, und bewirken auf beiden Seiten Ueberhöhungen, Verlängerungen des Wasserkörpers in der Richtung gegen Sonne und Mond. Das Verhältniss dieser Kräfte ist daher (abgesehen vom Zeichen)

$$v = \frac{q}{q'} = \frac{\rho' p}{\rho\, p'},$$

und da $\frac{p}{p'} = \frac{M}{\mu}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2$ ist, wenn mit M, μ die Sonnen- und Mondmasse bezeichnet werden, wird schliesslich $v = \frac{M}{\mu}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3$. Das Verhältniss v hatte NEWTON aus der Höhe der Springfluthen (in den Syzygien) und Nippfluthen (in den Quadraturen)

---

[1]) Dass der wahre Werth wesentlich kleiner ist, ist durch den Umstand bedingt, dass in Wirklichkeit die Masse des Hauptplaneten mitbewegt werden muss.

[2]) D. i. das Verhältniss $\frac{a - b}{a}$, wenn a den Aequatoreal-, b den Polarhalbmesser der Erde bezeichnet.

[3]) Vergl. damit Fig. 39, in welcher S der anziehende Körper (Sonne oder Mond) und E der Mittelpunkt, M ein Punkt der Oberfläche der Erde ist.

ermittelt. Dieses Verhältniss ist $\frac{q'+q}{q'-q}=\frac{9}{5}$, woraus sich $\frac{q'}{q}=\frac{7}{2}$ ergeben würde; mit Rücksicht auf die zu den Beobachtungszeiten fallenden Deklinationen der Gestirne findet NEWTON für v den Werth $1:4\cdot48$ und dieses Verhältniss kann dazu benutzt werden, das Verhältniss der Mondmasse zur Sonnenmasse zu ermitteln. Mit

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{1}{400}\cdot \quad \text{würde} \quad \frac{\mu}{M}=\frac{4\cdot48}{64000000}.$$

Für jene Himmelskörper, welche von Trabanten begleitet sind, war es nicht schwer, die Masse zu ermitteln. Nach pag. 100 verhalten sich die Kräfte, welche die Bewegung verschiedener Körper bestimmen, wie $P:P_1=\frac{A}{T^2}:\frac{a}{t^2}$. Hat man es nun nicht mit Planeten zu thun, die um denselben Centralkörper kreisen, sondern mit einem Hauptplaneten und einem Nebenplaneten, so wird das Verhältniss der Kräfte bestimmt durch $P:P_1=\frac{M}{A^2}:\frac{m}{a^2}$, wobei a, A die Entfernung des letzteren von der Sonne, und m, M die Massen der anziehenden Körper, also des Hauptplaneten und der Sonne bedeuten. Hieraus folgt:

$$\frac{M}{A^2}:\frac{m}{a^2}=\frac{A}{T^2}:\frac{a}{t^2}, \quad \text{demnach} \quad \frac{m}{M}=\left(\frac{a}{A}\right)^3\left(\frac{T}{t}\right)^2.$$

Nimmt man die Sonnenmasse als Einheit, so folgt sofort m, die Masse des Hauptplaneten in Einheiten der Sonnenmasse. Für den Erdmond ist

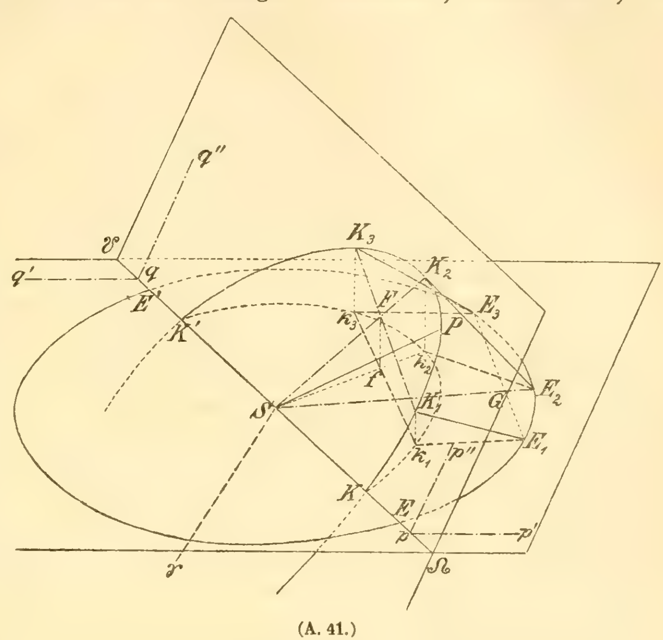
$$\frac{a}{A}=\frac{1}{387}; \quad \frac{t}{T}=\frac{1}{13\cdot26}, \quad \left(\frac{t}{T}\right)^2=\frac{1}{176}, \quad \text{folglich} \quad m=\frac{1}{330000}.$$

NEWTON fand für die Massen: Jupiter $\frac{1}{1077}$, Saturn $\frac{1}{2411}$, Erde $\frac{1}{227512}$; die Massen derjenigen Planeten, die keine Begleiter haben, konnten nur durch hypothetische Werthe ersetzt werden. Zu diesem Zwecke wurden aus den 3 berechneten Massen und den scheinbaren Halbmessern die Dichten berechnet, aus diesen nach einem für diese abgeleiteten Gesetz auch die Dichten der anderen Planeten geschlossen, womit die beobachteten scheinbaren Halbmesser die Massen der übrigen gaben.

Für den Mond wäre $\mu=\frac{M}{v}\left(\frac{a}{A}\right)^3$ und daher in Einheiten der Erdmasse, mit $1:v=4\cdot48$, $M=330000:\mu=\frac{1}{39}$ mit dem Werthe 227512 $\mu=\frac{1}{57}$ (bei NEWTON ist auch der Werth der Sonnenparallaxe ein anderer, und damit $\mu=\frac{1}{49}$).

Der letzte Theil von NEWTON's Untersuchungen bezieht sich auf die Bewegung der Kometen. Da dieselben als Himmelskörper ebenso wie die Planeten dem Attractionsgesetze unterworfen sind, müssen ihre Bahnen ebenfalls Kegelschnittslinien sein, welche aber von der Parabel so wenig verschieden sind, dass sie ohne merkliche Fehler als Parabeln angesehen werden können; die nächste Folge davon ist, dass sie nur während ihrer Sonnennähe gesehen werden können und dann verschwinden. Die Aufgabe, aus dem kleinen Theil ihres Laufes, während dessen sie sichtbar sind, ihre wahre parabolische Bahn mit dem Brennpunkte im Sonnenmittelpunkt zu bestimmen, erforderte analytische Operationen, die die Kräfte der Analysis jener Zeiten überstiegen. NEWTON löste die Aufgabe durch ein zum Theil graphisches Verfahren in einer ziemlich befriedigenden Weise. Sei EE_1E_3 (Fig. 41) die Ebene der Ekliptik, S die Sonne, $S\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkt, so wird a) die Bahnlage bestimmt durch 1) die Länge des aufsteigenden Knotens $\Upsilon S\Omega=\Omega$ (in der Richtung der Bewegung des Himmelkörpers von 0 bis 360° gezählt), 2) die Neigung der Bahn i; diese wurde

ursprünglich stets kleiner als 90° genommen, und die Bewegungsrichtung der Himmelskörper sodann als direkt oder retrograd bezeichnet[1]). Ferner ist b) die Bahn in der Bahnebene bestimmt durch 3) den Abstand des Perihels vom Knoten, d. i. den Winkel $\omega = KSP$, gezählt von 0 bis 360° in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers, 4) die Länge der grossen Axe, 5) die Excentricität (für die Parabel tritt an die Stelle von 4 und 5 die Periheldistanz SP, da die Excentricität gleich 1 ist), und endlich c) der Ort des Himmelskörpers in seiner Bahn bestimmt durch 6)



(A. 41.)

seine Anomalie zu einer gegebenen Epoche, in der Parabel durch die Angabe der Zeit des Periheldurchganges. Sechs der Beobachtung entnommene Daten werden ausreichen, um diese 6 Elemente zu bestimmen. Solche 6 Daten sind z. B. drei vollständige Beobachtungen, welche 3 geocentrische Längen und 3 geocentrische Breiten geben. Angenommen, es wären K_1, K_2, K_3 Kometenorte zu Zeiten, in denen sich die Erde in E_1, E_2, E_3 befindet; die Projectionen der Kometenorte auf die Ekliptik wären k_1, k_2, k_3, durch die Beobachtungen sind die Längen, d. i. die Richtungen E_1k_1, E_2k_2, E_3k_3 in der Ekliptik, und die Breiten d. i. die Winkel $K_1E_1k_1$, $K_2E_2k_2$, $K_3E_3k_3$, dem zu Folge die Richtungen E_1K_1, E_2K_2, E_3K_3 im Raume bestimmt. Verbindet man den zweiten Kometenort K_2 mit S, und sei der Schnitt mit der Sehne K_1K_3 in F, so nimmt NEWTON an, dass die Sehne K_1K_3 im Punkte F im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten wird[2]), was um so näher richtig ist, je

[1]) Erst seit GAUSS hat die jetzige Zählweise allgemein Eingang gefunden. Hiernach wird die Neigung durch die in der Richtung der Bewegung gezogenen, in der Ekliptik und in der Bahn gelegenen Normalen auf die Knotenlinie bestimmt. Ist daher (Fig. 41) die Bewegungsrichtung KK_3, der aufsteigende Knoten in der Richtung SK, und daher pp', pp'' in der Richtung der Bewegung, so ist $p'pp''$ die Neigung; ist aber die Bewegungsrichtung $K'K_3K$, also der aufsteigende Knoten in der Richtung SK', so ist die Neigung $q'qq''$, also grösser als 90° (die ältere Zählungsweise gab die Neigung $180° - q'qq''$, Bewegung retrograd).

[2]) S. hierüber »Bahnbestimmungen«. Bereits mehrfach, erst neuerdings, wurde darauf hingewiesen, das die »OLBERS'sche Annahme«, dass die Sehne im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten wird, schon bei LAMBERT auftritt. Dieser Irrthum beruht selbstverständlich auf einer vollständigen Verkennung der OLBERS'schen Methode. Die Theilung der Sehne im Verhältniss der Zwischenzeiten tritt schon bei NEWTON auf. Der eigentliche Kernpunkt der OLBERS'schen Methode: die Einführung derselben Beziehung für die Erdbewegung, und die Benutzung der EULER'schen Gleichung tritt allerdings ebenfalls schon früher, aber nicht bei LAMBERT, sondern bei DU SÉJOUR auf.

kleiner die vom Kometen beschriebenen Bogen, d. h. die Zwischenzeiten sind. Die Pfeilhöhen K_2F, E_2G sind als die Fallhöhen anzusehen, durch welche die Himmelskörper gegen die Sonne zu fielen, während sie die Bögen K_1K_2 bezw. E_1E_2 zurücklegten; sie verhalten sich demnach verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen, d. h. es ist

$$K_2F : E_2G = SE_2{}^2 : SK_2{}^2.$$

Projicirt man nun die wahre Bahn des Kometen auf die Ekliptik, so wird auch in der Projection das Verhältniss der Sehnenstücke $k_1f : k_3f$ gleich dem Verhältniss der Zwischenzeiten sein, und da

$$k_2f = K_2F \cos K_2Sk_2 = K_2F \frac{Sk_2}{SK_2}$$

ist, so folgt

$$k_2f = E_2G \cdot \frac{SE_2^2 \cdot Sk_2}{SK_2^3}. \tag{a}$$

Darauf gründet sich die NEWTON'sche Lösung: In der Richtung E_2K_2 wird ein Punkt K_2 angenommen, und aus den bekannten Winkeln die heliocentrische Distanz SK_2 bestimmt. Es wird nun in der Projection Sk_2 ein Punkt f angenommen, der durch die Gleichung (a) bestimmt ist, und durch f wird eine Gerade so gelegt, dass die zwischen den Projectionen der beiden äusseren Visuren E_1k_1, E_3k_3 gelegenen Abschnitte den Zwischenzeiten proportional sind. Dann wären k_1, k_3 die Projectionen der beiden äusseren Kometenorte. Durch die in den Visuren E_1K_1, E_3K_3 befindlichen Orte K_1, K_3, deren Projectionen k_1, k_3 sind, wird dann ein Kegelschnitt gelegt, dessen Brennpunkt S ist, welcher die Bahn des Himmelskörpers giebt. Macht man von vornherein die Annahme, dass der Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so kann diese construirt werden, wenn man mit dem Halbmesser K_1S aus dem Punkte K_1 als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt; ebenso mit dem Halbmesser K_3S aus K_3 als Mittelpunkt; die gemeinschaftliche Tangente an die beiden Kreise giebt die Richtlinie, das auf diese aus S gefällte Perpendikel die Axe [1]). Bestimmt man in dieser Bahn die Zeit, welche der Komet zur Zurücklegung des Bogens K_1K_3 braucht, und findet dieselbe gleich der beobachteten, so wird der gefundene Kegelschnitt die Bahn des Kometen sein; stimmt aber die berechnete Zeit mit der beobachteten nicht überein, so muss der Ort von K_2 in der Richtung E_2K_2 so lange verschoben werden, bis der angeführten Bedingung genügt wird.

Zwei Umstände waren es, welche der allgemeinen Anerkennung der Gravitationstheorie entgegenstanden. Erstens die CARTESI'sche Wirbeltheorie [2]), welche alle Erscheinungen ausreichend zu erklären schien, wenigstens so lange man auf metrische Beziehungen nicht näher einging, so dass die Annahme oder selbst nur Prüfung einer anderen Theorie — eine unerklärliche Anziehung zwischen leblosen Massen — vorerst nicht nur nicht nöthig, sondern in Folge der mit der Conception einer solchen Anziehung verbundenen begrifflichen Schwierigkeiten unzulässig erschien. Zweitens aber hatte diese Theorie einen bedenklichen Stoss erlitten durch die Nichtübereinstimmung mit einem leicht zugänglichen Erfahrungsresultat: die französische Gradmessung ergab, dass die Erde kein abgeplattetes, sondern ein an den Polen verlängertes Rotationsellipsoïd wäre. Es entstand hieraus ein langer, oft ziemlich erbittert geführter

---

[1]) Die Aufgabe hat geometrisch zwei Lösungen, da zwei gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden können; welche von den beiden die wahre Bahn ist, wird aus den übrigen Bedingungen der Aufgabe nicht zweifelhaft sein.

[2]) S. den Artikel »Kosmogonie«.

Streit, da die französischen Astronomen in dem Resultat der Gradmessungen einen Beweis gegen die NEWTON'sche Theorie sahen, während die englischen Astronomen die über kaum $\frac{1}{10}$ des Quadranten ausgedehnte Gradmessung in Folge der dieselben möglicher Weise entstellenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler für nicht beweisend erklärten. Mehr aber als diese Umstände wirkte verzögernd auf die Anwendung der Theorie, dass die Methoden der Analysis noch nicht jene Vollkommenheit besassen, welche ihre analytische Benutzung erleichterte. War die analytische Formulirung des Gesetzes der allgemeinen Gravitation der Beginn einer neuen Epoche in der Astronomie, so war die Infinitesimalrechnung erst das Instrument, ohne welches die grossen theoretischen Arbeiten der folgenden Zeit ganz unmöglich gewesen wären. Das Verdienst, diese Methoden in ihrer jètzigen Form begründet zu haben, gebührt ebenfalls NEWTON, und nicht minder seinem grossen Zeitgenossen LEIBNITZ[1]). Um ihre Vervollkommnung haben sich aber um jene Zeit besondere Verdienste erworben MAC LAURIN, EULER, BERNOULLI, d'ALEMBERT und LAGRANGE, durch deren fortgesetzte mathematische Untersuchungen die Infinitesimalrechnung erst die für die Lösung der astronomischen Fragen nöthige Geschmeidigkeit und Eleganz erhielt. 1687 erschienen die »Principien« NEWTON's, aber erst 1743 wurde durch CLAIRAUT jene grosse Reihe theoretischer Arbeiten inaugurirt, welche die Bewegung der Himmelskörper durch die Analysis verfolgte. Allerdings ruhte die wissenschaftliche Thätigkeit in der Zwischenzeit nicht, aber wieder waren es mehr praktische Arbeiten, empirisch erschlossene Gesetze, welche aus jener Periode zu erwähnen sind.

Nachdem bis dahin nur o Ceti als veränderlicher Stern bekannt war, wurde 1667 von MONTANARI der Lichtwechsel von β Persei und R Hydrae, 1687 von KIRCH die Veränderlichkeit von χ Cygni gefunden, womit allerdings dieses Gebiet der Stellarastronomie für mehr als 100 Jahre abgeschlossen erscheint. 1717 hatte HALLEY die Eigenbewegung der Fixsterne constatirt, und um dieselbe Zeit wurde durch D. CASSINI und PICARD die bis dahin unaufgeklärt gebliebene Variation der Refraction mit den Jahreszeiten als Folge einer Abhängigkeit von der Temperatur hypothetisch erklärt, und 1738 von LEMONNIER festgestellt. Bald darauf wurde auch der Einfluss des Barometerstandes auf die Refraction durch TOB. MAYER[2]) berücksichtigt und 1763 konnte JAMES BRADLEY[3]), jener Beobachter κατ᾽ἐξοχήν seine Refractionstafeln anlegen, welche mehr als 50 Jahre hindurch die Grundlage für alle Beobachtungen bildeten. 1730 hatten STURM und HADLEY die bis dahin üblichen rechtwinklig gebogenen Kanalwaagen durch die nach einem Kreise geschliffenen Röhrenlibellen, welche auch die Messung von Neigungen gestatteten, ersetzt[4]). T. MAYER hatte das Repetitionsverfahren für Winkelmessungen eingeführt, aber die grössten praktischen Erfolge errang

---

[1]) Geboren 3. Juli 1646 zu Leipzig, beschäftigte er sich bis zu seinem 25. Jahre mehr mit Philosophie, 1672 machte er eine Reise nach Paris und London, wo er die bedeutendsten Mathematiker kennen lernte und sich nun der Mathematik zuwendete. 1676 wurde er Bibliothekar in Hannover, wo er bis zu seinem, am 14. November 1716 erfolgten Tode verblieb.

[2]) Geboren 17. Febr. 1723 zu Marbach in Württemberg, bildete er sich durch Privatstudium zum Mathematiker aus, wurde 1751 Professor der Mathematik in Göttingen, wo er am 20. Febr. 1762 starb.

[3]) Geboren 1692 zu Sherborne, studirte er in Oxford Theologie, wurde 1721 Professor der Astronomie in Oxford, 1741 königl. Astronom in Greenwich. Er starb zu Chalford am 13. Juli 1762.

[4]) Comm. Soc. Reg. Gotting. Bd. 7, und Phil. Transact. Bd. 37.

jener *vir incomparabilis*, dessen Beobachtungen die einzigen aus jener Zeit sind, die noch jetzt zur Bestimmung der fundamentalen Constanten der Astronomie herangezogen werden können: JAMES BRADLEY. Erst durch ihn erlangte die Bogensecunde eine Bedeutung bei Beobachtungen und nur durch die für jene Zeiten ausserordentliche Genauigkeit der Beobachtungen konnte er 1728 die Ortsveränderung der Gestirne in Folge der Aberration, und 1747 nach mehrjährigen Beobachtungen die Nutation finden.

Nachdem bereits nach CASSINI's Vorschlag 1672 Beobachtungen der Marsopposition von RICHER in Cayenne und von PICARD und RÖMER in Paris zur Bestimmung der Sonnenparallaxe vorgenommen worden waren, schlug 1714 HALLEY die Beobachtungen der Venusdurchgänge für diesen Zweck vor[1]), ein Vorschlag, der allerdings erst 1769 praktisch verwerthet werden konnte,

Während die hier erwähnten Beobachtungen sämmtlich an festen grossen Mauerquadranten und Zenithsectoren ausgeführt wurden, trat auch bei den mikrometrischen Messungen eine wesentliche Verbesserung ein. In das Jahr 1739 fällt die Erfindung der Ringmikrometer durch BOSCOWICH, der die kreisförmigen Blendungen der Fernrohre zur Beobachtung von Sterndurchgängen vorschlug, nachdem bereits LAHIRE ein System von mit Diamant auf Glasplatten geritzten concentrischen Ringen zur Messung der Durchmesser der Himmelskörper in der Art angab, dass das Netz gegen das Objectiv soweit verschoben wurde, bis das Bild durch einen der Ringe gedeckt erschien[2]). 1755 ersetzte FÉLICE FONTANA die bis dahin verwendeten Silberfäden der Fadenmikrometer durch Spinnenfäden; und 1743 hatte SERVINGTON SAVERY und bald darauf (1748) BOUGUER zwei gegeneinander verstellbare Objective zur Messung des Sonnendurchmessers verwendet, also den Grund zur Construction der späteren Heliometer gelegt. Endlich muss erwähnt werden, dass CASSINI 1741 die Pendeluhren durch Construction der Rostpendel wesentlich verbesserte und AEPINUS 1762 das gebrochene Fernrohr einführte.

Als im Jahre 1743 die bereits erwähnte Epoche theoretischer Arbeiten begann, da waren es vornehmlich die folgenden Fragen, die in den Kreis der Erörterungen gezogen wurden:

I. NEWTON hatte für die Bewegung der Apsiden des Mondes nur die Hälfte des durch die Beobachtungen constatirten Werthes gefunden, und es musste gezeigt werden, ob eine genauere Analyse den vollen Betrag geben würde, oder ob das NEWTON'sche Attractionsgesetz durch ein Zusatzglied ergänzt werden müsste, sei es, dass dasselbe von accessorischen Kräften anderer Natur herrühre, oder dem Umstande zuzuschreiben wäre, dass das Kraftgesetz $P = \frac{m}{r^2}$ nur als Näherung angesehen werden könnte, und thatsächlich das Anfangsglied einer Reihe bilde, welche nach steigenden negativen Potenzen der Entfernung fortschreite.

II. HALLEY[3]) hatte darauf hingewiesen, dass die mittlere tägliche Bewegung des Mondes sich stetig beschleunige. Bestimmt man dieselbe aus Beobachtungen, die aus dem Alterthum überliefert sind, so ergiebt sich ein anderer Werth, als aus den Beobachtungen unserer Zeit. Ist der erstere Werth μ_1, der letztere μ_2, so wird $\mu_2 > \mu_1$ gefunden; setzt man $\mu = \mu_0 + \mu' t$, wobei μ_0 der der Epoche

[1]) Phil. Transact, Bd. 29.

[2]) Memoiren der Pariser Academie, 1701.

[3]) Philos. Transact. Bd. 19.

$t = 0$ entsprechende Werth ist, so wird man aus den beiden beobachteten Werthen

$$\mu_1 = \mu_0 + \mu' t_1$$
$$\mu_2 = \mu_0 + \mu' t_2$$

erhalten und daraus μ_0 und μ' bestimmen können. Die Beobachtungen des Alterthums sind aber keineswegs hinreichend genau, um in dieser Weise vergleichbare Resultate zu erhalten, und die Bestimmung der Constanten μ_0 und μ_1 muss in anderer Weise vorgenommen werden. Für ein kleines Zeittheilchen dt kann μ als constant angenommen werden und die Bewegung des Mondes wird in diesem Zeitelement μdt, folglich die mittlere Bewegung des Mondes in Länge seit der Epoche $t = 0$

$$\int \mu dt = \int (\mu_0 + \mu' t) dt = L_0 + \mu_0 t + \tfrac{1}{2} \mu' t^2$$

worin die Integrationsconstante L_0 die mittlere Länge zur Zeit $t = 0$ ist. Würde man $\mu' = 0$ und für μ_0 den Werth setzen, welcher aus den jeweiligen zur Verfügung stehenden genauesten Beobachtungen der Gegenwart geschöpft werden kann, so würden die überlieferten Finsternisse des Alterthums nicht dargestellt: die Rechnung wird entweder überhaupt keine Finsterniss ergeben, weil nach der berechneten mittleren Länge die wahre Länge des Mondes nicht gleich der wahren Länge der Sonne sein könnte[1]), oder aber es würde sich wohl eine Finsterniss ergeben, aber die Curve der Centralität würde bedeutend verschoben, und die Rechnung würde die Finsterniss für ganz andere Orte als total ergeben, als es die Beobachtung zeigt. Zur Darstellung der Finsternisse ist ein von dem Quadrate der Zeit abhängiges Zusatzglied $\frac{1}{2}\mu' t^2$ nöthig[2]). Den Coëfficienten $\frac{1}{2}\mu'$ nennt man den Coëfficienten der Secularacceleration oder kurz die Secularacceleration des Mondes. HALLEY hatte dieselbe wohl angedeutet, in seinen Tafeln aber nicht berücksichtigt, die erste numerische Bestimmung derselben aus den historischen Finsternissen rührt von DUNTHORNE[3]) her, welcher ihren Betrag gleich 10″ fand, wenn für t das JULIANI'sche Jahrhundert (36525 Tage) als Einheit gewählt wird. MAYER nahm in seinen ersten Mondtafeln von 1752 den Coëfficienten gleich 6″·7 an, in der zweiten Ausgabe von 1770 änderte er diesen Coëfficienten in 9″. LALANDE nahm für denselben 9″·886. Die Unterschiede rühren wesentlich davon her, dass zur Bestimmung derselben nicht alle, sondern nur einzelne, und nicht immer die gleichen Finsternisse verwendet wurden. Die theoretische Erklärung dieser Secularacceleration war die zweite wichtige Frage, und es mag gleich hier bemerkt werden, dass diese beiden Fragen noch jetzt offene Fragen bilden, und die mehr oder weniger gute Lösung derselben immer als ein Prüfstein für eine gute Theorie angesehen wird.

III. Aehnliche Veränderungen in den mittleren Bewegungen hatte HALLEY für die beiden Planeten Jupiter und Saturn constatirt, und auch in seinen astronomischen Tafeln aufgenommen. Für Jupiter fand HALLEY eine Secularverzögerung von 36″, für Saturn eine Beschleunigung von 1′24″. Diese Veränderungen der mittleren Bewegungen waren theoretisch zu erklären.

---

[1]) Auf den Umstand, dass bei der Berechnung der Sonnenfinsternisse auch auf die parallactische Verschiebung des Mondortes Rücksicht zu nehmen ist, kann hier nicht näher eingegangen werden. S. »Finsternisse«.

[2]) Wohl die eingehendsten Untersuchungen der neuesten Zeit in dieser Richtung hat GINZEL (Sitzungsberichte der kais. Academie der Wissensch. in Wien 1883, 84) vorgenommen, wodurch auch die bereits von VON OPPOLZER angezeigte »empirische Correction« näher bestimmt wurde.

[3]) Philos. Transact. No. 492.

IV. Newton hatte bereits eine Erklärung für die Präcession durch die allgemeine Gravitation gegeben; es war zu untersuchen, ob auch die weitere analytische Verfolgung dieses Problems die durch die Beobachtung gefundenen numerischen Werthe der Präcession ergeben und ausserdem auch die Erscheinungen der Nutation erklären würden.

V. Die constanten Veränderungen der mittleren Bewegungen der beiden oberen Planeten legten die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems nahe, die Frage ob die Axen, die Excentricität, die Neigungen der Planetenbahnen secularen Veränderungen unterworfen wären, in Folge deren sich im Laufe der Zeiten völlig geänderte Constellationen ergeben würden, und im Zusammenhange hiermit weiter

VI. Die Probleme der secundären Systeme: a) die Erklärung der Erscheinungen, welche der Mond darbietet. Nachdem bereits Cassini und Hevel die Libration in Länge und Breite entdeckt hatten, gab Cassini 1721 die vollständigen Gesetze, welche später von Mayer aus einer grossen Reihe von Beobachtungen verificirt wurden. Sie sind 1) der Mond dreht sich um seine Axe in derselben Zeit, in welcher er seinen Umlauf um die Erde vollführt; 2) der Mondäquator und die Mondbahn schneiden die Ekliptik in derselben Geraden. Wäre demnach die Bewegung des Mondes völlig gleichmässig, so würde der Mond stets der Erde dieselbe Seite zuwenden, und man könnte nie mehr als die Hälfte der Mondoberfläche sehen. In Folge der ungleichmässigen Bewegung des Mondes in Länge wird aber bei vollständig gleichmässiger Rotation des Mondes um seine Axe im Laufe der Zeiten etwas mehr als die Hälfte der Mondoberfläche sichtbar, indem die Verbindungslinie des Erd- und Mondmittelpunktes nur dann stets denselben Punkt der Oberfläche treffen kann, wenn entweder die Rotation und Revolution des Mondes völlig gleichmässig stattfinden, oder aber beide mit denselben Ungleichheiten behaftet sind. Die Verschiebung des optischen Mondcentrums auf der physischen Mondoberfläche bringt es aber mit sich, dass auch kleine, sonst stets verborgene Partien der hinteren Mondhälfte sichtbar werden (optische Libration). Wenn nun überdies die Rotation des Mondes um seine Axe nicht ganz gleichmässig oder mit anderen Ungleichheiten behaftet ist, wie seine Bewegung um die Erde, so tritt eine ähnliche Erscheinung hinzu (physische Libration). b) In der Bewegung der Jupitersatelliten zeigen sich gewisse Ungleichheiten, welche nicht von dem Orte des Satelliten selbst (also nicht etwa von einer Excentricität seiner Bahn), sondern von den jovicentrischen Winkelabständen zweier Satelliten abhängen und welche eine Periode von $437\frac{3}{4}$ Tagen haben. Diese empirisch constatirten Ungleichheiten wurden bereits von Wargentin in seinen Tafeln der Satelliten[1]) aufgenommen; es war zu untersuchen, wie sich diese Ungleichheiten aus dem Attractionsgesetz erklären lassen. Endlich war

VII. Das Problem der Bahnbestimmung eines Kometen noch als ungelöst zu betrachten, so lange die schwerfälligen, geometrischen und indirecten, analytischen Methoden verbesserungsbedürftig erschienen. Halley hatte nach der Newton'schen Methode die Bahnen von 24 Kometen berechnet[2]), und war durch die sehr nahe Uebereinstimmung der Bahnen des Kometen von 1531, 1607, 1682, 1456, 1380, 1305 auf die Annahme geführt worden, dass es Erscheinungen eines und desselben periodischen Kometen von 75 Jahren Umlaufszeit wären,

[1]) Neue Memoiren von Upsala 1741/43.

[2]) Phis. Transact. Nr. 297.

dessen Wiederkehr er hiernach für das Jahr 1758/59 voraussagte. Eine genaue Betrachtung aber zeigte, dass der Komet dem Jupiter sehr nahe gekommen war, und es blieb zu untersuchen, ob dieser Komet nicht durch diese Annäherung grössere Störungen in seiner Bahn erfahren habe.

Fast gleichzeitig waren es Clairaut, d'Alembert und Euler[1]), welche mit allen damals zu Gebote stehenden Mitteln der Analysis an die Lösung dieser Fragen schritten. Wohl die erste Abhandlung in dieser Richtung war die in den Memoiren der Pariser Academie für 1743 publicirte Arbeit Clairaut's »De l'orbite de la Lune dans le système du Mr. Newton«, welcher bald darauf eine zweite (in den Memoiren für 1745) »Du système du Monde dans les Principes de la gravitation universelle« folgte. In demselben Bande (1745) erschien auch die Abhandlung d'Alembert's »Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les Planètes, en ayant égard à leur action mutuelle«, als Auszug seiner später publicirten »Recherches«. Inzwischen (der Druck der Abhandlungen erfolgte erst 3 bis 4 Jahre nachdem sie vorgelegt waren) hatte auch Euler in den Memoiren der Berliner Academie für 1747 seine »Recherches sur le mouvement des corps célestes en général« publicirt und gleichzeitig seine von der Pariser Academie preisgekrönten Untersuchungen über die anomalen Bewegungserscheinungen des Jupiter und Saturn vollendet. Aus diesen Abhandlungen, in welchen bereits die in den späteren Arbeiten eingeschlagenen Wege zum grössten Theil angedeutet sind, ist in erster Linie das übereinstimmende Resultat aller drei genannten Gelehrten hervorzuheben, dass das Newton'sche Gesetz zur Erklärung der Bewegung der Apsiden des Mondes nicht ausreicht[2]). Hingegen hatte sich Buffon noch im selben Bande der Pariser Academie direct gegen diese Schlussfolgerung gewendet. Seine Beweise ermangeln jedoch der wissenschaftlichen Strenge und wurden sofort von Clairaut

---

[1]) Alexis Claude Clairaut, geb. 7. Mai 1713 zu Paris, wurde bereits mit 18 Jahren Mitglied der Pariser Academie, betheiligte sich 1735 mit Maupertuis, Lemonnier an der Lappländischen Gradmessung und starb 17. Mai 1765. Die Berechnungen über die Wiederkehr des Halley'schen Kometen führte er gemeinschaftlich mit Mad. Lepaute (geb. 5. Januar 1723, gest. 6. Dec. 1788), welche sich auch als astronomische Rechnerin an der *Connaissance des Temps* betheiligte, durch.

Jean le Rond d'Alembert wurde am 16. Novemb. 1717 als natürlicher Sohn des Artilleriecommissärs Destouches und der Frau von Tincin geboren. Vor der Kirche Jean le Rond ausgesetzt, wurde er von einer Tagelöhnerin aufgezogen. Anfänglich theologischen Studien zugewandt, studirte er später die Rechte und die Medizin; seine Hauptthätigkeit wandte er aber der Mathematik zu. Sein universelles Wissen befähigte ihn mit Diderot gemeinschaftlich jene grosse Encyclopädie herauszugeben, die von so hervorragendem Einfluss auf die Geistesrichtung jener Zeiten wurde. 1741 wurde d'Alembert Mitglied der Pariser Academie, 1772 deren Secretär, nachdem er 1763 die Präsidentschaft der Berliner Academie, die ihm Friedrich II. antrug, ausgeschlagen hatte, um in seinem Vaterlande bleiben zu können. Er starb 29. Octob. 1783.

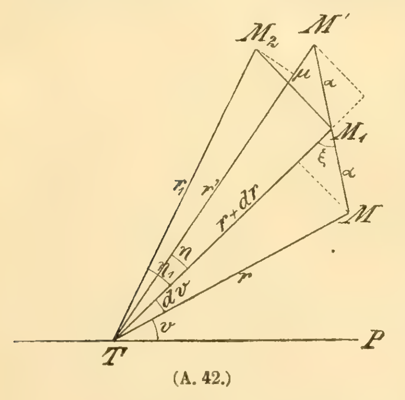
Leonhard Euler, geb. 15. April 1707 in Basel, wurde von seinem Vater anfänglich für den geistlichen Stand bestimmt, studirte aber eifrig Mathematik an der Universität Basel unter Joh. Bernoulli. 1733 folgte er einem Rufe nach Petersburg, 1741 einem Rufe Friedrich II. als Präsident der Academie nach Berlin. Schon 1735 hatte er ein Auge verloren, und 1766 erblindete er vollständig, wodurch er gezwungen war, seine Arbeiten einem Hilfsarbeiter zu dictiren. 1766 neuerdings von Katharina II. nach Petersburg berufen, blieb er hier bis zu seinem am 7. Sept. 1783 erfolgten Tode.

[2]) Mémoires de l'Academie royale de Paris pour l'année 1745, pag. 353, 389, Mémoires de Academie royale de Berlin 1747, pag. 98.

widerlegt[1]). Weiter hatte aber bereits 1742 CALANDRIN unter Berücksichtigung der Excentricität der Mondbahn für die Bewegung des Mondapogäums den sogar etwas zu grossen Werth 44·9° jährlich gefunden[2]). Allein hierzu ist zu bemerken, dass weder die Methode, noch auch die Berechnungen CALANDRIN's einwurfsfrei sind; es ist daher weniger sein Resultat, als seine Ansicht, dass die Excentricität der Mondbahn bei der Berechnung der Bewegung der Apsiden zu berücksichtigen ist, erwähnenswerth.

Dieser Anschauungsweise schlossen sich auch bald CLAIRAUT, D'ALEMBERT und EULER an. Schon in den Memoiren der Pariser Academie für 1748 erklärte CLAIRAUT in der Abhandlung »De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices«, dass unter Berücksichtigung aller in Betracht zu ziehenden Umstände die Bewegung des Apogäums sich den Beobachtungen conform ergiebt, und dass kleine noch übrig gebliebene Abweichungen ihre Ursache in den noch vorgenommenen Vernachlässigungen, nicht aber in der Mangelhaftigkeit des Gravitationsgesetzes haben. Am klarsten ist seine Methode auseinandergesetzt in seinem Werke: »Théorie de la lune, déduite du seul principe de l'attraction reciproquement propoitionelle aux quarrés des distances«, welches 1750 den Preis der Pariser Academie erhielt. D'ALEMBERT hatte seine Untersuchungen in verschiedenen Abhandlungen, welche als» Recherches sur divers point sur le système du Monde« erschienen, niedergelegt, und EULER in seiner« Theoria motus Lunae, exhibens omnes ejus inaequalitates« nebst eingehenden theoretischenUntersuchungen über die Bewegung des Mondes auch die zur Anlegung von Mondtafeln erforderlichen numerischen Rechnungen durchgeführt.

Aber schon ein Jahr früher hatte T. MAYER in den Comm. Soc. Reg. Scient. Gotting. die oben erwähnten Mondtafeln publicirt, in denen bereits eine Secular-



(A. 42.)

gleichung der mittleren Länge in dem Betrage von $\frac{1}{2}\mu = 6''{\cdot}7$ für das erste Jahrhundert auftritt. Die Formeln, welche diesen Tafeln zu Grunde gelegt sind, sowie auch die Methode, durch welche MAYER die Gleichungen erhielt, sind leider nicht angegeben und auch später nicht erschienen. 1772 gab LAMBERT in seinen »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und ihre Anwendung« die aus den Tafeln abgeleiteten analytischen Ausdrücke[3]), während allerdings die von MAYER angewandte Integrationsmethode nicht zu erschliessen war; diese bleibt leider für uns verloren.

Die Methode, welche CLAIRAUT anwandte, ist die heute als »Störungen in den polaren Coordinaten« bezeichnete. Sei T (Fig. 42) der Centralkörper (für die Mondtheorie die Erde), M der Ort des Mondes für einen gegebenen Augenblick, sodass $TM = r$ dessen Radiusvector, $PTM = v$ seine wahre Länge, gezählt von einer festen Richtung PT, und seine Bewegung in dem

---

[1]) l. c. pag. 496, 546, 577, 580, 584.

[2]) S. die Noten von CALANDRIN in der französischen Ausgabe der NEWTON'schen »Principien« von LE SUEUR und JAQUIER.

[3]) Es ist nicht wohl möglich, dass T. MAYER seine Gleichungen aus den Beobachtungen ableitete, denn eine Vergleichung seiner Ausdrücke mit anderen zeigt, dass bei den Gleichungen nur die ersten Potenzen der Massen Berücksichtigung fanden.

nächsten Zeittheilchen der Richtung und Grösse nach gegeben durch $MM_1 = \alpha$, sodass $TM_1 = r + dr$, $MTM_1 = dv$ ist. Würde keine weitere Kraft wirken, so wäre die Bewegung in dem darauf folgenden Zeittheilchen $M_1M' = MM_1 = \alpha$. Mit den in der Figur gewählten Bezeichnungen wird nun:

$$\alpha \sin \xi = r \sin dv \qquad r' \sin \eta = \alpha \sin \xi$$
$$\alpha \cos \xi = r + dr - r \cos dv \qquad r' \cos \eta = r + dr + \alpha \cos \xi,$$

folglich

$$r' \sin \eta = r \sin dv$$
$$r' \cos \eta = 2r + 2dr - r \cos dv.$$

Aus der letzten Gleichung folgt zunächst[1])

$$r'\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) = 2r + 2dr - r\left(1 - \frac{dv^2}{2}\right) = r + 2dr + r\frac{dv^2}{2}$$

und wenn man hier für η^2 den aus der ersten Gleichung folgenden Näherungswerth $\eta = dv$ einsetzt:

$$r' = r + 2\,dr + r\,dv^2. \tag{1}$$

Führt man diesen Werth von r' in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$(r + 2\,dr)\eta = r\,dv$$

und daraus

$$\eta = \frac{r\,dv}{r\left(1 + 2\frac{dr}{r}\right)} = dv\left(1 - 2\frac{dr}{r}\right)$$

$$\eta = dv - 2\frac{dv \cdot dr}{r}. \tag{2}$$

Wirkt aber eine die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit verändernde Kraft, deren Componente in der Richtung M_1T gleich Σ und in der darauf senkrechten Richtung Π ist, so wird in dem nächsten Zeittheilchen dt die Strecke M_1M_2 zurückgelegt, und es ist $TM_2 = r_1 = TM_1 + d(TM_1) = r + dr + d(r + dr) = r + 2\,dr + d^2r$, und $M_1TM_2 = \eta_1 = MTM_1 + d(MTM_1) = dv + d^2v$. Die Wirkung der Kraft äussert sich daher in den Differenzen $r_1 - r'$ und $M'TM_2 = \eta_1 - \eta$, welche bezw. gleich sind Σdt^2 und $\Pi\, dt^2$, sodass man erhält[2]):

$$d^2 r - r\,dv^2 = \Sigma\, dt^2 \tag{3}$$
$$r d^2v + 2 dr\, dv = \Pi\, dt^2. \tag{4}$$

Die Kraft Σ setzt sich zusammen aus der Attraction T, welche gegeben ist durch $\frac{M}{r^2}$, wenn M die Masse des Körpers T ist und einer störenden Kraft Φ, sodass

$$\Sigma = \frac{M}{r^2} + \Phi. \tag{5}$$

CLAIRAUT stellt nun die Bahn des Körpers so dar, dass ein Theil sofort als Ellipse ersichtlich wird und findet:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{g}{p}\sin v - \frac{c}{p}\cos v + \frac{\Delta}{p}, \tag{6}$$

worin

$$\Delta = \sin v \int \Omega \cos v\, dv - \cos v \int \Omega \sin v\, dv$$

ist, und Ω von den störenden Kräften Φ und Π abhängig ist[3]). Sind die störenden Kräfte gleich 0, so wäre

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{g}{p}\sin v - \frac{c}{p}\cos v.$$

---

[1]) Da die Glieder nullter Ordnung (die endlichen Grössen) und die unendlich kleinen erster Ordnung sich zum Schluss wegheben, so muss man in den Entwickelungen bis ein schliesslich zu Grössen zweiter Ordnung gehen.

[2]) S. den Artikel »Mechanik des Himmels«, Gleichungen (B).

[3]) Die Ableitung dieser Formeln s. unter »Mechanik des Himmels.«

An Stelle der beiden Constanten g und c kann man andere e, α einführen durch die Gleichungen

$$g = e \sin \alpha; \qquad c = e \cos \alpha,$$

dann wird

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e \cos (v - \alpha)}{p}.$$

Wird v von der Apsidenrichtung gezählt, so würde $\alpha = 0$ zu setzen sein und es käme

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e \cos v}{p}. \tag{6a}$$

Die störenden Kräfte selbst hängen aber von der relativen Stellung des gestörten und des störenden Körpers, also von den Oertern der beiden Körper in ihren Bahnen ab; diese sind gegeben durch ihre Radienvectoren und ihre wahren Längen und Breiten, welche von der Zeit abhängen. Diese selbst kann als bestimmendes Element eingeführt werden, oder an deren Stelle die wahre Anomalie v des gestörten Himmelskörpers, durch welche jeder einem gegebenen Orte entsprechende Zeitmoment bestimmt ist. Für die Methode von CLAIRAUT ist es nun nothwendig, dass alle veränderlichen Grössen durch v ausgedrückt werden, wodurch man aber zu Ausdrücken sehr complicirter Natur geführt wird. Es ist ja $v - M = a \sin M + b \sin 2M \ldots$ der Ausdruck der Mittelpunktsgleichung für den gestörten Himmelskörper. Hieraus ergiebt sich M als periodische Function von v, welche z. B. in den Ausdruck $v_1 = M_1 + a_1 \sin M_1 + b_1 \sin 2M_1 + \ldots$ des störenden Himmelskörpers substituirt, v_1 durch v bestimmt. Ferner enthält Ω aber, wie später gezeigt wird[1]), auch die Radienvectoren in verschiedenen Potenzen und in verschiedenen Combinationen mit den Sinus und Cosinus der wahren Anomalien, sodass man im Allgemeinen durch die Entwickelung ein Aggregat

$$\Omega = A \cos mv + B \cos nv + C \sos qv + \ldots$$

erhält. Betrachtet man einen dieser Ausdrücke, z. B. den ersten von m abhängigen[2]), so wird

$$\Delta_m = A \sin v \int \cos mv \cos v \, dv - A \cos v \int \cos mv \sin v \, dv$$

$$= \tfrac{1}{2} A \sin v \int [\cos (m+1)v + \cos (m-1)v] \, dv - \tfrac{1}{2} A \cos v \int [\sin (m+1)v - \sin (m-1)v] \, dv$$

$$= \tfrac{1}{2} A \sin v \left[\frac{\sin (m+1)v}{m+1} + \frac{\sin (m-1)v}{m-1} + c\right] + \tfrac{1}{2} A \cos v \left[\frac{\cos (m+1)v}{m+1} - \frac{\cos (m-1)v}{m-1} + C\right.$$

Soll das Integral so bestimmt werden, dass Δ_m und $\frac{d\Delta_m}{dv} = 0$ ist für $v = 0$, so wird

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1} + C = 0, \qquad \text{daher} \qquad C = \frac{2}{m^2 - 1}$$

und wie man nach Ausführung der Differentation findet, $c = 0$.

Vereinigt man das erste und dritte, und ebenso das zweite und vierte Glied, so wird

$$\Delta_m = \tfrac{1}{2} A \frac{\cos mv}{m+1} - \tfrac{1}{2} A \frac{\cos mv}{m-1} + \frac{A \cos v}{m^2 - 1} = \frac{A}{m^2 - 1} \cos v - \frac{A}{m^2 - 1} \cos mv.$$

daher

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\left(e - \frac{A}{m^2 - 1} - \frac{B}{n^2 - 1} - \ldots\right) \cos v - \frac{A \cos mv}{p(m^2 - 1)} - \frac{B \cos nv}{p(n^2 - 1)} - \ldots \tag{7}$$

[1]) S. »Mechanik des Himmels«.

[2]) Nach dem Satze $\varkappa$ pag. 111 ist diese Zerlegung möglich, denn man kann A, B, C als Constante ansehen.

Aus dieser Gleichung zieht CLAIRAUT sofort die folgenden beiden fundamentalen Folgerungen[1]):

I. Wenn in den störenden Kräften Glieder mit $\cos v$ ($m = 1$) vorkommen, sodass auch in Ω ein solches auftritt, so würde wegen des Nenners $m^2 - 1 = 0$ diese Integrationsmethode unbrauchbar. Es wird aber dann das hieraus entstehende Glied in Δ:

$$\Delta_1 = A \sin v \int \cos^2 v\, dv - A \cos v \int \sin v \cos v\, dv$$
$$= \frac{A}{2} \sin v \int (1 + \cos 2v) dv - \frac{A}{2} \cos v \int \sin 2v\, dv$$
$$= \frac{A}{2} v \sin v + \frac{A}{2} \sin v \left(\frac{\sin 2v}{2} + C\right) + \frac{A}{2} \cos v \left(\frac{\cos 2v}{2} + C\right)$$

und wie früher $c = 0$ und $C = -\frac{1}{2}$ und damit

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2} A v \sin v \tag{7a}$$

Es tritt demnach v nicht nur als Argument von Sinus- und Cosinusfunctionen auf, sondern auch ausserhalb derselben, und es würde in Folge des Gliedes $\frac{1}{2} A v \sin v$ der Werth von Δ, also auch $1 : r$ mit wachsenden Werthen von v, also nach einer grösseren Reihe von Umläufen scheinbar immer wachsende Werthe erlangen. Diese Schwierigkeit hat CLAIRAUT dadurch gehoben, dass er für $1 : r$ sofort den Werth annahm

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k \cos mv}{p}. \tag{8}$$

Setzt man diesen Werth ein und entwickelt in der angedeuteten Weise, so zeigt sich, dass das Hauptglied (das Glied mit dem grössten Coëfficienten) in Ω ebenfalls von $\cos mv$ abhängt, während die übrigen (von nv, qv . . . abhängigen) Glieder wesentlich kleinere Coëfficienten B, C . . . erhalten. Damit aber die Gleichung (7) mit dem angenommenen Werthe (8) übereinstimmt, darf ein Glied mit $\cos v$ nicht vorkommen, daher muss man

$$e - \frac{A}{m^2 - 1} - \frac{B}{n^2 - 1} - \ldots = 0 \tag{9}$$

setzen, was ja immer möglich ist, da in diesen Coëfficienten eine vorerst unbestimmte Integrationsconstante c enthalten ist, deren Bestimmung eben aus den übrigen Bedingungen der Aufgabe vorzunehmen ist. Die Gleichung (7) nimmt dann die Form an

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{A \cos mv}{p(m^2 - 1)} + \frac{B \cos nv}{p(n^2 - 1)} + \ldots \tag{10}$$

und durch Vergleichung mit (8) ersieht man zunächst, dass

$$k = \frac{A}{1 - m^2} \tag{11}$$

ist, dass aber ausserdem noch Zusatzglieder, welche von anderen Vielfachen von v abhängen, in r auftreten. Es wurde aber bereits erwähnt, dass die Coëfficienten B, C . . . wesentlich kleiner sind als A, und dass, wenn nunmehr der Werth (10) an Stelle von (8) in den Ausdruck für Ω substituirt wird, in diesem die Coëfficienten A, B . . . durch die Zusatzglieder etwas geänderte Werthe annehmen, sie seien A', B', C' . . ., dass aber auch neue Glieder $L \cos lv$ . . . auftreten müssen, weil es vorkommen kann und wird, dass die in Ω vorher enthaltenen Glieder, z. B. mit $\cos qv$ mit einem in $1 : r$ enthaltenen Gliede $\cos nv$

---

[1]) Dieselben sind hier, da sie die sämmtlichen folgenden Arbeiten beherrschen, sofort in der Ausführlichkeit dargelegt, welche das Verständniss der bei den Problemen der theoretischen Astronomie auftretenden Schwierigkeiten erfordert.

multiplicirt werden[1]). Hierdurch werden auch die Coëfficienten $\frac{A}{1-m^2}\ldots$ in $1:r$ etwas geändert, und die in Ω neu auftretenden Glieder erzeugen abermals in $1:r$ neue Glieder.

Genau dasselbe gilt auch für den Ausdruck der zu einem gewissen Werthe von v gehörigen Zeit, welche sich in der Form ausdrückt,

$$t - t_0 = \int f(r, v)\, dv. \tag{12}$$

Wird für r sein Wert substituirt, so erhält man durch die Integration die zu einem gegebenen Werthe von v gehörige Zeit; wird für r ein etwas geänderter Werth substituirt, so wird selbstverständlich auch t etwas geändert, und es frägt sich, welches ist denn der wahre Werth? Das eingeschlagene Verfahren ist nämlich, wie man sieht, eigentlich endlos: man hat immer den zuletzt erhaltenen Werth von $1:r$ in die analytische Entwickelung von Ω einzusetzen, in welchem die r in verschiedenen positiven und negativen Potenzen auftreten; aber da auch der Radiusvector des störenden Himmelskörpers hierin auftritt, dieser aber natürlich auch ein anderer ist, wenn er zu einer anderen Zeit gehört, der Ausdruck der Zeit selbst aber nach jeder Operation etwas geändert erscheint, so wird man eben auch stets den zuletzt erhaltenen Werth der zu einem gewissen Werth von v gehörigen Zeit in Betracht zu ziehen haben.

Für die Anwendbarkeit dieser Methode ist daher eine wesentliche Bedingung zu erfüllen: wenn die in Gleichung (10) und (12) bei einer Wiederholung der Operationen auftretenden Zusatzglieder von derselben Ordnung (d. h. von derselben Grösse) sind, wie die bereits früher vorhandenen, so ist die Methode unanwendbar, denn die erhaltenen Ausdrücke bleiben stets unvollständig und daher unrichtig. Wenn aber die nach und nach erscheinenden Zusatzglieder immer kleiner werden, so werden die späteren Glieder endlich so klein, dass sie vernachlässigt werden können; die Reihen für $1:r$ und t sind convergent, es erscheinen schliesslich so unmerkliche Correctionen der Zeit, dass es gleichgültig bleibt, ob man den Werth des Radiusvectors des störenden Planeten für die Zeit t oder die neuerlich verbesserte Zeit $t + \Delta t$ entnimmt; die Correction von $1:r$ wird ebenfalls so klein, dass das hieraus in Ω auftretende Zusatzglied unbedenklich vernachlässigt werden kann, und das in $1:r$ und in der Zeit auftretende neue Zusatzglied noch kleiner wird u. s. w.

Tritt dieser Fall einer convergenten Entwickelung in dem Weltsystem auf? Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Man rechnet die Störungen eines Planeten durch die übrigen Planeten. Jede Kraft ist proportional der Masse des anziehenden Körpers; die Anziehung der Sonne ist proportional ihrer Masse, diejenige der Planeten (eben die störende Kraft) proportional deren Massen. Die Masse des mächtigsten Planeten, Jupiter, ist aber nicht einmal der tausendste Theil der Sonnenmasse, es tritt demnach in Ω der kleine Faktor m (die Planetenmasse in Einheiten der Sonnenmasse) auf; jedes Zusatzglied in $1:r$ und t wird daher in Ω mit m multiplicirt erscheinen, und das dadurch in $1:r$ und t auftretende Zusatzglied wird im Allgemeinen in demselben Maasse verkleinert: Die Entwickelung ist im Allgemeinen convergent.

b) Für den Mond tritt allerdings als störende Kraft die Anziehung der Sonne ein; die Sonnenmasse ist nun freilich mehr als 300000 Mal grösser als die Erdmasse, allein hier tritt als Coëfficient die dritte Potenz des Verhältnisses

---

[1]) z. B. aus einem Ausdruck $\frac{1}{r} \cos qv$.

der Entfernungen $(\frac{1}{400})^3$ hinzu[1]), sodass die störende Kraft etwas mehr als $\frac{1}{100}$ der Anziehung der Erde auf den Mond beträgt; die Entwickelung erscheint demnach ebenfalls convergent.

Es ist jedoch besonders hervorzuheben, dass im ersten Falle die Entwickelung im Allgemeinen convergent ist, und dass sie im zweiten Falle convergent erscheint. Um dieses näher zu erörtern, muss zunächst die Bedeutung der Gleichungen (6a) und (7) einerseits, und (8) und (10) andererseits discutirt werden.

Die Gleichung 6a kann geschrieben werden

$$r = \frac{p}{1 - e \cos v}$$

und stellt die Gleichung einer Ellipse dar, für welche $p = a(1 - e^2)$ der Parameter ist, wenn a die halbe grosse Axe und e die Excentricität ist. Die in (7) auftretenden Zusatzglieder werden, wenn die Form (6a) der Rechnung zu Grunde gelegt wird, im allgemeinen kleine Coëfficienten $A, B, C \ldots$ von der Ordnung der störenden Massen geben, weil eben der grösste Coëfficient, welcher von der Attraction des Centralkörpers herrührt, als Coëfficient von $\cos v$ auftritt. Legt man aber diese Form zu Grunde, so werden nothwendiger Weise Glieder von der Form (7a) auftreten, welche, da sie mit der Zeit unbeschränkt wachsen, als Seculargieder bezeichnet werden. Die Coëfficienten dieser Secularglieder sind aber, wenn es sich um die Untersuchung der Bahnen der Hauptplaneten handelt — und dies zeigt sich allerdings erst nach der Rechnung — so klein, dass man für sehr lange Zeiträume hindurch, selbst für mehrere Jahrhunderte ein allzu bedeutendes Anwachsen nicht zu befürchten hat. Handelt es sich aber um die Bahn des Mondes, so werden die Verhältnisse nicht so günstig. Während in der ersten Näherung, wenn man in dem Ausdruck für Ω die Ausdrücke der elliptischen Bewegung für r und t substituirt, der Coëfficient (immer die Störungen durch Jupiter vorausgesetzt) etwa $\frac{1}{1000}$ werden wird, wird derselbe für den Mond, wie oben gezeigt etwa $\frac{1}{100}$. Substituirt man dann die erhaltenen um die Zusatzglieder, verbesserten Ausdrücke, so treten in Ω Zusatzglieder auf, welche m^2 also für die Planeten $(\frac{1}{1000})^2$, für den Mond $(\frac{1}{100})^2$ als Faktor enthalten. Diese Glieder, welche »von der zweiten Potenz der Massen« oder »von der zweiten Potenz der störenden Kräfte« sind, betragen also für den Mond etwa den zehnten Theil der Störungen erster Ordnung für die Planeten[2]). Da dann die Coëfficienten der Zusatzglieder in Ω, welche von $\cos v$ abhängig sind, sehr bedeutend würden, so wären die in $1 : r$ auftretenden, mit der Zeit anwachsenden Glieder viel zu gross, und würden in sehr kurzer Zeit, schon innerhalb weniger Jahre derart anwachsen, dass die Lösung völlig unbrauchbar würde. Man könnte fragen, wieso eine völlig fehlerfreie Berechnung ein derart falsches Resultat geben könne? Um diese Frage zu entscheiden, denke man sich die Entwickelung fortgeführt, den Ausdruck (7), vermehrt um die Glieder (7a), verwendet, in Ω substiuirt und neuerdings die Ausdrücke (6) berechnet; man wird dann ein Zusatzglied $A' v^2 \cos v$ finden, wird auch dieses berücksichtigt, so wird ein Glied $A'' v^3 \sin v$ erscheinen und die Gesammtheit der Glieder würde zusammengefasst:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k}{p}(\cos v + Nv \sin v + N' v^2 \cos v + N'' v^3 \sin v + \ldots) + \sum \frac{A \cos mv}{p(m^2 - 1)}$$

[1]) Es ist ja $\left(\frac{t}{T}\right)^2 = \left(\frac{a}{A}\right)^3 \left(\frac{M}{m}\right)$ s. pag. 114.

[2]) Numerisch werden die Verhältnisse noch viel ungünstiger, da noch andere Umstände zur Vergrösserung derselben mitwirken.

ergeben, wo an Stelle der verschiedenen periodischen Glieder nur eines mit dem Summenzeichen Σ davor angeschrieben ist, weches anzeigt, dass eine grössere Anzahl derartiger Glieder auftritt, in denen die Coëfficienten A und m immer andere werden. Die Reihe in der Klammer ist nun eine unendliche Reihe, die über alle Grenzen wachsen kann, die aber, wenn man die aufeinanderfolgenden Näherungen ausreichend genau durchführt, nicht unendlich wachsen, sondern gemäss den auftretenden Coëfficienten N, N', N'' ... von der Reihenentwickelung einer periodischen Function

$$\cos(v - \varsigma v) = \cos\varsigma + \varsigma v \sin v + \tfrac{1}{2}(\varsigma v)^2 \cos v + \ldots$$

nur um geringfügige Beträge abweichen wird, sodass man ebenso gut schreiben kann:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k}{p}\cos(v - \varsigma v) + \alpha v^2 \cos v + \ldots\ldots + \Sigma \frac{A\cos mv}{p(m^2-1)},$$

wobei nunmehr die Coëfficienten α, β ... wieder so kleine Beträge sind, dass man diese Form für mehrere Jahrhunderte zu Grunde legen kann. Eine derartige Zusammenfassung nach Ausführung der numerischen Operationen erfordert aber die sehr mühsame Durchführung der letzteren: die genaue Berechnung aller, oder aber einer sehr grossen Anzahl, aus denen sich die Gesetzmässigkeit der Aufeinanderfolge ergiebt. Weder der eine Weg noch der andere ist durchführbar. Legt man aber sofort die Form (8) zu Grunde, so werden wohl auch seculare Glieder auftreten können[1]), die aber dann so kleine Coëfficienten haben, und daher so langsam anwachsen, dass sie selbst für sehr lange Zeiträume keine störende Wirkung bei der Darstellung[2]) der wirklichen Bewegung durch die Formel mit sich bringen. Es handelt sich also darum, die Bedeutung und den Werth der Coëfficienten ς oder m festzustellen.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass $m = 1 - \varsigma$ ist. Die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 - k\cos(v - \varsigma v)} = \frac{p}{1 - k\cos(v - \omega)}$$

würde, wenn ω konstant wäre, eine Ellipse ausdrücken, deren Parameter p, deren Excentricität k ist, und bei welcher $v - \omega$ die wahre Anomalie, also wenn v die wahre von einem festen Punkte gezählte Länge ist, ω die Länge des Perigäums bedeutet. Ist aber $\omega = \varsigma v$, so deutet dieses an, dass das Perigäum in einer Bewegung begriffen ist, und zwar wenn ς positiv ist, in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers, und das Verhältniss der siderischen Bewegung der Apsiden zur siderischen Bewegung des Mondes ist $\frac{\omega}{v} = \varsigma = 1 - m$. Die Einführung der Formel (8) besagt daher, dass man der Rechnung sofort eine bewegliche Ellipse zu Grunde legt, deren Apsiden in einer Bewegung begriffen sind, welche bestimmt ist durch den Werth $1 - m = \varsigma$. Zur Bestimmung von ς dient sofort die Gleichung (11), in welcher k die aus der Beobachtung zu ermittelnde Excentricität der Mondbahn ist, und A sich aus der Entwickelung von Ω selbst ergiebt; es ist $1 - m^2 = \frac{A}{k}$.

In den aufeinander folgenden Näherungen wird sich, wie schon erwähnt, der Coëfficient A durch Einführung der im Laufe der Rechnung auftretenden Zusatzglieder ändern; es wird daher m selbst nach und nach Verbesserungen

---

[1]) Wenn bei den späteren Rechnungen z. B. Produkte der Form $\alpha\cos qv\cos qv$ auftreten.

[2]) Eine andere Frage ist es, ob diese analytische Form der Darstellung in der Natur der Sache gelegen ist, oder ob nicht überhaupt das Auftreten secularer Glieder zu vermeiden ist. S. hierüber »Mechanik des Himmels«.

erleiden, und das einzuschlagende Verfahren wird nur dann als brauchbar zu betrachten sein, wenn diese immer kleiner werden, wenn also das Verfahren convergirt. CLAIRAUT fand in der ersten Näherung $1 - m = 0{\cdot}004186$[1]), also wieder nur die Hälfte des wahren Werthes, dasselbe negative Resultat wie es NEWTON erhielt. Mit Berücksichtigung eines einzigen Gliedes der zweiten Näherung, welches den bedeutendsten Einfluss übt, erhält CLAIRAUT aber sofort $1 - m = 0{\cdot}00836$, und um die Rechnung nicht zu oft wiederholen zu müssen, führt er nunmehr in die Rechnung gleich den wahren, aus den Beobachtungen entlehnten Werth für m ein, d. h. er nimmt als erste Näherung den Ausdruck (8), in welchem k und m den Beobachtungen entnommen werden.

II. Wenn aber in dieser Weise eine wirklich convergente Entwickelung erzielt werden würde[2]), so ist noch zu untersuchen, ob von den Nennern $m^2 - 1$, $n^2 - 1$, $q^2 - 1$ nicht einer oder mehrere sehr klein werden können. In diesem Falle würden nämlich durch die Kleinheit der Integrationsdivisoren die, wenn auch sehr kleinen Coëfficienten von Ω wesentlich vergrössert erscheinen. Solche Glieder treten thatsächlich auf. In der Entwickelung von Ω[3]) kommen nämlich auch Produkte $\cos iv \cos i_1 v_1$ vor, wenn mit v_1 die wahre Länge des störenden Himmelskörpers bezeichnet wird, welche behufs der Integration in die Summen

$$\tfrac{1}{2} \cos (iv + i_1 v_1) + \tfrac{1}{2} \cos (iv - i_1 v_1)$$

umgesetzt werden müssen. Nun ist

$$v_1 = M_0' + \mu' t + G'; \qquad v = M_0 + \mu t + G,$$

wenn G', G bezw. die Mittelpunktsgleichungen des störenden und gestörten Himmelskörpers sind. Sieht man zunächst von diesen ab und benutzt nur die Hauptglieder, so wird

$$t = \frac{v - M_0}{\mu}; \qquad v_1 = M_0' + \mu' \frac{v - M_0}{\mu} = \left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu} M_0\right) + \frac{\mu'}{\mu} v,$$

folglich

$$iv \pm i_1 v_1 = \pm i_1 \left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu} M_0\right) + \left(i \pm i_1 \frac{\mu'}{\mu}\right) v$$

und es werden daher die früher mit $m, n, q \ldots$ bezeichneten Grössen $i \pm i_1 \frac{\mu'}{\mu}$. Es kann aber thatsächlich $i \pm i_1 \frac{\mu'}{\mu}$ nahe 1 werden, wenn $\pm i_1 \frac{\mu'}{\mu}$ nahe $i - 1$ wird.

---

[1]) Es ist $\varsigma = \frac{\omega}{v}$ und da $\omega = \frac{360°}{\tau}$, $v = \frac{360°}{t}$ ist, wenn τ die siderische Umlaufszeit des Perigäums, t diejenige des Mondes ist, so wird $\varsigma = \frac{t}{\tau} = \frac{27^d\,32}{3232} = 0{\cdot}008455$. Die Drehung des Perigäums zeigt sich schon aus der blossen Veränderlichkeit des Monddurchmessers.

[2]) Eine präcisere Definition des Begriffes der Convergenz, wie sie in neuerer Zeit von POINCARÉ gegeben wurde, s. unter »Mechanik des Himmels«.

[3]) Man hat sich dabei vor Augen zu halten, dass die störenden Kräfte von der gegenseitigen Lage des gestörten und störenden Himmelskörpers abhängen. Um diese Abhängigkeit wenigstens annähernd zu veranschaulichen, möge bemerkt werden, dass die Entfernung der beiden Himmelskörper gegeben ist durch

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos H,$$

wenn H der Winkel ESK (Fig. 41) ist, also von den Längen und Breiten (oder Bahnneigungen) abhängt. Es mag noch bemerkt werden, dass die auftretenden $n$ten Potenzen von ρ durch Reihenentwickelungen ersetzt werden müssen, und zwar

$$\rho^n = r^n \left[1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos H + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad \rho^n = r'^n \left[1 - 2\left(\frac{r}{r'}\right) \cos H + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}},$$

je nachdem $r' < r$ oder $r' > r$ ist.

Dies hängt daher von dem Verhältniss der mittleren Bewegungen der beiden betrachteten Himmelskörper ab. So ist z. B. für Jupiter und Saturn

$$\frac{\mu_j}{\mu_s} = 2{\cdot}485 \quad \text{daher} \quad 5 - 2\frac{\mu_j}{\mu_s} = 0{\cdot}030.$$

Clairaut hatte wohl die Bedeutung dieser Glieder bereits richtig erkannt und bemerkt, dass auf dieselben ein besonderes Augenmerk zu richten ist[1]). Nähere Entwickelungen darüber giebt er jedoch nicht; er bemerkt nur, dass das Auftreten der kleinen Integrationsdivisoren die Convergenz der Entwickelungen dadurch in Frage stellt, dass Glieder, welche analytisch von einer höheren Ordnung sind (etwa von der zweiten Potenz der Massen), numerisch stärker vergrössert werden (mit Gliedern von der ersten Potenz der Massen vergleichbar) und dass in den aufeinander folgenden Näherungen grössere und kleinere Glieder gemischt auftreten.

Für die Veränderungen von Knoten und Neigung verfolgt Clairaut die bereits von Newton eingeschlagene Methode[2]). Es ergaben sich unmittelbar die Formeln (3) und (4) pag. 110, in denen nur ω, ι, α durch $d\Omega$, di, dv zu ersetzen sind. Clairaut berücksichtigte jedoch in diesen Formeln auch schon die veränderlichen Glieder, wobei er aber, um die successiven Verbesserungen der Coëfficienten durch die aufeinander folgenden Näherungen zu umgehen, nachdem die Form der Glieder bekannt ist, diese Glieder mit unbestimmten Coëfficienten α, β, γ . . . multiplicirt, einführt. Es wird also angenommen:

$$\Omega = \Omega_0 + \omega v + \alpha \cos mv + \beta \cos nv + \gamma \cos qv \ldots;$$

wird dieser Ausdruck differenziirt und in die Gleichung

$$d\Omega = F(r, r', \ldots)\, dv$$

eingesetzt, so muss die Gleichung identisch erfüllt sein, d. h. es müssen die Coëfficienten von $\cos mv$, $\cos nv$ . . . auf beiden Seiten dieselben werden, woraus sich Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten α, β, γ . . . ergeben.

Die Methode von d'Alembert ist von der Clairaut'schen nur wenig verschieden. Die zu integrirende Differentialgleichung ist im Wesen den Differentialgleichungen (D) (Mechanik des Himmels) entnommen; bei der Bestimmung der Reihe für $1 : r$ sucht er zunächst die Form der Argumente, und setzt dann die Coëfficienten der einzelnen Cos-Functionen, ebenso aber den Coëfficienten $m = 1 - \varsigma$ als unbekannt voraus. Als ein Vortheil dieser Methode kann es angesehen werden, dass hierbei auch m sich aus der Rechnung selbst ergiebt, dass daher die Bewegung der Apsiden nicht den Beobachtungen entlehnt zu werden braucht. Dass dies wesentlich ist, ersieht man aus dem Folgenden: Zur Störungsrechnung sind jederzeit gewisse Grundlagen der Beobachtung zu entnehmen, und man könnte allerdings glauben, dass es, sowie es gestattet ist, die mittlere Bewegung des Mondes, die Neigung u. s. w. als aus der Beobachtung zu entnehmende Daten zu behandeln, es ebenso gestattet sein müsste, die Bewegung der Knoten, der Apsiden als beobachtete Grössen zu behandeln. Dem ist aber keinesfalls so: Legt man elliptische Elemente zu Grunde und bestimmt die Störungen, welche diese Elemente selbst oder die aus denselben abgeleiteten Radienvectoren und wahren Anomalien oder auch andere, beliebige, z. B. rechtwinklige Coordinaten erfahren, so wird man stets nur sechs Elemente, welche

[1]) l. c. pag. 12 und 56.

[2]) S. pag. 108.

als Bahnelemente bezeichnet werden, einzuführen haben; jedes andere, der Beobachtung entnommene Element muss als überzählig bezeichnet werden[1]).

EULER geht in seinen Untersuchungen von 1753 von den Differentialgleichungen (A) [M. d. H.[2])] aus. Ist s der Weg, also nach bekannten Sätzen der Mechanik $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2s}{dt^2}$ die Beschleunigung, so muss diese gleich der in dieser Richtung wirkenden Componente der beschleunigenden Kraft P sein. Da Kräfte ebenso wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Componenten zerlegt werden, so hat man in drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen die drei Componenten

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Aus diesen drei Gleichungen[3]) leitet er durch Coordinatentransformation (rein analytisch) die Formeln (3), (4) pag. 123 und (3) (4) pag. 110 ab, welcher Weg auch noch jetzt zu diesem Behufe eingeschlagen wird. Auch die Entwickelung der störenden Kräfte ist im Princip die noch jetzt übliche (s. M. d. H.). In einem jedoch unterscheidet sich sein Verfahren hiervon: durch die Art wie er das NEWTON'sche Gesetz a posteriori erweisen will. Zu diesem Behufe nimmt er an, dass das NEWTON'sche Attractionsgesetz noch einer Correctur bedürfe und schreibt dasselbe daher in der Form $M\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{h^2}\right)$, wobei das Glied $\frac{1}{h^2}$, welches den Fehler desselben anzeigt, für geringe Aenderungen von r, wie dieselben bei schwach excentrischen Bahnen auftreten, als constant angesehen werden kann, weshalb es auch nur bei der Einwirkung der Erde auf den Mond berücksichtigt, hingegen in der störenden Kraft der Sonne vernachlässigt wird, weil dasselbe in der Wirkung auf Mond und Erde sich fast völlig aufheben wird. Nun kann das Verhältniss $1 + \varsigma$ der siderischen Bewegung des Mondes zur Bewegung seiner Anomalie aus den Beobachtungen eingeführt werden, denn unter Zugrundelegung derselben ergiebt sich dann der Werth $\frac{1}{h^2}$. Ist derselbe so klein, dass er unbedenklich vernachlässigt werden kann, so ist das NEWTON'sche Gesetz als richtig anzusehen. EULER hält diesen Beweis für erbracht, er findet $\frac{\mu}{n^2} = 0{\cdot}00067$[4]) wobei $\mu = \frac{♁ + ☾}{\odot} \cdot \frac{A^3}{ah^2}$ (a, A die Bahnhalbmesser, $\odot$, ♁, ☾ die Massen der durch diese Symbole bezeichneten Körper), und $n = 13\frac{1}{4}$ das Verhältniss der Bewegungen der Anomalien von Sonne und Mond, also $n^2 = 175{\cdot}7$ ist. Daraus folgt

---

[1]) Ausgenommen die Masse, welche stets als 7. Element auftritt, aber aus der Störungsrechnung für den gestörten Körper nicht ermittelt werden kann. Sollten andere als elliptische Elemente zu Grunde gelegt werden, wie dieses in neuerer Zeit geschieht, so kann die Zahl der der Beobachtung zu entnehmenden Elemente dennoch nicht vermindert oder vermehrt werden, weil die Elemente eben nichts anderes sind, als Integrationsconstanten, welche, da man es stets mit 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu thun hat, nur in der Zahl von 6 auftreten können.

[2]) Der Kürze halber wird im folgenden durch »*M. d. H.*« auf den Artikel »Mechanik des Himmels« verwiesen.

[3]) EULER hat hier rechts den Factor $\frac{1}{2}$; da er jedoch später an Stelle der Zeit die mittlere Bewegung der Sonne mit Hilfe der analogen Formeln für die Sonnenbewegung einführt, so fällt dieser Faktor heraus.

[4]) l. c. pag. 86.

$$\frac{A^2}{h^2} = \left(\frac{a}{A}\right) \frac{\odot}{♁ + ☾} \cdot n^2 \cdot 0{\cdot}00067.$$

Die aus dem Zusatzgliede $\frac{1}{h^2}$ entstehende störende Wirkung der Anziehung der Erdmasse wäre

$$\frac{♁}{h^2} = \frac{\odot}{A^2} \left(\frac{a}{A}\right) n^2 \cdot 0{\cdot}00067 = \frac{\odot}{A^2} \frac{175{\cdot}7}{400} \cdot 0{\cdot}00067 = 0{\cdot}000293 \frac{\odot}{A^2},$$

daher etwa $\frac{3}{10000}$ der von der Sonne herrührenden störenden Kraft $\frac{\odot}{A^2}$ [1]).

Euler bedient sich zur Integration ebenfalls der Methode der unbestimmten Coëfficienten; er setzt zwar nicht die gesuchten Grössen: Radiusvector, mittlere oder wahre Anomalie, Perihelbewegung als Reihen mit bekannten Argumenten und unbestimmten Coëfficienten voraus, sondern er nimmt solche Reihen für gewisse Hilfsgrössen an, was aber an der Methode selbst nichts ändert, sondern nur ihre Anwendung in etwas erleichtert[2]). Euler hatte auf Grund der erhaltenen Formeln Mondtafeln gerechnet; allein in theoretischer Beziehung scheinen ihn die Resultate nicht befriedigt zu haben. In einem Additamentum giebt er eine zweite Mondtheorie, in welcher er die Gleichungen (3) (4), pag. 123, durch andere ersetzt. Er findet für r den Ausdruck $r = \frac{p}{1 - e \cos v}$, wobei v die wahre Anomalie, gezählt von einem veränderlichen Apogäum ist, wobei aber auch der gestörte Radiusvector durch dieselbe Formel erhalten wird, wenn nur p und e als veränderlich angesehen werden. Die Differentialgleichungen für p und e werden aus der Bedingung abgeleitet, dass r für $v = 0$ und $180°$ ein Maximum bezw. ein Minimum sein soll, d. h. dass $\frac{dr}{dv}$ für $v = 0$ und $180°$ verschwinden soll, demnach den Faktor $\sin v$ haben müsse. Es treten demnach in dieser zweiten Mondtheorie bereits 5 veränderliche Elemente: Knoten, Neigung, Parameter, Excentricität und Länge des Apogäums auf. Diese Methode, die Elemente eines Himmelskörpers als veränderlich anzusehn, und ihre Aenderungen (Störungen) so zu bestimmen, dass aus den für irgend einen Moment gültigen (instantanen) Elementen der Ort des Himmelskörpers für diesen Moment so berechnet werden kann, als ob die Elemente unveränderlich wären, nennt man die »Methode der Variation der Constanten« oder »Berechnung der Störungen der Elemente«[3]). Bezüglich der Durchführung der Operationen mag noch erwähnt werden, dass Euler auch hier die Methode der unbestimmten Coëfficienten anwandte, nachdem er die Form der Argumente durch die Substitution der elliptischen Elemente in den Werth von Ω und eine vorläufige Integration festgestellt hatte; end-

---

[1]) Zu den Argumenten der Evection und Variation würden hiermit die Coëfficienten der von h^2 herrührenden Glieder bezw. $1''{\cdot}5$ und $0''{\cdot}7$ sein, welche damals wohl belanglos waren, heute jedoch nicht mehr zu vernachlässigen wären.

[2]) Dies setzt immerhin bereits die Kenntniss der Form der Argumente voraus. Völlig unentschieden bleibt dabei, ob bei einer geänderten Methode nicht andere Argumente eintreten bezw. ob nicht die Glieder mit den kleinen Integrationsdivisoren wegfallen. Die Methode der unbestimmten Coëfficienten hat in etwas modificirter Form in neuester Zeit G. B. Airy benutzt (Numerical Lunar Theory) unter Zugrundelegung der von Delaunay in seiner Mondtheorie aufgestellten Glieder.

[3]) Ein wesentlicher Vortheil dieser Methode besteht darin, dass an Stelle von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung sechs Differentialgleichungen erster Ordnung treten (S. M. d. H.).

lich ist noch zu erwähnen, dass auch hier EULER ein Glied $\frac{1}{r^2}$ einführt, welches die Correction des NEWTON'schen Attractionsgesetzes darstellt, und für welches sich auch hier ein verschwindender Werth ergiebt[1]).

Man hat, wie schon wiederholt angeführt wurde, sechs Elemente zur Verfügung, hingegen ist der Ort des Himmelskörpers durch drei rechtwinkelige oder polare Coordinaten, z. B. seine Länge, seine Breite und seinen Radiusvector völlig bestimmt. Man kann daher die Veränderlichkeit dieser sechs Elemente verschieden bestimmen. Es wird dies sofort klar, wenn man z. B. die Bahnlage für sich allein betrachtet. Man kann durch einen gegebenen Punkt des Raumes unendlich viele Ebenen so legen, dass sie durch den Sonnenmittelpunkt gehen. Nimmt man für dieselben die Knotenlinie an, so ist dadurch die Neigung mit bestimmt, und wenn man durch die aufeinander folgenden Punkte, welche ein Himmelskörper nach und nach einnimmt, verschiedene Ebenen legt, und z. B. die Bewegung der Knotenlinie einem gewissen beliebigen Gesetz unterwirft, so wird dadurch das Gesetz der Neigungsänderung mit bestimmt sein. Dasselbe gilt von der Lage und Grösse der Ellipse selbst; in der instantanen Bahnebene kann man unendlich viele Ellipsen legen, welche durch den instantanen Ort des Planeten gehen, sodass der Sonnenmittelpunkt Brennpunkt der Ellipse sei. Man kann z. B. den Mittelpunkt der Ellipse beliebig irgendwo annehmen, und damit die Grösse der Excentricität und die Richtung der Apsidenlinie festlegen; da aber damit auch der zweite Brennpunkt bekannt wird (in derselben Entfernung vom Mittelpunkte auf der anderen Seite), so ist die grosse Axe mit bestimmt (gleich der Summe der Leitstrahlen des instantanen Planetenortes), damit auch die Umlaufszeit, die mittlere tägliche, siderische Bewegung, welche im Vereine mit der aus der Richtung der Apsiden bekannten wahren Anomalie die Zeit des Durchganges durch das Perihel oder aber die mittlere Anomalie zu einer gegebenen Zeit bestimmt.

Unter allen möglichen, wie man sieht, völlig willkürlichen Vertheilungen der Bahn verdient eine ein besonderes Interesse, nämlich diejenige, welche nicht nur durch den gegebenen Ort, sondern auch durch die gegebene Richtung und Geschwindigkeit bestimmt ist, sodass sie, im Sinne der Infinitesimalrechnung gesprochen, durch 2 consecutive Punkte des Körpers gelegt erscheint. Diese Ellipse ist eindeutig bestimmt, sie ist unter allen anderen diejenige, welche sich der wahren Laufbahn des Himmelskörpers am meisten anschliesst und wird deshalb die »osculirende Bahn« genannt. Man sieht sofort aus Fig. 40, dass die von NEWTON, CLAIRAUT und EULER angenommene Bestimmung von Knoten und Neigung einer osculirenden Ebene angehört[2]).

Um auch für die übrigen Elemente den Einfluss der störenden Kräfte auf elementarem Wege zu bestimmen, schlägt LAGRANGE den folgenden Weg[3]) ein.

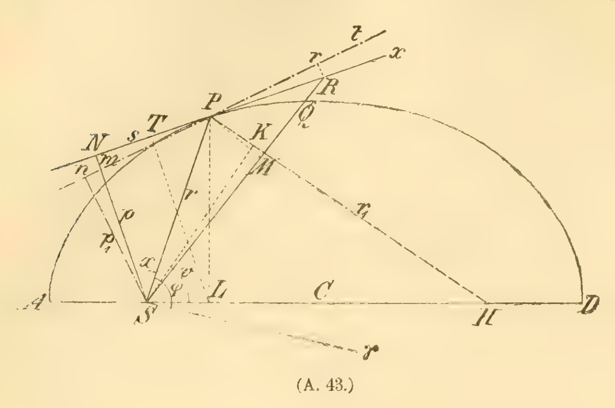
---

[1]) l. c., pag. 310.

[2]) Ihre Vollendung erhielt die bereits von NEWTON, CLAIRAUT, EULER, begründete Methode erst von LAGRANGE. Dass auch die von EULER eingeführten p und e osculirende Elemente sind, ersieht man leicht durch Vergleichung der Formeln.

[3]) Nouveaux mémoires de Berlin 1786. JOSEPH LOUIS LAGRANGE, geb. 25. Januar 1736 zu Turin, ursprünglich mehr mit philosophischen Studien beschäftigt, wurde dennoch schon in seinem 19. Jahre Professor der Mathematik an der Artillerieschule in Turin, wo er mit einigen näheren Freunden bald eine Privatgesellschaft gründete, aus welcher später die Turiner Academie hervorging. 1759 wurde er Mitglied der Berliner Academie und 1766 nach dem Abgange EULER's von FRIEDRICH II. als Präsident der Academie nach Berlin berufen, wo er bis 1786

Sei S (Fig. 43) der Centralkörper, P der Ort des Himmelskörpers, bestimmt durch seinen Radiusvector r und seine wahre Länge φ, Px die Richtung seiner Bewegung, und c seine Geschwindigkeit in dieser Richtung, $PR = c\tau$ der Weg in dem kleinen Zeittheilchen τ; in demselben fällt aber der Körper um das Stück $RQ = q$ gegen S hin, und es ist nach pag. 102 $RQ = \frac{2f^2}{L}\,\frac{1}{r^2}$, wenn f die Fläche PRS und $2L$ der Parameter der Ellipse ist. Die Richtung der Bewegung in dem Punkte P



(A. 43.)

ist bestimmt durch das auf die Tangente gefällte Perpendikel $SN = p$, da hiermit auch der Winkel x zwischen r und p durch $\cos x = p : r$ und somit die Lage dieses Perpendikels durch den Winkel $\varphi + x$ bestimmt ist. Dann ist:

$$f = \frac{1}{2}\,c\tau p \qquad q = \frac{c^2\tau^2 p^2}{2Lr^2}.$$

Es ist aber

$$q = P\tau^2 = k\,\frac{M}{r^2}\,\tau^2$$

wenn P die Anziehungskraft des Punktes S ist, dessen Masse gleich M vorausgesetzt wird, folglich

$$k\,\frac{M}{r^2}\,\tau^2 = \frac{c^2 p^2}{2Lr^2}\,\tau^2 \quad \text{und daraus} \quad L = \frac{c^2 p^2}{2kM}.$$

Sei die Sonnenmasse M_0, die auf die kreisförmig gedachte Erdbahn bezüglichen Grössen $L_0 = p_0 = a_0$, c_0, so wird ebenfalls

$$a_0 = \frac{c_0^2\,a_0^2}{2kM_0}, \quad \text{demnach} \quad \left(\frac{L}{a_0}\right) = \frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\left(\frac{p}{a_0}\right)^2}{\frac{M}{M_0}}.$$

Drückt man demnach alle Längen in Einheiten der Erdbahnhalbaxe, die Masse des Centralkörpers in Einheiten der Sonnenmasse und die Geschwindigkeit desselben in Einheiten der mittleren Erdgeschwindigkeit aus, so wird einfach

$$L = \frac{c^2 p^2}{M} \tag{a}$$

womit der Parameter der Bahn bestimmt ist. In diesen Einheiten wird demnach $q = \frac{M}{r^2}\,\frac{\tau^2}{2}$. Es ist aber[1])

---

blieb. In diesem Jahre ging er nach Paris wo ihm die Königin ANTOINETTE eine Wohnung im Louvre einräumte. Doch zog er sich vom geselligen Leben fast völlig zurück, sodass er in den Schreckenszeiten der Revolution wenig beachtet und daher unangefochten blieb. Er starb am 10. April 1813.

[1]) Fällt man von P das Perpendikel PL und von L das Perpendikel $LT = p'$ auf die Tangente, so sind CL, LP die Coordinaten x, y, bezogen auf die Hauptaxen a, b. Der Winkel $PLT = \alpha$ ist gleich dem Neigungswinkel der Tangente gegen die grosse Axe also bestimmt durch $\tang \alpha = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, und es ist

$$\frac{p}{b} = \sqrt{\frac{r}{r_1}},$$

demnach

$$\frac{p^2}{aL} = \frac{r}{2a-r}; \qquad aL = \frac{2a-r}{r} p^2$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{L}{p^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{c^2}{M}. \tag{b}$$

Diese Gleichung bestimmt die grosse Axe. Aus derselben lassen sich noch einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Es ist

$$c = \sqrt{M}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}.$$

Ist demnach die Geschwindigkeit eines Himmelskörpers in der Entfernung r gleich $c_1 = \sqrt{M}\sqrt{\frac{2}{r}}$, so muss $a = \infty$ sein, die Bahn ist eine Parabel; ist die Geschwindigkeit $c_1 < \sqrt{M}\sqrt{\frac{2}{r}}$, so muss $\frac{1}{a}$ positiv sein, die Bewegung findet in einer Ellipse statt; ist $c_1 > \sqrt{M}\sqrt{\frac{2}{r}}$, so muss $\frac{1}{a}$ negativ sein, die Bahn wird eine Hyperbel. Es folgt daraus, dass die Form der Bahn nicht von der Richtung, sondern nur von der Geschwindigkeit in einer gegebenen Entfernung vom Centralkörper abhängt.

Ist v die wahre Anomalie des Punktes P, so wird man nunmehr aus dem Dreieck SHP, in welchem H der zweite Brennpunkt, also $SH = 2ae$ ist, finden

$$\begin{aligned} 2ae \sin v &= (2a - r) \sin 2x \\ 2ae \cos v &= r - (2a - r) \cos 2x. \end{aligned} \tag{a}$$

Da ferner $2a - r = ar\frac{c^2}{M}$ ist, so wird, wenn der Einfachheit wegen $\sqrt{r^2 - p^2} = s$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} 2ae \sin v &= \frac{2arc^2}{M} \cdot \frac{ps}{r^2} \\ 2ae \cos v &= r - \frac{arc^2}{M} \cdot \frac{p^2 - s^2}{r^2} \end{aligned} \quad \text{daher} \quad \begin{aligned} e \sin v &= \frac{ps}{r}\frac{c^2}{M} \\ e \cos v &= 1 - \frac{c^2 p^2}{Mr} \end{aligned} \tag{c}$$

und die Lage der Apsiden ist dann durch $\varphi - v$ bestimmt. Endlich ist die zur wahren Anomalie v gehörige mittlere Anomalie leicht bestimmt, d. h. die mittlere Anomalie zu einer gegebenen Epoche.

Wirkt nunmehr in dem Punkte P eine Kraft, welche die elliptische Bahn des Körpers zu verändern sucht, so möge diese in drei Componenten zerlegt werden, von denen die eine T in der Richtung der Tangente, die zweite V in der Bahnebene senkrecht zur Tangente, und die dritte U senkrecht zur Bahnebene wirkt. Die letztere wird nur die Lage der Bahnebene verändern, nicht aber die Bahn selbst, für diese sind daher nur die beiden ersten zu berücksichtigen.

$$p' = y \cos\alpha = \frac{a^2 y^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} = \frac{b}{a}\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}},$$

wenn e die numerische Excentricität also $ae = CS$ ist. Es ist aber

$$\frac{p' - p}{ae - x} = \frac{p'}{Subtang} = \frac{p' x}{a^2 - x^2}; \qquad p = p'\left[1 + \frac{(x - ae)x}{a^2 - x^2}\right] = p'\frac{a^2 - aex}{a^2 - x^2},$$

folglich

$$p = \frac{b}{a}\frac{a^2 - aex}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}} = b\frac{a - ex}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}} = b\sqrt{\frac{a - ex}{a + ex}} = b\sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

Drückt man die Kraft P und ihre Componenten T, V, U in Einheiten der Anziehung von S aus (mit anderen Worten, bedeuten T, V, U die Verhältnisse der störenden Kraft zu der die elliptische Bewegung bewirkenden Centralkraft), so sind die in Folge der beiden Componenten T, V in dem Zeittheilchen τ zurückgelegten Wege

$$Rr = Vq, \qquad rt = Tq$$

und die neue Bewegungsrichtung wird demnach nPt; das Perpendikel p geht über in p_1 und es handelt sich darum aus der neuen Bewegungsrichtung und Tangentialgeschwindigkeit

$$c_1 = \frac{Pt}{\tau} = \frac{c\tau + Tq}{\tau} = c + \frac{Tq}{\tau},$$

die durch die Kräfte T, V bewirkten Aenderungen in den Elementen zu erhalten. Es ist zunächst

$$p_1 = p - Nm = p - \frac{rR \cdot NP}{PR} = p - s\,\frac{Vq}{c\tau}.$$

Der neue Parameter wird daher

$$L_1 = \frac{1}{M}\left(c + \frac{Tq}{\tau}\right)^2\left(p - s\,\frac{Vq}{c\tau}\right)^2$$

folglich, wenn man die Quadrate der sehr kleinen Incremente vernachlässigt

$$L_1 - L = \frac{1}{M}\left(\frac{2Tqp^2c}{\tau} - \frac{c^2 \cdot 2Vqps}{c\tau}\right) = \frac{2qpc}{M\tau}\,(Tp - Vs).$$

Bezeichnet man die Aenderungen der Elemente durch d, sodass z. B. $dL = L_1 - L$ ist, so hat man

$$dL = \frac{pc}{r^2}(Tp - Vs)\tau.$$

Weiter wird

$$\frac{1}{a_1} = \frac{2}{r} - \frac{1}{M}\left(c + \frac{Tq}{\tau}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{c^2}{M} - \frac{2Tqc}{M\tau} = \frac{1}{a} - \frac{Tc}{r^2}\tau.$$

$$d\frac{1}{a} = -\frac{Tc}{r^2}\tau. \tag{e}$$

Wie man sieht handelt es sich hier, da man nur erste Potenzen der Aenderungen zu berücksichtigen braucht, um differentielle Aenderungen, und man erhält daher in derselben Weise für die kleine Zeit $\tau = dt$:

$$dp = -M\frac{Vs}{2cr^2}\tau; \quad ds = +M\frac{Vp}{2cr^2}\tau; \quad d\left(\frac{c^2}{M}\right) = \frac{Tc}{r^2}\tau.$$

$$\sin v\,de + e\cos v\,dv = \frac{ps}{r}\,d\left(\frac{c^2}{M}\right) + \frac{c^2}{rM}d(ps) = \frac{c\tau}{r^3}\,[Tps + \tfrac{1}{2}V(p^2 - s^2)]$$

$$\cos v\,de - e\sin v\,dv = \frac{c\tau}{r^3}(-Tp^2 + Vps).$$

Berücksichtigt man, dass: $p = r\cos x$, $s = r\sin x$ ist, so wird:

$$\sin v\,de + e\cos v\,dv = \frac{c\tau}{2r}\,(T\sin 2x + V\cos 2x)$$

$$\cos v\,de - e\sin v\,dv = \frac{c\tau}{2r}(-T - T\cos 2x + V\sin 2x).$$

Multiplicirt man bezw. mit $\sin v$, $\cos v$; sodann mit $\cos v$, $-\sin v$, und addirt, so wird

$$de = \frac{c\tau}{2r}[-T\cos v - T\cos(v + 2x) + V\sin(v + 2x)]$$

$$e\,dv = \frac{c\tau}{2r}[+T\sin v + T\sin(v + 2x) + V\cos(v + 2x)].$$

Man erhält aber aus (α):

$$(2a - r)\sin(v + 2x) = r\sin v$$
$$(2a - r)\cos(v + 2x) = r\cos v - 2ae$$

folglich nach einiger Reduction:

$$\begin{aligned} de &= \frac{c\tau}{2r(2a-r)}[-2a(\cos v - e)T + r\sin v \cdot V] \\ edv &= \frac{c\tau}{2r(2a-r)}[+2a\sin v \cdot T + (r\cos v - 2ae)V]. \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

Die sich hieraus ergebende Aenderung dv der wahren Anomalie ist eine Folge der Drehung der Ellipse; es ist demnach $-dv$ die Drehung der Apsidenrichtung.

Die hier gegebenen Ausdrücke bestimmen die Aenderungen der Elemente für unendlich kleine Zeitelemente. Setzt man $\tau = dt$ und integrirt, so erhält man die Störungen der Elemente für jeden Zeitmoment; addirt man diese Störungen zu den Ausgangselementen, so erhält man die für denselben giltigen osculirenden Elemente.

Integrirt man in der früher erwähnten Weise durch Reihen, so treten in diesen periodische Functionen: *sin*, *cos*, von verschiedenen Argumenten auf. Im Allgemeinen sei für irgend ein Element $E: dE = Fdt$, wobei F eine periodische Function bedeutet. Wenn nun das Integral

$$E = \int F dt = \Phi + E_0$$

abgesehen von der Integrationsconstanten E_0 wieder eine rein periodische Function Φ ist, so wird man daraus ersehen können, dass die Elemente um gewisse Mittelwerthe zwischen mehr oder weniger weiten Grenzen oscilliren, und man nennt dann die constanten Theile E_0 (die aus den Beobachtungen zu bestimmenden Integrationsconstanten) mittlere Elemente[1]). Wenn jedoch in der Entwickelung der Function F eine Constante c auftritt, sodass $dE = (c + F)dt$; $E = E_0 + ct + \Phi$ ist, so werden, wenn man von den periodischen Theilen absieht, die Werthe $E_0 + ct$ immer mehr und mehr anwachsen. Ein Beispiel hierfür bietet die Bewegung der Knoten und Apsiden; da diese Bewegung aber in einer Drehung besteht, so wird dieses Anwachsen nur den Erfolg haben, dass man statt constanter mittlerer Elemente einen veränderlichen mittleren Ort annehmen muss; man spricht dann von einem mittleren Ort zu einer gegebenen Zeit, und wenn man den periodischen Theil Φ hinzufügt, so erhält man den wahren Ort der Knoten bezw. der Apsiden zur gegebenen Zeit.

Anders verhält es sich mit der grossen Axe, der Excentricität und der Neigung. Wenn bei diesen Elementen ein der Zeit proportionales Glied mit wenn auch noch so kleinem Coëfficienten auftreten würde, so würde dieses offenbar besagen, dass z. B. die grosse Axe in stetem Wachsen oder Abnehmen begriffen wäre, daher einmal unendlich gross oder Null werden würde, und in Verbindung damit müssten die mittleren Bewegungen sich verzögern oder beschleunigen, im ersten Fall mit dem Aufhören der Bewegung, im letzteren Fall mit dem Hineinstürzen in die Sonne endigen. Bei wachsenden Excentricitäten hingegen würden die anfänglich nahe kreisförmigen Bewegungen der Planeten immer excentrischer und sich immer mehr und mehr der Parabel nähern. Wachsende Neigungen endlich müssten zur Folge haben, dass die relativen Lagen der Bahnebenen der Himmelskörper im Laufe der Zeiten vollständige Umwälzungen erführen.

---

[1]) Eine andere Definition für mittlere Elemente hat HANSEN gegeben, s. pag. 140.

Secularänderungen in den mittleren Bewegungen waren, wie schon erwähnt, thatsächlich, zuerst aus den Beobachtungen beim Monde, beim Jupiter und Saturn constatirt worden. EULER hatte in seinen ersten theoretischen Untersuchungen (1748) über die Bewegungen des Jupiter und Saturn keine Secularglieder in Länge gefunden; in seinem zweiten Memoire (1752) fand er für die Secularbeschleunigung $2' 24''$. LAGRANGE[1]) hatte die Frage in seiner schönen Abhandlung »Solution de differents problèmes de calcul intégrale«, in welcher auch bereits die später als GYLDÉN-LINDSTEDT'sche bezeichnete Differentialgleichung behandelt wird[2]), zum Gegenstand seiner Untersuchungen gemacht, und für Jupiter ein Secularglied in Länge $+ 2''\cdot 74 n^2$, für Saturn $- 14''\cdot 22 n^2$ gefunden, wobei n die Anzahl der Umläufe seit 1700 bezeichnet. Daraufhin hatte LAPLACE[3]) gezeigt, dass wenn die Näherungen genügend weit geführt werden, sich schliesslich die Ausdrücke aufheben und thatsächliche Secularänderungen in der Bewegung der beiden Planeten nicht auftreten. LAPLACE hatte sich aber, ebenso wie EULER und LAGRANGE vor ihm, bei den Störungen auf die ersten Potenzen der Massen beschränkt, d. h. in den Ausdrücken für die störenden Kräfte wurden die einfachen Ausdrücke für die elliptische Bewegung substituirt. Aber selbst in diesem Falle blieb es immerhin ungewiss, ob, wenn die Genauigkeit noch weiter geführt würde, nicht dennoch Glieder auftreten könnten, die eine Secularacceleration ergeben würden. Da hatte LAGRANGE in seiner Abhandlung »Sur l'altération des moyens mouvements des Planètes[4])« strenge gezeigt, dass wenn nur die ersten Potenzen der störenden Massen berücksichtigt werden, Secularglieder in der grossen Axe überhaupt nicht auftreten können.

Bei Gelegenheit der Untersuchungen über die periodischen Ungleichheiten der Planeten[5]) hatte LAGRANGE durch eine eigenthümliche Umformung der Gleichung für die Störung der mittleren Länge ein Zusatzglied

$$d\Sigma = - \cos q d\beta + \sin q d\gamma - \tfrac{1}{2} \cos 2q d\delta + \tfrac{1}{2} \sin 2q d\varepsilon \ldots$$

erhalten, in welchem q die wahre Länge, und β, γ ... Coëfficienten sind, die von den Excentricitäten der Himmelskörper abhängen. Diese Form wendet er nun auch auf die unmittelbar vorher untersuchten Secularänderungen der Elemente an. Wenn jetzt in den Excentricitäten Secularänderungen auftreten, so ist klar, dass auch in $d\Sigma$ Secularglieder auftreten müssen, wie sie durch die Beobachtung constatirt waren. Solche Secularveränderungen der Excentricitäten hatte LAGRANGE thatsächlich gefunden, und damit wäre die Frage allerdings theoretisch gelöst gewesen. Bei den numerischen Anwendungen jedoch fand er, dass die

---

[1]) Auf diese Differentialgleichung wurde übrigens bereits T. MAYER geführt, dessen »Theoria Lunae juxta systema Newtonianum« 1767 in London erschien, aber so vollständig unbekannt blieb, dass, wie pag. 122 erwähnt wurde, LAMBERT aus den MAYER'schen Mondtafeln die Formeln ableitete; selbst in der grossen Bibliographie von HOUZEAU und LANCASTER geschieht derselben keine Erwähnung.

[2]) Miscell-Taurin, III. Bd. 1762—63.

[3]) PIERRE SIMON LAPLACE, geb. 28. März 1749 zu Beaumont en Auge im Departement Calvados, beschäftigte sich frühzeitig mit Mathematik und wurde bald Professor an der Normalschule in Paris und Mitglied der Academie der Wissenschaften daselbst. Er nahm auch lebhaftes Interesse an der Politik, war selbst einmal unter Napoleons Consularregierung Minister des Innern, scheint jedoch dessen monarchischer Regierung abgeneigt gewesen zu sein. 1814 und 1815 stand er auf Seite der Bourbonen. Seit 1825 kränklich, starb er am 5. Mai 1827.

[4]) Nouv. Mém. de Berlin für 1776. Dieser Beweis zeichnet sich durch besondere Eleganz und Einfachheit aus.

[5]) Nouv. Mém. de Berlin 1783.

daraus resultirenden Secularveränderungen in den mittleren Längen der beiden grössten Planeten Jupiter und Saturn mit den Coëfficienten $+ 0''\cdot0009$ für den ersten, und $- 0''\cdot0012$ für den zweiten erscheinen, welche daher die von HALLEY aus Beobachtungen abgeleiteten Veränderungen nicht zu erklären vermochten. LAGRANGE setzt hinzu, dass, da durch die Wechselwirkung dieser beiden einander nächsten und grössten Himmelskörper nur Gleichungen von so geringen, praktisch verschwindenden Werthen entstehen, die numerischen Beträge für die übrigen Himmelskörper jedenfalls noch viel kleiner sein werden, und nicht weiter in Betracht zu ziehen sind. LAPLACE hatte jedoch diese Idee auf den Mond angewendet, und er fand[1], dass die Veränderlichkeit der Excentricität der Sonnenbahn die Ursache der beim Mond constatirten Secularacceleration sei; seine Rechnungen ergaben ihm den Werth $11''\cdot135$, wofür er später[2] $10''$ substituirte. LAGRANGE nahm hierauf seine Rechnungen nochmals auf und fand[3] den Werth $10''\cdot46$.

Nachdem LAPLACE um dieselbe Zeit (1787) die bis dahin für Secularänderungen gehaltenen Ungleichheiten in der Bewegung des Jupiter und Saturn als eine periodische mit der Periode von 855 Jahren erkannt hatte, welche ihre Ursache in der bereits erwähnten Beziehung zwischen den mittleren Bewegungen der beiden Planeten ($5 ♄ = 2 ♃$) hat, schienen diese Fragen vorerst gelöst. Es ist jedoch zu bemerken, dass hierbei eine Secularveränderung der Excentricität der Erdbahn als Ursache auftritt, welche an und für sich die Stabilität des Weltsystems in Frage stellen würde. Allein LAGRANGE und LAPLACE hatten fast gleichzeitig gefunden, dass

$$m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,e''^2 + \ldots = const$$

$$m\sqrt{a}\,tang\,i^2 + m'\sqrt{a'}\,tang\,i'^2 + m''\sqrt{a''}\,tang\,i''^2 + \ldots = const.$$

wenn $m, m', m'' \ldots$ die Massen, $a, a', a'' \ldots$ die grossen Halbaxen, $e, e', e'' \ldots$ die Excentricitäten und $i, i', i'' \ldots$ die Neigungen der Planetenbahnen bedeuten. Hieraus folgt unmittelbar, dass, da alle Summanden positiv sind, keiner derselben über alle Grenzen wachsen kann, und demzufolge die Excentricitäten und Neigungen stets zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben müssen und daher immer nur um mittlere Werthe oscilliren können. Die sogenannten secularen Veränderungen der Excentricitäten sind demnach auch nur periodische von ausserordentlich langer Dauer, und geben daher weiter nur Anlass zu periodischen Aenderungen in den mittleren Längen, welche wegen ihrer langen Perioden in historischen Zeiten als stets wachsend erkannt wurden. Beispielsweise ist die Periode der vorher erwähnten, von LAGRANGE angegebenen kleinen secularen Veränderungen der Längen des Jupiter und Saturn gleich 70414 Jahre, sodass durch mehr als 35000 Jahre ein fortwährendes Wachsen der Excentricität, und dann wieder durch dieselbe Zeit ein Abnehmen stattfindet. In den historischen Zeiten von etwa 3000 Jahren kann daher diese Aenderung als eine seculare (mit der Zeit proportional fortschreitende) erklärt werden[4].

Die grossen Vortheile, welche die Bestimmung der Störungen in den Elementen darbietet, ist aus dem Gesagten bereits klar; speciell bei den Untersuchungen über die Stabilität des Weltsystems liefert sie äusserst werthvolle Beiträge; vom

---

[1]) Mémoiren der Pariser Academie für 1786.

[2]) Mécanique céleste III. Band.

[3]) Mémoiren der Berliner Academie für 1792--93. Durch die späteren Untersuchungen von ADAMS und DELAUNAY wurde der Betrag derselben auf nahe die Hälfte vermindert.

[4]) LAGRANGE nennt dieselben secular-periodisch.

analytischen Standpunkte ist noch hervorzuheben, dass man durch die Berechnung selbst auf mittlere Elemente geführt wird, d. h. auf solche, von denen sich der Himmelskörper zu beiden Seiten nur periodisch ziemlich gleichmässig entfernen kann[1]), während die am Beginn der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente diese Eigenschaft keineswegs zu besitzen brauchen. Hingegen hat diese Methode der Störungsrechnung einen bedeutenden Nachtheil: die Störungen fallen im Allgemeinen viel grösser aus, als bei der Berechnung der Störungen in rechtwinkligen oder polaren Coordinaten. Betrachtet man eine geringfügige Aenderung der Bewegungsrichtung, so wird durch dieselbe, da der Schnitt mit der Ekliptik ziemlich weit wegfällt, die Veränderung in der Richtung der Knotenlinie und Neigung ganz bedeutend werden können. Ebenso werden durch ganz bedeutende Aenderungen in der Richtung der Apsiden, der grossen Axe und Excentricität, die Aenderungen in dem Orte nur minimale werden. Aus dieser Ursache hat LAGRANGE in seinen 1766 publicirten Untersuchungen über die Bewegung der Jupitersatelliten die Methode von CLAIRAUT für die Bestimmung der Störungen des Ortes überdies aber an Stelle der Störungen von Knoten und Neigung sofort die Störung senkrecht zur Bahnebene gewählt. Nimmt man in einer festen, durch den Centralkörper gehenden Bahnebene ein bewegliches Coordinatensystem so, dass die X- und Y-Axe in einer gleichmässigen Rotation begriffen sind, und die X-Axe stets mit dem mittleren Orte des Himmelskörpers zusammenfällt, so wird der Unterschied zwischen der mittleren und wahren Länge von der Ordnung der Mittelpunktsgleichung und der Störungen sein; ebenso wird der Radiusvector sich von der mittleren Entfernung nur um Grössen derselben Ordnung unterscheiden, und endlich wird der senkrechte Abstand des Himmelskörpers von dieser Ebene (in der Richtung der Z-Axe) auch von der Ordnung der Störungen sein. Man kann hiernach die rechtwinkligen Coordinaten: Differenz des Radiusvectors von der mittleren Entfernung x, und die beiden anderen dazu senkrechten Abstände y, z als Störungen ansehen. Dieser (in wenig modificirter Form) zuerst 1766 von LAGRANGE für die Jupitersatelliten eingeschlagene Weg wurde später (1772) von EULER in seiner dritten Mondtheorie benutzt, für welche die äusserst umfangreichen Rechnungen (wieder nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten) von KRAFFT und LEXELL durchgeführt wurden.

Schon LAGRANGE hatte in seiner mehrerwähnten Arbeit über die Jupitersatelliten gefunden, dass die nicht unbedeutenden Unregelmässigkeiten in der Bewegung derselben, deren Periode WARGENTIN in seinen Tafeln gleich 437^d angenommen hatte, durch die merkwürdigen Beziehungen zwischen den mittleren Bewegungen der drei inneren Satelliten bedingt wird. Seien dieselben μ_1, μ_2, μ_3, so ist sehr nahe $\mu_1 = 2\mu_2$; $\mu_2 = 2\mu_3$ und noch viel genauer $(\mu_1 - 2\mu_2) = (\mu_2 - 2\mu_3)$. Hieraus folgt nun, wenn M_1^0, M_2^0, M_3^0 die mittleren Längen der drei Satelliten für eine gewisse Epoche, M_1, M_2, M_3 dieselben für eine beliebige andere Epoche bedeuten,

$$M_1 - 3M_2 + 2M_3 = M_1^0 - 3M_2^0 + 2M_3^0 + (\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3)\,t$$
$$= M_1^0 - 3M_2^0 + 2M_3^0,$$

da der Coëfficient von t äusserst nahe $= 0$ ist. LAGRANGE findet für eine bestimmte Epoche diesen Werth nahe $= 180°$ und nimmt daher an, dass derselbe wenigstens für sehr lange Zeiträume $180°$ ist.

---

[1]) Nach der HANSEN'schen Bestimmung sind mittlere Elemente solche, von welchen die Abweichungen auf beiden Seiten ein Minimum betragen.

Aus der Grösse der Störungen kann man auch auf die Masse des störenden Körpers schliessen; es ist dies auch das einzige Mittel, die Massen derjenigen Himmelskörper zu bestimmen, welche keine Monde haben. LAGRANGE bestimmt auf diese Weise die Masse des zweiten Jupitermondes aus den beobachteten Störungen, welche er in der Bewegung des ersten erzeugt, gleich 0·000024 ♃ und für den ersten und dritten als obere Grenze die Masse $<$ 0·00011 ♃.

LAPLACE hatte 1784 diese Untersuchungen nochmals aufgenommen, und er fand, dass die beiden angeführten Beziehungen zwischen den mittleren Bewegungen und Längen genau und beständig erfüllt sein müssen, dass die Seculargleichungen der mittleren Bewegungen derart sind, dass die resultirenden gestörten Längen sich diesem Gesetz fügen, und dass, wenn die Beobachtungen eine Abweichung von diesem Gesetz mit Sicherheit constatiren liessen, damit erwiesen wäre, dass mindestens einer der Satelliten sich um seine Axe in derselben Zeit dreht, in welcher er seinen Umlauf um Jupiter vollführt, ein Gesetz, das dem für den Erdmond gültigen völlig analog ist.

Die erste Anregung zur Untersuchung über die Libration des Mondes rührt von EULER her; 1750 hatte er in der Abhandlung »De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda« den Einfluss einer Anschwellung des Mondes gegen die Erde hin untersucht, wobei er dieselbe aber durch zwei in der Richtung der Verbindungslinie Erde—Mond zu beiden Seiten des Mondes anzubringende Massen ersetzt. EULER untersucht jedoch weniger die Bewegung dieser beiden Massen gegen den Radiusvector des Mondes, als den Einfluss, den diese Massen auf die Bewegung der Apsiden äussern mussten. Seine Resultate waren aber keine befriedigenden, denn er fand, dass die Entfernung der beiden Körper $2\frac{1}{2}$ Monddurchmesser sein müsste, um die ganze Differenz der aus dem Attractionsgesetz und aus der Beobachtung gefolgerten Bewegung der Apsiden[1]) zu erklären.

Den Gedanken einer Anschwellung des Mondes gegen die Erde hin und einer daraus folgenden oscillatorischen Bewegung nahm 1763 LAGRANGE auf, und gelangte schon in dieser Arbeit zu befriedigenden Resultaten. Würde die Rotation des Mondes um seine Axe völlig gleichmässig stattfinden, so müsste selbstverständlich die geringste Abweichung sich im Laufe der Zeiten summiren, und man müsste schliesslich doch im Laufe der Jahrzehnte oder Jahrhunderte die gesammte Oberfläche des Mondes kennen lernen. Nimmt man jedoch an, dass der Mond nicht vollständig gleichmässig rotirt, was seinen Grund in einer Anschwellung gegen die Erde hin haben kann, so wird die Anziehung der Erde bewirken, dass dieser gegen die Erde zu verlängerte Mondkörper wie ein Pendel Schwingungen um seine Ruhelage macht, als welche diejenige anzusehen ist, wenn die grosse Axe der Aequatorellipse des Mondes genau gegen den Erdmittelpunkt gerichtet ist. Diese Schwankung nennt man die physische Libration des Mondes im Gegensatz zu der früher beschriebenen optischen. In diesem Falle würde, wenn nur ursprünglich die Rotationszeit und die Dauer eines Umlaufes des Mondes um die Erde nicht allzu verschieden[2]) waren, die Gleichheit beider sich im Laufe der Zeiten herstellen. D'ALEMBERT war in seinen bald darauf erschienenen Untersuchungen über die Libration des Mondes zu wesentlich denselben Resultaten gelangt, hingegen blieb hierbei noch der Umstand

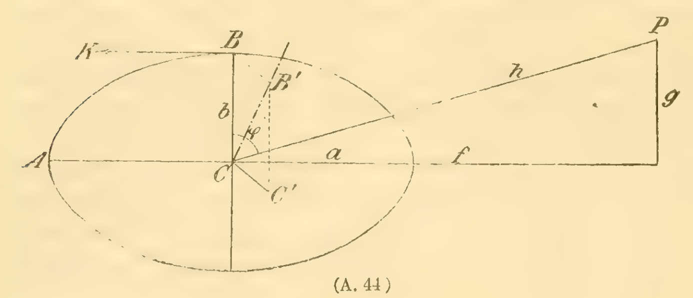
[1]) Nach den ältesten theoretischen Resultaten über diese Bewegung.

[2]) Unter gewissen sehr wahrscheinlichen Voraussetzungen kann auch diese beschränkende Annahme fallen gelassen werden.

nicht erklärt, dass die Knoten des Mondäquators und der Mondbahn immer zusammenfallen. Diese Frage hatte LAGRANGE erst in seiner zweiten Abhandlung (1780) gelöst. Die hier erhaltenen Resultate müssen jedoch besonders hervorgehoben werden. LAGRANGE findet, dass das nahe Zusammenfallen der Knoten der beiden Ebenen auf der Ekliptik nur stattfinden kann, wenn die Abplattung e der gegen die Erde gerichteten Meridianellipse des Mondes zwischen den Grenzen 0·0000515 und 0·0000675 liegt, und wenn die Abplattung der darauf senkrecht stehenden Meridianellipse noch kleiner ist (die grosse Axe der Aequatorellipse des Mondes gegen die Erde zu gerichtet ist). Ist aber m die Mondmasse in Theilen der Erdmasse und h der scheinbare Mondhalbmesser (15′ 45″), so findet LAGRANGE unter der Annahme, dass der Mond eine in allen Theilen homogene Masse bildet

$$e = \frac{2}{1 + \frac{2}{5}\frac{m}{h^3}}; \quad \text{demnach} \quad m = \frac{0 \cdot 0000004808}{e},$$

sodass die Mondmasse zwischen den Grenzen 0·0007127 und 0·0009337 eingeschlossen wäre. Da aber die Mondmasse jedenfalls grösser als $\frac{1}{100}$ ist, so wird daraus gefolgert werden können, dass der Mond keine homogene Masse sein kann (wie ja auch die Erde nicht homogen ist, sondern gegen das Innere zu immer dichter wird.)



(A. 44)

Die Untersuchungen über die Präcession der Aequinoctien waren von D'ALEMBERT 1747 zum ersten Male[1]) vorgenommen worden. Bald darauf (1749) hatte auch EULER dieselbe Frage behandelt. Da seine Darstellungsweise ziemlich elementar ist, so soll dieselbe hier wiedergegeben werden. Seien a, b (Fig. 44) die Halbaxen des Rotationsellipsoides, f, g die Coordinaten eines Punktes ausserhalb desselben in einer bestimmten Meridianebene, $h = \sqrt{f^2 + g^2}$ die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkt des Ellipsoides, so ist die Kraft, welche der Punkt P auf das Ellipsoid ausübt, gegeben durch[2])

$$Q = C\frac{g(a^2 - b^2)}{h^5}.$$

Das Drehungsmoment dieser Kraft ist $M = Qf$ und die Kraft Q kann ersetzt werden durch eine Kraft K, welche an dem Endpunkte der Polaraxe bei B angreift, wenn ihr Drehungsmoment gleich M ist, so also dass

$$Kb = M = Qf = C\frac{fg(a^2 - b^2)}{h^5}$$

ist. Dieses Moment würde eine Umstellung der Axe erstreben. Das Moment verschwindet, wenn g oder f verschwinden, d. h. wenn P in der Aequatorebene oder in der Polaraxe liegen würde; es verschwindet auch für $a = b$, d. h. für

[1]) Recherches sur la précession des équinoxes.

[2]) Die Formel folgt leicht aus der allgemeinen Formel des Ellipsoids, wenn man die Anziehung der Kugel abzieht, welche für die vorliegende Aufgabe belanglos ist; der Coëfficient bei EULER muss jedoch etwas abgeändert werden.

eine Kugel[1]); befindet sich im Innern ein Kern, dessen Dichte, wenn die Dichte der oberen Schicht gleich 1 gesetzt wird, $1+\nu$ ist, so kommt dies darauf hinaus, in dem inneren Theil einen Körper von den Halbaxen α, β und der Dichte ν zu superponiren, und das Drehungsmoment wird

$$M = C\frac{fg}{h^5}\,\frac{a^2b(a^2-b^2)+\nu\alpha^2\beta(\alpha^2-\beta^2)}{a^2b+\nu\alpha^2\beta}.$$

Bezeichnet man den nur von der Form und Structur des Erdkörpers abhängigen zweiten Coëfficienten mit E, so dass

$$E = \frac{a^2b(a^2-b^2)+\nu\alpha^2\beta(\alpha^2-\beta^2)}{a^2b+\nu\alpha^2\beta}$$

ist und mit φ die Poldistanz von P, so wird

$$M = \frac{CE}{h^3}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Dieses Moment würde eine Rotation um eine Axe CC' erzeugen, die in C senkrecht steht auf der Ebene BCP. Rotationen können so zusammengesetzt werden, wie Translationsbewegungen, wenn man auf den instantanen Rotationsaxen die Drehungsgeschwindigkeiten aufträgt. Stellt also CC' die Rotationsgeschwindigkeit um CC' dar, CB diejenige um CB (die tägliche Rotation), so ersieht man, dass die resultirende instantane Drehungsaxe CB' um einen kleinen Winkel BCB' in einer zur Ebene BCP senkrechten Ebene gedreht erscheint.

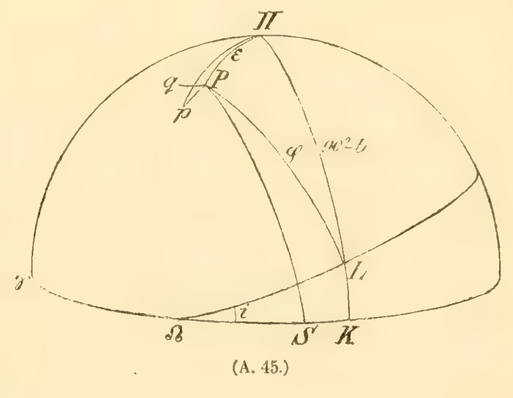
In Folge der continuirlich wirkenden Kraft Q beträgt die Drehung um CC' in der Zeit dt: $\frac{1}{2}M\cdot dt^2$, während in derselben Zeit die tägliche Rotation (um die Axe CB) Ndt ist; daraus folgt:

$$BCB' = d\omega = \frac{1}{2}\frac{Mdt^2}{Ndt} = \frac{1}{2}\frac{M}{N}dt = \frac{1}{2}\frac{C\cdot E}{Nh^3}\sin\varphi\cos\varphi\,dt$$

oder

$$d\omega = A\sin\varphi\cos\varphi\,dt \qquad \text{wenn } A = \frac{1}{2}\frac{E}{N}\cdot\frac{C}{h^3}$$

ist. Sei nunmehr auf der Himmelskugel Π der Pol der Ekliptik ΥS (Fig. 45); P der Weltpol, S die Sonne, L der Mond, so wird der Bogen PL der in Fig. 44 mit φ bezeichnete Winkel sein, und die Drehungsaxe wird in Folge der Wirkung des Mondes L in einer zu PL senkrechten Ebene um ein Stück $Pp = d\omega$ verschoben sein. $\Pi p - \Pi P = d\varepsilon$ stellt die Veränderung der Schiefe der Ekliptik dar, und $P\Pi p = dv$ ist die Verschiebung des Colurs der Solstitien, also gleich der Verschiebung der siderischen Länge des Frühlingspunktes. Ist l die siderische Länge und b die Breite des Mondes, so wird,



(A. 45.)

da der Parallelkreis durch P senkrecht steht auf Πp, wenn $\sphericalangle\, Ppq = \alpha$ gesetzt wird:

[1]) Weshalb der von der Kugel abhängige Theil auch weggelassen werden kann. Bemerkt mag werden, dass Euler an dieser Stelle ebenfalls die Anziehung nicht genau nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz, sondern mit einem Zusatzglied $\left(\frac{1}{r^2}-\delta\right)$ annimmt; dieses Zusatzglied ist oben fortgelassen.

$$d\varepsilon_1 = d\omega \cos Ppq = A_1 \sin\varphi \cos\varphi \cos\alpha\, dt$$
$$\cos\varepsilon\, dv_1 = d\omega \sin Ppq = A_1 \sin\varphi \cos\varphi \sin\alpha\, dt.$$

Es ist aber im Dreieck ΠPL: $\Pi PL = 90° + Ppq = 90° + \alpha$[1] und

$$\cos\varphi = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l$$
$$\sin\varphi \cos(90° + \alpha) = \sin b \sin\varepsilon - \cos b \cos\varepsilon \sin l$$
$$\sin\varphi \sin(90° + \alpha) = -\cos b \cos l,$$

folglich

$$d\varepsilon_1 = -A_1 (\cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l) \cos b \cos l\, dt$$
$$dv_1 = -A_1 (\sin b + \operatorname{tang}\varepsilon \cos b \sin l)(\sin b \sin\varepsilon - \cos b \cos\varepsilon \sin l)\, dt$$

in welchen Formeln noch die Breite des Mondes durch seine Länge und die Elemente der Mondbahn (Länge des Knotens ☊ und Neigung i) zu ersetzen sind. Es ist

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} i \sin(l - ☊) \quad \text{und} \quad A_1 = \tfrac{1}{2} \frac{E}{N} \frac{C_1}{h_1^3}.$$

Für die Wirkung der Sonne hat man zunächst $i = 0$ zu setzen. Ist dann l' die siderische Länge der Sonne und A_2 der Coëfficient, der an Stelle von A_1 gesetzt werden muss, so wird

$$d\varepsilon_2 = -A_2 \sin\varepsilon \sin l' \cos l'\, dt$$
$$dv_2 = +A_2 \sin\varepsilon \sin^2 l'\, dt \qquad A_2 = \tfrac{1}{2} \frac{E}{N} \frac{C_2}{h_2^3}.$$

Für die Integration wäre zu bemerken, dass in den Coëfficienten von dt bereits die Grösse ε auftritt; sieht man diese wegen der Kleinheit der Veränderungen in erster Näherung als constant an, so kann durch Entwickelung der Produkte der trigonometrischen Functionen in Summen die Integration leicht ausgeführt werden. Für die Sonnenwirkung[2]) wäre z. B.

$$d\varepsilon_2 = -\tfrac{1}{2} A_2 \sin\varepsilon \sin 2l'\, dt$$
$$dv_2 = +\tfrac{1}{2} A_2 \sin\varepsilon (1 - \cos 2l')\, dt$$

und da, wenn auf die Ungleichheiten in der Sonnenbewegung nicht Rücksicht genommen wird, $l' = l'_0 + \mu_2 t$, wenn μ_2 die mittlere tägliche siderische Bewegung der Sonne ist, so wird

$$\varepsilon_2 = +\frac{1}{4\mu_2} A_2 \sin\varepsilon \cos 2l'$$
$$v_2 = +\frac{1}{2} A_2 \sin\varepsilon \left(t - \frac{\sin 2l'}{2\mu_2}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2} A_2 \sin\varepsilon \cdot t$ ist mit der Zeit anwachsend und giebt ein seculares Glied, die Präcession, während die anderen Glieder wegen der Coëfficienten $\cos 2l'$, $\sin 2l'$ periodische Aenderungen bedeuten, und als Nutation bezeichnet werden. Ganz ähnlich würde sich der Ausdruck für die Wirkung des Mondes darstellen lassen, wobei aber auf die Veränderlichkeit von ☊ Rücksicht genommen werden muss. Da dann in den entwickelten Ausdrücken Glieder auftreten, welche $\cos$ ☊, $\sin$ ☊ enthalten, und ☊ $=$ ☊$_0 + \omega t$ ist, so werden in dem Integral die Integrationsdivisoren ω auftreten, und da ω nur etwa den 250. Theil von μ_1 beträgt, so werden diese Glieder etwa 250 Mal so gross werden; in der Nutation wird demnach die 18jährige Bewegung der Mondknoten wieder erscheinen. Zu bemerken ist, dass $\frac{C_1}{h_1^3} : \frac{C_2}{h_2^3} = m$ das Verhältniss der Mond- zur Sonnenwirkung darstellt, so dass $A_1 = A_2 m$ gesetzt werden könnte. Aus den beobachteten Werthen der Präcession und Nutation kann

[1]) $\Pi PL + qPp = 180°$ weil $\Pi Pq = LPp = 90°$ und $Ppq + qPp = 90°$.

[2]) Die vollständige Darlegung s. M. d. H.

auch m ermittelt werden. EULER nimmt jedoch für m den von BERNOULLI aus den Flutwirkungen erhaltenen Werth $2\frac{1}{2}$ an, und bestimmt dann aus den Beobachtungen den Werth von A_1, aus welchem er zu dem Schlusse geführt wird, dass ν nicht $= 0$ sein kann, sondern positiv sein muss, d. h. dass die Erde einen dichteren Kern haben muss[1]).

Kurze Zeit darauf waren EULER und LAGRANGE auf die schöne Eigenschaft jedes, wie immer gearteten Massencomplexes geführt worden, dass es stets drei, nur von der Massenanordnung, nicht aber von den äusseren Kräften, Bewegungen u. s. w. abhängige, in dem Körper auf einander senkrechte Richtungen giebt, von denen zwei die Axen des grössten und kleinsten Trägheitsmomentes sind. Hierdurch war es möglich, die Frage der Präcession und Nutation wesentlich schärfer zu formuliren[2]), und 1768 erschien jene denkwürdige Abhandlung[3]): »Investigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt«, in welcher bereits im Wesentlichen auch die secundären Erscheinungen, welche durch die Verschiedenheit der Rotationsaxe und der Hauptträgheitsaxe des grössten Moments (s. M. d. H.) entstehen, erklärt werden. Würde der Bogen zwischen diesen beiden Axen einen messbaren Betrag erreichen, so müssten, selbst wenn keine äusseren Kräfte auf die Erde wirken, die Lage des Aequators auf der Erde, die geographische Breite der Orte, bedeutenderen Schwankungen unterliegen; doch ist nach EULER ein Unterschied in den beiden Richtungen nicht zu constatiren[4]). Endlich ist zu bemerken, dass EULER hier aus der Vergleichung der theoretisch abgeleiteten Ausdrücke mit den Beobachtungen zuerst auf eine sehr nahe richtige Mondmasse ($\frac{1}{85}$) geführt wurde.

Hiermit waren die Principien für die Untersuchung der Bewegungen der Planeten und Satelliten gegeben, die weiteren Arbeiten waren Anwendungen dieser Methoden. CLAIRAUT berechnete 1743 die Störungen der Erdbahn durch den Mond, durch Jupiter und Venus, LALANDE 1750 die Störungen, welche Mars durch Jupiter erfährt, und 1760 die Störungen der Venus durch die Erde. LAGRANGE hatte, wie schon erwähnt, die secularen Störungen der Elemente sämmtlicher Planeten ermittelt u. s. w. Nebstdem sind einige Arbeiten über die strengen Lösungen specieller Fälle des Dreikörperproblems zu erwähnen; in erster Linie die elegante, analytische Form, welche LAGRANGE 1772 durch die Zurückführung auf die Bestimmung der Entfernungen und die Lage des durch die drei betrachteten Körper gebildeten Dreieckes gab, sowie die in Folge dieser Untersuchungen behandelten speciellen Fälle. LAGRANGE zeigte, dass das Problem strenge gelöst werden kann, wenn das von den drei Körpern gebildete Dreieck stets gleichseitig bleibt, oder wenn die drei Körper stets in einer Geraden bleiben, in welchem Falle jedoch ihre Entfernungen in einem bestimmten, durch ihre Massen gegebenen Verhältnisse stehen[5]).

---

[1]) D'ALEMBERT untersuchte 1754 die Präcession eines dreiaxigen homogenen Ellipsoïdes, begnügte sich jedoch mit der analytischen Ableitung, ohne die numerischen Substitutionen durchzuführen.

[2]) Wie EULER dies schon 1751 that.

[3]) Memoiren der Petersburger Academie.

[4]) Erst durch genauere Beobachtungen späterer Zeit wurde zunächst von C. A. F. PETERS festgestellt, dass die beiden Axen thatsächlich einen angebbaren, sehr kleinen Winkel einschliessen, und erst in der jüngsten Zeit konnte constatirt werden, dass auch die Hauptträgheitsaxen selbst in der Erde Lageänderungen unterworfen sind, die, wenigstens zum Theil, unzweifelhafte Polhöhenschwankungen erklären (s. M. d. H.).

[5]) Der letzte Specialfall war bereits 1765 von EULER behandelt worden.

Eine für jeden Fall der Störungsrechnung durch Näherungen vorzunehmende Arbeit ist die Entwickelung der störenden Kräfte. In dieser Richtung hatte auch LAGRANGE insbesondere durch die Entwickelung der negativen Potenzen der Entfernungen des störenden und gestörten Himmelskörpers in der bereits erwähnten Abhandlung »Solution de differents problèmes du calcul integrale« Hervorragendes geleistet. Allein es zeigte sich, dass diese Entwickelungen einer Modifikation bedürfen, wenn das Verhältniss der Halbaxen $a : a_1$ der beiden Himmelskörper nicht sehr von der Einheit verschieden ist, ein Fall der bei den wechselseitigen Störungen der Venus und Erde auftritt. Zu diesem Zweck hatte CLAIRAUT 1754 die Entwickelung der störenden Kräfte nach Reihen von der Form

$$F(t) = A + B \cos t + C \cos 2t + \ldots$$

angewendet. EULER hatte bereits 1748 aus der Form der Function $F(t)$ die ersten beiden Coëfficienten unmittelbar und die übrigen auf indirektem Wege angegeben, und D'ALEMBERT hatte 1754 schon den allgemeinen Ausdruck der Coëfficienten[1])

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(t) \cos st \, dt$$

angegeben. CLAIRAUT rechnete für n über den ganzen Umkreis vertheilte Werthe der Veränderlichen, also für $t = 0°, \frac{360°}{n}, 2 \cdot \frac{360°}{n} \ldots$ die Werthe von $F(t)$ aus ihren analytischen Ausdrücken. Sind die numerischen Resultate $F_0, F_1, F_2, \ldots$ so muss

$$F_0 = A + B \cos t_0 + C \cos 2t_0 + \ldots$$
$$F_1 = A + B \cos t_1 + C \cos 2t_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sein und aus diesen zusammengehörigen Werthen von $t_0, F_0; t_1, F_1 \ldots$ kann man ebenso viel Coëfficienten $A, B, C \ldots$ bestimmen, als Werthe $F_0, F_1 \ldots$ bestimmt wurden. Hat man jedoch nicht die störenden Kräfte, sondern z. B. nur Potenzen der Distanzen in solche Reihen entwickelt, so ist dann mit den so erhaltenen Reihen weiter zu operiren[2]). Hat man in dem Ausdruck für einen Störungswerth $dx = F(t)dt$ den Coëfficienten $F(t)$ entwickelt, so wird dann

$$x = Const + At + B \sin t + \tfrac{1}{2} C \sin 2t \ldots$$

wo die Coëfficienten $A, B, C \ldots$ bereits numerisch ermittelt sind.

Noch grösser werden die Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Störungen der Kometen. Da ihre Bahnen langgestreckte Ellipsen sind, so wird der Komet eine Zeit lang näher der Sonne sein als der störende Planet ($r < r'$)[3]), dann werden die Entfernungen $r = r'$ und endlich $r > r'$. Der erste, welcher Störungen eines Kometen berechnete, war wieder CLAIRAUT. In seiner »Théorie des mouvements des comètes« beschränkt er sich darauf, die analytischen Entwickelungen so weit als möglich zu führen, sieht sich aber dann genöthigt, der angezeigten analytischen Schwierigkeiten wegen die Integration durch mechanische Quadraturen[4]) vorzunehmen; diese besteht darin, dass man die

[1]) Es sind dies, wie man sieht, die später als FOURIER'sche Reihen bezeichneten Entwickelungen.

[2]) Diese Methode der »mechanischen« (im Gegensatz zur analytischen) Entwickelung der störenden Kräfte wurde viel später mit grossem Vortheil von HANSEN weiter ausgebildet.

[3]) s. pag. 129.

[4]) S. diesen Artikel: es ist bemerkenswerth, dass CLAIRAUT bereits die höheren Differenzen berücksichtigte.

numerisch bestimmten störenden Kräfte F_0, F_1 . . . direkt summirt. Bestimmt man z. B. die störenden Kräfte in sehr engen Intervallen, als eine Reihe wenig von einander verschiedener Werthe (z. B. für jeden Tag), so kann man durch einfache Addition die summirten Werthe erhalten[1]). Man kann aber die Rechnung wesentlich vereinfachen und abkürzen, wenn man bedenkt, dass, da die Kräfte stetig veränderlich sind, man selbst aus einer Reihe von speciellen Werthen, die auch weiter von einander abstehen (z. B. in Inrervallen von 40 Tagen) aus dem Gange der Differenzen jederzeit die zwischenliegenden Werthe berechnen könnte (wie ja oben ein analytischer Ausdruck in Form einer Reihe erhalten wurde), dass man also auch, ohne dieselben zu berechnen, die Summe erhalten kann. Man nennt diese Methode der Berechnung der Störungen »die Methode der speciellen Störungen« im Gegensatze zur analytischen, welche man »die Methode der allgemeinen oder absoluten Störungen« nennt.

Die Methode der speciellen Störungen bietet besondere Vortheile in den Fällen, wo es sich noch nicht um die grösste Genauigkeit handelt, wenn also z. B. noch nicht genügend sichere Elemente bekannt sind, oder wenn man überhaupt nur einen Umlauf des Himmelskörpers zur Verfügung hat. Sie führt viel rascher zum Ziel, und hat daher auch später, als es sich um die rasche Berechnung der Störungen kleiner Planeten und Kometen handelte, an Bedeutung gewonnen. Sie hat aber den Nachtheil, dass bei einer grossen Anzahl von Umläufen die Störungsrechnung immer in derselben Weise fortgeführt werden muss, da man keinerlei Anhaltspunkte für die Erkenntniss des weiteren Verlaufes der Störungswerthe aus den bereits erhaltenen findet. CLAIRAUT hatte auf diese Art die Störungen des HALLEY'schen Kometen von 75 Jahren Umlaufszeit berechnet.

LAGRANGE hatte 1785 versucht, eine Methode für die Entwickelung von allgemeinen Störungen für Kometen zu geben, und dabei die Bahn in 2 Theile, einen unteren, sonnennahen, und einen oberen, sonnenfernen getheilt, wobei nur ein besonderes Augenmerk beim Uebergang von dem einen Theile auf den anderen zu wenden ist. Während er aber in seinen Untersuchungen über die secularen und periodischen Störungen der Planeten die Zeit, also die mittlere Anomalie als unabhängig Veränderliche wählt, nimmt er für die Kometen die excentrische Anomalie als solche[2]). So empfehlenswerth die Methode sich später in der Praxis gezeigt hat, so war ihre Anwendung für jene Zeiten jedenfalls etwas verfrüht, auch hatte LAGRANGE keine praktische Anwendung von seiner Methode gemacht.

Der einzige schon damals als periodisch wiederkehrend erkannte Komet war der Komet von 1682 (der HALLEY'sche). Um seine Auffindung zu erleichtern für den Fall, dass er unter ungünstigen Umständen nur sehr schlecht sichtbar werden sollte, hatte es CLAIRAUT unternommen, die Störungen durch Jupiter zu berechnen; er fand aber bald, dass auch diejenigen durch Saturn nicht übergangen werden dürften.

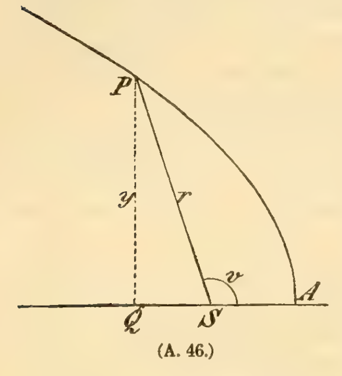
---

[1]) Ueber die in diesem Falle zu berücksichtigende Wahl der Einheiten u. s. w. s. M. d. H.

[2]) Ein später ebenfalls von HANSEN gewählter Vorgang; die Reihen werden hierdurch convergenter, da der grösste Coëfficient in der Entwickelung von $v - E$ nur die Hälfte des Coëfficienten in der Entwickelung von $v - M$ ist. Die Theilung nach der wahren Anomalie wird weniger gut wegen der allzu ungleichmässigen Bewegung des Kometen im Perihel und Aphel. Bei gleicher Theilung der wahren Anomalie des Kometen würden die Zwischenzeiten und folglich die Bewegungen des störenden Körpers viel zu ungleichmässig.

Die sehr mühsamen Rechnungen nach der bereits erwähnten Methode der speciellen Störungen führte er gemeinschaftlich mit der als astronomische Rechnerin bekannten Mad. LEPAUTE durch und war so glücklich die Arbeit noch vor dem Periheldurchgang zu vollenden (sie wurde am 14. November 1758 der Pariser Academie übergeben); dieser fiel danach auf den 13. April 1759, eine Vorausbestimmung, die sich bis auf den geringfügigen Betrag von einem Monat als richtig erwies.

Für die Kometenastronomie war aber die Verbesserung der Methode zur Bestimmung der Bahnen viel wichtiger, denn die NEWTON'sche Methode war ziemlich weitläufig, und gab, wie nicht anders zu erwarten, nur genäherte, sehr verbesserungsbedürftige Resultate.



(A. 46.)

Die Berechnung eines Kometenortes in der Parabel ist selbstverständlich anders, als in der Ellipse. Bekanntlich gilt für die Parabel (Fig. 46) *area* $PASQ = \frac{2}{3}xy$, und da *area* $PQS = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}p)y$ ist, so wird die vom Radiusvector überstrichene, der Zeit proportionale Fläche

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{p}\,kt = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}p)y = \tfrac{1}{6}xy + \tfrac{1}{4}py,$$

und da $x = \dfrac{y^2}{2p}$ ist, so wird

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{p}\,kt = \frac{1}{12p}y^3 + \tfrac{1}{4}py \quad \text{oder} \quad \frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{p} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{p^3}.$$

Da aber

$$y = r\,sin\,v = \frac{p\,sin\,v}{2\,cos^2\,\frac{1}{2}v} = p\,tang\,\tfrac{1}{2}v$$

ist, so wird

$$\frac{2kt}{p^{\frac{2}{3}}} = tang\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}tang^3\,\tfrac{1}{2}v.$$

Ist $p = 1$, so ist die Zeit, welche der Komet braucht, um die wahre Anomalie 90° zurückzulegen, $109^d\,14^h\,46^m\,12^s{\cdot}6$; LALANDE nennt daher diesen Kometen den Kometen von 109 Tagen. Für einen Kometen, dessen Elemente bekannt sind, hat man zur gegebenen Periheldistanz $q = \frac{1}{2}p$, für eine vorgelegte Zeit t den Ausdruck $\dfrac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = M$ zu berechnen, und dann giebt die Auflösung der Gleichung dritten Grades $M = tg\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}tg^3\frac{1}{2}v$ den Werth von v. Um diese Auflösung zu umgehen, gab HALLEY eine Tafel, welche mit dem Argumente M sofort den Werth von v zu entnehmen gestattet. Im VII. Bde. der Miscell. Berol. (1743) giebt EULER bereits eine Methode, um für sehr langgestreckte Ellipsen die wahre Anomalie aus der Zeit zu finden, indem die Bahn zuerst als Parabel angesehen wird, und die aus dieser Annahme gefolgerte wahre Anomalie wegen der Abweichung von der Parabel corrigirt wird[1]. Auch leitet EULER an dieser Stelle die Gleichung ab

$$6kt = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}},$$

wenn r_1, r_2 zwei Radienvectoren, s die zwischen den Kometenorten enthaltene Sehne, und t die Zwischenzeit ist. Eine Anwendung dieser Formel für die Bahnbestimmung macht EULER nicht; die Bahn des Kometen von 1742 wird noch in ähnlicher Weise wie bei NEWTON bestimmt, wobei jedoch eine bedeutende Ver-

---

[1]) Näheres hierüber s. unter Bahnbestimmung.

einfachung durch den Umstand entsteht, dass aus einer Reihe von Beobachtungen ein Kometenort interpolirt werden kann, der einer Conjunction mit der Sonne entspricht[1]). Um aber aus der ersten genäherten eine definitive Bahn abzuleiten, wendet EULER die folgende Methode an. Es werden nebst der parabolischen Hypothese noch 5 andere Hypothesen gemacht, in denen je eines der Elemente um einen mässigen Betrag geändert wird, mit jedem dieser Elementensysteme werden für alle Beobachtungszeiten die Kometenorte berechnet. Sei unter der Annahme der parabolischen Hypothese (erste genäherte Elemente) irgend eine berechnete Länge λ, eine Breite β; wird eins der Elemente E um den Betrag ΔE (z. B. 10′) geändert, so möge die Rechnung die Werthe λ_1, β_1 ergeben, dann sind $\frac{\lambda_1 - \lambda}{\Delta E}$, $\frac{\beta_1 - \beta}{\Delta E}$ die zur Aenderung von 1′ gehörigen Aenderungen der Länge bezw. Breite; eine Aenderung e dieses Elements wird daher in der Länge und Breite die Aenderungen $\frac{\lambda_1 - \lambda}{\Delta E} e$; $\frac{\beta_1 - \beta}{\Delta E} e$ hervorbringen[2]).

Aus den 5 verschiedenen Annahmen ΔE_1, ΔE_2 . . . wird man daher Correctionen

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\Delta E_1} e_1; \quad \frac{\lambda_2 - \lambda}{\Delta E_2} e_2 \; \ldots \; \frac{\beta_1 - \beta}{\Delta E_1} e_1; \quad \frac{\beta_2 - \beta}{\Delta E_2} e_2 \; \ldots$$

für jede Beobachtung erhalten, und es sind die Correctionen $e_1, e_2 \ldots e_5$ so zu bestimmen, dass die Summe dieser Correctionen zu dem aus der parabolischen Hypothese folgenden Werthe λ hinzugefügt, den beobachteten Werth λ_0 ergiebt; daraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\Delta E_1} e_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda}{\Delta E_2} e_2 + \ldots + \frac{\lambda_5 - \lambda}{\Delta E_5} e_5 = \lambda_0 - \lambda$$
$$\frac{\beta_1 - \beta}{\Delta E_1} e_1 + \frac{\beta_2 - \beta}{\Delta E_2} e_2 + \ldots + \frac{\beta_5 - \beta}{\Delta E_5} e_5 = \beta_0 - \beta.$$

EULER wählt 4 Beobachtungen, von denen 2 Breiten weggelassen werden, aus den übrigen 6 Gleichungen werden die e bestimmt, dann werden $E + e$ die richtigen Elemente sein.

Der erste, welcher das Problem der Bahnbestimmung auf direktem Wege zu lösen versuchte, war LAMBERT[3]); sein 1761 erschienenes Werk »Insigniores orbitae cometarum proprietates« bedeutet aus zwei Gründen einen wesentlichen Fortschritt: 1) Er erweiterte den EULER'schen Satz auf beliebige Kegelschnitte; ist $z = r_1 + r_2 + s$; $\zeta = r_1 + r_2 - s$ so wird

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{n}{10a\sqrt{2}}\left(z^{\frac{5}{2}} - \zeta^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3n}{56a^2\sqrt{2}}\left(z^{\frac{7}{2}} - \zeta^{\frac{7}{2}}\right) + \ldots,$$

---

[1]) In dem 1744 erschienenen Werke »Theoria motuum planetarum et cometarum« wird dieselbe Methode, aber ohne diese Vereinfachung durchgeführt; auch hier wird von der Beziehung zwischen der Sehne und Zwischenzeit keine Anwendung gemacht.

[2]) Die Coëfficienten sind, wie man sieht, die numerischen Differentialquotienten der Länge und Breite nach den Elementen. Diese Methode der Bestimmung der wahren Bahn ist noch jetzt für definitive Bahnbestimmungen die gebräuchlichste, nur werden die Differentialquotienten nicht numerisch, sondern analytisch entwickelt.

[3]) JOH. HEINRICH LAMBERT, geb. 26. Aug. 1728 zu Mühlhausen im Oberelsass, ursprüngvon seinem Vater zum Schneiderhandwerk bestimmt, wurde er jedoch bald Buchhalter in einem Eisenwerke, später Hauslehrer bei dem Präsidenten SALIS in Chur. Nur in seinen Mussestunden beschäftigte er sich mit wissenschaftlichen Arbeiten, in Folge deren er jedoch 1764 Oberbaurath und Mitglied der Akademie in Berlin wurde, wo er am 25. Sept. 1777 starb.

woraus der EULER'sche Satz für $a = \infty$ hervorgeht. 2) Er leitet eine Gleichung ab, welche unmittelbar die Entfernung E_2K_2 (Fig. 41) finden lässt. Obzwar auch LAMBERT an der NEWTON'schen Annahme festhält, dass der Radiusvector des zweiten Ortes die Sehne zwischen dem ersten und dritten im Verhältniss der Zwischenzeiten theilt, wird diese Gleichung vom 6. Grade, giebt also mehr eine theoretische als praktisch brauchbare Lösung[1]). Insolange aber in der ersten Bahnbestimmung die NEWTON'sche Annahme festgehalten wurde, war es notwendig, die erhaltenen Resultate sofort zu verbessern[2]). LAMBERT verwendet nun den EULER'schen Satz, um Correctionen der geocentrischen Distanzen zu suchen, eine Methode, die der jetzt gebräuchlichen der »Variation der Distanzen« als Grundlage dient. Bringt man an die geocentrischen Distanzen ρ_1, ρ_2, ρ_3 kleine Correctionen $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ an, wobei nur vorausgesetzt wird, dass die Elemente bereits so nahe richtig sind, dass man nur die ersten Potenzen dieser Correctionen zu berücksichtigen braucht (differentielle Aenderungen), so wird man

$$dr_1 = a_1 d\rho_1; \quad dr_2 = a_2 d\rho_2; \quad ds = b_1 d\rho_1 + b_2 d\rho_2$$

und aus der EULER'schen Gleichung

$$6kdt = \tfrac{3}{2}(r_1 + r_2 + s)^{\frac{1}{2}}(dr_1 + dr_2 + ds) - \tfrac{3}{2}(r_1 + r_2 - s)^{\frac{1}{2}}(dr_1 + dr_2 - ds)$$
$$= K_1 d\rho_1 + K_2 d\rho_2$$

erhalten. Mit den ersten genäherten Elementen wird sich aus der EULER'schen Gleichung eine Zwischenzeit t_1 ergeben, welche von der beobachteten t_0 verschieden ist, und die Correctionen $d\rho_1$, $d\rho_2$ müssen so bestimmt werden, dass die an die berechnete Zeit t_1 anzubringende Correction dt die beobachtete Zeit t_0 giebt, so also, dass $dt = t_0 - t_1$ ist. Aus zwei Beobachtungen folgt daher:

$$6k(t_0 - t_1) = K_1 d\rho_1 + K_2 d\rho_2.$$

Drei Orte geben drei Gleichungen, aus denen sich $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ bestimmen lassen. Einfacher würde es allerdings scheinen, die Correctionen der heliocentrischen Distanzen zu suchen; da aber solche Aenderungen die durch die Beobachtungen gegebenen Visuren verändern würden, oder aber nebst den heliocentrischen Distanzen auch die Richtungen derselben, d. h. die heliocentrischen Längen zu ändern wären, damit die durch die Endpunkte derselben bestimmten Kometenorte in den geocentrischen Visuren liegen, so würden bedeutende Com-

---

[1]) Dieselbe wird wiedergegeben im III. Bande der »Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, 1772«.

[2]) Noch elementarer erscheint die Methode, welche LACAILLE in seinen »Leçons élémentaires d'Astronomie« mittheilt. Es werden für zwei Kometenorte die geocentrischen Distanzen angenommen, hieraus die heliocentrischen Distanzen bestimmt, aus diesen die sämmtlichen Elemente abgeleitet und daraus die Zwischenzeit berechnet; nun wird die eine Distanz so lange variirt, bis die Zwischenzeit mit der beobachteten übereinstimmt. Mit diesen letzten Elementen wird für die Zeit einer dritten Beobachtung der geocentrische Ort berechnet und mit der Beobachtung verglichen. Dann müssen für die beiden angenommenen geocentrischen Distanzen wieder solange verschiedene Annahmen gemacht werden, bis der berechnete dritte Ort mit dem beobachteten übereinstimmt. Jedenfalls bedeutet diese rein empirische Methode selbst gegenüber der NEWTON'schen noch einen Rückschritt. Dieselbe elementare Methode verwendet auch LALANDE in seiner »Astronomie«. Um jedoch die Versuche zu erleichtern, construirte er 10 Parabeln mit verschiedenen Periheldistanzen, theilte dieselben in Tage, d. h. notirte zu verschiedenen wahren Anomalien die zugehörigen Zeiten, und legte diese Schablonen in gegebenen Fällen so swischen die Visuren, dass die von den letzteren ausgeschnittenen Zwischenzeiten den beobachteten entsprachen. Hierdurch ergaben sich auf leichte Weise rohe Näherungen, die der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt werden konnten.

plikationen eintreten. Die geocentrischen Distanzen sind eben deshalb die einfachsten zu bestimmenden Elemente, weil nur ihre Längen zu bestimmen sind, da ihre Richtungen durch die Beobachtungen als fest gegeben zu betrachten sind.

In den ersten Annahmen für die geocentrischen Distanzen wird man aber bei den Versuchen oft sehr weit von der Wahrheit abweichen können; zwar giebt der Glanz, die Geschwindigkeit der Bewegung eine gewisse Directive, die aber dennoch zu weit von der Wahrheit entfernten Resultaten führen kann. LAMBERT hatte nun in den neuen Memoiren der Berliner Akademie für 1771 das als »LAMBERT'scher Satz« bekannte Theorem aufgestellt: »wenn die scheinbare Bahn des Kometen vom grössten Kreise so abweicht, dass die zwischenliegenden Punkte dem Orte der Sonne am Himmel genähert (zur Sonne convex) erscheinen, so wird die Entfernung des Kometen von der Sonne grösser als diejenige der Erde von der Sonne sein; wendet aber die scheinbare Bahn ihre concave Seite der Sonne zu, so wird der Komet der Sonne näher sein als die Erde.«[1]) Seien, um dieses zu beweisen A, B, C (Fig. 47) drei Orte der Erde in ihrer Bahn, M, Q, N die Orte des Kometen zu denselben Zeiten, so repräsentiren Bb, Qq die Fallräume der beiden Himmelskörper gegen die Sonne in gleichen Zeiten, verhalten sich daher wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen; d. h. es ist

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2,$$

(A. 47.)

da aber die Bewegung in der Sehne gleichförmig angenommen werden kann, so wird

$$Ab : bC = Mq : qN.$$

Nimmt man an, dass sich die Erde und der Komet in gerader Linie bewegen, so wird die scheinbare Bahn des Kometen ein grösster Kreis sein, welcher aus den Richtungen AM, CN bestimmt werden kann. Ist nun der Komet weiter als die Erde von der Sonne, so ist $Bb > Qq$ und die Neigung des Strahles BQ gegen Bb grösser als gegen die Richtung Qq (da $QS > BS$, so ist $\sphericalangle QBS > \sphericalangle BQS$), demnach müssen sich die Strahlen BQ und bq in einem Punkte R schneiden, der in der Richtung der Visuren von der Erde zum Kometen liegt, woraus sofort folgt, dass $\sphericalangle RBS < \sphericalangle RbS$ ist, d. h. die scheinbare Elongation des Kometen von der Sonne ist kleiner, als im grössten Kreise: der Komet erscheint der Sonne genähert, die scheinbare Kometenbahn wendet der Sonne ihre convexe Seite zu. Ganz ähnlich folgt der zweite Theil des Satzes.

Die ziemlich umfassenden Arbeiten von BOSCOWICH über die Bahnbestimmung der Kometen, welche im III. Bd. seiner Opuscula gesammelt sind, sind weniger wegen ihrer praktischen Resultate bemerkenswerth, als weil sie manche interessante Streiflichter auf die theoretischen Schwierigkeiten werfen. BOSCOWICH nimmt z. B. als Vereinfachung an, dass der Komet sich mit einer mittleren Geschwindigkeit gleichförmig durch die Sehne bewegt, und dass die Länge der durchlaufenen Sehne zur Länge der von der Erde durchlaufenen Sehne (also die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten) sich verhalten wie verkehrt die Quadrate der Entfernungen von der Sonne. Unter dieser nur für unendlich kleine Strecken giltigen Annahme ergiebt sich eine Gleichung 6. Grades, wenn die der Mitte

[1]) Vergl. hierfür auch H. BRUNS, A. N. Nr. 2824.

der Zeit zugehörige curtirte Distanz als Unbekannte gewählt wird. Die Gleichung erniedrigt sich auf den dritten Grad, wenn der Komet einmal in der Conjunction oder Opposition mit der Sonne beobachtet wurde.

Den nächsten wichtigen Schritt zur Lösung des Problems that LAGRANGE[1]). Es sind hauptsächlich zwei Punkte, durch welche sich seine Lösung auszeichnet: Er berücksichtigt die zweiten Potenzen der Zwischenzeiten und bringt die Verbesserungen noch vor der Berechnung der Elemente an. Der Gang seiner Entwickelungen ist im Wesentlichen der noch jetzt übliche: Die räumlichen Coordinaten x, y, z werden durch 2 neue Veränderliche t, u in der Form ausgedrückt:

$$x = at + bu; \quad y = ct + du; \quad z = ft + gu$$

wodurch die Bedingung der Ebene erfüllt werden muss. Sind t', u'; t'', u''; t''', u''' die Werthe der neuen Veränderlichen für die drei Kometenbeobachtungen, so sind:

$$L = t''u' - t'u''; \quad M = t'''u' - t'u'''; \quad N = t'''u'' - t''u'''$$

die Dreiecksflächen. Da aber nach dem TAYLOR'schen Satz:

$$t' = t'' - \frac{dt''}{dT}\tau''' - \frac{Ft''}{2r''^3}\tau'''^2 \qquad u' = u'' - \frac{du''}{dT}\tau''' - \frac{Fu''}{2r''^3}\tau'''^2$$

$$t''' = t'' + \frac{dt''}{dT}\tau' - \frac{Ft''}{2r''^3}\tau'^2 \qquad u''' = u'' + \frac{du''}{dT}\tau' - \frac{Fu''}{2r''^3}\tau'^2$$

ist, so folgt

$$L = \sqrt{p}\cdot\tau'''; \quad M = \sqrt{p}\cdot\tau''\left(1 - \frac{F\tau'\tau'''}{2r''^3}\right); \quad N = \sqrt{p}\cdot\tau',$$

wobei τ' die Zwischenzeit zwischen der zweiten und dritten, τ'' zwischen der ersten und dritten, τ''' zwischen der ersten und zweiten Beobachtung (multiplicirt mit der Constante k) und r'' der Radiusvector der zweiten Beobachtung ist. Hierbei sind also die zweiten Potenzen der Zwischenzeiten nur unvollständig berücksichtigt, in L und N fehlen die Glieder zweiter Ordnung, die in M auftreten[2]), was davon herrührt, dass in den Entwickelungen von t', t''', u', u''' die dritten Potenzen von τ weggelassen wurden.

LAGRANGE leitet hieraus eine Gleichung 8. Grades ab, deren constantes Glied 0 ist, so dass $\rho'' = 0$ eine Lösung ist[3]). Schliesst man diese aus, so folgt eine Gleichung 7. Grades; da diese nur durch Versuche gelöst werden könnte, so wird sie nicht weiter berücksichtigt, sondern der einfache Weg der direkten Näherungen betreten. Es werden zunächst nur die ersten Potenzen der Zwischenzeiten berücksichtigt, d. h. die Rechnung mit der NEWTON'schen Annahme begonnen, damit ergeben sich geocentrische und heliocentrische Distanzen des Kometen, mit diesen genäherten Werthen können dann die Glieder zweiter Ordnung der Zwischenzeiten berücksichtigt werden und man erhält Werthe der geocentrischen Distanzen, welche bis einschliesslich dritter Ordnung der Zwischenzeiten richtig sind, mit denen dann die Elemente berechnet werden[4]).

Den Fehler, welcher aus der Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung in L und M entsteht, verbesserte LAGRANGE in seiner zweiten Abhandlung[5]).

---

[1]) Nouveaux Mémoires de Berlin für 1778.

[2]) Die Zusatzglieder in L und N entstehen eben aus den vernachlässigten Gliedern dritter Ordnung.

[3]) Diese entspricht der Erdbahn, welche allen Bedingungen der Aufgabe ebenfalls genügt.

[4]) Selbstverständlich sind nicht die Potenzen der in Tagen ausgedrückten Zwischenzeit zu verstehen, es ist in der hierzu verwendeten Einheit 1 Tag = 0·0172.

[5]) Nouveaux mémoirs de Berlin. 1783.

Er entwickelt hier die Coordinaten des ersten und dritten Ortes nach der TAYLOR'schen Reihe bis inclusive zu der 4. Ordnung der Zwischenzeiten und erhält schliesslich mit Vernachlässigung der von $\frac{dr}{dt}$ abhängigen Glieder 4. Ordnung für die drei geocentrischen Distanzen:

$$\rho' = \frac{M_1 - \frac{N_1}{6r''^3}}{\delta\left(\tau' - \frac{\tau'^3}{6r''^3}\right)} \qquad \rho'' = -\frac{M_2 - \frac{N_2}{6r''^3}}{\delta\left(\tau'' - \frac{\tau''^3}{6r''^3}\right)} \qquad \rho''' = \frac{M_3 - \frac{N_3}{6r''^3}}{\delta\left(\tau''' - \frac{\tau'''^3}{6r''^3}\right)},$$

wobei

$$M_i = \Delta_i' R'\tau' - \Delta_i'' R''\tau'' + \Delta_i''' R'''\tau'''$$
$$N_i = \Delta_i' R'\tau'^3 - \Delta_i'' R''\tau''^3 + \Delta_i''' R'''\tau'''^3$$

ist, und Δ_i', Δ_i'', Δ_i''', δ aus den Beobachtungen gegebene Grössen sind: Δ sind die auf der Kugel eingeschlossenen Flächen zwischen je einem Sonnenorte und zwei Kometenorten, und δ die Fläche zwischen den drei Kometenorten. Vernachlässigt man in erster Näherung die von den dritten Potenzen der Zwischenzeiten abhängigen Glieder (womit r'' fortfällt), so erhält man einen genäherten Werth für ρ'' und r'', womit dann die Glieder dritter Ordnung berechnet werden können[1]).

Für die praktische Anwendung bieten diese Gleichungen jedoch besondere Schwierigkeiten, indem ja δ in Folge der relativ schwachen Krümmung der scheinbaren Kometenbahn eine sehr kleine Grösse ist, und daher auch naturgemäss die M und N äusserst klein werden müssen, sodass die Ausdrücke für die geocentrischen Distanzen sich der Form $\frac{0}{0}$ nähern[2]). Aus diesem Grunde scheint LAGRANGE später (in seiner Mécanique analytique) wieder auf die Bestimmung durch eine Gleichung höheren Grades zurückgegangen zu sein. Die angegebene Schwierigkeit wurde erst gehoben, als DU SÉJOUR (1779) das Verhältniss zweier geocentrischer Distanzen in die EULER'sche Gleichung einführte. Sei für irgend einen Kometenort (Fig. 41) R der Radiusvector der Erde, r der des Kometen, ρ die geocentrische Distanz des Kometen, und E der Winkel zwischen R und ρ; E wird aus den geocentrischen Längen und Breiten des Kometen und der Sonne berechnet, und als bekannt angesehen. Dann ist

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos E.$$

Diese Gleichung, für den zweiten Kometenort aufgestellt, wurde von BOSCOWICH und LAGRANGE verwendet, um mit dem aus mechanischen Principien gefolgerten Werth von ρ'' verbunden, die Gleichungen zur Bestimmung von ρ'' und r'' zu geben. Es ist aber für einen andern Kometenort:

$$r'^2 = R'^2 + \rho'^2 - 2R'\rho' \cos E'.$$

Ebenso kann man die Sehne s durch ρ, ρ' und die beobachteten geocentrischen Längen und Breiten ausdrücken[3]), und es wird:

$$s^2 = A\rho^2 + A'\rho'^2 + B\rho\rho' + C\rho + C'\rho' + D,$$

wobei die Coëfficienten $A, A' \ldots . D'$ bekannte Grössen sind. DU SÉJOUR be-

---

[1]) LAGRANGE leitet hier wieder eine Gleichung 7. Grades ab, die aber für die praktische Anwendung nicht weiter in Betracht kommt.

[2]) Wenn die scheinbare Bahn des Kometen fast kreisförmig ist, so wird diese Schwierigkeit überhaupt nicht zu beheben, und man muss dann seine Zuflucht zu Bahnbestimmungen aus 4 Orten nehmen.

[3]) Am einfachsten durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten.

stimmt nun das Verhältniss $\frac{\rho'}{\rho} = M$ und setzt dieses in die drei Gleichungen ein, dann wird:

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + a\rho + b \\ r'^2 &= M\rho^2 + a'\rho + b' \\ s^2 &= K\rho^2 + a''\rho + b''. \end{aligned} \qquad (x)$$

Macht man daher für ρ eine Annahme, so erhält man daraus sofort r, r', s. Diese Werthe werden in die EULER'sche Gleichung substituirt und die sich durch die Rechnung ergebende Zwischenzeit τ mit der beobachteten τ_0 verglichen. ρ muss so lange variirt werden, bis $\tau = \tau_0$ wird, dann ist ρ sofort der wahre Werth, mit welchem sich die wahren Werthe von r, r' und dem Zwischenwinkel ergeben, ohne dass man nöthig hätte, zuvor die Bestimmung von genäherten Elementen vorzunehmen, da sich sofort aus dem Endwerthe von ρ die wahren Elemente finden. Eine Schwierigkeit liegt aber noch in der Bestimmung von M. Dieser Werth ist proportional dem Verhältnisse der Dreiecksflächen $\frac{N}{L}$[1]. DU SÉJOUR benutzt die von LAGRANGE in der ersten Abhandlung (1778) erhaltenen Formeln, und setzt demnach $\frac{N}{L} = \frac{\tau'}{\tau'''}$, so dass

$$M = \frac{\tau'}{\tau'''} G$$

wird, wo G nur von den beobachteten Längen und Breiten abhängt[2]), und hält diesen Ausdruck für strenge bis inklusive Grössen von der vierten Ordnung der Zwischenzeiten. Natürlich wird bei weiter von einander entfernten Beobachtungen ein bedeutender Fehler entstehen können, was DU SÉJOUR in praktischen Fällen nicht entgangen zu sein scheint; denn für weiter von einander entfernte Beobachtungen schlägt er intermediäre Beobachtungen vor, und er bestimmt

$$M = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_2} \cdots\cdots \frac{\rho'}{\rho_n},$$

wobei die Verhältnisse $m_1 = \frac{\rho_1}{\rho}$, $m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, $m_2 = \frac{\rho_3}{\rho_2}$ .... genügend sicher ermittelt werden können, und dann wird $M = m_1 m_2 m_3 \ldots$

Auch OLBERS hat in seiner 1797 erschienenen »Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu bestimmen«, in erster Linie denselben Ausdruck für M, ersetzt für die zweite genauere Bahnbestimmung jedoch die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch[3])

$$\frac{N}{L} = \frac{r_1 r_2 \sin K_1 S K_2}{r_2 r_3 \sin K_2 S K_3}$$

und nimmt die Bestimmung von ρ ebenfalls aus den Gleichungen (x) durch Substitution derselben in die EULER'sche Gleichung vor[4]).

---

[1]) s. Bahnbestimmung.

[2]) s. Bahnbestimmung.

[3]) Die Einführung der höheren Potenzen der Zwischenzeiten in dem Ausdruck für $N:L$ rührt erst von GAUSS her. HEINRICH WILHELM OLBERS, geb. am 11. Okt. 1758 zu Arbergen, praktischer Arzt in Bremen, beschäftigte sich in seinen Mussestunden viel mit Astronomie, starb am 2. März 1840.

[4]) Die Abkürzung des Verfahrens durch Substitution der analytischen Ausdrücke von r, r', s in die EULER'sche Gleichung rührt ebenfalls von GAUSS her. S. Ges.-Werke, Bd. VI, pag. 29.

Die Formel für M folgt aus der Elimination einer Distanz aus den Gleichungen für die Ebene. Allgemein entsteht hieraus eine Gleichung $\rho' = m + M\rho$. Dass m verschwindet, hat seinen Grund darin, dass auch für die Erdbahn die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Verhältnisse der Zwischenzeiten ersetzt werden können. Auf diesen Umstand hat schon Olbers hingewiesen, Encke hat ihn[1]) näher auseinandergesetzt, aber es ist hieraus unmittelbar klar, dass auch die Du Séjour'sche Methode ihn bereits berücksichtigt. Die beiden Methoden sind daher dem Wesen nach völlig identisch, und man muss sie folgerichtig die Du Séjour-Olbers'sche nennen.

Wesentlich verschieden ist die Methode von Laplace[2]); sie ist in Kürze die Folgende. Seien x, y, z, r die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten und Radiusvector des Kometen, x_1, y_1, R heliocentrische Coordinaten und Radiusvector der Erde, λ, β, ρ geocentrische Länge, Breite und Distanz des Kometen, so wird

$$\xi = \rho \cos\lambda \cos\beta$$
$$\eta = \rho \sin\lambda \cos\beta$$
$$\zeta = \rho \sin\beta$$
$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \rho\cos\lambda\cos\beta \\ y &= y_1 + \rho\sin\lambda\cos\beta \\ z &= \rho\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Coordinaten x, y, z, x_1, y_1 müssen aber den Differentialgleichungen genügen (M. d. H.),

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{r^3} &= 0 \quad (2) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{kz}{r^3} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{kx_1}{R^3} &= 0 \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{ky_1}{R^3} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Bildet man aus (1) die zweiten Differentialquotienten und setzt (2) und (3) ein, so erhält man drei Gleichungen, in denen $\rho, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d^2\rho}{dt^2}, \lambda, \beta, \frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}$, ferner an Stelle von x_1, y_1 die Coordinaten L, R der Erde eintreten; aus diesen drei Gleichungen kann man, da $\rho, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d^2\rho}{dt^2}$ linear vorkommen, die letzten beiden eliminiren und erhält eine Gleichung

$$\rho = \frac{R}{\mu}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

wobei

$$\mu = \frac{\frac{d\lambda}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\cos\beta - \frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\lambda}{dt^2}\cos\beta + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^3 \sin\beta\cos^2\beta + 2\frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \sin\beta}{\frac{d\lambda}{dt}\sin\beta\cos\beta\cos(L-\lambda) + \frac{d\beta}{dt}\sin(L-\lambda)}$$

ist, welche in Verbindung mit der Gleichung

$$r^2 = \rho^2 + 2R\rho\cos\beta\cos(L-\lambda) + R^2$$

durch Elimination von r die Gleichung 7. Grades

$$[\rho^2 + 2R\rho\cos\beta\cos(L-\lambda) + R^2]^3(\mu R^2\rho + 1)^2 = R^6$$

giebt. Charakteristisch für die Methode ist nun aber die Bestimmung von μ. Es treten hier die Differentialquotienten der geocentrischen Länge und Breite

[1]) Berliner Astronom. Jahrb. 1833.

[2]) Memoiren der Pariser Akademie für 1780.

auf, welche aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen empirisch bestimmt werden. Allgemein lässt sich schreiben

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{d\lambda}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{dt^2}(t - t_0)^2 + \ldots$$
$$\beta = \beta_0 + \frac{d\beta}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{dt^2}(t - t_0)^2 + \ldots$$

Wählt man eine Beobachtung λ_0, β_0, die zu einer ungefähr der Mitte aller Beobachtungen entsprechenden Zeit t_0 gehört, und setzt in diese Gleichungen, die zu den anderen Beobachtungszeiten $t, t', t'' \ldots$ gehörenden beobachteten $\lambda, \beta, \lambda', \beta', \lambda'', \beta''$ ein, so kann man daraus die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}$ bestimmen[1]). Die Genauigkeit der Bahnbestimmung hängt von der Güte der erhaltenen Werthe dieser letzteren ab, die um so besser werden, je besser und zahlreicher die verwendeten Beobachtungen sind[2]). Ist ρ ermittelt, so kann auch $\frac{d\rho}{dt}$ berechnet werden und damit $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, d. h. man kennt dann die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten (Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung) des Himmelskörpers und kann danach die Bahn bestimmen (s. pag. 134).

Die Methode ist unabhängig von der Form der Bahn[3]), und kann auch für elliptische Bahnen verwendet werden. Zunächst hatte LAPLACE wohl auch nur an die Berechnung von parabolischen Kometenbahnen gedacht Am 13. März 1781 hatte F. W. HERSCHEL[4]) ein wandelndes Gestirn 6. Grösse entdeckt, für welches zunächst als Komet eine parabolische Bahn berechnet wurde[5]). Die Abweichungen waren aber bald so gross, dass man diese Bahn verlassen musste, und in der That fand man dann sofort, dass sich die Beobachtungen recht gut durch eine kreisförmige Bahn darstellen liessen. Die Methode, diese kreisförmige Bahn zu erhalten, war die folgende. Der Halbmesser a des Kreises wird willkürlich angenommen, damit sind dann die in zwei geocentrischen Visuren gelegenen heliocentrischen Oerter sofort bekannt, demnach auch der von dem Gestirn zurückgelegte heliocentrische Winkel ω. Durch das dritte KEPLER'sche Gesetz

---

[1]) Die höheren Differentialquotienten werden nicht benöthigt.

[2]) Die Methode wurde später von CAUCHY (Comptes rendus für 1846) wieder aufgenommen, welcher für die Bestimmung von ρ eine lineare Gleichung ableitet, wenn mindestens 4 Beobachtungen gegeben sind, wobei auch die dritten Differentialquotienten $\frac{d^3\lambda}{dt^3}, \frac{d^3\beta}{dt^3}$ gebraucht werden.

[3]) Für die Parabel tritt noch eine Bedingung hinzu, welche an Stelle der Gleichung 7. Grades eine Gleichung 6. Grades ergiebt.

[4]) FRIEDR. WILH. HERSCHEL, geb. am 15. Nov. 1738 zu Hannover, ging 1757 nach England, war ursprünglich Musiker, benutzte seine freien Stunden zum Studium der Mathematik und Schleifen von Spiegeln für Fernröhre; er construirte 7-, 10- bis 20füssige Spiegel, und als er mit einem selbstgefertigten Instrumente den Uranus entdeckt hatte, wurde er von GEORG III. zu seinem Astronomen ernannt. Besonders aber durch eine reiche Heirath war er in den Stand gesetzt, sich ausschliesslich wissenschaftlichen Studien zu widmen, und zwar vorzugsweise der Stellarastronomie, wobei er von seiner Schwester CAROLINE (geb. am 16. März 1750 zu Hannover, gest. am 9. Jan. 1848) thatkräftig unterstützt wurde. HERSCHEL starb am 25. Aug. 1822 zu Slough.

[5]) Schweiflose teleskopische Kometen waren damals schon bekannt.

ist aber die Umlaufszeit für die halbe grosse Axe a (wenn dieselbe in Einheiten der Erdbahnhalbaxe ausgedrückt wird)

$$T = 365^d\,2422\, a^{\frac{3}{2}},$$

folglich der in der Zeit t zurückgelegte Winkel

$$\omega_1 = 360° \frac{t}{T}$$

und es muss $\omega = \omega_1$ sein. Ist dieses nicht der Fall, so muss a so lange geändert werden, bis die Uebereinstimmung hergestellt ist.

Nachdem der planetarische Charakter des neu entdeckten Gestirns, welches den Namen Uranus erhielt, festgestellt war, konnte LAPLACE sofort seine Methode zur Bestimmung elliptischer Elemente anwenden, und bereits 1784 hatte er solche berechnet, die den wahren schon sehr nahe kamen (der Fehler der Excentricität betrug nur 0·0012, derjenige des Knotens etwa 12′, der grossen Axe 0·11 Erdbahnhalbaxe) bei einem heliocentrischen Bogen von noch nicht 15°.

Nachdem durch die Entdeckung des Uranus die Annahme noch anderer Planeten, als der seit Jahrtausenden bekannten sechs bestätigt war, begannen die schon früher gehegten Vermuthungen über das Vorhandensein eines Planeten zwischen Mars und Jupiter festeren Boden zu gewinnen, und man fasste den Plan, durch systematische Durchforschung der Ekliptikalzonen, Zeichnen von Karten und wiederholtes Vergleichen derselben mit dem Himmel, diese wandelnden Gestirne zu finden. In diese Arbeit sollten sich 24 Astronomen theilen. Noch vor Inangriffnahme dieses Planes hatte aber PIAZZI, der mit den Beobachtungen zu einem Sternkatalog beschäftigt war, am 1. Januar 1801 einen neuen Planeten als Stern 8. Grösse im Sternbilde des Stieres gefunden, welchem er, nachdem sein planetarischer Charakter festgestellt war, den Namen Ceres Ferdinandea gab. Von diesem Gestirn waren Beobachtungen über einen Zeitraum von 40 Tagen erhalten, und so leicht es war, eine die Beobachtungen mässig gut darstellende Kreisbahn zu erhalten, so schwer schien es, eine elliptische Bahn zu berechnen, welche es ermöglichen solllte, das Gestirn im nächsten Jahre selbst für den Fall wesentlich ungünstiger Verhältnisse (starker Excentricität und Bewegung gegen das Aphel), in denen es auch als 9. Grösse und schwächer hätte erscheinen können, wieder aufzufinden. Diese Aufgabe löste der damals 24jährige C. F. GAUSS[1]). Aus den nur 40tägigen Beobachtungen, in denen der Planet einen heliocentrischen Bogen von etwa $9\frac{1}{4}°$ zurückgelegt hatte, bestimmte er elliptische Elemente, welche seinen Ort im nächsten Jahr auf $\frac{1}{2}°$ richtig ergaben.

Bald hatte GAUSS Gelegenheit, seine Methode noch weiter anzuwenden. Denn als OLBERS am 28. März 1802 die Pallas und am 29. März 1807 die Vesta und inzwischen HARDING am 1. Sept. 1804 die Juno entdeckt hatte, war es stets wieder GAUSS, dessen Rechnungen den Astronomen die Bahnen der Gestirne und ihre künftigen Stellungen anzeigten. Mit Spannung erwartete man allerseits die Publikation seiner Methode, welche er 1809 in seiner »Theoria motus corporum coelestium« gab. Auf einen wesentlichen Punkt dieser Methode ist schon pag. 154 hingewiesen worden, nämlich die Berücksichtigung der höheren Potenzen der Zwischenzeiten[2]), welche durch Einführung der η (Verhältniss des

[1]) CARL FRIEDR. GAUSS, geb. am 30. April 1777 zu Braunschweig, seit 1807 Professor der Mathematik und Direktor der Sternwarte in Göttingen, wo er am 23. Febr. 1855 starb.

[2]) Die dort erwähnte Transformation der Lösung für das Kometenproblem datirt erst aus dem Jahre 1813.

Sectors zum Dreieck) bewirkt erscheint. Ein zweiter wesentlicher Punkt ist die Wahl der Unbekannten; dadurch, dass als Unbekannte der Winkel z, welcher von r und ρ am zweiten Planetenorte eingeschlossen wird, gewählt ist, erscheint die Gleichung 8. Grades auf eine sehr einfache, in transcendenter Gestalt auftretende $A \sin z^4 = \sin (z + \omega)$ zurückgeführt. Diese wenigen Bemerkungen werden an dieser Stelle genügen, indem bezüglich alles Weiteren auf den Artikel »Bahnbestimmung« verwiesen werden kann, in welchem speciell die GAUSS'sche Methode mit den späteren Erweiterungen von VON OPPOLZER ausführlich dargestellt ist. Es muss jedoch noch erwähnt werden, dass die Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen den Anstoss zur Einführung der »Methode der kleinsten Quadrate« (s. diese) gab, welche 1806 von LEGENDRE und 1809 von GAUSS publicirt wurde, nachdem wahrscheinlich beide unabhängig von einander bereits längere Zeit in ihrem Besitze gewesen waren.

Ebenso kann für die weiteren Untersuchungen auf dem Gebiet der Störungstheorie auf den Artikel »Mechanik des Himmels« verwiesen werden. In Kürze mag angeführt werden, dass die Untersuchungen der Folgezeit zunächst nach drei Richtungen ausgedehnt wurden.

1) Die Integration der Störungsgleichungen, mögen dieselben nun in welcher Form immer verwendet werden, erfordert die analytische Entwickelung der störenden Kräfte. Je weiter man in dieser Richtung die analytischen Entwickelungen führen kann, in denen später die numerischen Substitutionen eingeführt werden, einen desto genaueren Einblick kann man von den erhaltenen Formeln erwarten. In dieser Richtung ist zunächst LAPLACE, sodann BESSEL, LEVERRIER, HANSEN, NEWCOMB[1]) zu nennen. Im Gegensatze zu dieser analytischen Methode hat HANSEN wiederholt die numerischen Reihenentwickelungen angewendet (s. pag. 146), durch welche zwar die mathematische Eleganz verloren geht und die Sicherheit der Schlüsse etwas erschwert, hingegen eine oft erwünschte grössere Raschheit in der Gewinnung der Resultate erlangt wird.

2) Bezüglich der Integrationsmethode muss bemerkt werden, dass die von CLAIRAUT begründete (Bestimmung der Störungen in polaren Coordinaten) im wesentlichen von LAPLACE, DAMOISEAU, PLANA, PONTÉCOULANT, HANSEN, theilweise

---

[1]) FRIEDRICH WILHELM BESSEL, geb. am 22. Juli 1784 zu Minden, ursprünglich Handlungsgehilfe, später der Astronomie durch OLBERS zugeführt, wurde erst Assistent bei SCHRÖTER in Lilienthal, 1810 Professor der Astronomie in Königsberg, wo er am 14. März 1846 starb. In der theoretischen Astronomie sind noch besonders hervorzuheben seine Verdienste um die Bestimmung der Präcession und Nutation, seine Untersuchungen über die Refraction; aus der Stellarastronomie seine Reduction der BRADLEY'schen Beobachtungen, die Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni, seine Zonenbeobachtungen. Ganz besondere Verdienste erwarb er sich um die Erhöhung der Genauigkeit der Beobachtungen. Ueber seine geodätischen Arbeiten s. »Gradmessung«.

URBAIN JEAN JOSEPH LEVERRIER, geb. am 11. Mai 1811 zu St. Lo, erst Ingenieur, wurde 1846 Professor der Astronomie an der Pariser Fakultät der Wissenschaften, 1852 Mitglied der Akademie, 1873 Direktor der Pariser Sternwarte, starb 23. Sept. 1877. Seine Arbeiten sind in den Annalen der Pariser Sternwarte gesammelt.

PETER ANDREAS HANSEN, geb. am 8. Dec. 1795 zu Tondern in Schleswig, ursprünglich Uhrmacher, studirte später in Kopenhagen und wurde 1826 Direktor der Sternwarte in Gotha, wo er am 28. März 1874 starb.

SIMON NEWCOMB, geb. 1835 zu Wallace in Neu-Schottland; seit 1861 Professor U. S. Navy und Superintendent der American Ephemeris in Washington, später zugleich Professor der Astronomie in Baltimore.

mit nicht unbeträchtlichen Aenderungen[1]) benutzt wurde. Die Methode der Elementenstörungen wurde hauptsächlich von LEVERRIER, POISSON, DELAUNAY[2]) mit grossem Vortheil in Anwendung gebracht. Die EULER'sche Methode der Störungen in rechtwinkligen Coordinaten findet sich, wenigstens theilweise, wieder bei HANSEN's »idealen Coordinaten« und neuerdings in consequenterer Weise bei OPPOLZER's[3]) »Proportionalcoordinaten«.

3) Neben diesen Untersuchungen muss auf die in neuester Zeit von GYLDÉN[4]), POINCARÉ u. A. vorgenommenen Versuche hingewiesen werden, welche zur Erhöhung der Convergenz der Entwickelungen an Stelle der trigonometrischen Functionen andere Functionsklassen (elliptische Functionen) und an Stelle der elliptischen Bewegung von vornherein andere Grundcurven (von GYLDÉN mit dem Namen periplegmatische Curven bezeichnet) einzuführen strebten. Auf diese Untersuchungen, welche bereits einer neuen Periode der Astronomie anzugehören scheinen, wird ebenfalls in dem Artikel »Mechanik des Himmels« ausführlich eingegangen[5]).

Auf zwei specielle Punkte muss noch in Kürze hingewiessen werden, wenngleich dieselben auch in dem Artikel »Mechanik des Himmels« ausgeführt werden; es sind dies die Entdeckung des Neptun und die anomalen Bewegungserscheinungen gewisser periodischer Kometen.

Bald nach der Entdeckung des Uranus bemerkte man starke Abweichungen seiner Bewegung von der theoretisch unter Berücksichtigung der Störungen berechneten, und BESSEL hatte schon 1823 die Vermuthung ausgesprochen, dass eine äussere störende Ursache zur Erklärung der Anomalie supponirt werden müsste. Aber erst 1843 begann ADAMS[6]) Rechnungen in dieser Richtung, und zwei Jahre später LEVERRIER. Bereits 1845 hatte ADAMS seine Resultate CHALLIS mitgetheilt, welcher aber erst im folgenden Jahre Nachforschungen am Himmel begann; am

---

[1]) Bei den späteren Arbeiten treten die verschiedenen Methoden oft gemischt auf. So berücksichtigt POISSON bereits die Bewegung der Knoten und Apsiden in besonderer Weise; ebenso spielen bei HANSEN's Ableitung der Störungen in den polaren Coordinaten die Elementenstörungen eine nicht unwesentliche Rolle.

[2]) CHARLES DELAUNAY, geb. am 9. April 1816 zu Lusigny, studirte an der polytechnischen Schule in Paris, wurde 1853 Professor der Mechanik an derselben und 1870 Direktor der Pariser Sternwarte. Er fand seinen Tod bei einer Kahnfahrt im Hafen von Cherbourg am 5. Aug. 1872.

GEORGE BIDDELL AIRY, dessen Fortsetzung der Arbeiten DELAUNAY's pag. 132 erwähnt ist, wurde geb. am 27. Juli 1801, 1828 Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Cambridge, von 1836 bis 1881 Königlicher Astronom und Direktor der Sternwarte in Greenwich. Er starb am 2. Jan. 1892. Bezüglich eines fundamentalen Unterschiedes in der Integrationsmethode bei DELAUNAY s. Mechanik des Himmels. Erwähnt seien hier auch die Specialuntersuchungen: GAUSS' Methode der Berechnung der Secularstörungen und JACOBI's »Elimination der Knoten im Dreikörperproblem«.

[3]) THEODOR RITTER v. OPPOLZER, Sohn des berühmten Arztes und Klinikers JOHANN v. OPPOLZER, geb. am 26. Oct. 1841 in Prag, ursprünglich ebenfalls der Medizin bestimmt, widmete er sich bald der Astronomie, wurde 1870 Professor in Wien und baute sich daselbst eine eigene Sternwarte. Er starb am 26. Dez. 1886.

[4]) HUGO GYLDÉN, geb. am 29. Mai 1841 zu Helsingfors, seit 1871 Direktor der Sternwarte in Stockholm.

[5]) An dieser Stelle müssen auch HARZER, LINDSTEDT genannt werden, wenngleich ihre Untersuchungen sich mehr den früheren Arbeiten GYLDÉN's anschliessen.

[6]) JOHN COUCH ADAMS, geb. am 5. Juni 1819 zu Lancast in Cornwall, seit 1858 Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Cambridge (Engl.), gestorben daselbst am 21. Jan. 1892.

4. und 12. August 1846 hatte er auch den Planeten nach den Rechnungen von ADAMS beobachtet, da er jedoch die Beobachtungen nicht sofort reducirte, kam ihm GALLE in Berlin mit der Publikation zuvor. Dieser hatte nach den im gleichen Jahre vollendeten Rechnungen LEVERRIER's am 23. Sept. 1846 in Berlin einen Stern 8. Grösse gefunden, welcher in der damals vollendeten BREMIKER'schen Sternkarte dieser Gegend nicht enthalten war; es war dann leicht, durch Vergleichung der Beobachtungen zweier auf einanderfolgender Nächte die planetarische Natur dieses Sterns und in Folge dessen die Identität mit dem von LEVERRIER errechneten Planeten zu constatiren.

Es war zunächst der von PONS im Jahre 1818 entdeckte Komet von 3⅓ Jahren Umlaufszeit, der durch die stete Verkürzung seiner Umlaufszeit nach sorgfältiger Anbringung aller Störungen ENCKE[1]) veranlasste, die Hypothese der Bewegung der Himmelskörper in einem widerstehenden Mittel genauer zu untersuchen. Allerdings hatte schon EULER 1746 eine derartige Untersuchung vorgenommen, allein seine Resultate sind incorrekt, indem er eine Verlängerung der Umlaufszeit erhält. Dieses für den ersten Augenblick als richtig erscheinende Resultat ist jedoch unrichtig. Die Wirkung des widerstehenden Mittels bedingt zunächst eine Verkleinerung der Tangentialgeschwindigkeit, in Folge dessen eine stärkere Wirkung der Centralkraft, wodurch eine grössere Annäherung an den Centralkörper, also eine Verkleinerung der grossen Axe, demnach eine Verkürzung der Umlaufszeit entsteht. Spätere Untersuchungen von ENCKE, ASTEN, WINNECKE, MÖLLER, OPPOLZER, BACKLUND für diesen und andere periodische Kometen kurzer Umlaufszeit (WINNECKE'scher, FAYE'scher Komet) führten zu theilweise einander widersprechenden Resultaten. In gewissen Fällen ist der Widerstand des Mittels unzweifelhaft zu constatiren, in anderen nicht, während ENCKE ein bestimmtes Widerstandsgesetz annimmt, findet OPPOLZER, dass jedes Widerstandsgesetz innerhalb gewisser Grenzen die Beobachtungen gleich gut darstellt; im Gegensatz hierzu ergaben BACKLUND's Arbeiten über den ENCKE-schen Kometen, dass kein Widerstandsgesetz die Beobachtungen darzustellen vermag, wodurch eine Annäherung an den Standpunkt SEELIGER's über die Natur des widerstehenden Mittels gegeben ist[2]). Rechnet man hierzu, dass der ENCKE-sche Komet in der Zeit zwischen 1865 und 1871 entgegen allen früheren und späteren Erscheinungen keine Spur einer besonderen Störung zeigte, so muss man wohl zu dem Schlusse geführt werden, dass die Lösung dieser Frage der theoretischen Astronomie noch der Zukunft vorbehalten ist.

Es ist nicht zu übersehen, dass die Zulänglichkeit des NEWTON'schen Attractionsgesetzes als durch die Beobachtungen erwiesen zu betrachten war in einem Stadium, in dem die Bogensecunde bei Beobachtungen noch nicht die heutige Rolle spielte (um die Mitte und selbst noch bis gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts), dass aber, sobald der Werth der Bogensecunde nicht mehr ein fictiver war, neuerdings der Einfluss einer möglichen Abweichung des Anziehungsgesetzes von dem NEWTON'schen Gesetz des verkehrten Quadrats der Entfernung zur Discussion kommen musste. Hierzu sind auch die neuen Untersuchungen über die nicht unendlich grosse, sondern endliche, wenn auch sehr grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Attraction zu zählen. Allerdings wird

---

[1]) JOHANN FRANZ ENCKE, geb. am 23. Sept. 1791 zu Hamburg, studirte unter GAUSS zu Göttingen, wurde dann Offizier, 1817 Assistent in Gotha, 1825 Direktor der Sternwarte in Berlin, wo er am 26. Aug. 1865 starb.

[2]) Näheres hierüber s. »Mechanik des Himmels« und »Widerstehendes Mittel«.

die Berücksichtigung dieser Einflüsse ebenso wie diejenige der ebenfalls noch hypothetischen Einflüsse elektrischer Configurationen im Weltraum erst dann Bedeutung erlangen, wenn durch eine die Mathematiker und Astronomen befriedigende Convergenz in den Entwickelungen die vollständige und erschöpfende Bearbeitung aller in erster Linie zu berücksichtigender Kraftäusserungen (Störungen), welche dem NEWTON'schen Attractionsgesetz und einem eventuellen widerstehenden Mittel ihre Entstehung verdanken, ausser Zweifel gesetzt sein wird.

In einem unleugbaren Zusammenhange mit diesen Untersuchungen steht die Meteorastronomie. Sind, wie viele Astronomen anzunehmen geneigt sind, Meteoriten als im ganzen Weltraume vertheilte kosmische Massen anzusehen, so kann allerdings durch die Wirkung derartiger discreter, aber in grosser Menge vorhandener Massen eine einem widerstehenden Mittel ähnliche Störung erzeugt werden. Bisher sind jedoch für diese Hypothese nur wenige und nicht zureichende Stützpunkte gegeben; im Gegentheil scheint die Annahme von Meteoritenschwärmen (Sternschnuppen) die wahrscheinlichste, eine Annahme, die bereits 1819 von CHLADNI und 1839 von ERMAN ausgesprochen wurde. Ersterer vermuthet dabei auch schon die Identität von Sternschnuppen und Kometen, eine Ansicht, die später durch die Untersuchungen von SCHIAPARELLI[1]) bestätigt wurde. Doch sind dabei nach den neueren Arbeiten v. NIESSL's noch eine zweite Klasse von Meteoriten zu unterscheiden. Nimmt man an, dass ein Schwarm von Meteoriten die Erdbahn schneidet, so werden zur Zeit, zu welcher die Erde diesen Punkt ihrer Bahn trifft, also in jedem Jahre zur gleichen Zeit, eine grosse Anzahl von Meteoriten durch die an der Erdatmosphäre stattfindende Reibung leuchtend, also sichtbar werden. Da sie sich in nahe parallelen Bahnen gegen die Erde zu bewegen, so scheinen sie am Himmel nach den Gesetzen der Perspective von einem gewissen Punkte zu kommen, welcher durch die Gerade bestimmt ist, die durch das Auge des Beobachters parallel zur Bewegungsrichtung der Meteore gezogen wird (Verschwindungs- oder Fluchtpunkt) Diesen Punkt nennt man den Radianten oder Radiationspunkt des Schwarms. Solche Schwärme sind die Leoniden, welche die Erde am 10.—13. November treffen (die Erdbahn in den Punkten schneiden, in denen die Erde zu dieser Zeit steht), und deren Radiant im Löwen liegt; die Perseiden, welche die Erde am 8.—12. August treffen, und ihren Radianten im Perseus haben u. a. Allerdings ist zu bemerken, dass auch vereinzelte Meteoritenfälle vorkommen, für welche die Bestimmung des Radianten auf Schwierigkeiten stösst[2]). Noch schwieriger wird die Ermittelung der Geschwindigkeit. In vielen Fällen begnügt man sich zur Bestimmung der Bahn die Hypothese der parabolischen Bewegung anzunehmen, durch welche — *a posteriori* — in Folge der Uebereinstimmung mit gewissen Kometenbahnen SCHIAPARELLI die von CHLADNI vermuthete Identität von Sternschnuppen und Kometen erwies. In vielen Fällen ist es jedoch ausser Zweifel gestellt, dass die

---

[1]) GIOVANNI VIRGINIO SCHIAPARELLI, geb. am 4. März 1835 zu Savigliano, seit 1862 Direktor der Sternwarte in Mailand.

[2]) Ueber die Bestimmung der Sternschnuppenbahn aus dem Radianten und der Geschwindigkeit s. »Sternschnuppen«. Im allgemeinen ist zu erwähnen, dass die grösste Zahl der Sternschnuppen ihren Radianten in der Nähe desjenigen Punktes haben, gegen welchen sich die Erde zu bewegt, und welcher Apex heisst, weil sich in diesem Falle die Erde und die Meteorite mit einer relativen Geschwindigkeit gegen einander bewegen, die gleich ist der Summe der Geschwindigkeiten der beiden Körper.

Geschwindigkeiten von Meteoriten einer hyperbolischen Bahn entsprechen[1]). Derartige Schwärme von Meteoriten hat v. NIESSL unzweideutig nachgewiesen, und dieselben als stellare, nicht zum Sonnensystem gehörige Meteoritenschwärme bezeichnet.

Dass in den planetaren (zum Sonnensystem gehörigen) Sternschnuppenringen die Meteoriten nicht gleichmässig vertheilt sind, sondern Stellen grösserer Verdichtung auftreten, ist dadurch erwiesen, dass die Stärke der Sternschnuppenfälle nicht in jedem Jahre gleich ist, sondern sich zu periodisch wiederkehrenden, durch längere Intervalle getrennten Epochen auffallend starke Fälle ereignen. Ein engerer Zusammenhang zwischen Meteoriten und Kometen: ein Entstehen von Kometen durch Vereinigung von Meteormassen oder ein Entstehen von Meteoriten durch das Zerfallen von Kometenmassen ist jedoch noch keineswegs als erwiesen anzusehen, obwohl bereits in zwei Fällen ein thatsächliches Zerfallen von Kometen (1888 I und 1889 V) und andererseits auch Kometensysteme, die sich in nahe denselben Bahnen in ziemlich grosser Entfernung von einander bewegen (Kometen von 1843, 1880, 1882 II) constatirt worden sind. Dagegen ist nicht zu übersehen, dass in dem z. B. von NORDENSKJÖLD gesammelten Eisenstaub der Polargegenden Anzeichen für das Vorhandensein von materiellen, fein vertheilten, einen Widerstand leistenden Massen vorliegen.

Vorerst fast völlig getrennt von diesen Untersuchungen entwickelte sich im laufenden Jahrhundert die Stellarastronomie. Die bereits früher erwähnten Entdeckungen der Eigenbewegungen und der Veränderlichkeit der Sterne führten zu den Aufgaben, genaue Sternpositionen zu erhalten und zu catalogisiren, um Veränderungen in der relativen Lage der Gestirne am Himmel erkennen zu können, und andererseits die Sternhelligkeiten zu messen, um auch Veränderungen in diesen sicherstellen zu können. So entstanden in erster Richtung nach BRADLEY die grossen Sternkataloge von LALANDE, LACAILLE, PIAZZI, denen bald die Kataloge von GROOMBRIDGE, RÜMKER, JOHNSON u. s. w. sich anschlossen[2]). Auf die nach Zonen geordneten Beobachtungen von LALANDE folgten die systematischen Zonenbeobachtungen BESSEL's, an welche sich später die von ARGELANDER[3]) begonnene, von SCHÖNFELD für die nördliche und GOULD auch für die südliche Halbkugel durchgeführte Durchmusterung und das grosse Zonenunternehmen der »Astronomischen Gesellschaft« unter der Leitung von AUWERS[4]) anreihten. Hierher gehört auch die systematische Positionsbestimmung von Nebeln, Doppel- und vielfachen Sternen, und Sternhaufen der beiden HERSCHEL und STRUVE[5]).

---

[1]) Die Form der Bahn ist ja durch die einer gewissen gegebenen Entfernung (hier die Entfernung der Erde von der Sonne) entsprechende Geschwindigkeit bestimmt. S. pag. 135.

[2]) Siehe den Artikel »Sternkataloge«.

[3]) FRIEDRICH WILHELM AUGUST ARGELANDER, geb. am 22. März 1799 zu Memel, studirte in Königsberg, wurde 1823 Professor der Astronomie in Åbo, 1837 Direktor der Sternwarte in Bonn. Er starb daselbst den 17. Febr. 1875.

[4]) ARTHUR AUWERS, geb. am 12. Sept. 1838 in Göttingen, studirte in seiner Vaterstadt, dann in Königsberg, später bei HANSEN in Gotha, seit 1866 Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

[5]) JOHN HERSCHEL, Sohn von F. W. HERSCHEL, geb. am 7. März 1792 zu Slough, war 1834—38 am Kap der guten Hoffnung, 1850—54 Direktor der Königl. Münze, gestorben am 12. Mai 1871 zu Collingwood.

FRIEDR. GEORG WILH. v. STRUVE, geb. am 15. April 1793 zu Altona, studirte erst Philologie, dann Astronomie, wurde 1818 Direktor der Sternwarte zu Dorpat, übernahm 1839 die Direction der von ihm erbauten Sternwarte Pulkowa, legte 1862 die Direction wegen Krank-

Die sich daran anschliessende Messung der Distanzen und Positionswinkel bestätigte die bereits von HERSCHEL ausgesprochene Meinung der physischen Zusammengehörigkeit von Sternsystemen und führte zur Aufgabe der Bahnbestimmung der Doppelsterne (s. diese), welches Problem bereits 1827 von SAVARY (Conn. des temps) und 1830 von ENCKE (Berl. Astr. Jahrb.) behandelt, in der folgenden Zeit namentlich durch J. HERSCHEL, VILLARCEAU, KLINKERFUES und SEELGER wesentlich verbessert wurde.

Die Messung der Sternhelligkeit, bereits durch LAMBERT, BOUGUER, RUMFORD in den Kreis der exakten Forschung gezogen, erhielt dann namentlich durch J. HERSCHEL, STEINHEIL und ZÖLLNER wesentliche Erweiterungen und kann heute als ein integrirender Bestandtheil der Astrophysik betrachtet werden. Ein ganz neues Gebiet eröffnete sich aber der Forschung, als 1859 KIRCHHOFF die physikalische Deutung der 1802 von WOLLASTON und 1814 in grösserer Zahl von FRAUNHOFER constatirten dunklen Spectrallinien gab, und die Anwendung der Spectralanalyse auf die Himmelskörper die Möglichkeit der Erkenntniss ihrer physikalischen Constitution erschloss, in welcher Richtung sich besonders HUGGINS, SECCHI und VOGEL[1]) grosse Verdienste erwarben. Hierzu kam in der allerjüngsten Zeit noch die nach dem DOPPLER'schen Princip aus den Verschiebungen der Spectrallinien zu messende »Bewegung im Visionsradius« d. i. die Messung der Verschiebung in der Richtung nach dem Beobachter zu, oder von diesem weg, welche den älteren Hilfsmitteln der messenden Astronomie (Positionsbestimmungen) stets unzugänglich bleibt.

Endlich möge noch an dieser Stelle der grossen Vortheile Erwähnung geschehen, welche durch die von GAUSS und WEBER 1839 erfundene Telegraphie für die Erhöhung der Genauigkeit der Beobachtungen durch die Einführung der Methode des Registrirens der Beobachtungen für die Längenbestimmungen (s. d.) als auch bei Bestimmung von Sternpositionen aus Meridiandurchgängen (s. Meridiankreis) angebahnt worden ist, und auch auf die ausserordentlichen Errungenschaften hingewiesen werden, welche die Astrophotographie (s. d.), dieser jüngste Zweig der Astrophysik in der kurzen Zeit ihrer bisherigen Anwendung geliefert hat, sowie auf die grossen Erwartungen und Hoffnungen, welche dieselbe für die Erkenntnis der Himmelskörper, namentlich durch die Verbindung mit der Spectralanalyse für die Zukunft zu erregen berechtigt.

---

heit nieder. Er starb am 11. Nov. 1864 in Petersburg. OTTO v. STRUVE, Sohn des vorigen, geb. am 7. Mai 1819 zu Dorpat, seit 1862 Direktor der Sternwarte Pulkowa, welches Amt er 1893 niederlegte. Er lebt seit 1894 in Karlsruhe.

[1]) ANGELO SECCHI, geb. am 28. Juli 1818 zu Reggio, trat 1833 in den Jesuitenorden, war später Professor am Jesuitencollegium in Georgetown bei Washington, seit 1848 mit einigen Unterbrechungen, am Collegio Romano in Rom, gestorben daselbst am 26. Febr. 1878.

KARL HERMANN VOGEL, geb. am 3. April 1842 in Leipzig, 1870 Direktor der Sternwarte in Bothkamp, 1874 Observator und seit 1882 Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.

Abendweite ist die Entfernung des Punktes, in welchem ein Gestirn untergeht, vom Westpunkt des Horizontes, entsprechend ist Morgenweite die Entfernung des Punktes, in welchem ein Gestirn aufgeht, vom Ostpunkt. Bezeichnet man mit δ die Deklination eines Gestirns, mit φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, mit A die Abendweite bezw. Morgenweite, so ist:

$$\sin A = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Ein positiver Werth von A besagt, dass das Gestirn nördlich vom West- (Ost-)punkt unter- (auf-) geht, ein negativer, dass es südlich vom West- (Ost-) punkt unter- (auf-) geht. In Folge der Refraction, welche im Horizont 34'·9 beträgt, wird auch die Morgen- und Abendweite geändert, und zwar ergiebt sich, indem man die im sphärischen Dreieck Pol, Zenith, Stern bestehende Gleichung, in welcher noch z die Zenithdistanz, A' das Azimuth bedeuten,

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A'$$

differenzirt, wobei φ, δ als constant und $z = 90°$ genommen werden, und für A' nachher $90 + A$ (oder $270 - A$) gesetzt wird

$$dA = \frac{\tan \varphi}{\cos A} dz,$$

wo $dz = R$ nach Bessel $= 34'·9$ ist.

Beispiel: $\varphi = 49° 0'·5$ (Karlsruhe).

1895·0 $\delta = +16° 17'·9$ (α Tauri)				$\delta = -16° 34'·3$ (α Can. maj.)	
lg sin δ	9·44815	*lg tang* φ	0·0609	*lg sin* δ	9·45517 *n*
lg cos φ	9·81687	*lg R*	1·5428	*lg cos* φ	9·81687
lg sin A	9·63128			*lg sin A*	9·63830 *n*
A + 25° 19'·8 ohne Refraction				A — 25° 46'·4 ohne Refraction	
lg cos A	9·9561			*lg cos A*	9·9546
lg R tang φ	1·6037			*lg R tang* φ	1·6037
lg cos A	1·6476			*lg dA*	1·6491
dA	44'·4			*dA*	44'·6
A mit Refraction	+ 26° 4'·2				— 25° 1'·8

d. h. α Tauri geht für Karlsruhe 26° 4'·2 nördlich vom Westpunkt unter, bezw. vom Ostpunkt auf, α Can. maj. geht 25° 1'·8 südlich vom Westpunkt unter, bezw. vom Ostpunkt auf.

Die Alten bestimmten allgemein einen Punkt des Horizontes ausserhalb der vier Cardinalpunkte durch seine Abendweite *(amplitudo occidua)* und Morgenweite *(amplitudo ortiva)*.

Die unten folgende Tafel giebt die Morgen- und Abendweiten für alle nördlichen geographischen Breiten von 30° bis 60° und die Deklinationen von — 30° bis + 50°, jeweils von 2 zu 2 Grad, auf Grade und Bruchtheile desselben berechnet, was für alle in der Praxis vorkommende Fälle genügt. (S. Albrecht, Formeln und

Hilfstafeln zur geographischen Ortsbestimmung). Uebrigens hat man, sobald es sich um den Mond handelt, noch auf seine Parallaxe Rücksicht zu nehmen, und wenn man den Auf- oder Untergang eines Randes kennen will, auf den Halbmesser des Mondes, sodass hier $z = 90° + 35' - p \pm d$ zu setzen ist. (S. a. Aufgang.)

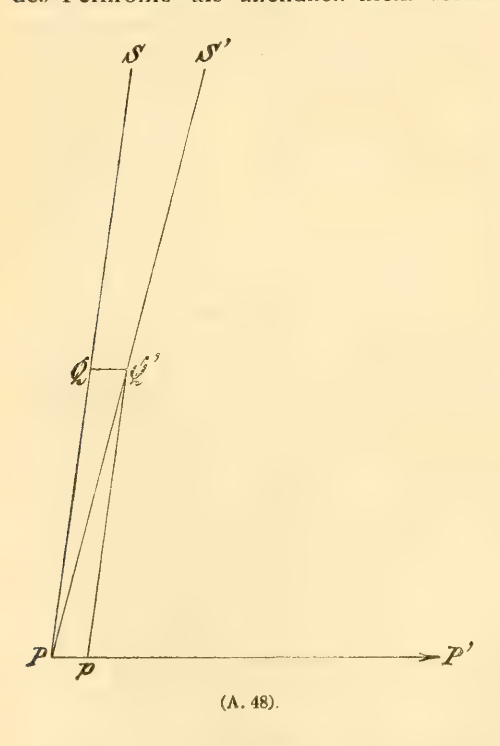
Tafel der Morgen- und Abendweiten.

δ \ φ		30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
−30°		34·9°	35·7°	36·6°	37·6°	38·8°	40·1°	41·6°	43·2°	45·2°	47·4°	50·0°	53·1°	56·8°	61·6°	68·0°	—
28		32·4	33·2	34·0	35·0	36·0	37·2	38·5	40·0	41·7	43·7	45·9	48·6	51·7	55·5	60·4	67·1°
26		30·0	30·7	31·5	32·3	33·3	34·3	35·5	36·8	38·4	40·1	42·1	44·4	47·0	50·3	54·2	59·2
24		27·6	28·3	28·9	29·7	30·6	31·5	32·6	33·7	35·1	36·6	38·4	40·4	42·7	45·4	48·7	52·7
22		25·3	25·8	26·4	27·1	27·9	28·7	29·7	30·7	31·9	33·3	34·8	36·5	38·6	40·9	43·7	47·0
−20	nach Süden	22·9	33·4	23·9	24·5	25·2	26·0	26·8	27·8	28·8	30·0	31·3	32·9	34·6	36·6	39·0	41·8
18		20·5	21·0	21·4	22·0	22·6	23·3	24·0	24·8	25·7	26·8	28·0	29·3	30·8	32·5	34·5	36·9
16		18·2	18 6	19·0	19·5	20·0	20·6	21·2	21·9	22·7	23·6	24·6	25·8	27·1	28·6	30·3	32·3
14		15·9	16·2	16·5	17·0	17·4	17·9	18·4	19·1	19·7	20·5	21·4	22·3	23·4	24·7	26·1	27·8
12		13·6	13·8	14·1	14·5	14·8	15·2	15·7	16·2	16·8	17·4	18·1	19·0	19·9	20·9	22·1	23·5
−10		11·2	11·4	11·7	12·0	12·2	12·6	13·0	13·4	13·9	14·4	15·0	15·6	16·4	17·2	18·1	19·2
8		8·9	9·1	9·3	9·5	9·7	10·0	10·3	10·6	11·0	11·4	11·8	12·3	12·9	13·5	14·3	15·1
6		6·6	6·7	6·8	7·0	7·1	7·3	7·6	7·8	8·1	8·4	8·6	9·0	9·4	9·9	10·4	11·0
4		4·3	4·4	4·4	4·5	4·6	4·7	4·9	5·0	5·2	5·3	5·5	5·8	6·0	6·3	6·6	7·0
2		2·0	2·0	2·0	2·0	2·0	2·1	2·2	2·2	2·3	2·4	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	3·0
0		0·3	0·4	0·4	0·4	0·5	0·5	0·5	0·6	0·6	0·6	0·7	0·7	0·8	0·9	0·9	1·0
+ 2	nach Norden	2·6	2·7	2·8	2·9	3·0	3·1	3·2	3·3	3·5	3·6	3·8	4·0	4·2	4·4	4·7	5·0
4		5·0	5·1	5·2	5·4	5·5	5·7	5·9	6·1	6·4	6·6	6·9	7·3	7·6	8·0	8·5	9·0
6		7·3	7·4	7·6	7·8	8·0	8·3	8·6	8·9	9·3	9·6	10·0	10·5	11·0	11·6	12·3	13·1
8		9·6	9·8	10·1	10·3	10·6	11·0	11·3	11·7	12·2	12·7	13·2	13·8	14·5	15·3	16·2	17·2
+10		11·9	12·2	12·5	12·8	13·2	13·6	14·1	14·5	15·1	15·7	16·4	17·2	18·0	19·0	20·1	21·4
12		14·2	14 6	14·9	15·3	15·8	16·3	16·8	17·4	18·1	18·8	19·6	20·5	21·6	22·7	24·1	25·7
14		16·5	17·0	17·4	17·8	18·4	18·9	19·6	20·3	21·0	21·9	22·9	24·0	25·2	26·6	28.2	30·1
16		18·9	19·4	19·8	20·4	21·0	21·6	22·3	23·1	24·0	25·0	26·2	27·5	28·9	30·5	32·4	34·7
18		21·2	21·8	22·3	22·9	23·6	24·3	25·1	26·1	27·1	28·2	29·5	31·0	32·7	34·6	36·8	39·5
+20		23·6	24·2	24·8	25·5	26·2	27·1	28·0	29·1	30·2	31·5	33·0	34·7	36·6	38·8	41·4	44·6
22		26·0	26·6	27·3	28·1	28·9	29·8	30·8	32·1	33·4	34·8	36·5	38·4	40·6	43·2	46·3	50·1
24		28·4	29·1	29·8	30·7	31·6	32·6	33·8	35·2	36·6	38·3	40·2	42·4	44·9	47·9	51·6	56·2
26		30·8	31·6	32·4	33·3	34·4	35·5	36·8	38·3	39·9	41.8	44·0	46·5	49·5	53·0	57·5	63·4
28		33·2	34·1	35·0	36·0	37·2	38·4	39·9	41·5	43·4	45·5	47·9	50·9	54·4	58·7	64·5	73·0
+30		35·7	36·6	37·6	38·7	40·0	41·4	43·0	44·8	46·9	49.3	52·2	55·6	59·9	65·4	73·7	—
32		38·1	39·1	40·2	41·5	42·9	44·5	46·2	48·3	50·7	53·5	56·8	60·9	66·3	74·3	—	—
34		40·6	41·7	42·9	44·3	45·9	47·6	49·6	51·9	54·8	57·9	61·9	67·1	74·9	—	—	—
36		43·2	44·4	45·7	47·2	48·9	50·9	53·1	55·8	58·9	62·8	67·9	75·4	—	—	—	—
38		45·8	47·1	48·5	50·2	52·1	54·3	56·9	60·0	63·7	68·6	75·9	—	—	—	—	—
+40		48·4	49·9	51·5	53·3	55·6	58·0	61·0	64·6	69·4	76·4	—	—	—	—	—	—
42		51·1	52·7	54·5	56·6	59·0	61·9	65·4	70·1	76·8	—	—	—	—	—	—	—
44		53·9	55·6	57·7	60·0	62·8	66·3	70·7	77·3	—	—	—	—	—	—	—	—
46		56·8	58·7	61·0	63·7	67·0	71·3	77·7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
48		59·8	62·0	64·6	67·8	72·0	78·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+50		63·0	65·5	68·6	72·6	78·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

VALENTINER.

Aberration. Die Erscheinungen, welche man unter dem Namen der Aberration des Lichts oder der astronomischen Aberration zusammenfasst, haben ihren Grund in der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts und der Bewegung aller irdischen Beobachtungspunkte, und lassen sich demzufolge durch die veraltete Emissionstheorie ebenso gut, wie durch die Undulationstheorie erklären. Wir haben es dabei mit zwei von einander verschiedenen Gattungen von Erscheinungen zu thun, welche wir zunächst durch einfache geometrische Betrachtungen veranschaulichen wollen.

Es stelle die Ebene der Figur (Fig. 48) die durch einen Stern S und die Bewegungsrichtung des Beobachters PP' gelegte Ebene dar. PQ bezeichne die optische Axe eines Fernrohrs, dessen Objectiv in Q, dessen Ocular in P sich befindet, und es sei τ die Zeit, welche das Licht gebraucht, um mit der Geschwindigkeit V die Strecke QP zurückzulegen. Befindet der Beobachter sich in Ruhe, so erscheint ihm der Stern in der Richtung PS; bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v vorwärts, so wird er nach Verlauf der Zeit τ in p angekommen sein, und das Fernrohr wird die der Richtung PQ parallele Lage pQ' eingenommen haben. Wenn man sich nun die Objectiv- und Ocularöffnung des Fernrohrs als unendlich klein vorstellt, so ist klar, dass die Lichtstrahlen, welche in Q eben das Objectiv erreichten, nicht in p in das Auge des Beobachters gelangen können. Damit dies der Fall sei, muss das Fernrohr eine der Linie PQ' parallele Richtung erhalten, d. h. der Stern, dessen wahre Richtung PS ist, wird in der scheinbaren Richtung PS' gesehen werden. Er erscheint nach der Richtung, in der sich der Beobachter bewegt, innerhalb derselben Ebene um den Aberrationswinkel SPS' verschoben. Da aber

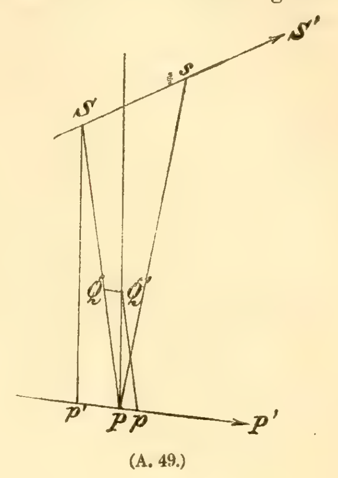


(A. 48).

$$\sin SPS' = \frac{v\tau}{V\tau} \sin SPP',$$

so ist die Aberration nur von dem Verhältniss der Geschwindigkeiten v und V und von der Richtung der Lichtstrahlen gegen die Bewegungsrichtung abhängig. Man nennt den Ort, welchen ein Gestirn in Folge der Aberration an der Himmelskugel einnimmt, seinen scheinbaren Ort, im Gegensatz zu dem wahren Ort, an dem es ohne den Einfluss derselben erscheinen würde. Weil nun ein Beobachter auf der Erde in Folge der Erdrotation, der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne, und der secularen Bewegung des Sonnensystems eine dreifache Bewegung im Raume ausführt, so ergiebt sich ein Complex von Aberrationserscheinungen, welche man mit dem Namen der Fixsternaberration bezeichnet, und die wir gesondert als tägliche, jährliche und seculare Aberration behandeln werden.

Um die zweite Art von Aberrationserscheinungen zu erläutern, nehmen wir der Einfachheit wegen an, der Beobachter P (Fig. 49) und das Gestirn S bewegten sich in einer Ebene in den Richtungen PP' und SS' mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten v und v', und es sei τ die Zeit, welche das Licht gebraucht, um die Entfernung SP zu durchlaufen. Es sei ferner $p'P = v\tau$ und $Ss = v'\tau$ und es mögen sich der Beobachter und das Gestirn gleichzeitig beziehungsweise in den Punkten p' und S befinden. Obigen Betrachtungen zufolge wird dann die Fixsternaberration das Gestirn, von P aus gesehen, beim Eintreffen derjenigen Lichtstrahlen, welche dasselbe von dem Orte S aussandte, in der Richtung PQ' erscheinen lassen. Da aber inzwischen das Gestirn nach s vorgerückt ist, so wird man, um die wahre Richtung Ps zu erhalten, ausser der Fixsternaberration auch die aus der Bewegung des Gestirns sich ergebende, hier durch den Winkel SPs dargestellte Aberration berücksichtigen müssen.



(A. 49.)

Da letzterer Fall in der Praxis vorzugsweise bei den Beobachtungen der Planeten und Kometen auftritt, so hat man diesen Theil der Aberrationserscheinungen die Planetenaberration genannt.

A. Fixsternaberration.

Es seien $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit des Beobachtungsortes in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, μ die Geschwindigkeit des Lichts und l die Länge des Fernrohrs. Bezeichnen ferner in Beziehung auf dasselbe Coordinatensystem α, δ, und α', δ' die Polarcoordinaten der wahren und scheinbaren Richtung des von einem Fixstern ausgesandten Lichtstrahls, welche letztere identisch ist mit der Richtung des Fernrohrs, so sind die Componenten des Weges, den derselbe im Fernrohr zurücklegt, nach den Coordinatenaxen:

$$l \cos\delta' \cos\alpha'$$
$$l \cos\delta' \sin\alpha'$$
$$l \sin\delta'$$

Ist τ die Zeit, welche der Lichtstrahl gebraucht, um die Strecke l zurückzulegen, so sind die Componenten der wahren Bewegung desselben im Fernrohr

$$\mu\tau \cos\delta \cos\alpha$$
$$\mu\tau \cos\delta \sin\alpha$$
$$\mu\tau \sin\delta$$

und diejenigen der Erdbewegung

$$\tau\frac{dx}{dt}, \quad \tau\frac{dy}{dt}, \quad \tau\frac{dz}{dt}.$$

Nach dem Princip der Zusammensetzung von Bewegungen ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\tau}\cos\delta'\cos\alpha' &= \mu\cos\delta\cos\alpha + \frac{dx}{dt} \\ \frac{l}{\tau}\cos\delta'\sin\alpha' &= \mu\cos\delta\sin\alpha + \frac{dy}{dt} \\ \frac{l}{\tau}\sin\delta' &= \mu\sin\delta + \frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Transformation dieser Gleichungen erhält man Ausdrücke für

$$\frac{sin}{cos}(\alpha' - \alpha) \quad \text{und} \quad \frac{sin}{cos}(\delta' - \delta),$$

bei deren Division der Faktor $\frac{l}{\tau}$ fortfällt. Entwickelt man dann die Quotienten $tang(\alpha' - \alpha)$ und $tang(\delta' - \delta)$ in Reihen und vertauscht, was bei der Kleinheit der Aberration gestattet ist, die Winkel mit den Bögen, so ergeben sich, unter Weglassung der Glieder von der dritten Ordnung an, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha &= \frac{1}{\mu \, sin\, 1''}\left(\frac{dx}{dt} sin\,\alpha - \frac{dy}{dt} cos\,\alpha\right) sec\,\delta \\
&+ \frac{1}{\mu^2 \, sin\, 1''}\left(\frac{dx}{dt} sin\,\alpha - \frac{dy}{dt} cos\,\alpha\right)\left(\frac{dx}{dt} cos\,\alpha + \frac{dy}{dt} sin\,\alpha\right) sec^2\,\delta \\
\delta' - \delta &= -\frac{1}{\mu \, sin\, 1''}\left(\frac{dx}{dt} sin\,\delta\, cos\,\alpha + \frac{dy}{dt} sin\,\delta\, sin\,\alpha - \frac{dz}{dt} cos\,\delta\right) \\
&- \frac{1}{2\mu^2 \, sin\, 1''}\left(\frac{dx}{dt} sin\,\alpha - \frac{dy}{dt} cos\,\alpha\right)^2 tang\,\delta \\
&+ \frac{1}{\mu^2 \, sin\, 1''}\left(\frac{dx}{dt} cos\,\delta\, cos\,\alpha + \frac{dy}{dt} cos\,\delta\, sin\,\alpha + \frac{dz}{dt} sin\,\delta\right) \\
&\quad \left(\frac{dx}{dt} sin\,\delta\, cos\,\alpha + \frac{dy}{dt} sin\,\delta\, sin\,\alpha - \frac{dz}{dt} cos\,\delta\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Um die Ausdrücke von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ abzuleiten, legen wir das System des Aequators zu Grunde, und zählen die Winkel vom Frühlingsnachtgleichenpunkt. Es sind nun die Componenten der täglichen und jährlichen Bewegung der Erde und der secularen Bewegung des Sonnensystems zu ermitteln.

Sei ρ der Radiusvector, φ' die geocentrische Breite des Erdorts und ϑ die Sternzeit der Beobachtung, so sind die rechtwinkligen Coordinaten des Orts:

$$\begin{aligned}
x &= \rho\, cos\,\varphi'\, cos\,\vartheta \\
y &= \rho\, cos\,\varphi'\, sin\,\vartheta \\
z &= \rho\, sin\,\varphi'
\end{aligned}$$

und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\rho\, cos\,\varphi'\, sin\,\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} sin\, 1'' \\
\frac{dy}{dt} &= \rho\, cos\,\varphi'\, cos\,\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} sin\, 1'' \\
\frac{dz}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Nennen wir ferner $\odot$ die Länge der Sonne, R ihre Entfernung von der Erde und ε die Schiefe der Ekliptik, so sind die äquatorealen Coordinaten der Erde in Beziehung auf die Sonne, deren Breite wir vernachlässigen

$$\begin{aligned}
x &= -R\, cos\,\odot \\
y &= -R\, sin\,\odot\, cos\,\varepsilon \\
z &= -R\, sin\,\odot\, sin\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Die Differentiation dieser Ausdrücke giebt:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{dR}{dt} cos\,\odot + R\, sin\,\odot \frac{d\odot}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{dR}{dt} sin\,\odot\, cos\,\varepsilon - R\, cos\,\odot\, cos\,\varepsilon \frac{d\odot}{dt} \\
\frac{dz}{dt} &= -\frac{dR}{dt} sin\,\odot\, sin\,\varepsilon - R\, cos\,\odot\, sin\,\varepsilon \frac{d\odot}{dt}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen nun noch π und v die Erdnähe und die wahre Anomalie der Sonne, so ist

$$\odot = \pi + v \qquad d\odot = dv.$$

Ist M die mittlere Anomalie, φ der Excentricitätswinkel, a die halbe grosse Axe, so ergiebt die Theorie der elliptischen Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2 \cos\varphi}{R^2} \frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dR}{dt} = a \, tang\, \varphi \sin v \frac{dM}{dt}.$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\frac{a \cos\varphi}{R} = \frac{1 + \sin\varphi \cos v}{\cos\varphi},$$

so findet man durch Substitution obiger Differentialquotienten folgende Ausdrücke für die Componenten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{a}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\sin\odot + \sin\varphi \sin\pi) \sin 1'' \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{a \cos\varepsilon}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi) \sin 1'' \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{a \sin\varepsilon}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi) \sin 1''. \end{aligned} \tag{4}$$

Bei diesen Formeln ist zu berücksichtigen, dass, da es sich um Ermittelung der relativen Bewegung der Erde um den als ruhend gedachten Schwerpunkt des Sonnensystems handelt, streng genommen die Geschwindigkeitscomponenten der Sonne, welche aus ihrer Bewegung um den Schwerpunkt sich ergeben, in Abzug zu bringen wären. Diese Bewegung, welche aus der Anziehung sämmtlicher Planeten resultirt, ist indessen ebenso wie die durch die Störungen hervorgerufenen Veränderungen in der Geschwindigkeit der Erde, so klein, dass sie nur in vereinzelten Fällen, wo es sich um Erreichung der äussersten Genauigkeit handelt, zu berücksichtigen sein wird. Wir übergehen dieselben deshalb hier und verweisen betreffs der Formeln auf die Arbeit von H. BATTERMANN, »Beiträge zur astronomischen Aberrationslehre, Berlin 1881 (vergl. auch »Einige Berichtigungen« dazu A. N. No. 2832)«, woselbst auch kleine Hilfstafeln zur bequemeren Berechnung der erwähnten Glieder gegeben sind.

Es ist drittens die seculare Bewegung des Systems zu berücksichtigen. Nennen wir V die absolute Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt des Sonnensystems im Raume fortbewegt, worunter also die Resultante der Bewegung der Sonne und der sonst etwa noch vorhandenen unbekannten Bewegungen des ganzen Fixsternsystems zu verstehen ist, A und D die Rectascension und Deklination des Apex, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos D \cos A \\ \frac{dy}{dt} &= V \cos D \sin A \\ \frac{dz}{dt} &= V \sin D. \end{aligned} \tag{5}$$

Bilden wir nun für jede Componente die Summe der Gleichungen (3), (4), (5), so erhalten wir die vollständigen Ausdrücke der Componenten der absoluten Geschwindigkeit des Erdorts.

Da es für die Haupterscheinungen der Aberration vollkommen ausreichend ist, in den Gleichungen (2) nur die Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen,

so sind dieselben in Beziehung auf die Componenten linear, wir können daher die drei Arten der Aberration gesondert betrachten.

a) Die tägliche Aberration. Die Substitution von (3) in (2) ergiebt, wenn man die Constante der täglichen Aberration definirt durch die Gleichung:

$$K = \frac{\rho}{\mu} \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= K \cos \varphi' \cos (\vartheta - \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= K \cos \varphi' \sin (\vartheta - \alpha) \sec \delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir nach NEWCOMB (»Experimental determination of the velocity of light«, Astronomical papers, Washington 1885)

$$\mu = 299860 \; km,$$

ferner nach BESSEL (»Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationsphäroids« A. N. No. 333 u. 438)

$$\rho = 6377{\cdot}4 \; km$$

und

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 15'' \cdot f,$$

wo f das Verhältniss von 1^s mittlerer Zeit zu 1^s Sternzeit bezeichnet und $\log f = 0{\cdot}00187$ ist..

Mit diesen Werthen erhalten wir

$$K = 0''{\cdot}320.$$

Für Meridianbeobachtungen wird

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0''{\cdot}320 \cos \varphi' \sec \delta \\ \delta' - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Die Berücksichtigung der täglichen Aberration ist daher in diesem Falle sehr einfach und lässt sich bequem mit derjenigen des Collimationsfehlers verbinden.

b) Die jährliche Aberration. Setzt man die Ausdrücke (4) in die Gleichungen (2) ein und führt die Grösse

$$K' = \frac{a}{\mu \cos \varphi} \frac{dM}{dt}$$

ein, welche die Constante der Aberration heisst, so erhält man

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = &- K'(\cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \odot \sin \alpha) \sec \delta \\ &- K' \sin \varphi (\cos \pi \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \pi \sin \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta = &\; K' [\cos \odot (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \odot \cos \alpha \sin \delta] \\ &+ K' \sin \varphi [\cos \pi (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \pi \cos \alpha \sin \delta]. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Constante K' wurde zuerst durch BRADLEY aus Beobachtungen von Zenithsternen, welche er zum Zwecke der Auffindung von Fixsternparallaxen mit seinem Freunde MOLYNEUX gemeinschaftlich vom Jahre 1725 an zu Kew unternahm, und durch die er ganz unerwartet zur Entdeckung der Aberration geführt wurde, bestimmt. Die Wichtigkeit dieser Constanten für die Reduction der Beobachtungen veranlasste eine Reihe späterer Untersuchungen, denen z. Thl. die BRADLEY'schen, z. Thl. neuere Beobachtungen zur Grundlage dienten. Eine der hervorragendsten Bestimmungen dieser Art ist von W. STRUVE durch Beobachtungen am Passageninstrument im ersten Vertical zu Pulkowa gewonnen und der von ihm abgeleitete Werth der Constante

$$K' = 20''{\cdot}445$$

ist bis in die jüngste Zeit allgemein angewandt worden. Nachdem aber neuere Beobachtungsreihen ergeben haben, dass dieser Werth wahrscheinlich zu klein

ist, hat NYRÉN in seiner Schrift »l'aberration des étoiles fixes« (Mém. de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersbourg Tom. XXXI No. 9, 1883, durch sorgfältige Diskussion der besten vorhandenen Beobachtungen als zuverlässigsten Werth der Constante

$$K' = 20''\cdot492 \pm 0''\cdot006$$

gefunden, welcher um so mehr bis auf Weiteres als maassgebend anzusehen ist, als eine ganze Reihe einzelner an verschiedenen Orten zunächst zum Zwecke des Studiums der Polhöhenschwankungen angestellter Beobachtungen, die aber noch nicht abgeschlossen und definitiv diskutirt und vereinigt worden sind, zu sehr nahe übereinstimmenden Resultaten führten. Zur Beurtheilung der Zuverlässigkeit obiger Zahl mögen die benutzten Einzelwerthe hier Platz finden. Die Beobachtungen sind sämmtlich in Pulkowa angestellt.

Beobachtungen am Vertikalkreis:	PETERS	20''·507 ± 0''·021
	GYLDÉN	20''·469 ± 0''·026
	NYRÉN	20''·495 ± 0''·021
		20''·495 ± 0''·013
Beobachtungen am Meridiankreis:	SCHWEIZER	20''·498 ± 0''·012
	WAGNER	20''·483 ± 0''·012
		20''·491 ± 0''·009
Beobachtungen am Passageninstrument im ersten Vertical:	STRUVE	20''·463 ± 0''·017
	NYRÉN	20''·517 ± 0''·014
		20''·490 ± 0''·011

In Folge obiger Relation zwischen den Constanten K' und μ und den Elementen der Erdbahn lässt sich der Werth von K' auch aus den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten und andererseits aus den terrestrischen Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit ableiten. Nimmt man für K' die obige Zahl, so erhält man mit den Elementen der Erdbahn für die Zeit, welche das Licht gebraucht, um den Halbmesser derselben zu durchlaufen, $\frac{a}{\mu} = 498^s\cdot92$, ein Werth, der nahezu mit dem neuerdings von GLASENAPP abgeleiteten $498^s\cdot5$ (Mittel aus den von letzterem gefundenen extremen Werthen nach NEWCOMB) übereinstimmt. Andererseits erhält man aus K' und der NEWCOMBschen Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit $\mu = 299860\ km$ für die Sonnenparallaxe $8''\cdot79$, während für dieselbe gegenwärtig noch meistens der Werth $8''\cdot85$ angenommen wird, obwohl nach neuesten Untersuchungen der wahre Werth nahe $8''\cdot80$ zu sein scheint.

Wie aus den Gleichungen (7) hervorgeht, besteht die jährliche Aberration aus zwei Theilen, von denen der eine mit der Sonnenlänge veränderlich, der andere dagegen constant ist. Der Faktor dieses constanten Theils ist

$$K' \sin\varphi = 0''\,343.$$

Man pflegt denselben, da die Grössen α, δ, ε, π, φ sich nur sehr langsam verändern, bei den Fixsternen nicht zu berücksichtigen, indem nur der mittlere Ort durch denselben beeinflusst wird.

Man kann durch Einführung von Hilfsgrössen die Berechnung der Ausdrücke (7) erheblich vereinfachen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} c &= \cos\alpha \sec\delta \\ d &= \sin\alpha \sec\delta \\ c' &= \cos\delta \tan g\,\varepsilon - \sin\delta \sin\alpha \\ d' &= \sin\delta \cos\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

und ferner

$$\begin{aligned} -K' \cos \odot \cos \varepsilon &= h \sin H = C \\ -K' \sin \odot \quad &= h \cos H = D \\ h \sin H \tan \varepsilon &= i \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} -K' \sin \varphi \cos \pi \cos \varepsilon &= h_0 \sin H_0 = C_0 \\ -K' \sin \varphi \sin \pi \quad &= h_0 \cos H_0 = D_0 \\ -K' \sin \varphi \cos \pi \sin \varepsilon &= i_0 , \end{aligned} \tag{10}$$

so erhält man für den veränderlichen Theil der Aberration

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= h \sin (H + \alpha) \sec \delta \qquad = c\,C + d\,D \\ \delta' - \delta &= h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta = c'\,C + d'\,D \end{aligned} \tag{11}$$

und für den constanten Theil

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= h_0 \sin (H_0 + \alpha) \sec \delta \qquad = c\,C_0 + d\,D_0 \\ \delta' - \delta &= h_0 \cos (H_0 + \alpha) \sin \delta + i_0 \cos \delta = c'\,C_0 + d'\,D_0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Während die Grössen c, d, c', d' für jeden Stern constant sind, sind die durch Gleichung (9) und (10) eingeführten Hilfsgrössen vom Sternort unabhängig, aber mit der Zeit veränderlich. Zur bequemeren Berechnung der Aberration enthalten daher die astronomischen Ephemeriden, die mit der Zeit veränderlichen Grössen h, H, i und C, D, erstere in der Regel für die Epochen mittlerer Zeit, letztere für die Sternzeitepochen. Man pflegt die ersteren zu benutzen, wenn es sich um Berechnung der Aberration für eine Anzahl verschiedener Sternorte, letztere dagegen, wenn es sich um die Berechnung der Ephemeride eines Fixsternes für einen längeren Zeitraum handelt.

Zur Berechnung des constanten Glieder der Aberration nach Gleichung (10) und (12), welche bei Planeten- und Kometenbeobachtungen zuweilen erfordert wird, können nach OPPOLZER's »Lehrbuch znr Bahnbestimmung der Kometen und Planeten« (Leipzig 1880), folgende Werthe benutzt werden:

	$\log h_0$	H_0	i_0	$\log C_0$	$\log D_0$
1850	9·534	350·5°	−0·024″	8·753 n	9·528
1900	9·534	349·7	−0·026	8·787 n	9·527
1950	9·534	348·9	−0·028	8·817 n	9·526.

Aus den Formeln (7), welche sich auf den Aequator beziehen, lassen sich die für die Ekliptik geltenden ableiten, indem man $\varepsilon = 0$ setzt und statt α und δ die Länge λ und die Breite β substituirt. Man erhält dadurch

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -20''{\cdot}492 \cos (\odot - \lambda) \sec \beta - 0''{\cdot}343 \cos (\lambda - \pi) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= -20''{\cdot}492 \sin (\odot - \lambda) \sin \beta + 0''{\cdot}343 \sin (\lambda - \pi) \sin \beta . \end{aligned} \tag{13}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass jeder Stern im Laufe des Jahres in Folge der Aberration um seinen wahren Ort eine Ellipse beschreibt, deren grosse, der Ekliptik parallele Axe $40''{\cdot}984$, deren kleine Axe $40''{\cdot}984 \sin \beta$ ist. Sterne, welche im Pol der Ekliptik stehen, beschreiben daher einen Kreis, solche welche in der Ekliptik stehen, eine gerade Linie.

Für die Sonne findet man, indem man $\lambda = \odot$, $\beta = 0$ setzt

$$\odot' - \odot = -20''{\cdot}492 - 0''{\cdot}343 \cos (\odot - \pi). \tag{14}$$

c) Die seculare Aberration. Durch Substitution der Ausdrücke (5) in (2) erhalten wir die Glieder erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{V}{\mu \sin 1''} \cos D \sin (\alpha - A) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= -\frac{V}{\mu \sin 1''} [\cos D \cos (\alpha - A) \sin \delta - \sin D \cos \delta]. \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Grössen sind, von langsamen Veränderungen abgesehen, für jeden Stern constant und verbinden sich mit dem mittleren Ort. Da aber die Grössen V, D, A nicht genau bekannt sind, so lässt sich der Betrag der secularen Aberration nur angenähert schätzen.

Die im Vorstehenden entwickelten Formeln genügen meistens zur Berechnung der Aberration, in gewissen Fällen aber kann es erforderlich werden, einige Glieder höherer Ordnung zu berücksichtigen, welche sich zum Theil aus den quadratischen Gliedern der Formeln (2), zum Theil aus der Wahl der für die Aberrationsformeln anzuwendenden Argumente ergeben.

Zunächst erhält man folgende vom Quadrat der jährlichen Aberration herrührende Glieder zweiter Ordnung, wenn man sich erlaubt, die Produkte in $sin^4 \frac{1}{2}\varepsilon$ und in Deklination ausserdem die nicht mit $tang\,\delta$ multiplicirten Glieder zu vernachlässigen:

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)_2 &= \tfrac{1}{2} K'^2 \sin 2(\odot - \alpha) \sec^2\delta - 2K'^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\odot \sin(\odot - 2\alpha) \sec^2\delta \\ (\delta' - \delta)_2 &= -\tfrac{1}{2} K'^2 \cos^2(\odot - \alpha)\, tang\,\delta + 2K'^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\odot \cos\alpha \cos(\odot - \alpha)\, tang\,\delta\end{aligned} \tag{16}$$

Numerisch erhalten wir folgende Correctionsglieder:

$$\begin{aligned}&+ \sec^2\delta\,[0''{\cdot}001018 \sin^2(\odot - \alpha) - 0''{\cdot}000168 \cos\odot \sin(\odot - 2\alpha)] \\ &- tang\,\delta\,[0''{\cdot}001018 \cos^2(\odot - \alpha) - 0''{\cdot}000168 \cos\odot \cos\alpha \cos(\odot - \alpha)],\end{aligned}$$

welche nur für Polsterne merklich werden können.

Die Gleichungen (2) ergeben ferner Glieder, welche das Produkt aus der jährlichen und secularen Aberration enthalten. Diese sind

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)_2 &= K' \frac{V}{\mu} \sec^2\delta \cos D\,[\sin\odot \sin(2\alpha - A) + \cos\odot \cos(2\alpha - A) \cos\varepsilon] \\ (\delta' - \delta)_2 &= -K' \frac{V}{\mu}\, tang\,\delta \cos D \sin(\alpha - A)(\cos\odot \cos\alpha \cos\varepsilon + \sin\odot \sin\alpha),\end{aligned} \tag{17}$$

wo wieder nur das mit $tang\,\delta$ multiplicirte Hauptglied mitgenommen ist. Die übrigen Glieder zweiter Ordnung, welche die tägliche Aberration enthalten, sind ihrer Kleinheit wegen, das mit dem Quadrat der secularen Aberration behaftete Glied aber ist deswegen nicht zu berücksichtigen, weil es in Verbindung mit dem Gliede erster Ordnung nur eine constante Veränderung des mittleren Ortes ergiebt.

Die Argumente α und δ der Ausdrücke (7) für die jährliche Aberration sind die wahren, d. h. auch von der secularen Aberration befreiten Coordinaten des Sternes. Dieselben haben die Form

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + P_\alpha + N_\alpha \\ \delta &= \delta_0 + P_\delta + N_\delta,\end{aligned}$$

wo P und N die Präcession und Nutation, α_0, δ_0 aber die Coordinaten desjenigen mittleren Ortes zur Zeit der Epoche bedeuten, welcher sich um den Betrag der secularen Aberration $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ (vergl. die Gleichungen 15) von dem uns bekannten mittleren Ort unterscheidet. Für die Berechnung der Aberration ist es nun bequemer, statt der wahren Coordinaten die Coordinaten $\alpha_0 + \Delta\alpha$ und $\delta_0 + \Delta\delta$ dieses letzteren Ortes als Argumente einzuführen. Werden die Formeln (7) daher mit diesen berechnet, so müssen der so gefundenen Aberration Correctionsglieder hinzugefügt werden, welche man erhält, indem man (7) nach α, δ, $\odot$, ε differenzirt und in die Differentiale

$$\begin{aligned}d\alpha &= -\Delta\alpha + P_\alpha + N_\alpha \\ d\delta &= -\Delta\delta + P_\delta + N_\delta\end{aligned}$$

und für $d\odot$, $d\varepsilon$ die Präcession und Nutation dieser Grössen substituirt. Es ist aber

$$P_\alpha = \tau(m + n\,tang\,\delta\,sin\,\alpha)$$
$$P_\delta = \tau n\,cos\,\alpha,$$

wo τ die seit der Epoche verflossene Zeit, m und n die bekannten Constanten bedeuten. (S Präcession). Ferner sind nach PETERS die Hauptglieder der Nutation (S. d.)

$$N_\alpha = -15''\cdot832\,sin\,\Omega - (6''\cdot868\,sin\,\Omega\,sin\,\alpha + 9''\cdot224\,cos\,\Omega\,cos\,\alpha)\,tang\,\delta$$
$$N_\delta = -(6''\cdot868\,sin\,\Omega\,cos\,\alpha - 9''\cdot224\,cos\,\Omega\,sin\,\alpha)$$

in denen Ω die Länge des Mondknotens bezeichnet. Endlich hat man für die Differentiale der Ausdrücke (7)

$$d(\alpha' - \alpha) = K'\,(cos\,\odot\,sin\,\alpha\,cos\,\varepsilon - sin\,\odot\,cos\,\alpha)\,sec\,\delta\cdot d\alpha$$
$$- K'\,(cos\,\odot\,cos\,\alpha\,cos\,\varepsilon + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,sec\,\delta\,tang\,\delta\cdot d\delta$$
$$d(\delta' - \delta) = K'\,(cos\,\odot\,cos\,\alpha\,cos\,\varepsilon + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,sin\,\delta\cdot d\alpha,$$

wo jedoch alle Glieder fortgelassen sind, welche nach der Substitution von $d\alpha$ und $d\delta$ in Bezug auf $sec\,\delta$ und $tang\,\delta$ von höherer Ordnung werden, als die obigen. Die Differentiale $d\odot$ und $d\varepsilon$ verschwinden dadurch vollständig.

Vermittelst obiger Gleichungen erhalten wir nun:

1) Glieder, welche die Produkte der Präcession und jährlichen Aberration enthalten:

$$\left.\begin{aligned} d(\alpha' - \alpha) &= -K' n\tau\,sec\,\delta\,tang\,\delta\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,2\alpha + sin\,\odot\,sin\,2\alpha)\\ d(\delta' - \delta) &= +K' n\tau\,sin\,\delta\,tang\,\delta\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,\alpha + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,sin\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

mit den numerischen Coëfficienten

$$K' n\,cos\,\varepsilon = +0''\cdot001827$$
$$K' n = +0''\cdot001992.$$

2) Glieder, welche die Produkte der Nutation und der jährlichen Aberration enthalten.

$$\left.\begin{aligned} d(\alpha' - \alpha) &= K'\,sec\,\delta\,tang\,\delta\,[+6''\cdot868\,sin\,\Omega\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,2\alpha + sin\,\odot\,sin\,2\alpha) -\\ &\quad - 9''\cdot224\,cos\,\Omega\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,sin\,2\alpha - sin\,\odot\,cos\,2\alpha)]\\ d(\delta' - \delta) - &= K'\,sin\,\delta\,tang\,\delta\,[+6''\cdot868\,sin\,\Omega\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,\alpha + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,sin\,\alpha +\\ &\quad + 9''\cdot224\,cos\,\Omega\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,\alpha + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,cos\,\alpha] \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

mit den Coëfficienten

$$K'\cdot 6''\cdot868\,cos\,\varepsilon = +0''\cdot000612$$
$$K'\cdot 6''\cdot868 = +0''\cdot000669$$
$$K'\cdot 9''\cdot224\,cos\,\varepsilon = +0''\cdot000841$$
$$K'\cdot 9''.224 = +0''\cdot000916.$$

Alle diese Glieder werden daher nur für Polarsterne merklich.

3) Das Produkt der jährlichen und secularen Aberration endlich ergiebt, wenn man sich erlaubt, entsprechend den oben vorgenommenen Abkürzungen $sec^2\,\delta$ und $tang^2\,\delta$ zu vertauschen

$$\left.\begin{aligned} d(\alpha' - \alpha) &= -K'\,\frac{V}{\mu}\,cos\,D\,sec^2\delta\,[cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,(2\alpha - A) + sin\,\odot\,sin\,(2\alpha - A)]\\ d(\delta' - \delta) &= +K'\,\frac{V}{\mu}\,cos\,D\,tang\,\delta\,(cos\,\varepsilon\,cos\,\odot\,cos\,\alpha + sin\,\odot\,sin\,\alpha)\,sin\,(\alpha - A). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Durch Vereinigung der Glieder (17) und (20) erhält man die von der secularen Bewegung des Sonnensystems abhängigen Glieder in der jährlichen Aberration. Wie man aber sieht, heben diese Glieder sich auf, es werden deshalb nur die von uns vernachlässigten kleineren Glieder Einfluss auf den scheinbaren

Ort des Sternes gewinnen können. Wie VILLARCEAU in der »Connaissance des Temps« für 1878 nachgewiesen hat, besteht derselbe darin, dass die Constante der Aberration für verschiedene Sterne einen anderen Werth haben kann und zwar besteht die Relation

$$K_1' = K_1 \left(1 - \frac{V}{\mu} \cos \varkappa\right),$$

wo

$$\cos \varkappa = \cos D \cos (\alpha - A) \cos \delta + \sin D \sin \delta$$

und $\varkappa$ den Bogen größten Kreises zwischen dem Orte des Sternes und dem Apex der secularen Bewegung bezeichnet. Für Sterne, welche in Beziehung auf den Apex als Pol in einem Parallelkreis liegen, ist K_1' constant. Das zweite Glied in K_1' kann aber für die Beobachtungen nur dann merklich werden, wenn V sehr viel grösser ist als die Geschwindigkeit der Erde. Ist das der Fall, so bietet die genaue Bestimmung der Aberrationsconstante von verschiedenen Sternen die Aussicht, Richtung und Grösse der secularen Bewegung zu ermitteln.

Bestimmung der Constante der Aberration.

Zur Ermittelung des numerischen Werthes dieser Constanten eignen sich am besten die Beobachtungen der Rectascensionen und Deklinationen des Polarsternes, sowie die Beobachtungen der Deklinationen von Zenithsternen. Es sei K_0 ein genäherter Werth der Aberrationstante und der wahre Werth

$$K' = K_0 + \Delta K'.$$

Setzt man nun in (7)

$$\begin{aligned} -\cos \alpha \cos \varepsilon &= a \sin A \\ -\sin \alpha &= a \cos A \\ \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \quad \sin \varepsilon &= b \sin B \\ -\cos \alpha \sin \delta &= b \cos B, \end{aligned}$$

so ist, von den constanten Gliedern abgesehen,

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= K' a \sin (A + \odot) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= K' b \sin (B + \odot). \end{aligned}$$

Berechnet man jetzt unter der Voraussetzung, dass Präcession und Nutation genau bekannt sind, und dass die angenommenen mittleren Coordinaten des Sternes die Correctionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ erhalten müssen, die Aberration mit K_0, so erhält man aus jeder Beobachtung eine Gleichung von der Form:

$$\begin{aligned} n &= \Delta\alpha + \Delta K' \cdot a \sin (A + \odot) \sec \delta \\ n' &= \Delta\delta + \Delta K' \cdot b \sin (B + \odot), \end{aligned}$$

wo n, n' die Unterschiede zwischen dem beobachteten und dem mit der Constante K_0 berechneten Ort im Sinne Beobachtung — Rechnung bedeuten. Im praktischen Fall wird man in die Gleichungen auch die Parallaxe, bei sehr langen Beobachtungsreihen vielleicht auch Verbesserungen der Nutationsconstante einführen.

Wie ersichtlich müssen die Beobachtungen vornehmlich zu den Zeiten angestellt werden, wo die Summe $A + \odot$ und $B + \odot$ bei 90° und 270° liegen, weil dann die Aberration ihr Maximum im positiven und negativen Sinn erreicht. Bei Benutzung von Polarsternbeobachtungen muss aber bei der Berechnung der Aberration auf die oben entwickelten Glieder zweiter Ordnung Rücksicht genommen werden. Die Polarsterne bieten den Vorzug, dass einerseits die durch die Aberration bedingten Aenderungen der Rectascension mit dem Faktor $\sec \delta$ multi-

plicirt sind und andererseits die Aberration in Deklination sich bei oberer und unterer Culmination in der Zenithdistanz im entgegengesetzten Sinn äussert.

Nach einer von W. STRUVE vorgeschlagenen Methode sind die Durchgänge von Sternen, welche sehr nahe dem Zenith culminiren, durch den ersten Vertical zur Bestimmung der Aberrationsconstante besonders geeignet, weil sich aus ihnen die Deklination des Sterns, beziehentlich der Unterschied zwischen letzterer und der Polhöhe sehr genau ableiten lässt. Nach dieser Methode ist sowohl der frühere STRUVE'sche Werth der Constante, wie auch der später von NYRÉN abgeleitete bestimmt worden.

Endlich ist für diesen Zweck auch die sogenannte TALCOTT'sche Methode zu empfehlen, bei welcher die Unterschiede der Zenithdistanzen je zweier in nahezu gleichen Abständen vom Zenith nördlich und südlich culminirenden Sterne gemessen werden.

Ist nämlich z die Zenithdistanz, φ die Polhöhe, δ_s die Deklination eines südlich, δ_n die eines kurz vorher oder nachher nördlich vom Zenith kulminirenden Sterns, so ist

$$z_s = \varphi - \delta_s$$

$$z_n = \delta_n - \varphi,$$

also

$$\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{z_s - z_n}{2}.$$

Man wählt nun bei dieser Methode die Sterne so, dass z_s sehr nahe gleich z_n wird, dass also nur die kleine Differenz $z_s - z_n$ mikrometrisch auszumessen ist. Ist dann der bei der Berechnung von $\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$ aus den angenommenen mittleren Oertern der Sterne verwandte Werth der Aberrationsconstante um dK' fehlerhaft, so wird $\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$, da es sehr nahe gleich φ ist, um den für das Zenith geltenden Betrag dieses Fehlers irrig erhalten und ausserdem um den bei Annahme der mittleren Deklination begangenen Fehler. Es wird also der wahre Werth von φ sich ergeben.

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta + a \cdot dK',$$

wenn φ_0 den aus den Beobachtungen folgenden Werth der Polhöhe, Δ den Fehler der Sternposition und a den Faktor der Aberrationscorrection für das Zenith bedeutet, welchen man nach Gleichung (7) erhält als

$$a = \cos\odot\,(\sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\varepsilon - \cos\varphi\,\sin\varepsilon) - \sin\odot\,\cos\alpha\,\sin\varphi,$$

wenn man das constante Glied der Aberration bei Seite lässt.

In Wirklichkeit wird man zur Bestimmung von φ nicht ein einziges Sternpaar, sondern eine ganze Gruppe von solchen, die in kurzen Zwischenräumen kulminiren, zur Erhöhung der Genauigkeit beobachten (s. übrigens auch den Artikel »Polhöhenbestimmung«).

Beobachtet man nun einige Stunden später eine zweite solche Gruppe, so gilt für diese analog

$$\varphi = \varphi_0' + \Delta' + a' \cdot dK',$$

und durch Subtraction erhält man nun, da φ für die kurze Zwischenzeit als unveränderlich angesehen werden kann.

$$(a' - a)dK' + (\Delta' - \Delta) = -(\varphi_0' - \varphi)$$

oder

$$b \cdot dK' + (\Delta' - \Delta) = -\Delta\varphi.$$

In dieser Gleichung ist $(\varphi_0' - \varphi_0)$ durch die Beobachtung bekannt und $(a' - a) = b$ leicht zu berechnen. Der numerische Werth von b ist jedenfalls negativ, wenn wir voraussetzen, dass die zweite Gruppe im Laufe derselben Nacht nach der ersten culminirt. Denn die Wirkung der Aberration besteht ja darin, den Sternort im grössten Kreise nach dem Apex der Erdbewegung zu verschieben. Nun geht der Apex in der täglichen Umdrehung der Sonne um 6 Stunden vorauf. Bei Sonnenuntergang hat er also seinen tiefsten Stand im Norden unter dem Horizont, so dass ein Zenithstern dann am meisten nach Norden verschoben erscheint, also eine positive Aberration in Deklination hat. Im Laufe der Nacht kommt dann der Apex immer höher, die positive Aberration in Deklination wird immer kleiner, sie wird um Mitternacht herum 0, wenn der Apex in den ersten Vertikal kommt, wird dann negativ und erreicht Morgens, wenn der Apex culminirt, ein negatives Maximum. Unbekannt ist in obiger Gleichung nur noch $(\Delta' - \Delta)$, die Differenz der in den Deklinationsmitteln der beiden Gruppen übrig bleibenden Fehler. Sobald nun die erste Sterngruppe in den Tag vorgelaufen ist, nimmt man hinter der zweiten wieder im Abstand von einigen Stunden eine dritte und erhält die analoge Gleichung

$$(a'' - a') \cdot dK' + (\Delta'' - \Delta') = -(\varphi_0'' - \varphi_0')$$

oder

$$b' \cdot dK' + (\Delta'' - \Delta') = \Delta'\varphi.$$

Mit der Zeit nimmt man dann eine vierte, fünfte u. s. w. Gruppe hinzu, bis man nach Verlauf eines Jahres wieder die allererste beobachtet, allerdings dann als nachfolgende hinter der mit der höchsten Ordnungszahl bezeichneten Gruppe. Durch Summation aller Gleichungen

$$\begin{aligned} b \cdot dK' + (\Delta' - \Delta) &= \Delta\varphi \\ b' \cdot dK' + (\Delta'' - \Delta) &= \Delta'\varphi \\ &\cdots \\ &\cdots \\ b^n \cdot dK' + (\Delta - \Delta^{(n)}) &= \Delta^{(n)}\varphi \end{aligned}$$

ergiebt sich dann

$$\Sigma b \cdot dK' = \Sigma \Delta\varphi,$$

indem sich die cyklische Summe der Deklinationsfehler aufhebt.

Nun zeigt Küstner (Astr. Nachr. No. 3015), dass es am vortheilhaftesten ist, 4 Sterngruppen zu beobachten, deren Mitten in den Rectascensionen 6^h, 14^h, 18^h, 22^h liegen. Es ist aber

$$\begin{aligned} b &= \sin\varphi\,[\cos\odot\cos\varepsilon\,(\sin\alpha' - \sin\alpha) - \sin\odot\,(\cos\alpha' - \cos\alpha)] \\ &= 2\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\,[\cos\odot\cos\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha) + \sin\odot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]. \end{aligned}$$

Um die Werthe von $\odot$ für die numerische Rechnung anzusetzen, ist zu beachten, dass zwei Gruppen immer um jene Zeit herum gemeinsam beobachtet werden können, wenn die Mitte ihrer Rectascensionen um Mitternacht culminirt, dass dann die Rectascension der Sonne 12 Stunden grösser ist und damit die Länge der Sonne aus den Tafeln entnommen werden kann. So finden wir

für Gruppe 6^h und 14^h um den 16. Februar $\odot = 328°$,
„ „ 14^h „ 18^h „ „ 23. Mai $\odot = 62°$,
„ „ 18^h „ 22^h „ „ 20. Juli $\odot = 118°$,
„ „ 22^h „ 6^h „ „ 25. October $\odot = 212°$.

Man übersieht jetzt auch sofort, dass $b = b'''$, $b' = b''$ und zwar

$$\begin{aligned} b = b''' &= 2\sin\varphi\sin 60°\,[\cos 328°\cos 23\tfrac{1}{2}°\cos 150° + \sin 328°\sin 150°] \\ b' = b'' &= 2\sin\varphi\sin 30°\,[\cos 62°\cos 23\tfrac{1}{2}°\cos 240° + \sin 62°\sin 240°]. \end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben ausgerechnet

$$b = -1{\cdot}625 \sin\varphi,$$
$$b' = -0{\cdot}979 \sin\varphi,$$

sodass $\Sigma b = -5{\cdot}208 \sin\varphi$, also z. B. für $\varphi = 50°$, $\Sigma b = -3{\cdot}989$. Man erhält also in unseren Breiten die Correction der Aberrationsconstante nahezu mit ihrem vierfachen Betrage aus der cyklischen Jahressumme der einzelnen Gruppendifferenzen.

B. Planetenaberration.

Es sei t die Zeit der Beobachtung, T die Zeit, zu welcher das Licht vom Planeten ausgegangen ist, c die Zahl der Secunden, welche das Licht gebraucht, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen, und Δ die Entfernung des Planeten von der Erde, so wird sein

$$t - T = \tau = \Delta \cdot c.$$

Je nachdem nun Δ bekannt ist oder nicht, wird man zur Berücksichtigung der Planetenaberration verschiedene Methoden anwenden. Die Betrachtung der Fig. 49 ergiebt nun folgendes bei Anwendung der dort eingeführten Bezeichnungen. Es ist

$$p'P = v\cdot\tau, \quad SP = V\tau,$$

mithin

$$p'P : p'S = QQ' : PQ',$$

daher sind die Richtungen $p'S$ und PQ' parallel. Da nun aber SPQ' die vollständige Fixsternaberration ist, so ergeben sich folgende Vorschriften:

1) Ist die Entfernung Δ bekannt, so bilde man $\tau = \Delta c$, dann ist der zur Zeit t beobachtete scheinbare Ort des Planeten gleich dem wahren Ort desselben zur Zeit T, gesehen von dem Erdorte zur Zeit T. Dies Verfahren ist anzuwenden, wenn man z. B. Beobachtungen mit einer Ephemeride, die wahre Orte giebt, vergleichen will.

2) Aus der ersten Methode ergiebt sich ohne Weiteres die zweite. Wie nämlich der wahre Ort zur Zeit T mit dem scheinbaren zur Zeit t identisch war, so wird der wahre Ort zur Zeit t mit dem scheinbaren zur Zeit $t + \tau$ identisch sein. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung des Planeten bekannt ist, berechne man daher seine Bewegung in dem Zeitintervall τ, und füge diese dem zur Zeit t beobachteten scheinbaren Ort hinzu; dann erhält man den wahren Ort zur Zeit t.

3) Befreit man die beobachtete Richtung PQ' vollständig von dem Einfluss der Fixsternaberration (mit Einschluss der constanten Glieder), so erhält man die Richtung PS, d. h. den wahren Ort des Planeten zur Zeit T, gesehen vom Erdort zur Zeit t. Diese Methode wird bei ersten Bahnbestimmungen angewandt, weil dort die Zeit τ zunächst noch unbekannt ist. Ist dann ein genäherter Werth von Δ ermittelt, so hat man die Zeit des Planetenortes nachträglich um $-\tau$ zu corrigiren.

Die erste Methode setzt voraus, dass die Bewegung des Erdortes in der Zeit τ eine geradlinige ist. Da dies nicht streng der Fall ist, so kann für die entfernten Planeten eine Ungenauigkeit daraus entstehen, welche z. B. beim Neptun auf $0''{\cdot}03$ in Länge steigen kann.

Man kann die eben angeführten Methoden zur Berücksichtigung der Planetenaberration auch ohne geometrische Betrachtungen aus den Gleichungen (2) ableiten, indem man statt der Componenten der absoluten Geschwindigkeit der Erde die Componenten der relativen Geschwindigkeit in Beziehung auf den

Planeten einführt. Man erhält dadurch Gleichungen, aus denen sich die genannten Methoden als einfache Folgerungen ergeben, doch wird es nicht nöthig sein, hier auf die Ableitung derselben einzugehen.

E. v. REBEUR-PASCHWITZ.

Aequatoreal wird ein zu Winkelmessungen dienendes Instrument mit zwei gegen einander rechtwinkligen Drehungsaxen, von denen die eine parallel der Umdrehungsaxe der Erde ist, genannt. Die erste Anwendung derartig aufgestellter Instrumente, der sogen. Armillarsphären (s. d.) geschah wahrscheinlich schon im Alterthum durch TIMOCHARIS und ARISTILLUS, eine vielfache Aenderung fanden sie später durch TYCHO BRAHE, welcher auf seiner Sternwarte Uranienburg mehrere »*Armillae aequatoriae*« aufgestellt hatte, die er zur Beobachtung der Stundenwinkel und Deklinationen der Sterne benutzte. Die neuere Form der Aequatoreale, und namentlich die Verbindung mit dem Fernrohr datirt wahrscheinlich aus dem Ende des siebzehnten Jahrhunderts, wo OLAUS RÖMER auf dem »runden Thurm« in Kopenhagen eine »*Machina aequatorea*« mit einem Fernrohr von 3 Fuss Länge aufstellte, später sind Aequatoreale namentlich von RAMSDEN, FRAUNHOFER, und in besonders vollkommener Ausführung in neuerer Zeit von den REPSOLD's angefertigt.

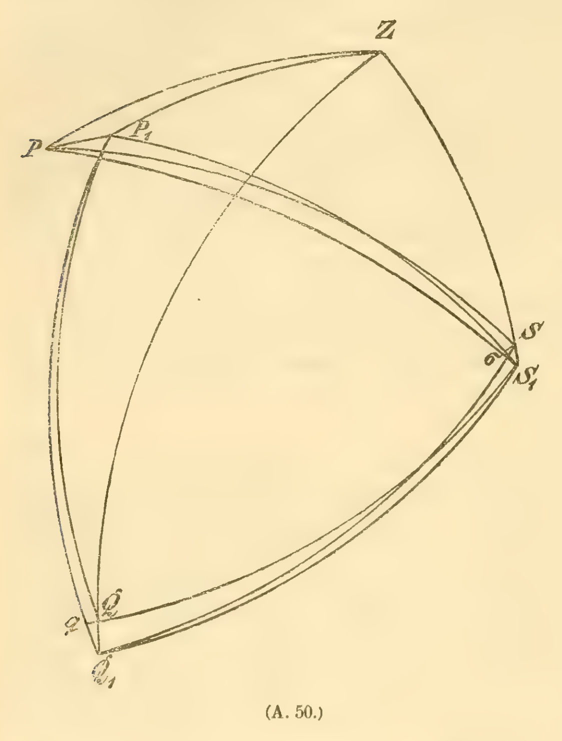
Die der Erdaxe parallele Umdrehungsaxe des Aequatoreals nennt man die Stundenaxe, die darauf senkrecht befindliche die Deklinationsaxe. Beide Axen sind mit getheilten Kreisen versehen, an denen man mit Hilfe von Nonien oder Mikroskopen resp. den Stundenwinkel und die Deklination eines eingestellten Gegenstandes ablesen kann. Die Einstellung geschieht mit einem Fernrohr, welches in der Regel an einem Ende der Deklinationsaxe angebracht ist, und dessen Absehenslinie sehr nahe senkrecht gegen die Richtung der Deklinationsaxe steht. Damit das Instrument in jeder Lage im Gleichgewicht ist, muss an dem dem Fernrohr entgegengesetzten Ende der Deklinationsaxe ein Gegengewicht angebracht sein.

Wir sehen zunächst von den Einwirkungen der Schwere auf das Instrument ab, und nehmen an, dass die Deklinationsaxe genau senkrecht gegen die Stundenaxe, und die Absehenslinie genau senkrecht gegen die Deklinationsaxe gerichtet ist. Drehen wir dann das Instrument so um die Stundenaxe, dass die Deklinationsaxe horizontal wird, so muss, wenn wir jetzt das Fernrohr um die Deklinationsaxe herumdrehen, die Absehenslinie einen Verticalkreis an der Himmelskugel beschreiben, welcher identisch ist mit demjenigen Verticalkreis, in welchen die Pole der Stundenaxe fallen, und welcher, wenn die Stundenaxe genau parallel der Erdaxe ist, mit dem Meridian des Beobachtungsortes zusammenfällt.

Wir wollen nun die letzte Voraussetzung nicht machen, und diejenige Verticalebene, in welcher die Pole der Stundenaxe liegen, den Meridian des Instrumentes nennen. Den Winkel, welchen diese Ebene mit dem Meridian des Beobachtungsortes bildet, und der bei einem nahe berichtigten Instrument immer sehr klein ist, nennen wir das Azimuth des Instrumentes, und rechnen es positiv, wenn Sterne, welche südlich vom Zenith culminiren, den Meridian des Instrumentes früher passiren als den Meridian des Beobachtungsortes.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen wird jeder der beiden Pole der Deklinationsaxe, wenn das Instrument um die Stundenaxe herumgedreht wird, einen grössten Kreis an der Himmelskugel beschreiben, den man den Aequator des Instrumentes nennen kann.

Denken wir uns nun durch irgend einen Punkt S der Himmelskugel (Fig. 50) und diejenigen Punkte, in welchen die verlängerte Stundenaxe die Himmelskugel trifft, einen grössten Kreis gezogen, so wird derselbe den Aequator des Instrumentes rechtwinklig durchschneiden. Den Winkel, welchen die Ebene dieses grössten Kreises mit der Ebene des Meridians des Instrumentes bildet, nennen wir den Stundenwinkel des Punktes S am Instrument, und zählen ihn vom Meridian des Instrumentes an in der Richtung von Süden durch Westen bis 360°; ferner nennen wir den Bogen des grössten Kreises, welcher zwischen dem Punkte S und dem Aequator des Instrumentes liegt, die Deklination des Punktes S am Instrument, und rechnen sie positiv, wenn der Punkt S nördlich vom Aequator ist.



(A. 50.)

Der Stundenkreis sei in der Richtung der täglichen Bewegung eingetheilt von 0° bis 360° (oder von 0^h bis 24^h). Im Allgemeinen wird jeder Punkt der Himmelskugel in zwei verschiedenen Lagen des Instrumentes beobachtet werden können, die mit »Deklinationskreis folgend« und »Deklinationskreis vorangehend« bezeichnet werden mögen. Wenn der Stundenwinkel am Instrument 0 ist, so sei die Ablesung des Stundenkreises in der einen Lage des Instrumentes ϑ, in der anderen $\vartheta + 180°$, wo wir ϑ als Indexfehler des Stundenkreises bezeichnen wollen Die Eintheilung des Deklinationskreises gehe ebenfalls von 0° bis 360°, und zwar gebe der Kreis, wenn ein Punkt im Aequator des Instrumentes am Fernrohr eingestellt ist, in der einen Lage die Ablesung Δ, und in der anderen $180° + \Delta$. Die Grössen ϑ und Δ wird man der Bequemlichkeit wegen meistens sehr klein halten.

Es sei nun für irgend einen eingestellten Punkt der Himmelskugel die Ablesung am Stundenkreise in der Lage I des Instrumentes T, in der Lage II $T + 180°$, am Deklinationskreise in der Lage I D, in der Lage II $180° - D$, so wird sein:

Stundenwinkel am Instrument:	Deklination am Instrument:
für Lage I $= T + \vartheta$	für Lage I $= D + \Delta$
„ „ II $= T + \vartheta + 180°$	„ „ II $= 180° - D + \Delta$.

Der Stundenwinkel am Instrument der Pole der Deklinationsaxe ist um 90° verschieden von dem Stundenwinkel eines am Fernrohr eingestellten Gegenstandes, er wird also in Lage I $= 90° + T + \vartheta$ sein. Hierin wird offenbar nichts geändert, wenn wir von unserer bisherigen Voraussetzung abgehen, dass die Deklinationsaxe rechtwinklig gegen die Stundenaxe steht, denn wenn wir annehmen, dass die beiden Axen irgend einen anderen Winkel gegen einander

bilden, so wird dadurch nur die Deklination, nicht aber der Stundenwinkel des Poles der Deklinationsaxe geändert.

Wir wollen jetzt die Untersuchung verallgemeinern und annehmen, dass weder die Deklinationsaxe auf der Stundenaxe, noch die Absehenslinie auf der Deklinationsaxe genau senkrecht steht, auch wollen wir die Biegungen, welche sowohl das Fernrohr als auch die Deklinationsaxe erleiden, in Rechnung ziehen; indessen mag doch vorausgesetzt werden, dass die Aufstellungsfehler und die Biegungen des Instrumentes so kleine Grössen sind, dass wir ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen können. Die Stundenaxe wird ohne Zweifel auch durch ihr eigenes und das Gewicht der übrigen Theile des Instrumentes gebogen, wir brauchen hierauf aber keine Rücksicht zu nehmen, weil diese Biegung in jeder Lage des Instrumentes die gleiche sein muss. Denn einestheils ist die Neigung dieser Axe constant, und anderentheils muss der Schwerpunkt derjenigen Theile des Instrumentes, welche sich um die Stundenaxe herumdrehen, immer in die Stundenaxe selbst fallen, da sonst das Instrument nicht in jeder Lage im Gleichgewicht sein könnte. Die Wirkung der Schwere auf die Stundenaxe besteht also nur darin, dass der Pol dieser Axe sich an einem anderen Punkte des Himmels befindet als dort, wo er ohne Wirkung der Schwere sein würde, er wird aber bei jeder Stellung des Instrumentes unveränderlich in derselben Lage bleiben.

Es sei nun (Fig. 50) Z das Zenith, P der Weltpol, P_1 der Pol der Stundenaxe des Instrumentes, S_1 ein auf die Mitte des Fadenkreuzes eingestellter Stern, und S derjenige Punkt der Himmelskugel, welcher bei derselben Stellung des Instrumentes auf der Mitte des Fadenkreuzes erscheinen würde, wenn keine Biegung des Fernrohres vorhanden wäre. Die Punkte S und S_1 liegen auf demselben Verticalkreise ZSS_1, die Länge des Bogens SS_1 können wir mit grosser Annäherung als proportional dem Sinus der Zenithdistanz des eingestellten Objekts annehmen, sodass wenn a der Betrag der Biegung im Horizont ist, sehr nahe $SS_1 = a \sin ZS$ wird. Wir wollen ferner annehmen, dass der westliche Pol der Deklinationsaxe in den Punkt Q fallen würde, wenn keine Biegung der Axe stattfände. In Folge der Biegung möge aber der Pol in den Punkt Q_1 fallen, wo Q und Q_1 in demselben Verticalkreis ZQQ_1 liegen werden. Bezeichnet B den grössten Betrag der Biegung der Axe, welcher bei horizontaler Lage der Axe stattfindet, so können wir $QQ_1 = B \sin ZQ$ annehmen. Wir ziehen nun durch Q einen Bogen grössten Kreises Qq senkrecht auf P_1Q_1, dann ist, da wir das kleine Dreieck Q_1Qq als ebenes betrachten können, und QQ_1 immer ein sehr kleiner Bogen ist, mit grosser Annäherung

$$P_1Q_1 = P_1Q + QQ_1 \cos P_1Q_1Z = P_1Q + B \sin ZQ \cos P_1Q_1Z,$$

ferner ist

$$ZP_1Q_1 = ZP_1Q + QP_1Q_1.$$

Es ist aber:

$$\sin Q_1P_1Q = \sin QQ_1 \frac{\sin P_1QZ}{\sin P_1Q_1}$$

oder da wir die Sinus der kleinen Grössen Q_1P_1Q und QQ_1 mit den Bögen vertauschen können

$$Q_1P_1Q = QQ_1 \frac{\sin P_1QZ}{\sin P_1Q_1} = B \frac{\sin ZQ \sin P_1QZ}{\sin P_1Q_1}$$

und also

$$ZP_1Q_1 = ZP_1Q + B \frac{\sin ZQ \sin P_1QZ}{\sin P_1Q_1}.$$

Der Winkel ZP_1Q ist der Stundenwinkel am Instrument des westlichen Poles der Deklinationsaxe, wenn bei derselben von der Biegung abgesehen wird, und derselbe war für Lage I des Instrumentes oben gefunden zu $90^\circ + T + \vartheta$. Es wird demnach:

$$ZP_1Q_1 = 90^\circ + T + \vartheta + B\,\frac{\sin ZQ \sin P_1QZ}{\sin P_1Q_1}.$$

Der Punkt Q muss bei jeder Stellung der Deklinationsaxe denselben Abstand P_1Q von dem Pole P_1 des Instrumentes haben. Wenn die Deklinationsaxe genau senkrecht gegen die Stundenaxe gerichtet ist, so muss der Bogen $P_1Q = 90^\circ$ sein. Da wir aber eine solche Voraussetzung nicht machen wollen, so setzen wir $P_1Q = 90^\circ + i$, wo i eine sehr kleine Grösse ist. Die Neigung der Stundenaxe gegen die Ebene des Horizonts sei φ_1, so haben wir in dem sphärischen Dreieck ZP_1Q:

$$P_1Q = 90^\circ + i,$$
$$ZP_1 = 90^\circ - \varphi_1,$$
$$ZP_1Q = 90^\circ + T + \vartheta.$$

Wir erhalten demnach folgende Gleichungen:

$$\sin ZQ \sin P_1ZQ = \cos\varphi_1 \cos(T + \vartheta)$$
$$\sin ZQ \cos P_1QZ = \sin\varphi_1 \cos i - \cos\varphi_1 \sin i \sin(T + \vartheta).$$

Nun war aber

$$P_{11}Q = P_1Q + B \sin ZQ \cos P_1Q_1Z,$$

folglich wird auch, wenn wir beachten, dass QQ_1 immer nur sehr klein ist und daher die Winkel P_1Q_1Z und P_1QZ ohne merklichen Fehler einander gleich gesetzt werden können:

$$P_1Q_1 = 90^\circ + i + B(\sin\varphi_1 \cos i - \cos\varphi_1 \sin i \sin(T + \vartheta).$$

Setzen wir hier $\cos i = 1$ und vernachlässigen das mit $B \sin i$ multiplicirte Glied, so erhalten wir

$$P_1Q_1 = 90^\circ + i + B \sin\varphi_1.$$

Ferner wird

$$ZP_1Q_1 = 90^\circ + T + \vartheta + B\,\frac{\cos\varphi_1 \cos(T + \vartheta)}{\sin P_1Q}$$

oder da P_1Q sehr nahe $= 90^\circ$ ist, also $\sin P_1Q = 1$ gesetzt werden kann,

$$ZP_1Q_1 = 90^\circ + T + \vartheta + B \cos\varphi_1 \cos(T + \vartheta).$$

Setzen wir nun $P_1Q_1 = 90^\circ + i'$ und $ZP_1Q_1 = 90^\circ + T'$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$90^\circ + i' = 90^\circ + i + B \sin\varphi_1$$
$$90^\circ + T' \qquad 90^\circ + T + \vartheta + B \cos\varphi_1 \cos(T + \vartheta). \qquad (1)$$

Der Punkt Q_1 ist der wirkliche Pol der Deklinationsaxe; wenn die Absehenslinie des Fernrohres auf dieser Axe genau senkrecht stände und man ausserdem von der Biegung des Fernrohres absieht, so müsste jeder Punkt der Himmelskugel, auf den die Absehenslinie des Fernrohres bei einer Drehung desselben um die Deklinationsaxe gerichtet werden kann, genau um 90° von Q_1 abstehen. Wir wollen auch diese Voraussetzung nicht machen, sondern annehmen, dass die Absehenslinie des Fernrohrs gegen die Deklinationsaxe einen Winkel $90^\circ - c$ bildet, wo c als eine sehr kleine Grösse angesehen werden kann. Der Bogen SQ_1 wird dann ebenfalls $= 90^\circ - c$ sein.

Der Winkel P_1Q_1S ist gleich dem Complement der am Deklinationskreise abgelesenen und um den Indexfehler des Kreises verbesserten Deklination, also für Lage I $= 90^\circ - D - \Delta$. Danach ist in dem sphärischen Dreieck P_1Q_1S

$$P_1Q_1 = 90° + i',$$
$$Q_1S = 90° - c,$$
$$P_1Q_1S = 90° - D - \Delta,$$

und wir erhalten die Gleichungen

$$\cos P_1S = -\sin i' \sin c + \cos i' \cos c \sin (D + \Delta)$$
$$\sin P_1S \cos SP_1Q_1 = \cos i' \sin c + \sin i' \cos c \sin (D + \Delta)$$
$$\sin P_1S \sin SP_1Q_1 = \cos c \cos (D + \Delta)$$

oder, wenn man die Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf i' und c vernachlässigt:

$$\cos P_1S = \sin (D + \Delta)$$
$$\sin P_1S \cos SP_1Q_1 = c + i' \sin (D + \Delta)$$
$$\sin P_1S \sin SP_1Q_1 = \cos (D + \Delta).$$

Daraus folgt, wenn man P_1S um $90° - (D + \Delta)$ immer zugleich positiv oder negativ nimmt:

$$P_1S = 90° - (D + \Delta)$$
$$\cot g\, SP_1Q_1 = \tan g\, (90° - SP_1Q_1) = \frac{c + i' \sin (D + \Delta)}{\cos (D + \Delta)}.$$

Nun ist SP_1Q_1 stets sehr nahe 90°, wir können daher die Tangente von $90° - SP_2Q_1$ mit dem Bogen vertauschen und erhalten danach

$$SP_1Q_1 = 90° - \frac{c + i' \sin (D + \Delta)}{\cos (D + \Delta)}.$$

Ferner ist $ZP_1S = ZP_1Q_1 - SP_1Q_1$, und da $ZP_1Q_1 = 90° + T'$ gesetzt war,

$$ZP_1S = T' + \frac{c + i' \sin (D + \Delta)}{\cos (D + \Delta)}.$$

Ziehen wir $S\sigma$ senkrecht auf P_1S_1, so ist $P_1S_1 = P_1\sigma + S_1\sigma = P_1S + SS_1 \cos P_1S_1Z$. Es ist aber $SS' = a \sin ZS$, folglich

$$P_1S_1 = 90° - (D + \Delta) + a \sin ZS \cos P_1S_1Z.$$

Ferner ist

$$\sin SP_1S_1 = \sin SS_1 \cdot \frac{\sin P_1S_1Z}{\sin P_1S},$$

oder wegen der Kleinheit von SP_1S_1 und SS_1 mit genügender Annäherung

$$SP_1S_1 = SS_1 \frac{\sin P_1S_1Z}{\sin P_1S}$$

und

$$ZP_1S_1 = ZP_1S + SS_1 \frac{\sin P_1S_1Z}{\sin P_1S} = T' + \frac{c + i' \sin (D + \Delta)}{\cos (D + \Delta)} + a \sin ZS \frac{\sin P\ S_1Z}{\sin P_1S}.$$

Nun ist

$$\sin ZS \cos P_1SZ = \sin \varphi_1 \sin P_1S - \cos \varphi_1 \cos P_1S \cos ZP_1S$$

und

$$\sin ZS \sin P_1SZ = \cos \varphi_1 \sin ZP_1S,$$

folglich

$$\sin ZS \cos P_1SZ = \sin \varphi_1 \cos (D + \Delta) - \cos \varphi_1 \sin (D + \Delta) \cos ZP_1S.$$

Daraus folgt, wenn wir im Coefficiënten von a die wenig von einander verschiedenen Winkel P_1SZ und P_1S_1Z vertauschen

$$P_1S_1 = 90 - (D + \Delta) + a\,[\sin \varphi_1 \cos (D + \Delta) - \cos \varphi_1 \sin (D + \Delta) \cos ZP_1S],$$

ferner ist $ZP_1S = ZP_1Q - SP_1Q$, und da $ZP_1Q = 90° + T + \vartheta$ und SP_1Q sehr nahe 90°, so können wir in dem Coëfficienten von a setzen $ZP_1S = T + \vartheta$, und erhalten

$P_1 S_1 = 90 - (D + \Delta) + a\,(\sin\varphi_1 \cos(D + \Delta) - \cos\varphi_1 \sin(D + \Delta) \cos(T + \vartheta)]$,
und (wenn wir $ZP_1S_1 = t_1$ setzen)

$$ZP_1S_1 = t_1 = T' + \frac{c + i' \sin(D + \Delta)}{\cos(D + \Delta)} + a\,\frac{\cos\varphi_1 \sin(T + \vartheta)}{\cos(D + \Delta)}.$$

Nun war nach (1)

$$i' = i + B \sin\varphi_1$$
$$T' = T + \vartheta + B \cos\varphi_1 \cos(T + \vartheta),$$

daher

$$t_1 = T + \vartheta + \frac{c + i \sin(D + \Delta)}{\cos(D + \Delta)} + \frac{B}{\cos(D + \Delta)}[\sin\varphi_1 \sin(D + \Delta) + \cos\varphi_1 \cos(D + \Delta) \cos(T + \vartheta)]$$
$$+ \frac{a}{\cos(D + \Delta)} \cos\varphi_1 \sin(T + \vartheta).$$

und $P_1 S_1 = 90° - \delta_1$ gesetzt

$$\delta_1 = (D + \Delta) - a\,[(\sin\varphi_1 \cos(D + \Delta) - \cos\varphi_1 \sin(D + \Delta) \cos(T + \delta)].$$

Wenn wir in den Coëfficienten der kleinen Grössen i, B und a, $\delta_1 = D + \Delta$ und $t_1 = T + \vartheta$ setzen, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$t_1 = T + \vartheta + \frac{c + i \sin\delta_1}{\cos\delta_1} + \frac{B}{\cos\delta_1}(\sin\varphi_1 \sin\delta_1 + \cos\varphi_1 \cos\delta_1 \cos t_1) + \frac{a}{\cos\delta_1} \cos\varphi_1 \sin t_1, \quad (2)$$
$$\delta_1 = D + \Delta - a(\sin\varphi_1 \cos\delta_1 - \cos\varphi_1 \sin\delta_1 \cos t_1).$$

Es werde nun gesetzt: $PS_1 = 90° - \delta$, $PP_1 = \varepsilon$, $PZ = \varphi$ und die Winkel $ZPP_1 = h$, $ZPS_1 = t$, $ZP_1P = 180° - h_1$, und $ZP_1S_1 = t$, so haben wir für das Dreieck P_1PS_1 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos\varepsilon \sin\delta_1 - \sin\varepsilon \cos\delta_1 \cos(t_1 - h_1) \\ \cos\delta \cos(t - h) &= \sin\varepsilon \sin\delta_1 + \cos\varepsilon \cos\delta_1 \cos(t_1 - h_1) \\ \cos\delta \sin(t - h) &= \cos\delta_1 \sin(t_1 - h_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Das Dreieck ZPP_1 ergiebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin\varphi \cos\varepsilon + \cos\varphi \sin\varepsilon \cos h \\ \cos\varphi_1 \cos h_1 &= - \sin\varphi \sin\varepsilon + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos h \\ \cos\varphi_1 \sin h_1 &= \cos\varphi \sin h. \end{aligned} \quad (4)$$

Wenn wir wieder den Sinus des kleinen Bogens ε gleich dem Bogen selbst, und den Cosinus gleich der Einheit setzen, so erhalten wir aus (4)

$$\sin h_1 \cos h_1 \frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi} - \sin h_1 \cos h = - \varepsilon \tang\varphi \sin h_1.$$

Nun ist

$$\sin h = \sin h_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi},$$

folglich

$$\sin h \cos h_1 - \cos h \sin h_1 = - \varepsilon \tang\varphi \sin h_1,$$

und

$$\sin(h - h_1) = h - h_1 = - \varepsilon \tang\varphi \sin h_1.$$

Ebenso folgt aus (3)

$$t = t_1 - \varepsilon \tang\varphi \sin h_1 - \varepsilon \tang\delta_1 \sin(t_1 - h_1)$$
$$\sin\delta = \sin\delta_1 - \varepsilon \cos\delta_1 \cos(t_1 - h_1),$$

woraus folgt

$$2 \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) \cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta_1) = - \varepsilon \cos\delta_1 \cos(t_1 - h_1),$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$\delta - \delta_1 = - \varepsilon \cos(t_1 - h_1).$$

Setzen wir nun

$$\varepsilon \cos h_1 = f$$
$$\varepsilon \sin h_1 = k \cos \varphi,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} t &= t_1 - \varepsilon \tang \varphi \sin h_1 - f \tang \delta_1 \sin t_1 + k \cos \varphi \tang \delta_1 \cos t_1 \\ &= t_1 - k \sin \varphi - f \tang \delta_1 \sin t_1 + k \cos \varphi \tang \delta_1 \cos t_1 \\ \delta &= \delta_1 - f \cos t_1 - k \sin t_1 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung von (2) erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} t = T + \vartheta - f \tang \delta_1 \sin t_1 + k \cos \varphi \tang \delta_1 \cos t_1 + c \sec \delta_1 + i \tang \delta_1 - k \sin \varphi \\ + B (\sin \varphi_1 \tang \delta_1 + \cos \varphi_1 \cos t_1) + a \sec \delta_1 \cos \varphi_1 \sin t_1, \quad (6) \\ \delta = D + \Delta - a (\sin \varphi_1 \cos \delta_1 - \cos \varphi_1 \sin \delta_1 \cos t_1) - f \cos t_1 - k \sin t_1 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Setzen wir die Zenithdistanz ZS_1 des Sternes $= z$, so haben wir

$$\cos z = \sin \varphi_1 \sin \delta_1 + \cos \varphi_1 \cos \delta_1 \cos t_1,$$

und

$$\cos z \sec \delta_1 = \sin \varphi_1 \tang \delta_1 + \cos \varphi_1 \cos t_1 .$$

Es sei ferner der parallactische Winkel ZS_1P des Sternes $= p$, so wird

$$\sin z \sin p = \cos \varphi \sin t$$

oder in den nachfolgenden Verbindungen mit genügender Annäherung

$$\sin z \sin p = \cos \varphi \sin t_1,$$

und

$$\sin z \sin p \sec \delta_1 = \sec \delta_1 \cos \varphi_1 \sin t_1,$$

so entstehen, wenn wir noch in den Coëfficienten der kleinen, die Instrumentalfehler bezeichnenden Grössen φ für φ_1, t für t_1 und δ für δ_1 setzen, folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} t = T + \delta + f \tang \delta \sin t - k (\sin \varphi - \cos \varphi \tang \delta \cos t) + c \sec \delta + i \tang \delta \\ + B \cos z \sec \delta + a \sin z \sin p \sec \delta \quad (7) \\ \delta = D + \Delta + f \cos t - k \sin t \cos \varphi - a (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t). \end{aligned}$$

Wird ein Stern in der Nähe des Meridians beobachtet, so fallen die mit $\sin t$ multiplicirten Glieder weg, und wir erhalten

$$\begin{aligned} t &= T + \vartheta - k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta + i \tang \delta + B \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} \\ \delta &= D + \Delta + f - a \sin z. \end{aligned} \quad (8)$$

In der anderen Lage des Instrumentes ändern c, i, und B ihre Vorzeichen, und es geht daraus hervor, dass wenn ein Stern in der Nähe des Meridians in beiden Lagen des Instrumentes beobachtet wird, die genannten Grössen aus dem Mittel der Beobachtungen eliminirt werden. Die Elimination wird eine möglichst vollständige sein, wenn man die beiden Beobachtungen bei gleich grossen, aber entgegengesetzten Stundenwinkeln, demnach auch bei gleichen Zenithdistanzen und parallactischen Winkeln anstellt. Uebrigens ist zu bemerken, dass man die Biegung des Fernrohres a, welche nur von der Zenithdistanz des beobachteten Gegenstandes abhängt, am einfachsten mit der Berechnung der Refraction vereinigt; in diesem Falle wird also in den obigen Gleichungen das mit a multiplicirte Glied wegfallen.

Die Ermittelung der Instrumentalfehler kann auf verschiedene Weise geschehen, und wird wesentlich erleichtert, wenn das Instrument so eingerichtet ist, dass die Deklinationsaxe nivellirt werden kann. Um hierbei unabhängig von der Biegung dieser Axe zu werden, müssen die Füsse des Niveaus gerade über den

Axenlagern auf die Axe gesetzt werden, auch ist es nothwendig, den Unterschied der Dicke der beiden Axenenden zu kennen. Dieser kann entweder ermittelt werden durch wiederholtes Umlegen der Deklinationsaxe in ihren Lagern und jedesmaliges Nivelliren, oder, wo dieses Verfahren wegen des zu grossen Gewichtes des Instrumentes zu schwierig und unsicher wird, durch Nivelliren mit zwei Niveaus, bei denen die Winkel der Füsse erheblich verschieden sind.

Wenn der Unterschied der Dicke der Axenenden bekannt ist, so kann man bei sehr nahe horizontaler Lage der Deklinationsaxe ihre Neigung durch Nivellirung finden. Es sei nun diese Neigung N, und die entsprechende Ablesung des Stundenkreises t_0, so würde, wenn $N = 0$ wäre, auch t_0 sich ändern, und zwar um den Betrag $N \sec\varphi$, wir würden also in diesem Falle die Ablesung $t_0 + N \sec\varphi$ erhalten. Die Deklinationsaxe bildet gegen die Stundenaxe den Winkel $90° + i$, wäre dieser Winkel genau $90°$, so würde, wenn die Deklinationsaxe die Neigung N gegen den Horizont hat, die Ablesung des Stundenkreises nicht t_0, sondern $t_0 + i \tan\varphi$ ergeben. Für $N = 0$ und $i = 0$ würde also der Stundenwinkel $= t_0 + N \sec\varphi + i \tan\varphi = -\vartheta$ sein. Es werde nun der Stundenwinkel um $180°$ geändert, sodass die Deklinationsaxe wieder sehr nahe horizontal wird, und in dieser Lage ergebe die Nivellirung die Neigung N für den Stundenwinkel $180° + t_0'$. Für $N' = 0$ und $i = 0$ würden wir dann die Ablesung $180° + t_0' + N' \sec\varphi - i \tan\varphi$ erhalten. Der Stundenwinkel für $N = 0$ und $i = 0$ muss aber von dem Stundenwinkel für $N' = 0$ und $i = 0$ genau um $180°$ verschieden sein, folglich erhalten wir die Gleichung

$$-\vartheta = t_0 + N \sec\varphi + i \tan\varphi = t_0' + N' \sec\varphi - i \tan\varphi, \tag{9}$$

woraus folgt

$$i = \frac{t_0' - t_0 + (N' - N) \sec\varphi}{2 \tan\varphi},$$

oder wenn man setzt

$$t_0 + N \sec\varphi = J$$
$$t_0' + N' \sec\varphi = J'$$
$$i = \frac{J' - J}{2 \tan\varphi}.$$

Den mit $\sec\varphi$ multiplicirten, in Bogensecunden ausgedrückten Werth eines Niveautheiles kann man leicht durch das Instrument selbst finden, wenn man bei sehr nahe horizontaler Deklinationsaxe den Stundenwinkel mehrfach ändert, und seine Ablesung jedesmal mit einer Ablesung des Niveaus verbindet.

Um die Grösse c, welche man den Collimationsfehler des Fernrohres nennt, direkt zu bestimmen, kann man folgendermaassen verfahren. Man richtet das Fernrohr auf einen terrestrischen Gegenstand, und bringt in einiger Entfernung hinter dem Ocular ein mit einem Fadenkreuz versehenes Hilfsfernrohr an, dessen optische Axe mit der des Fernrohres des Aequatoreals, welches wir jetzt der Kürze wegen das Hauptfernrohr nennen wollen, sehr nahe zusammenfällt. Alsdann dreht man das Aequatoreal um die Stundenaxe soweit, dass man durch das Hilfsfernrohr den terrestrischen Gegenstand direkt sehen kann, und stellt ihn genau auf das Fadenkreuz ein. Dreht man darauf, bei unverändertem Stundenwinkel, das Fernrohr um $180°$ um die Deklinationsaxe, so muss das Fadenkreuz des Hilfsfernrohrs genau mit dem des Hauptfernrohrs zusammenfallen, wenn $c = 0$ ist, im anderen Falle aber um $2c$ von ihm entfernt erscheinen. Diesen Betrag kann man entweder mikrometrisch oder durch Ablesung des Stundenwinkels bei abwechselnder Einstellung auf den terrestrischen Gegenstand und das Fadenkreuz des Hilfsfernrohrs ermitteln, nur ist dabei zu beachten, dass

im letzteren Falle die Differenz der Ablesungen nicht die Grösse $2c$, sondern $2c \sec\delta$ ergiebt, wo δ die Deklination des eingestellten Gegenstandes bezeichnet. Da der Collimationsfehler in der Regel nicht für lange Zeit als constant angenommen werden kann, so ist das beschriebene Verfahren oft zu wiederholen und wird dadurch lästig und zeitraubend, es wird daher zweckmässiger sein, wie im folgenden gezeigt werden wird, die Bestimmung von c mit derjenigen von B zu verbinden, was durch Beobachtung zweier Sterne in beiden Lagen des Instrumentes geschehen kann. Dagegen kann das Verfahren mit grossem Nutzen angewendet werden, um den früher mit a bezeichneten Werth der Biegung des Fernrohrs zu ermitteln.

Durch die Nivellirung der Deklinationsaxe erhält man auch die Grösse ϑ, oder den Indexfehler des Stundenkreises mit Hilfe der Gleichung (9). Die Kenntniss der Grösse i ist dabei nicht erforderlich, weil wir haben:

$$-\vartheta = \frac{t_0 + t_0'}{2} + \frac{N + N'}{2} \sec\varphi. \tag{10}$$

Für $N \sec\varphi$ und $N' \sec\varphi$ wird man sich zweckmässiger Weise eine kleine Tafel herstellen, deren Argument die abgelesene Neigung der Deklinationsaxe in Theilen des Niveaus ist.

Die Grösse k erhält man durch Verbindung der Beobachtungen zweier Sterne, für welche die Coëfficienten $\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}$ möglichst verschieden sind; ist diese Grösse bekannt, so ergiebt die Beobachtung eines jeden Sterns den Fehler der benutzten Uhr.

Beispiel: Am 4. März 1874 wurden am Aequatoreal der Kieler Sternwarte folgende Beobachtungen gemacht:

	δ Urs. min. U. C.		51 Cephei O. C.	
	Kr. W.	Kr. O.	Kr. W.	Kr. O.
Uhrzeit der Beob.:	$6^h 9^m 28^s{\cdot}48$	$6^h 15^m 22^s{\cdot}95$	$6^h 37^m 32^s{\cdot}20$	$6^h 43^m 46^s{\cdot}85$
T = Ablesung des Stundenkreises:	180° 45′ 14″·89	359° 15′ 29″·16	180° 46′ 2″·98	359° 15′ 58″·31.

Bei sehr nahe horizontaler Lage der Deklinationsaxe fand sich die Ablesung des Stundenkreises:

	Kr. O.	Kr. W.
	359° 59′ 56″·42	179° 59′ 53″·72
Niveaucorrection = $N \sec\varphi$	+ 3″·66	+ 1″·77
J	0° 0′ 0″·08	179° 59′ 55″·49

$$\text{Demnach } \vartheta = \frac{-0''{\cdot}08 + 4''{\cdot}51}{2} = 2''{\cdot}22$$

$T + \vartheta$ . .	+ 180° 45′ 17″·11	359° 15′ 31″·38	180° 46′ 5″·20	359° 16′ 0″·53
Stundenwinkel in Bogen .	0° 45′ 17″·11	— 0° 44′ 28″·62	+ 0° 46′ 5″·20	— 0° 43′ 59″·47
Stundenwinkel in Zeit . .	$+ 0^h\ 3^m\ 1^s{\cdot}14$	$- 0^h\ 2^m\ 57^s{\cdot}91$	$+ 0^h\ 3^m\ 4^s{\cdot}35$	$- 0^h\ 2^m\ 55^s{\cdot}96$
Uhrzeit + Stundenwinkel	$+ 6^h\ 12^m\ 29^s{\cdot}62$	$6^h\ 12^m\ 25^s{\cdot}04$	$6^h\ 40^m\ 36^s{\cdot}55$	$6^h\ 40^m\ 50^s{\cdot}89$
Mittel . .	$6^h\ 12^m\ 27^s{\cdot}33$		$6^h\ 40^m\ 43^s{\cdot}72.$	

Der Coëfficient $\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}$ betrug bei δ Urs. min. (Untere Culmination, bei welcher δ durch den Pol hindurch über 90° gerechnet wird) + 10·636, und bei

51 Cephei — 11·277. Die Rectascension von δ Urs. min. war $18^h\ 12^m\ 51^s{\cdot}80$ und die von 51 Cephei $6^h\ 40^m\ 58^s{\cdot}50$. Wir haben daher die Gleichung:

$$\text{Uhrcorrect.} = 6^h\ 12^m\ 51^s{\cdot}80 - 6^h\ 12^m\ 27^s{\cdot}33 - 10{\cdot}636\,k = +\ 24^s{\cdot}47 - 10{\cdot}636\,k$$
$$= 6^h\ 40^m\ 58^s{\cdot}50 - 6^h\ 40^m\ 43^s{\cdot}72 + 11{\cdot}277\,k = +\ 14^s{\cdot}78 + 11{\cdot}277\,k$$

Es ist also

$$+\ 24^s{\cdot}47 - 10{\cdot}636\,k = +\ 14^s{\cdot}78 + 11{\cdot}277\,k \quad \text{oder} \quad +\ 9^s{\cdot}69 = +\ 21{\cdot}913\,k$$
$$k = +\ 0^s{\cdot}442$$
$$\text{Uhrcorrection} = +\ 19^s{\cdot}77.$$

Diese Uhrcorrection ist natürlich wegen der langsamen Bewegung der benutzten Sterne sehr unsicher, und wird besser aus einem Stern von kleinerer Deklination mit dem jetzt bekannten Azimuth k abgeleitet.

Wir können die Beobachtung benutzen, um noch andere Correctionen des Instruments abzuleiten. Zunächst fand sich $J = +\ 0^\circ\ 0'\ 0''{\cdot}08$ und $J' = -\ 0^\circ\ 0'\ 4''{\cdot}51$, woraus sich mit $\varphi = 54^\circ\ 20'{\cdot}5$ ergiebt

$$\frac{J' - J}{2\,tang\,\varphi} = i = -\ 1{\cdot}65'' = -\ 0^s{\cdot}110.$$

Bezeichnet nun t und t' den Stundenwinkel in Zeit resp. bei Kr. O. und Kr. W., U und U' die entsprechenden Sternzeiten der Beobachtung, so ist:

$$t + U + c\,sec\,\delta + i\,tang\,\delta + B\,\frac{cos\,(\varphi - \delta)}{cos\,\delta}$$
$$= t' + U' - c\,sec\,\delta - i\,tang\,\delta - B\,\frac{cos\,(\varphi - \delta)}{cos\,\delta}.$$

Jede Beobachtung eines Sterns in der Nähe des Meridians ergiebt eine solche Gleichung, und man kann also, wenn i anderweitig bekannt geworden ist, aus der Beobachtung zweier Sterne die Grössen c und B ermitteln. Diese Grössen werden indessen in der Regel bei zweckmässiger Anstellung der Beobachtungen aus dem Endresultat eliminirt sein, wenn nämlich die Beobachtungen in beiden Lagen des Instrumentes und symmetrischer Anordnung angestellt werden. In solchem Falle wird nur dann auf die Grösse B Rücksicht zu nehmen sein, wenn sie einen sehr grossen Betrag hat. Wenn dagegen die Beobachtung nur in einer einzigen Kreislage gelingt, so werden die Grössen c und B zu ermitteln und bei der Reduction der Beobachtung in Rechnung zu ziehen sein.

Zu absoluten Bestimmungen der Oerter der Gestirne ist das Aequatoreal weit weniger geeignet, als der Meridiankreis (s. d.), weil die Aufstellungsfehler dem Bau des Instrumentes nach weniger constant sind, dagegen eignet es sich ganz vorzüglich zu relativen Ortsbestimmungen von Gestirnen, welche nicht sehr weit von einander entfernt sind. Solche Bestimmungen können geschehen mit Hilfe von Mikrometern (s. d.), welche am Ocular angebracht werden, und bei deren Anwendung die Instrumentalfehler meist wenig in Betracht kommen, oder mit Hilfe der Kreise des Instrumentes, wenn dieselben eine genügend feine Eintheilung besitzen. Die letztere Art der Beobachtung hat vor der ersteren den Vorzug, dass die zu vergleichenden Sterne in grösserer Entfernung von einander stehen können, man demnach immer gut bestimmte Sterne als Vergleichsterne benutzen kann, auch wird, wenn das zu beobachtende Objekt sich in der hellen Dämmerung befindet, für die mikrometrische Bestimmung in der Regel kein sichtbarer Stern in genügender Nähe sein, während ein mit fein getheilten Kreisen versehenes Aequatoreal dann noch gute Dienste leistet.

Eigentlich heisst nur ein solches Instrument ein Aequatoreal, wogegen die erste Art, bei denen die relative Ortsbestimmung mittelst geeigneter Mikrometer

geschieht, als parallactisch (äquatoreal) montirtes oder aufgestelltes Fernrohr bezeichnet wird. In neuerer Zeit überträgt man diese Bezeichnung fast allgemein auf die Refractoren, welcher Name streng genommen ja nur die Gattung des Fernrohrs (ohne Rücksicht auf die Art seiner Aufstellung) andeutet, im Gegensatz zu den Teleskopen, welche man mit den Reflectoren identificirt. In anderen Ländern (England, Amerika, Frankreich u. s. w.), wo das Aequatoreal im obigen engeren Sinne fast garnicht vorkommt, nennt man wieder die äquatoreal montirten Refractoren ausschliesslich Aequatoreale.

Bei diesen Instrumenten, also wie aus dem vorigen hervorgeht, bei der grossen Mehrzahl derselben, haben die Kreise nur geringe Dimensionen und dienen einzig dazu, die Deklination und den Stundenwinkel des Objekts so genau einzustellen, dass letzteres sich in der Mitte des Gesichtsfeldes befindet. Da nun das Gesichtsfeld bei angewandten starken Vergrösserungen beschränkt ist, so ist mit dem Hauptfernrohr, in der Nähe des Oculars, ein kleines schwach vergrösserndes (oft genug zu kleines) verbunden, welches der Sucher heisst. Derselbe muss so berichtigt sein, dass das Gestirn gleichzeitig in der Mitte des Gesichtsfeldes beider Fernrohre ist. Weicht also die Einstellung etwas ab, oder ist der Ort des Gestirnes überhaupt nicht genau bekannt, so kann man dasselbe mit Hilfe des Suchers leichter finden, und durch Bewegung des Fernrohres, ohne die Kreise weiter zu benutzen, dann auch die Einstellung in die Mitte des Gesichtsfeldes des Suchers wie des Hauptfernrohres bewirken. Bei sehr grossen Refractoren ist in der Regel neben dem Sucher noch ein zweites in gleicher Weise orientirtes Fernrohr von mässigen Dimensionen (grösser als der Sucher) angebracht, welches sich oft besonders auch zur Beobachtung lichtschwacher Kometen eignet, die sich erfahrungsmässig nicht immer in den ganz grossen Fernrohren am günstigsten zeigen.

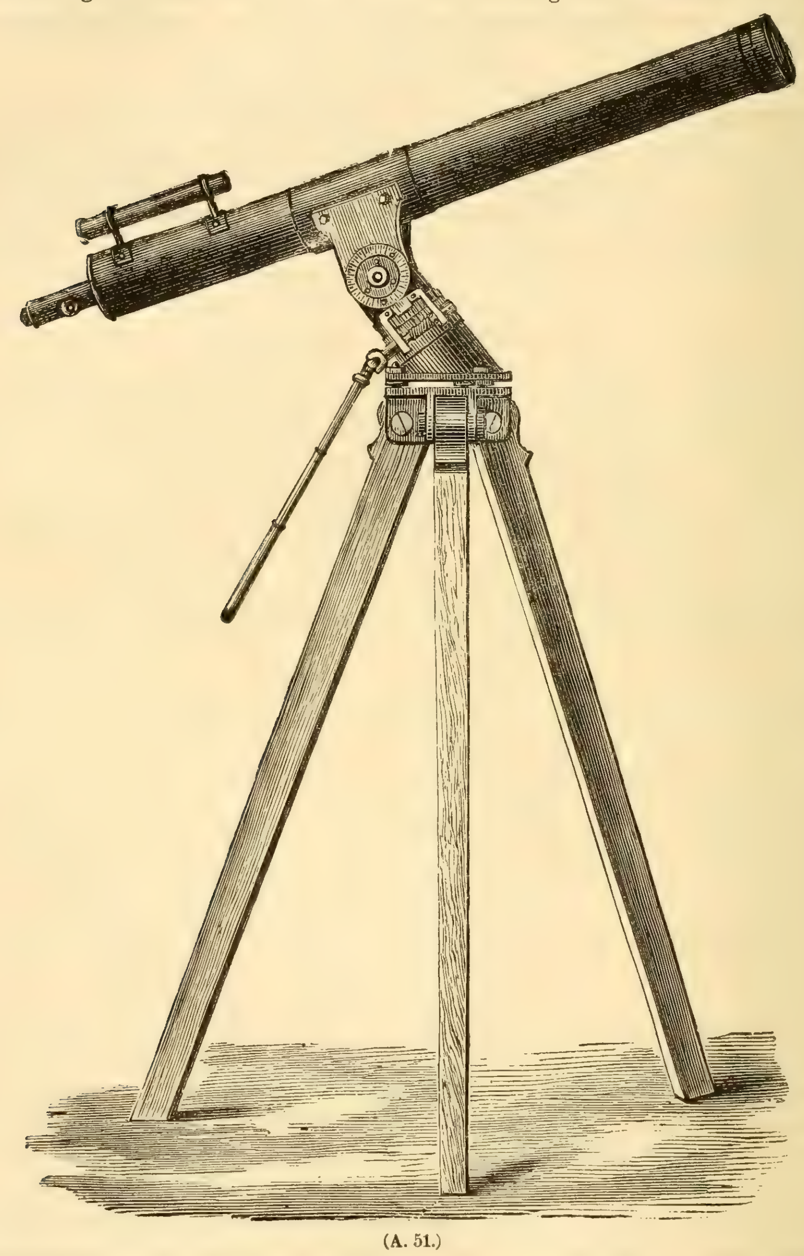
Die Aequatoreale im engeren und weiteren Sinn sind gewöhnlich mit einem Uhrwerk verbunden, welches das Instrument um die Stundenaxe in entgegengesetzter Richtung der täglichen Bewegung der Erde in solcher Weise herumführt, dass ein eingestelltes Gestirn seinen Ort innerhalb des Gesichtsfeldes möglichst wenig ändert. Hierzu ist es nöthig, dass das Uhrwerk eine sehr gleichmässige Bewegung hat, welche für den Fall, dass sie nicht völlig mit der scheinbaren Bewegung des Gestirnes in Uebereinstimmung ist, leicht regulirt, und ohne störenden Zeitverlust ausser Thätigkeit gesetzt werden kann, wenn solche Beobachtungen angestellt werden sollen, bei denen das Uhrwerk nicht gebraucht wird.

Für die Montirung unterschied man lange Zeit die deutsche von der englischen, bis sich die von Fraunhofer eingeführte deutsche, selbstredend mit allerlei Modifikationen fast überall eingebürgert hat. Nur für grosse Spiegelteleskope hatte sich die englische im Princip noch erhalten. In neuester Zeit ist (für grosse Instrumente) in Frankreich das »Equatorial coudé« hinzugetreten.

Wenn wir nicht auf technische Einzelheiten eingehen wollen, was über den Rahmen der Encyklopädie hinausgehen würde, da dann eine nicht geringe Anzahl verschiedener Constructionen zur Erreichung des einen oder anderen besonderen Zweckes zu erwähnen wären, müssen wir uns auf folgende allgemeine Bemerkungen beschränken, und auf die Specialbeschreibungen und bezüglichen Handbücher verweisen, welche letztere an der Hand zahlreicher Abbildungen einschlägige Fragen behandeln.

Refractoren bis zu etwa 100 *mm* Oeffnung kommen häufig als transportable in sehr einfacher Weise zur Verwendung, obwohl für solche kleine Instrumente

die horizontale (nicht aequatoreale) Montirung ebenso zu empfehlen ist. Eine oft hierfür gewählte Form ist z. B. unter zahlreichen anderen die der englischen Firma Horne u. Torntwaite (London), als *Victoria-Aequatoreale* bezeichnete. Das Stativ besteht aus einem festen hölzernen Dreifuss, dessen Beine oben durch eine gusseiserne Platte fest verbolzt zusammengehalten werden. Auf dieser

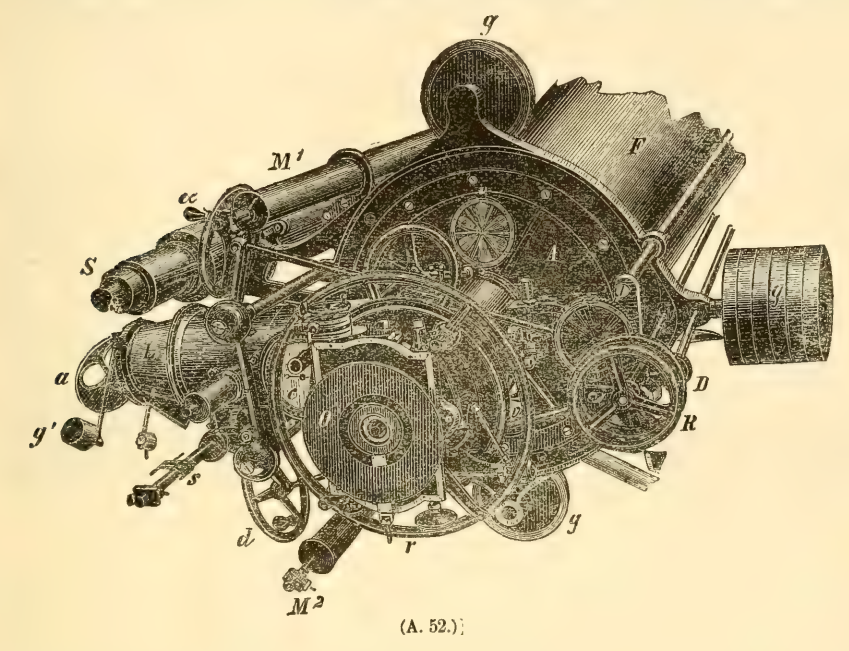


(A. 51.)

Platte liegt ein eiserner Block, der die Polaraxe trägt, und durch drei justirbare Schrauben so berichtigt werden kann, dass die Polaraxe genau der Erdaxe parallel ist. Dieses Stück trägt ebenfalls den Stundenkreis und einen gezahnten Kranz, sodass mit Hilfe einer Schraube ohne Ende das Instrument im Sinne der täglichen Bewegung gedreht werden kann. Die zur Polaraxe senkrechte

Deklinationsaxe besteht in diesem Fall nur aus einem starken Bolzen, der durch vier Stützplatten, von denen zwei am Stundenkreis und zwei am Fernrohr befestigt sind, hindurchgeht. Eine dieser Platten trägt zugleich den Deklinationskreis (Fig. 51).

Bei grösseren Dimensionen ist die transportable Aufstellung ausgeschlossen, und es treten andere Anforderungen an das Instrument heran, die zur Erfüllung wesentlich complicirtere Einrichtungen bedingen. Eine eiserne Säule (manchmal ein Steinpfeiler besonderer Form) trägt dann, auf das feste Fundament aufgesetzt und unwandelbar befestigt, die Büchse oder Lagerplatte für die Polaraxe, an deren oberem Ende die Hülse für die Deklinationsaxe angebracht ist. Die Säule selbst (oder ihr oberer Theil) ist durch Stellschrauben in azimuthalem Sinn drehbar, nachdem sie vorher schon genähert richtig aufgestellt war. Dies Lagerstück für die Polaraxe kann durch Schrauben innerhalb gewisser Grenzen derart corri-



(A. 52.)

girt werden, dass ihre Neigung gegen den Horizont der Polhöhe gleich ist. Die Kreise sind oft, bei grossen Instrumenten allgemein, so angebracht, dass die Theilung von einer einzigen Lampe aus zugleich mit dem Gesichtsfeld und den Fäden des Fadenmikrometers (s. Mikrometer) beleuchtet wird, und daher bei Nacht die Handlampe entbehrlich ist. Um das beschwerliche Ablesen und Einstellen an den Kreisen, von denen ja der Deklinationskreis bei grossen Fernrohren sehr hoch liegt, zu umgehen, ist die Theilung durch besondere Fernrohre vom Ocular aus sichtbar. Am Ocularkopf befinden sich ausserdem die Griffe zur Klemmung und Feinbewegung in beiden Coordinaten.

Ein Bild dessen, was heutigen Tages vom Ocular eines Riesenrefractors aus geleistet werden muss, und was der Ocularkopf desselben zu tragen hat, giebt die beifolgende Darstellung des betreffenden Theiles des grossen REPSOLD'schen Refractors (Oeffnung 762 *mm*) auf der Pulcowaer Sternwarte. In der Fig. 52 bedeutet:

F das Fernrohr, dessen Ocularende mit der Platte *A* verschlossen ist, auf welcher alle nöthigen Theile angebracht sind. *S* der Sucher (160 *mm* Oeffn.),

*M*1, *M*2 die beiden Mikrometermikroskope zur Ablesung des Deklinationskreises. *L* der Lampenstutzen für die Beleuchtungslampe, *a* ein Diaphragma zur Regulirung der Lichtintensität, *g'* das Gegengewicht der Lampe. *R* (und dahinter *D*) das Klemmrad für die Klemmung der Stunden- und Deklinationsaxe, α und δ die Feinbewegungen für die Stunden- und Deklinationsaxe; *r* ein Ring zum Schutz des mit einem registrirenden Fadenmikrometer versehenen Positionskreises; *c* ein elektrisches Zifferblatt, *v*, *v* Ventilatoren, *s* ein Spectral apparat.

Diese Einrichtungen, die bei sehr grossen Refractoren für den Gebrauch als absolut nothwendig bezeichnet werden können, bei mittleren eine wesentliche Erleichterung gewähren, hat man vielfach auch als moderne Erfordernisse bei mässigen Dimensionen einzuführen versucht. Ueber die Zweckmässigkeit in solchen Fällen gehen die Ansichten praktischer Astronomen aus einander, da einige bei einem jeweils nur geringfügigen Mehraufwand an körperlicher Mühe und Zeit die grösstmögliche Einfachheit des ganzen Apparats vorziehen.

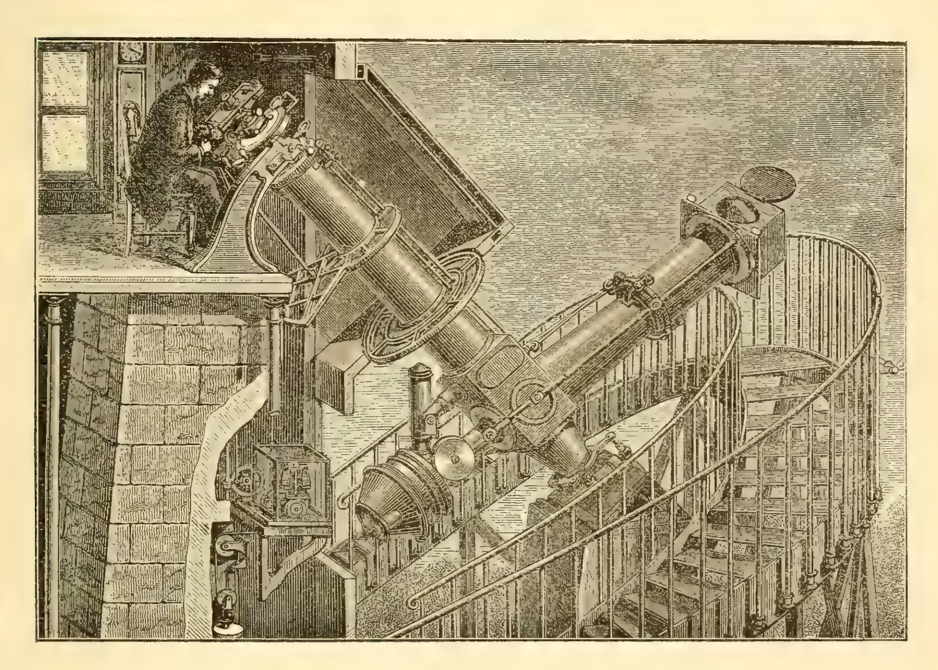
Beiläufig mag auch hier erwähnt werden, dass bei den Riesenrefractoren der Neuzeit die beiden das Objektiv bildenden Linsen gewöhnlich so weit von einander getrennt in der gemeinsamen Fassung ruhen, dass sie durch eine Oeffnung im Rohr ohne Schwierigkeit gereinigt werden können. Hierzu dient auch eine andre Oeffnung hinter dem Objektiv, durch welche die hintere Seite des letzteren erreichbar ist. Sodann sind Ventilationsöffnungen am Ocularende vorhanden, die in Verbindung mit denen am Objektivende die Stagnation der Luft im Innern des Rohres verhüten und die raschere Ausgleichung der Temperatur befördern.

Die alte englische nach SISSON benannte Aufstellung fordert zwei Pfeiler, zwischen denen das Fernrohr schwingt, sodass es entsprechend der Polhöhe einem schrägstehenden Passageninstrument (im I. Vertical) ähnlich wäre. Die beiden Pfeiler nämlich, welche oben die Lager für die Enden der Polaraxe tragen, sind von so verschiedener Höhe, dass diese Axe der Weltaxe parallel zu liegen kommt. Die Aufstellung trägt den Nachtheil in sich, dass die Gegend um den Pol schwer oder garnicht erreichbar ist. Immerhin ist sie neuerdings, abgesehen von der Verwendung bei Spiegelteleskopen, unter Anderem von den Gebr. HENRY in Paris für photographische Rohre empfohlen worden.

Das Equatorial coudé ist von LÖWY in Paris angegeben und zuerst für die Pariser Sternwarte, dann mehrfach für andere Institute gebaut worden. Die Montirung kommt zur Anwendung, wenn es sich um Fernrohre grosser Dimensionen handelt. Wie der Name sagt, ist es ein gebrochenes Fernrohr und es ermöglicht dem Beobachter, stets an derselben Stelle zu bleiben, das Auge in gleicher Richtung zu halten, ja selbst im geschützten Raum zu sitzen, wohin auch immer das Objektiv des Fernrohres gerichtet sein mag. Erreicht wird dieses Ziel durch zweimalige Reflexion an ebenen Spiegeln. Es bietet also, was Bequemlichkeit betrifft, die denkbar grössten Vortheile. Die Aufstellung entspricht insofern der vorher erwähnten englischen, als die Stundenaxe mit ihren Endpunkten auf zwei Pfeilern ruht. Der eine (obere) Theil bildet den Oculartheil des Fernrohres, welches in der Axe rechtwinklig gebrochen ist, sodass die auf das Objektiv fallenden Strahlen durch einen daselbst unter einem Winkel von 45° angebrachten Spiegel in das Auge des vor dem Ocular sitzenden Beobachters treffen. Mit dieser einfachen Reflexion würde es nur möglich sein, die Sterne im Aequator zu beobachten, um nun die Objekte auf jedem Parallel wahrzunehmen, ist vor dem Objektiv in einer drehbaren Hülse ein zweiter Spiegel ebenfalls unter 45°

angebracht. Es ist leicht ersichtlich, dass es nun möglich ist, jeden Punkt der Sphäre ins Gesichtsfeld zu werfen. Die für die Refractoren üblichen Drehtürme mit Klappen (s. Sternwarten) werden für dieses Aequatoreal durch ein Schutzhaus ersetzt, welches das ganze Instrument, soweit es nicht mit seinem Ocularende in das Beobachtungszimmer hineinreicht, bedeckt, und einfach zurückgeschoben wird, wenn beobachtet werden soll (Fig. 53).

Für bestehende Sternwarten erhöhen sich bei Beschaffung eines solchen Instrumentes die Kosten durch den für die Aufstellung und ausgiebige Benutzung



(A.53.)

nothwendigen Bau gegenüber dem sonstigen Refractor unzweifelhaft in nicht geringem Grade. Bei Neuanlagen dürfte dieser Nachtheil nicht in gleicher Weise ins Gewicht fallen, sodass eine weitere Verbreitung dieser Montirung wohl in Zukunft zu erwarten steht.

Im Folgenden geben wir ein Verzeichniss von jetzt vorhandenen grösseren Aequatorealen in dem zuletzt besprochenen weiteren Sinne, ohne dass dasselbe aber Anspruch auf Vollständigkeit machen kann, da gegenwärtig, besonders in Amerika, in rascher Folge grosse, nicht selten riesenhafte Instrumente zur Aufstellung kommen. Der immense Fortschritt spricht sich aber insofern in dieser Uebersicht aus, als das vor 50 Jahren als Hauptinstrument bewunderte Aequatoreal in Dorpat hier in letzter Linie steht. Es darf auch nicht unerwähnt bleiben, dass sich in diesem Verzeichniss eine ganze Reihe Instrumente befinden, die kaum an astronomisch wissenschaftlichen Arbeiten Theil nehmen, sondern vorübergehenden Neigungen und Bestrebungen Einzelner ihre Entstehung verdanken[1]).

---

[1]) Das Verzeichniss ist im Wesentlichen der Uebersicht in NEWCOMB's Astronomie (deutsche Ausgabe von VOGEL, 1892) entnommen.

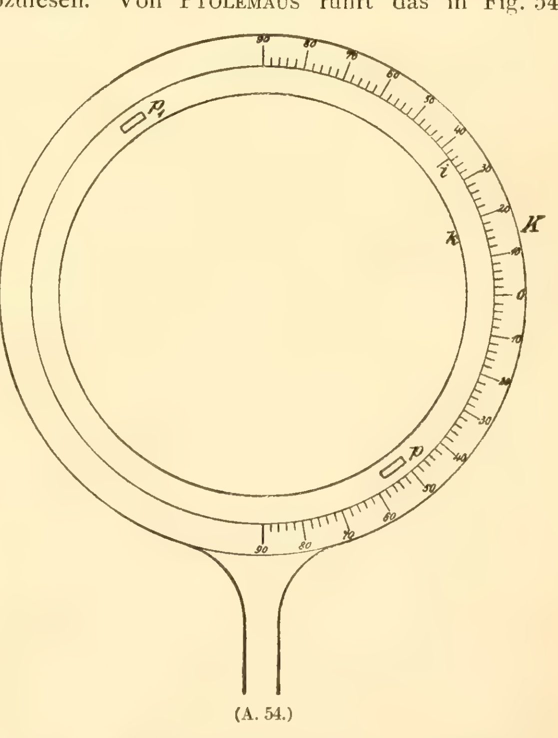
Sternwarte oder Besitzer	Oeffnung	Verfertiger, Optiker, Mechaniker
Yerkes Observatory, Lake Geneva	1000 *mm*	A. Clark und Sons
Lick-Observatory, Californien	910 "	Warner und Swasey
Pulkowa, Sternwarte	760 "	A. Clark u. Sons, Repsold
Paris, Sternwarte	735 "	Martin Eichens
Nizza, Sternwarte	700 "	Henry
Wien, Sternwarte	685 "	Grubb
Washington, Naval Observatory	660 "	Clark
Virginia University U. St.	660 "	"
Greenwich, Sternwarte (photographisch)	650 "	Grubb
Cambridge, England, Newall Telescope	635 "	T. Cooke und Sons
Princeton, Observatory U. S.	585 "	Clark
Buckingham, London	560 "	Buckingham
Strassburg, Sternwarte	485 "	Merz, Repsold
Mailand, Sternwarte	485 "	" "
Dearborn Observatory, Chicago U. S.	470 "	Clark
Van Duzee, Buffalo U. S.	460 "	Fitz
Echo Mountain, Observatory U. S.	400 "	Clark
Madison, Observatory U. S.	395 "	"
Edinburg, Observatory	385 "	Grubb
Pulkowa, Sternwarte	380 "	Merz
Harvard Coll. Observatory, Cambridge U. S.	380 "	"
Paris, Sternwarte	380 "	Lerebours, Brunner
Lissabon, Sternwarte	380 "	Merz, Repsold
W. Huggins, London	380 "	Grubb
Brüssel, Sternwarte	380 "	Merz, Cooke
Bordeaux, Sternwarte	380 "	Merz, Eichens
Hamilton Coll. Observatory, Clinton U. S.	340 "	Spencer
Markree Castle Observatory, Irland	340 "	Cauchoix, Grubb
Rutherfurd, New-York	330 "	Butherfurd
Dudley Observatory, Albany U. S.	330 "	Fitz
Allegheny Observatory U. S.	330 "	Clark
Catania Aetna, Sternwarte	325 "	Merz
Berlin, Urania-Sternwarte	325 "	Bamberg
Greenwich, Sternwarte	325 "	Merz, Troughton u. Simms
Ann Arbor, Observatory U. S.	320 "	Fitz
Vassar Coll. Observatory, Poughkeepsie U. S.	315 "	"
Morrison, Observatory U. S.	310 "	Clark
Physical Observatory, Oxford	310 "	Grubb
Cambridge, Observatory, England	305 "	Cauchoix
Dublin, Observatory, Irland	305 "	"
Radcliffe, Observatory, Oxford	305 "	"
Middleton, Observatory U. S.	305 "	Clark
White, Brooklyn U. S.	305 "	"
Draper, New-York	305 "	"
Wien, Sternwarte	305 "	"
Engelhardt, Dresden	305 "	Grubb
Lick-Observatory, Californien	305 "	Clark
Astrophys. Observatorium, Potsdam	300 "	Schröder, Repsold

Hierher gehören eine grosse Anzahl (ca. 20) ganz gleichartiger, astronomischer Refractoren, welche für eine gemeinsam von verschiedenen Sternwarten herzustellende photographische Himmelskarte bestimmt sind.

Sternwarte oder Besitzer	Oeffnung	Verfertiger, Optiker, Mechaniker
Bothkamp, Sternwarte	295 *mm*	Schröder
Sydney, Observatory	290 „	„
Bogenhausen, Sternwarte	285 „	Merz
Arcetri, Sternwarte, Italien	285 „	Amici
Cincinnati, Observatory U. S.	285 „	Merz
Elchies Morayshire, Schottland	285 „	Merz, Ross
Kopenhagen, Sternwarte	285 „	Merz, Jünger
Cordoba, Observatory, Argentinien	280 „	Fitz
Moskau, Sternwarte	270 „	Merz
Madrid, Sternwarte	270 „	„
Genf, Sternwarte	270 „	„
Hamburg, Sternwarte	260 „	Merz, Repsold
Marseille, Sternwarte	260 „	Merz, Eichens
Bazley, Fairford, England	260 „	Merz, Cooke
Barclay, Leyton, England	255 „	Cooke
Knight, Harestock, England	255 „	„
Toulouse, Observatory	250 „	Brunner
Dorpat, Sternwarte	245 „	Fraunhofer

C. W. F. Peters.

Alhidade ist allgemein eine Vorrichtung an getheilten Kreisen, die mit diesen zu messenden Winkel abzulesen. Von Ptolemäus rührt das in Fig. 54 dargestellte Instrument zur Bestimmung von Meridianzenithdistanzen her, welches am einfachsten die Bedeutung der Alhidade zeigt. Es besteht aus einem ebenen, vertical in der Ebene des Meridians aufzustellenden und mit einer Theilung versehenen Vollkreise K, in welchem sich ein zweiter in denselben hineingepasster Kreis k dreht (sodass die Drehungsaxe desselben im Mittelpunkte des Kreises K senkrecht auf der Ebene der beiden Kreise steht). Senkrecht zur Ebene dieser Kreise sind an k die beiden Diopter p, p_1 in einem Durchmesser angebracht, sodass die Visur von p über p_1 nach einem Stern die Zenithdistanz desselben bei seinem Durchgang durch die



(A. 54.)

Ebene der beiden Kreise (durch den Meridian) mittelst eines an dem Kreise k entsprechend angebrachten Index an der Theilung des Kreises K abzulesen gestattet. Damit die Lesung direkt die Zenithdistanz giebt, muss der Index i selbstverständlich auf 0 zeigen, wenn die Visur durch die beiden Diopter vertical ist.

Soll die Lesung die Höhen geben, so muss die Bezifferung des Kreises in der entgegengesetzten Richtung wachsen. In der hier auftretenden Verbindung zweier Kreise bezeichnet man den getheilten Kreis K als den Limbus, den zweiten Kreis k, welcher als Träger eines Indexstriches (oder bei neuen Instrumenten der Nonien) dient, als Alhidade (aus dem Arabischen, soviel als Zähler). Ist der Kreis K, der Limbus, mittelst Speichen an einer Hülse befestigt, in welcher sich die Axe des Instrumentes bewegt, so besteht die Alhidade oft nur aus zwei oder vier die Nonien tragenden Armen, welche von dieser Axe bis zur Theilung des Kreises K reichen. Es kann nun auch die Theilung an dem Kreise k angebracht sein (Limbus oder Kreis beweglich), dann trägt K den Index, und es ist die Alhidade (Nonien oder Mikroskope) fest. N. Herz.

Almucantar nennt S. C. Chandler in Cambridge (Mass.) ein von ihm construirtes Instrument, welches alle die Aufgaben zu leisten bestimmt sein soll, die bislang den Beobachtungen am Meridiankreis (s. d.) zufielen, nämlich die Ortsbestimmungen der Gestirne einerseits, die Ermittelung der Uhrcorrection und Polhöhe andererseits. Wenn es gelingt ein Instrument herzustellen, an welchem das Fernrohr beim Uebergang von einem Stern zum anderen, bei der Bewegung um sehr beträchtliche Winkel im Azimuth, dieselbe Höhenlage behält, so lassen sich alle in Rede stehenden Beobachtungen mit Erfolg bewerkstelligen.

Befinde sich der kleine Horizontalkreis oder Almucantarat, welchen die optische Axe bei der Drehung des Fernrohres um eine Verticalaxe beschreibt, in der Zenithdistanz ζ_0. Befindet sich nun ein Stern auf diesem Kreise, so ist seine scheinbare Zenithdistanz durch die Refraction verkleinert und wird $= \zeta_0 - r$ sein. Sei ferner ζ die Zenithdistanz des Mittelfadens, so muss natürlich zu der beobachteten Durchgangszeit des Sterns durch diesen Mittelfaden die Zeit hinzugefügt werden, welche der Stern gebraucht um seine Zenithdistanz um den Betrag $\zeta_0 - \zeta - r$ zu verändern, wenn man den Augenblick des Sterndurchgangs durch den normalen Horizontalkreis haben will. Seien nun α, δ, t Rectascension, Deklination und Stundenwinkel des Sternes, ϑ die wahre Sternzeit, wenn er den Mittelfaden passirt, $= \alpha + t$, und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes; dann ist

$$\cos t = \frac{\cos\zeta - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}. \tag{1}$$

Nehmen wir nun genäherte Werthe an, sodass

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \qquad \delta = \delta_0 + \Delta\delta, \qquad \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi,$$

und

$$\cos t_0 = \frac{\cos\zeta_0 - \sin\varphi_0\sin\delta_0}{\cos\varphi_0\cos\delta_0}, \tag{2}$$

so wird, da t Function von ζ, φ, δ ist

$$t - t_0 = -\frac{dt}{d\zeta}\frac{1}{15}(\zeta_0 - \zeta - r) + \frac{dt}{d\delta}\frac{1}{15}(\delta - \delta_0) + \frac{dt}{d\varphi}\frac{1}{15}(\varphi - \varphi_0) \tag{3}$$

und wenn T und ΔT die Uhrzeit des Durchgangs durch den Mittelfaden und die Uhrcorrection ist

$$\vartheta = T + \Delta T = \alpha + \Delta\alpha + t_0 + (t - t_0). \tag{4}$$

Durch Differentiation der Gleichung (1) und Benutzung der Ausdrücke aus dem sphärischen Dreieck zwischen Pol, Zenith und Stern, wenn noch mit A das Azimuth, mit q der parallactische Winkel bezeichnet wird,

$$\sin\zeta\cos q = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t$$
$$-\sin\zeta\cos A = \cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t$$
$$\sin A = \frac{\cos\delta\sin t}{\sin\delta} \qquad \sin q = \frac{\cos\varphi\sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos\varphi\sin t}{\sin\zeta}$$

erhalten wir

$$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{1}{\cos\varphi\sin A} = Z$$
$$\frac{dt}{d\delta} = Z\cos q = 15D \tag{5}$$
$$\frac{dt}{d\varphi} = -Z\cos A = -15L,$$

daher

$$\alpha_0 + t_0 + \Delta\alpha + D\Delta\delta + \varkappa = T + \Delta T + Zz + L\Delta\varphi, \tag{6}$$

wo $\varkappa$ der Einfluss der täglichen Aberration ist, der in später anzugebender Weise zu berücksichtigen ist. Unter $z = \frac{1}{15}(\zeta_0 - \zeta - r)$ ist alsdann die Instrumentalcorrection begriffen. Nach dieser Fundamentalgleichung lassen sich nun bei geeigneter Auswahl der Sterne im Azimuth entweder ΔT, z und $\Delta\varphi$ oder umgekehrt $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ ermitteln. Obwohl sich natürlich das Instrument in jedem Horizontalkreis benutzen lässt, so bietet doch der durch den Pol gehende Kreis gewisse Vortheile. CHANDLER nennt denselben den Kreis des Complements der Polhöhe (Colatitudecircle), man kann ihn auch den Ersten Almucantarat oder Polaralmucantarat nennen, womit naheliegende Analogien gegeben sind. Es ist dies also der Horizontalkreis, dessen Zenithdistanz $= 90 - \varphi$ ist. Hierfür wird $q = t$ und

$$\cos t_0 = \operatorname{tang}\varphi_0 \operatorname{tang}(45 - \tfrac{1}{2}\delta_0), \tag{7}$$

und die Ausdrücke für Z, D, L sind, unter Berücksichtigung, dass zu dem obigen Differenzial für $\frac{dt}{d\varphi}$ nun noch $-\frac{1}{\cos\varphi\sin A}$ hinzuzufügen ist, und mit Hülfe der Beziehung

$$1 + \cos A = \frac{\sin A}{\sin\varphi \operatorname{tang} t}$$

$$Z = \frac{1}{\cos\delta\sin t} \quad D = \frac{1}{15}\frac{1}{\cos\delta\operatorname{tang} t} \quad L = \frac{2}{15}\frac{1}{\sin 2\varphi\operatorname{tang} t}. \tag{8}$$

Gilt es die Zeit und Instrumentalcorrection zu bestimmen, so setzen wir bei der Beobachtung der Fundamentalsterne $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta = 0$, und wenn $\alpha + t_0 = \vartheta_0$ gesetzt wird, so liefert jeder Stern eine Gleichung der Form

$$\Delta T - \varkappa + Zz + L\Delta\varphi = \vartheta_0 - T, \tag{9}$$

und bei geeigneter Combination lassen sich ΔT, $\Delta\varphi$, z scharf ermitteln. Allgemein ist der Coëfficient von z positiv westlich vom Meridian und negativ östlich vom Meridian; in der Nähe des I. Verticals, wo der numerische Werth sein Minimum erreicht, ist die Veränderung langsam, in der Nähe des Meridians sehr rasch; der Coëfficient von L ist positiv in dem südwestlichen und nordöstlichen Quadranten, negativ in dem nordwestlichen und südöstlichen, er wird 0 im ersten Vertical und wächst gegen den Meridian hin. Beobachtet man also zwei Fundamentalsterne, den einen westlich, den anderen östlich vom Meridian, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta T - \varkappa + Zz + L\Delta\varphi &= \vartheta_0 - T \text{ West,}\\ \Delta T - \varkappa + Z'z + L'\Delta\varphi &= \vartheta_0' - T' \text{ Ost,}\end{aligned} \tag{10}$$

deren Differenz giebt die Instrumentalcorrection

$$z = \frac{(\vartheta_0 - T) - (\vartheta_0' - T')}{Z - Z'} - \frac{L - L'}{Z - Z'}\Delta\varphi. \tag{11}$$

Das von $\Delta\varphi$ abhängige Glied findet sich aber aus den allgemeinen Bedeutungen von L und Z (aus (5), nämlich:

$$\frac{L-L'}{Z-Z'}\Delta\varphi = \frac{1}{15}\,\frac{\sin(A-A')}{\sin A - \sin A'}\Delta\varphi = \frac{1}{15}\,\frac{\cos\frac{A-A'}{2}}{\cos\frac{A+A'}{2}}\Delta\varphi \tag{12}$$

und wenn derselbe Stern, oder zwei Sterne gleicher Deklination beobachtet werden, sodass $A = -A'$ wird, so wird obige Gleichung

$$\frac{L-L'}{Z-Z'}\Delta\varphi = \frac{1}{15}\cos A\Delta\varphi,$$

welcher Werth für $A = \pm 90° = 0$ wird, so dass bei Beobachtungen im ersten Vertical einfach ist

$$z = \frac{(\vartheta_0 - T) - (\vartheta_0' - T')}{Z - Z'}. \tag{13}$$

Diese Gleichung kann nun bei gut bestimmter Polhöhe natürlich auch bei Sternen etwas verschiedener Deklination und in Entfernungen vom ersten Vertical angewandt werden.

Für den ersten Almucantarat erhält man nach (8) für denselben Stern oder Sterne gleicher Deklination, wo $t' = -t$ wird

$$\frac{L-L'}{Z-Z'}\Delta\varphi = \frac{2}{15}\,\frac{\cos\delta}{\sin 2\varphi}\cos t\,\Delta\varphi = \frac{1}{15}(1+\cos A)\Delta\varphi, \tag{14}$$

welcher Werth 0 wird, wenn $t = \pm 6^h$ oder $A = 180°$ ist. Man kann also für diesen Fall aus dem Pol nahe stehenden Sternen nach der Formel (13) die Instrumentalcorrection ermitteln, überhaupt in der Praxis hierbei Sterne, deren Deklination wenigstens 70° beträgt, verwenden, ohne den Einfluss der nicht genau bekannten Polhöhe zu befürchten.

Die Bestimmung der Zeit folgt dann nach (10)

$$\Delta T - \varkappa = (\vartheta_0 - T) - Zz - L\Delta\varphi = (\vartheta_0' - T') - Z'z - L'\Delta\varphi. \tag{15}$$

Wir erhalten also die Uhrcorrection um die tägliche Aberration vermindert und mit einem von $\Delta\varphi$ abhängigen Gliede, welches letztere aber Null wird für Sterne gleicher Deklination. Aber auch wenn die Deklinationen erheblich verschieden sind, so wird der Einfluss verschwindend, wenn $\Delta\varphi$ etwa innerhalb einer Bogensecunde bleibt, was wiederum leicht zu erreichen ist, wenn selbst nur ein Sternpaar mit dem Almucantar zur Ermittelung der Polhöhe beobachtet wird. Es wird daher allgemein bei nicht allzu verschiedenen Deklinationen zweier Sterne die Uhrcorrection nach (10) und (11) gefunden gleich:

$$\Delta T = (\vartheta_0 - T) - Zz + \varkappa = (\vartheta_0' - T') - Z'z + \varkappa$$

oder

$$= \frac{(\vartheta_0' - T')Z - (\vartheta_0 - T)Z'}{Z - Z'} + \varkappa \tag{16}$$

oder

$$= \frac{(\vartheta_0 - T) + (\vartheta_0' - T')}{2} - \frac{Z + Z'}{2}z + \varkappa.$$

Für die Bestimmung der Breite findet sich

$$\Delta\varphi = \frac{(\vartheta_0 - T) - (\vartheta_0' - T') - (Z - Z')z}{L - L'}. \tag{17}$$

Wenn sich nun das Azimuth den Werthen 0° und 180° nähert, so wächst der Nenner und es wird daher $\Delta\varphi$ bestimmt aus Beobachtungen von Sternpaaren in der Nähe des Meridians, nachdem z, wie oben gezeigt, durch Beobachtungen

in der Nähe des ersten Verticals gefunden wurde. Man kann sich aber durch Combination von nördlichen und südlichen Sternpaaren von z unabhängig machen. Sei zur Abkürzung für ein Südpaar

$$\mu_1 = \frac{(\vartheta_0 - T) - (\vartheta_0' - T')}{L - L'} \qquad \nu_1 = \frac{Z - Z'}{L - L'} = \frac{15 \cos \frac{1}{2}(A + A')}{\cos \frac{1}{2}(A - A')}, \tag{18}$$

während die entsprechenden Grössen für ein Nordpaar mit μ_2 und ν_2 bezeichnet werden, so ist

$$\Delta\varphi = \mu_1 - \nu_1 z \quad \text{und} \quad = \mu_2 - \nu_1 z,$$

woraus durch Elimination folgt

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{19}$$

Nun ist aus (18) sofort ersichtlich, dass für Sterne von nahe gleicher Deklination, d. h. wenn die zusammengehörigen beiden Sterne nahe gleiches positives und negatives Azimuth haben und die Beobachtungen nahe dem Meridian gemacht werden, $\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2}$ sehr klein wird, dass dasselbe von $\mu_1 - \mu_2$ gilt, wenn z klein ist, sodass unter Berücksichtigung dieser Bedingungen die Breite sich aus dem einfachen Ausdruck

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \tag{20}$$

ergiebt.

Für die Bestimmung der Rectascension und Deklination ist die Fundamentalgleichung (6), wenn wir $\vartheta_0 = a + t_0$ setzen

$$\Delta\alpha + D\Delta\delta = (\Delta T - \varkappa + Zz) - (\vartheta_0 - T) + L\Delta\varphi.$$

Ist der Stern im Osten und Westen beobachtet, und unterscheiden wir die Beobachtungen durch Accentuirung der östlichen, setzen ferner für die westliche

$$v = (\Delta T - \varkappa + Zz) - (\vartheta_0 - T),$$

und v' entsprechend für die östliche Beobachtung, so kommt:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \tfrac{1}{2}(v + v') \\ \Delta\delta &= \tfrac{1}{2}(v - v')\frac{1}{D} + \frac{L}{D}\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{21}$$

Es lässt sich also durch Ost- und Westbeobachtungen desselben Sternes in derselben oder in verschiedenen Nächten die Rectascension und Deklination, letztere abhängig von $\Delta\varphi$, bestimmen. Haben wir m westliche, und m' östliche Beobachtungen und setzen $\frac{m - m'}{m + m'} = k$, und $[v]$, $[v']$ für die Summe der v und v', beachten, dass D und L in den verschiedenseitigen Beobachtungen entgegengesetzte Zeichen annehmen, so ist:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{[v] + [v']}{m + m'} - kD\Delta\delta + kL\Delta\varphi \\ \Delta\delta &= \frac{[v] + [v']}{m + m'}\,\frac{1}{D} - k\frac{\Delta\alpha}{D} + \frac{L\Delta\varphi}{D}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ist die Zahl der östlichen gleich der der westlichen Beobachtungen, so ist $m = m'$, und $k = 0$, man bestimmt also jede Coordinate unabhängig von der anderen.

Der Einfluss der täglichen Aberration lässt sich leicht aus der in Zenithdistanz und Azimuth ableiten, indem $d\zeta = k \cos\varphi \sin A \cos\zeta$ (wo k die Constante), und hieraus ergiebt sich unter Berücksichtigung des Werthes für $\frac{dt}{d\zeta}$ einfach:

$$\varkappa = k \cos\zeta = 0^s{\cdot}0213 \cos\zeta, \tag{23}$$

um welchen Betrag der Sternantritt verzögert wird, sodass diese Correction entweder der Rectascension des Sternes zugefügt oder von der beobachteten Zeit abgezogen werden kann.

Was den Einfluss der Refraction auf die Beobachtungen selbst betrifft, so ist zu bedenken, dass in der Fundamentalgleichung (6)

$$\alpha_0 + t_0 + \varkappa + \Delta\alpha + D\Delta\delta = T + \Delta T + Zz + L\Delta\varphi$$

die Instrumentencorrection z gezählt wird von einem veränderlichen Nullpunkt, nämlich der scheinbaren Höhe des Almucantars. Wenn nun die wirkliche Erhebung des Fernrohres ungestört bleibt, so wird z so lange constant bleiben, als die Refraction ungeändert ist; treten aber die geringsten Veränderungen im atmosphärischen Zustand ein, so ändert sich auch z. Höchst selten steigen aber derartige Aenderungen in z stündlich um mehr als $0''{\cdot}01$ — $0''{\cdot}02$. Sie können ganz vernächlässigt werden, wenn man die Beobachtungen paarweise kurz nach einander anstellt, und auch sogar wenn eine grössere Reihe einigermaassen gleichmässig vertheilt ist. Kommt es auf äusserste Genauigkeit an, so muss die Refraction berechnet werden.

Sei T_0 die Zeit, welche ungefähr der Mitte der Abendbeobachtungen entspricht, und z_0 die dazu gehörige Instrumentalcorrection. Gesucht wird die der beobachteten Durchgangszeit hinzuzufügende Correction, um dieselbe auf den gleichen atmosphärischen Zustand zu reduziren. Sind die zu den Zeiten T_0 und T gehörenden Refractionen r_0 und r, so ist:

$$z_0 = \tfrac{1}{15}(\zeta_0 - \zeta - r_0) \qquad z = \tfrac{1}{15}(\zeta_0 - \zeta - r),$$

und wenn Δr die stündliche Veränderung der Refraction in Zeit ausgedrückt ist

$$z = z_0 - (T - T_0)\Delta r.$$

Wird daher die Grösse

$$Z(z - z_0) = Z(T_0 - T)\Delta r$$

von der beobachteten Zeit T abgezogen, so ist damit für jeden Stern die Beobachtung auf den mittleren atmosphärischen Zustand reducirt. Der Ausdruck $\Delta r = \frac{1}{15}\frac{r_2 - r_1}{T_2 - T_1}$ kann entweder in üblicher Weise berechnet werden, indem $r = \alpha' \, tang\, \zeta \beta^A \gamma^\lambda$ ist, oder auf folgendem Näherungswege. Wird der Werth für r differentiirt ($A = \lambda = 1$ gesetzt) und die Logarithmen der Faktoren von β und γ nach BESSEL in Reihen ausgedrückt, so kommt

$$\frac{1}{15}\, dr = \alpha' \, tang\, \zeta \, \frac{\beta\gamma}{15\, Mod} \left[(+ 0{\cdot}001162 - 0{\cdot}000000776\, b)\Delta b - 0{\cdot}0000698\, \Delta f' - (+ 0{\cdot}0015835 - 0{\cdot}00000535 f)\Delta f\right], \quad (24)$$

wo b, f', f Barometer, inneres und äusseres Thermometer sind. Die Werthe dieser Gleichung für verschiedene Luftzustände sind:

b	f' und f		Δb	$\Delta f'$	Δf
760 *mm*	$-10°$ C.:	$\frac{1}{15} dr = \alpha' \, tang \zeta$ [	$+ 0{\cdot}0000954\, \Delta b$	$- 0{\cdot}0000117\, \Delta f'$	$+ 0{\cdot}0002731\, \Delta f$]
	$+10°$ C.:	=	884	108	2366
	$+20°$ C.:	=	824	100	2049
720 *mm*	$-10°$ C.:	$\frac{1}{15} dr = \alpha' \, tang \zeta$ [	$+ 0{\cdot}0000953\, \Delta b$	$- 0{\cdot}0000110\, \Delta f'$	$+ 0{\cdot}0002588\, \Delta f$
	$+10°$ C.:	=	883	102	2241
	$+20°$ C.:	=	823	095	1940

Setzen wir für diese numerischen Coëfficienten von Δb, Δf, $\Delta f'$ zur Abkürzung c, c', c'', so kommt ein Ausdruck für Δr, der sich meist im Kopf berechnen lässt, nämlich:

$$\Delta r = \frac{1}{T_2 - T_1}\, \alpha' \, tang\, \zeta [c(b_2 - b_1) + c'(f_2' - f_1') + c''(f_2 - f_1)]. \qquad (25)$$

Für die Bestimmung der Fadenintervalle kommen folgende Formeln in Betracht, die aus den allgemeinen Formeln hergeleitet werden können:

Ohne Rücksicht auf den Einfluss der Refraction sei f die Winkeldistanz zwischen einem beliebigen Faden und dem Mittelfaden, positiv wenn ihn ein Stern im Westen vor, im Osten nach dem Mittelfaden passirt. Sei F die Zeit, welche der Stern von der Deklination δ gebraucht, um von einem Faden zum andern zu kommen. Dann ist:

$$\begin{aligned} \cos \zeta &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos (\zeta - f) &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t - F) \end{aligned} \qquad (26)$$

und die Differenz dieser Gleichungen

$$2 \sin \tfrac{1}{2} f \sin (\zeta - \tfrac{1}{2} f) = 2 \sin \tfrac{1}{2} F \sin (t - \tfrac{1}{2} F) \cos \varphi \cos \delta,$$

woraus, wenn $\sin t \cos \varphi \cos \delta = \sin \zeta \cos \varphi \sin A$ gesetzt wird

$$\sin F = \sin f \frac{1}{\cos \varphi \sin A} + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} F \, cotg\, t - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} f \, cotg\, \zeta \frac{1}{\cos \varphi \sin A}. \qquad (27)$$

die strenge Formel, wenn für A, t und ζ die für den Mittelfaden gültigen Werthe angewendet werden. Hierfür kann nun ohne merkbaren Fehler ausser in extremen Fällen gesetzt werden

$$\sin F = Z \sin f + \tfrac{225}{2} f^2 \sin^2 1'' (Z^2 \, cotg\, t - Z \, cotg\, \zeta). \qquad (28)$$

Für specielle Fälle finden sich hieraus leicht verschiedene Modifikationen, so erhält man für einen dem Pol nahen Stern, wenn er seiner Digression nicht nahe ist

$$\sin F = Z \sin f + \tfrac{225}{2} f^2 \sin^2 1'' Z^2 \, cotg\, t,$$

andererseits kann, wenn der Stern der Digression nahe ist, das in f^2 multiplicirte Glied vernachlässigt werden und man hat dann einfach

$$\sin F = Z \sin f$$

u. s. w. In gewöhnlich vorkommenden Fällen, wenn der Stern nicht dem Pol oder Zenith sehr nahe, dabei in beträchtlichen Stundenwinkeln ist, kann man einfach setzen

$$F = f Z. \qquad (29)$$

Ist bei einem Polstern in der Nähe der Digression $\sin F = Z \sin f$ zu setzen, so kann man natürlich zur leichteren Berechnung $F = Zf \cdot K$ nehmen, wo dann $K = \frac{F \sin 15''}{\sin F}$ aus Hilfstafeln entnommen werden kann. Ebenso wird man sich, wenn ein Glied mit f^2 nöthig ist, Hilfstafeln für die Fadendistanzen des Netzes berechnen. In ganz besonders extremen Fällen ist die direkte Formel für $\cos (\zeta - f)$ (26) am geeignetsten. Die Bestimmung der Fadendistanzen ergiebt sich aus dem Vorigen von selbst, am besten geschieht sie durch Beobachtung von Polsternen auf dem I. Almucantar. Abgesehen davon, dass hier das Glied f^2 unmerklich wird, sind auch etwaige Ungenauigkeiten mit Bezug auf den Durchgang durch die Mitte des Feldes, welches durch den Durchschnitt der Horizontalfäden und des Vertikalfaden bezeichnet wird und worauf natürlich gehörig zu achten ist, sowie in der Neigung der Fäden von geringem Einfluss.

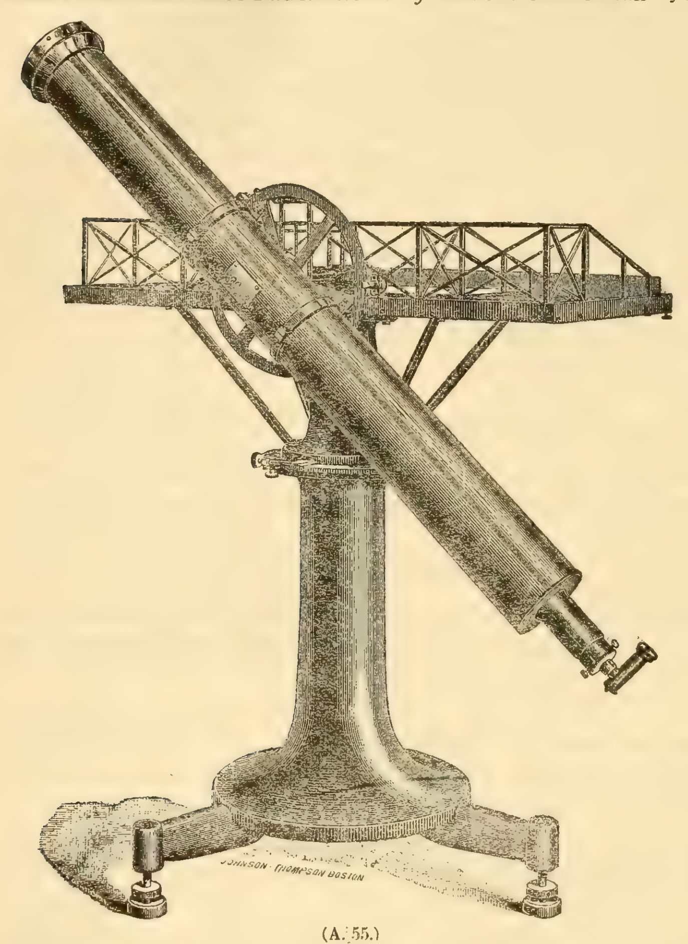
Die so gefundenen Werthe der Fadenintervalle sind scheinbare Werthe, welche nur der Höhe entsprechen, in der sie bestimmt wurden. Für andere Zenithdistanzen ist auf die Refraction Rücksicht zu nehmen, indem $f - f_0 = f_0 \, k \sec^2 \zeta$ ist, wo f_0 das wahre Fadenintervall ist, welches die von den Fäden

zum Mittelpunkt des Objektivs gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, dagegen f das um den Betrag der Refraction k vergrösserte Intervall. Es kann daher das scheinbare Fadenintervall f in der Zenithdistanz ζ aus dem scheinbaren f' in der Zenithdistanz ζ' gefunden werden nach

$$f = f' \frac{1 + k' \sec^2 \zeta'}{1 + k \sec^2 \zeta},$$

wo $k \sec^2 \zeta$ für den mittleren Luftzustand von 760^{mm} und $+10°$ C. nach den BESSEL-schen Refractionstafeln ist

ζ	$k \sec^2 \zeta$
10°	0·00029
20°	0·00032
30°	0·00037
40°	0·00047
50°	0·00067
60°	0·00110
70°	0·00231.



(A. 55.)

Das Instrument nun, mit welchem diese theoretisch einfachen Beobachtungen anzustellen sind, hat CHANDLER zunächst für die Sternwarte in Cambridge Mass. ausführen lassen, worauf es dann auch an anderen Sternwarten und in anderen Dimensionen in den Vereinigten Staaten zur Anwendung gekommen ist. Wie die Fig. 55 zeigt, endet eine etwa $1 m$ hohe eiserne Säule unten in einem Dreifuss mit Fussschrauben zur Justirung des ganzen Stativs auf dem Pfeiler. In $\frac{2}{3}$ Höhe ist ein kleiner Horizontalkreis zur Einstellung im Azimuth angebracht, und von hier an läuft die Säule in einen Conus aus, um den sich genau passend ein eiserner Mantel dreht, der ein grosses, gehörig versteiftes Becken trägt. Dieses hat etwa eine Länge von 80 *cm* bei einer Breite von 15 *cm* und wird mit Quecksilber gefüllt. Ein Schwimmer von nahe gleichen Dimensionen wie das Becken, nur entsprechend kleiner, um jeden möglichen Einfluss der Capillarität auf seine Beweglichkeit zu vermeiden, ruht in dem Quecksilber und ist an der einen Seite fest mit dem Fernrohr verbunden. Es kommt darauf an, möglichste Festigkeit und Unveränderlichkeit mit Leichtigkeit zu vereinigen. An geeigneter Stelle ist auch ein Höhenkreis, Gegengewichte, Nonien, Mikrometerschraube und klemme angebracht. Das in Cambridge benutzte Fernrohr hatte nahe 4 Zoll Oeffnung und etwa 190fache Vergrösserung. Die Beleuchtung wird durch eine seitliche Qeffnung mit Spiegel bewirkt, das Ocular ist mit Prismen versehen, wodurch die Beobachtungen wesentlich erleichtert, zum Theil überhaupt nur

ermöglicht werden. Das Gewicht des ganzen schwimmenden Theils, Fernrohr, Gegengewichte, Schwimmer, Höhenkreis u. s. w. beträgt etwa 14 *kg*, die gewöhnlich gebrauchte Menge Quecksilber belief sich auf 15—16 *kg* und die Tiefe des Quecksilbers unter dem Schwimmer betrug 0·42 *cm*.

Die Justirung ist einfach. Der Dreifuss wird so gestellt, dass der Nullpunkt des Azimuthalkreises nach Süden gerichtet ist, dann das Quecksilber eingegossen. Zur Verticalstellung der Säule kann man ein Niveau anwenden oder (zur Näherung) die Fussschrauben so lange drehen, bis das Quecksilber im Gefäss überall gleich tief steht. Dann folgt die Horizontalstellung des Fadennetzes, was am einfachsten durch Beobachtung des Polarsterns geschieht. Soll das Instrument nur für einen bestimmten Almucantarat, z. B. den ersten, gebraucht werden, so hat man jetzt nur noch Zeit und Azimuth zu berechnen, in welchem ein langsam sich bewegender Stern diesen Kreis schneidet, mit dem Fernrohr so lange den Stern zu verfolgen, bis er zur berechneten Zeit den Mittelfaden passirt, dann den Höhenkreis festzuklemmen und, wenn nöthig, den Azimuthnonius zu berichtigen. Soll das Instrument aber in jedem beliebigen Horizontalkreis benutzt werden und die Sterne durch vorherige Einstellung aufgefunden werden können, so muss noch 1) die Collimation, 2) die Horizontalität der Fernrohraxe, 3) der Nullpunkt des Höhenkreises, 4) die Coincidenz des Schwerpunkts und Drehungsmittelpunktes des Fernrohrs untersucht event. berichtigt werden.

Die Collimation muss so genau wie möglich durch den Mechaniker berichtigt sein, sodass das Fernrohr senkrecht zu seiner Axe ist. Durch Beobachtung eines entfernten terrestrischen Objekts in beiden Kreislagen ist der Fehler zu bestimmen, er wird gleich der halben Differenz der Azimuthablesungen sein, deren eine um 180° vermindert ist. Die übrigen Correctionen können gleichzeitig in folgender Weise erhalten werden. Man richte das Instrument nach Süden, und klemme den Azimuthalkreis (beim Index auf 0) fest. Man stelle dann den Höhenkreis auf einen Jahrbuchstern, der den Meridian nahe dem Horizont passirt, beobachte die Durchgangszeit (T) durch den Verticalfaden und merke die Anzahl (n) der Horizontalfadenintervalle bis zum Horizontalmittelfaden, wo dieser Durchgang stattfand. Dasselbe wiederhole man für einen Stern in der Nähe des Zeniths (zur Controle auch für 1—2 zwischenliegende Sterne). Sei dann A das wahre, A' das instrumentelle Azimuth, $\Delta A = A' - A$ die Indexcorrection, b die Neigung der Fernrohraxe, positiv wenn das Westende zu hoch, dann ist die allgemeine Gleichung für Meridiandurchgänge

$$\Delta A \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} = \alpha - (T + \Delta T) - c \sec\delta,$$

woraus ΔA und b durch Elimination zu finden, und wo ΔT (die Uhrcorrection) und α anderweitig ermittelt ist. Die Berichtignng von ΔA geschieht dann durch Versetzen des Index, die von b durch Veränderung des Gewichts oder der Stellung der Gegengewichte. Um zu sehen, welche Wirkung die Gewichtsänderung hat, stellt man am besten den Polarstern ein und schätzt die horizontale Versetzung nach Bogenminuten bei einer bestimmten Veränderung des Gewichts, und diese Grösse multiplicirt mit der Secante der Zenithdistanz des Polarsterns giebt die gesuchte Neigung. Werden dann die Fäden aufs neue horizontal gestellt, so sind sie für alle Höhen gültig. Im allgemeinen kann endlich angenommen werden, dass der Schwerpunkt des Fernrohres in der Collimationsaxe liegt. Sei dann s die grösste Biegung in Bogenminuten ausgedrückt, welche durch die Abweichung des Schwerpunktes vom Drehungspunkt verursacht wird, und zwar positiv, wenn letzterer dem Objektiv näher liegt, so wird diese

bei horizontaler Lage des Fernrohrs eintreten, in anderen Zenithdistanzen dagegen $s \sin(\varphi - \delta)$ sein, wenn der Stern im Meridian ist. Ist nun die scheinbare Zenithdistanz eines Sterns $\varphi - \delta - r$, und ζ die Kreisablesung, $\Delta\zeta$ der der Indexfehler, i der Werth eines Fadenintervalls in Bogenminuten, so giebt jeder wie oben beobachtete Stern eine Gleichung der Form

$$\Delta\zeta + s \sin(\varphi - \delta) = \zeta - ni - (\varphi - \delta) - r,$$

wo nur $\Delta\zeta$ und s unbekannt sind, also durch mehrere Beobachtungen bestimmt werden können. Danach ergeben sich dann unmittelbar die Correctionen. (Weiteres, nebst ausführlichem Beobachtungsmaterial s. Annals of the Astronom. Observatory of Harvard College, Vol. XVII. Cambridge 1887.) VALENTINER.

Altazimuth heisst ein dem Universalinstrument ähnliches Instrument. Wie der Name besagt, können mit demselben Höhen und Azimuthe gemessen werden, es dient aber ebenso auch zur Bestimmung der Rectascensionen und Deklinationen, wenn es in einer bestimmten Ebene aufgestellt ist. Ein Horizontal- und ein Höhenkreis bilden neben dem Fernrohr die Bestandtheile wie beim Universalinstrument, doch versteht man unter Altazimuth im Besonderen ein fest aufgestelltes Universalinstrument, während letzteres selbst zu den transportablen Instrumenten zu rechnen ist.

Nachdem O. RÖMER zuerst die Vollkreise, darauf T. MAYER die Repetitionskreise angewandt hatte, scheint der dänische Astronom BUGGE der erste gewesen zu sein, welcher Beobachtungen mit einem mit Azimuth- und Verticalkreis versehenen Instrument machte, wobei der Verticalkreis einen Durchmesser von 4 Fuss hatte. Grössere Kreise lieferte dann RAMSDEN für Palermo, Paris u. s. w., die aber mehrfach nur an Stelle der Mauerquadranten traten, also die Anfänge der modernen Meridiankreise bildeten. TROUGHTON verfertigte Ende des vorigen Jahrhunderts ein Instrument mit dreifüssigem Höhen- und Azimuthkreis, und mit demselben stellte POND seine ersten Beobachtungen an, mit denen er zugleich nachwies, dass der von BRADLEY benutzte Greenwicher Quadrant wesentliche Veränderungen seit jener Zeit erlitten hatte. Namentlich war es aber REICHENBACH, der im Anfange dieses Jahrhunderts den Altazimuthen — astronomische Kreise an feststehender Säule, wie er sie nannte — einen für jene Zeit hohen Grad der Vollendung gab. Von den grossen Dimensionen, welche z. B. RAMSDEN den Kreisen gegeben hatte, kehrte REICHENBACH zu kleineren zurück, indem er für die festaufgestellten Instrumente Höhenkreise bis zu 3 Fuss, Azimuthalkreise in der Regel bis zu $2\frac{1}{2}$ Fuss Durchmesser lieferte. Diese Instrumente haben indessen bei aller scheinbaren Vollkommenheit wenig Anwendung gefunden, da zum Theil REICHENBACH selbst sie schon durch die eigentlichen Meridiankreise verdrängte. Erst in England stellte AIRY dieselben im Princip wieder her, indem er in der Werkstätte von RANSOME & MAY in Ipswich, und durch SIMMS ein Altazimuth im Jahre 1847 bauen liess. In Greenwich bildeten von Anbeginn an die Mondbeobachtungen einen wesentlichen Theil des Arbeitsprogramms, theils des Problems der Mondbewegung selbst wegen, theils um die Längenbestimmungen in geeigneter Weise zu fördern. Bei aller Aufopferung der Astronomen liess es sich aber mit den zur Ortsbestimmung angewandten Instrumenten — Meridiankreisen, Passageninstrumenten, Quadranten u. s. w. — nicht erreichen, dass die Beobachtungen des Mondes regelmässig erhalten wurden. Einestheils traf es sich sehr häufig, dass gerade zur Zeit des Durchganges des Mondes durch den Meridian ungünstiges Wetter

herrschte, sodann aber liess sich der Mond selbst bei klarem Himmel nicht in der nächsten Nähe der Conjunction mit der Sonne beobachten, da die Sonnenstrahlen den Mond unsichtbar machten. So blieb fortwährend fast ein Drittel der Lunation unbeobachtet. Lediglich um diesem Uebelstand abzuhelfen, führte AIRY das Altazimuth wieder ein, mit dem nun die Mondörter in jedem beliebigen Stundenwinkel erhalten werden konnten. Die Erfahrung lehrte, dass der Mond Abends oder Morgens beobachtet werden konnte, wenn er nur eine Stunde von der Sonne entfernt war.

Das AIRY'sche Instrument ist in den »Greenwich Observations 1847« ausführlich beschrieben. Beide Kreise haben drei Fuss im Durchmesser, das Fernrohr von fünf Fuss Brennweite hat eine Oeffnung von $3\frac{3}{4}$ engl. Zoll. Möglichste Festigkeit, Unveränderlichkeit im ganzen Instrument, war das von AIRY am meisten Erstrebte. Das Instrument besteht aus nur wenigen gegossenen Haupttheilen, die ausserordentlich massiv sind; selbst die Mikroskope sind mit anderen Theilen in einem Stück gegossen und nachher ausgebohrt. Es dreht sich um Zapfen, die oben und unten in sehr festem Rahmenwerk und in das Fundament eingelassen sind. Der ganze im Azimuth drehbare Theil besteht aus vier Stücken, dem unteren Theil mit Zapfen und vier Mikroskopen, den beiden Halbcylindern, welche die Seitenwände bilden, und von denen eine vier Mikroskope trägt, und dem oberen Theil mit seinen Zapfen. Der verticale Kreistheil besteht nur aus zwei Stücken, der eine mit dem Kreis, den beiden Fernrohrhälften und einem Zapfen, der andere mit dem zweiten Zapfen. Diese ausserordentliche Festigkeit lässt sich freilich nur auf Kosten möglicher Justirung erreichen, die in der That bei dem AIRY'schen Instrument ausgeschlossen war; selbst die horizontale Lage des Azimuthalkreises wurde durch versuchsweises Auflegen auf die eisernen Unterlagen und allmähliches Abfeilen zu erreichen versucht, und liess spätere Correkturen nicht mehr zu. Für die Untersuchung der Zapfenform bei der Horizontalaxe liess AIRY möglichst im Centrum der Zapfen feine Spitzen anbringen, deren Stellung mit Hilfe von Mikroskopen im Laufe der ganzen Umdrehung gemessen wurde. Bei der Verticalaxe waren solche Vorkehrungen nicht nöthig, da sich etwaige Abweichungen von der Kreisform im Querschnitt durch das Niveau verrathen mussten.

Wie gross der für die Mondtheorie durch dieses Instrument erreichte Gewinn ist, zeigt schon die Zahl der im ersten Jahr erhaltenen Beobachtungen; während vom 16. Mai 1847 (dem Tag der ersten Beobachtung am Altazimuth) bis zum 31. December 1847 im Meridian 70 Mondbeobachtungen erhalten wurden, konnten am Altazimuth an 127 Tagen vollständige Höhen- und Azimuthbestimmungen angestellt werden, und die Genauigkeit liess nach Verbesserung bald bemerkter Fehler auch im Azimuth kaum etwas zu wünschen, wogegen die Zenithdistanzen gleich von vornherein den Meridianbeobachtungen nicht nachstanden.

Immerhin blieb die Anwendung eine auf den Mond beschränkte, und so fand das sehr kostspielige Instrument, welches zu seiner vollen Brauchbarkeit in besonderer Drehkuppel stehen musste, geringe Verbreitung. Als die grosse Strassburger Sternwarte errichtet wurde, nahm WINNECKE die aussermeridionalen Mondbeobachtungen ins Programm der Sternwarte mit auf. In einer für die Zwecke eines Altazimuths besonders construirten Kuppel fand das von REPSOLD gelieferte Instrument Aufstellung. Dieses neuere Altazimuth weicht in vieler Beziehung von dem AIRY'schen ab, und es mag hier eine etwas ausführlichere Beschreibung (entnommen dem bezüglichen Berichte SCHUR's, Astr. Nachr. No. 2857) über dasselbe und die mit ihm bisher angestellten Beobachtungen folgen.

»Auf einem Sandsteinpfeiler ruht ein grosser, hohler, und mehrfach durchbrochener eiserner Cylinder von etwa 0·8 *m* Durchmesser und 0·35 *m* Höhe, der mit drei starken Fussschrauben auf einem eisernen Ringe steht, und dessen ringförmige Oberfläche eine genau abgeschliffene Ebene bildet. Auf diesem Cylinder ruht mit seiner unteren, ebenfalls glatten Fläche ein zweiter beweglicher Cylinder von demselben Durchmesser, aber etwas geringerer Höhe wie der Untersatz, an welchem die Lager für die horizontale Umdrehungsaxe des Fernrohrs und die Ablesemikroskope angebracht sind. An einem Ende dieser Axe befindet sich das Fernrohr, am anderen der Höhenkreis, der die getheilte Fläche der Mitte des Instruments zuweist. Der Azimuthkreis befindet sich im Innern des oberen Cylinders mit der getheilten Fläche nach unten und steht fest, während die um 90° abstehenden, horizontal gerichteten vier Ablesemikroskope am Cylinder befestigt sind und an dessen Drehung Theil nehmen. Die Mikroskope tragen an den nach der Mitte des Instruments gerichteten Objektivenden rechtwinklige Prismen, wodurch das Bild des Theilkreises um 90° abgelenkt und in die horizontal liegenden Mikroskope geworfen wird. Der Kreis ist von 2 zu 2 Minuten von 0 bis 360° getheilt und zwar nehmen die Ablesungen beim Verfolgen eines im Süden culminirenden Sterns zu. Die Schraubentrommeln machen bei dem Uebergang von einem Theilstrich zum andern zwei Umdrehungen und geben unmittelbar Bogensecunden. Zur Elimination der Hauptglieder der periodischen Fehler trägt der Schlitten zwei enge Fadenpaare im Abstande von $1\frac{1}{2}$ Umdrehungen. Der Verticalkreis ist ebenso eingerichtet wie der Horizontalkreis, und zur Ablesung dienen je zwei vertical gerichtete Mikroskope, die am oberen Cylinder befestigt sind und ebenfalls am Objektivende reflektirende Prismen tragen, die ein Bild von zwei mit dem Mittelpunkte des Kreises in gleicher Höhe liegenden Punkten der Theilung entwerfen. Wird die horizontale Axe mit dem Fernrohr und Kreise umgelegt, so kommt letztere in den Bereich zweier anderen an der entgegengesetzten Seite des Instruments befindlichen Mikroskope, so dass die Ablesung an letzteren beiden gänzlich unabhängig ist.

Das Fernrohr hat 1·3 *m* Brennweite und 0·13 *m* Oeffnung. Der Ocularkopf enthält 19 verticale und 11 horizontale feste Fäden und zwei Mikrometerschlitten mit einem verticalen und fünf horizontalen beweglichen Fäden, die Schraubentrommeln sind in 100 Theile getheilt. Das Fernrohr ist für Feld- und Fadenbeleuchtung eingerichtet. Die Neigung der horizontalen Axe des Instrumentes wird durch ein Niveau bestimmt, welches beständig auf den Zapfen stehen bleibt und durch eine Kurbel gehoben, umgelegt und dann wieder mit den Füssen auf die Zapfen gesenkt werden kann, ohne dass es mit der Hand berührt zu werden braucht. Das Gesichtsfeld des Fernrohres, die Theilung des Niveaus, die beiden Theilkreise und die Mikrometertrommeln werden mit Hilfe eines Systems von Spiegeln und Prismen durch eine einzige Petroleumlampe beleuchtet, welche über der Mitte des Instruments schwebt und an dessen Drehung theilnimmt.

Für Feinbewegung in Höhe, sowie zur Klemmung befinden sich an zwei entgegengesetzten Seiten Schlüssel, die neben dem Cylinder herabhängen und vom Ocularende zu erreichen sind; für die Horizontalbewegung ist dagegen nur an einer Säule eine Klemme mit Mikrometerschraube vorhanden, die nur in besonderer Lage des Fernrohres mit der Hand zu erreichen ist und mehr den Zweck hat, dem Instrument vor dem Durchgange eines Sternes eine bestimmte Lage im azimuthalen Sinn zu geben. Bei kleinen, mit letzterer Schraube ausgeführten Bewegungen reiben die glatten Flächen des oberen und unteren

Cylinders auf einander, bei grossen mit freier Hand bewirkten Drehungen im Azimuth wird dagegen der obere Cylinder durch ein System von Gewichten und Rollen etwas schwebend gehalten, so dass keine Reibung gegen den unteren Cylinder und somit auch keine Torsion stattfindet.«

Zur Festlegung einer Azimuthalrichtung sind Miren vorhanden, wie sie auch für den Meridiankreis gebräuchlich sind. Für die Bestimmung des Nullpunktes bei zu messenden Zenithdistanzen ist eine Nadirbestimmung erforderlich; dazu befindet sich etwas unterhalb der Oberfläche des Sandsteinpfeilers ein den letzteren umgebender eiserner Ring, an welchem sich ein Träger für einen Quecksilberhorizont und ein Gegengewicht dazu anbringen lässt, das Fernrohr wird dann vertical gestellt, die Quecksilberschale darunter geschoben und von einer mit dem Drehthurm selbst verbundenen Treppe aus in üblicher Weise das Nadir bestimmt. Strenge genommen gehörte zu jeder einzelnen Messung einer Zenithdistanz auch eine Bestimmung des Nadirpunktes, wenn man nicht annehmen wollte, dass die etwa vorhandene Neigung der ringförmigen Fläche, an denen sich der obere und untere Cylinder berühren, derart regelmässig verläuft, dass sie mit dem Aufsatzniveau der Drehungsaxe des Fernrohrs in zwei auf einander senkrechten Richtungen zu ermitteln ist und demnach für die dazwischen liegenden Azimuthe die Veränderungen, denen der Zenithpunkt des Kreises unterliegt, durch Rechnung gefunden werden kann. Es hat sich aber als genügend gezeigt, wenn zum Schluss einer Beobachtungsreihe die Nadirbestimmungen für alle in Frage kommenden Azimuthe der Reihe nach angestellt werden. Freilich sind dabei Voraussetzungen über das vollständig gleichartige Verhalten der auf einander äufliegenden Cylinder des Instruments während der ganzen Zeit nothwendig, und es kann dasselbe durch ein Höhenniveau controlirt werden. Trotz dieses gleichsam summarischen Verfahrens ist der Zeitaufwand, den ein solches Instrument verursacht, wenn es gute Resultate liefern soll, ein sehr erheblicher, so dass dadurch wieder der Vorzug der Benutzung desselben zum Theil in Frage gestellt wird.

Zur Berechnung der Beobachtungen dienen folgende Formeln:

Für die Bestimmung des Azimuthes eines terrestrischen Objektes, einer Mire oder dergl., wird man am geeignetsten den Polarstern beobachten (s. Azimuthbestimmung), man hat dann mit dem beweglichen Faden verschiedene Antritte wahrzunehmen, d. h. die Beobachtung des Mittelfadens allein zu vermehren und die einzelnen Werthe auf den Mittelfaden zu reduciren, wozu die Formeln

$$\sin n = -\sin a \cos \varphi$$
$$\sin t = -\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \delta$$
$$\sin J = \frac{\sin i}{\cos n \cos \delta \cos t} - 2 \operatorname{tang} t \sin^2 \tfrac{1}{2} J$$

gelten (s. Fadendistanzen), in denen i den mit der Schraube gemessenen Abstand vom Mittelfaden, J die Reduction der Durchgangszeit und a das durch die Kreisablesung gefundene Azimuth des Mittelfadens ist, φ, δ, t die üblichen Bedeutungen, geographische Breite des Beobachtungsortes, Deklination und Stundenwinkel des Sternes haben. Bei grossen Stundenwinkeln (Beobachtungen in der Nähe des Poles) kann man so verfahren, dass man den Faden möglichst rasch mehrmals auf den Stern einstellt und das Mittel aus den Trommelablesungen nimmt und dieses mit dem Mittel der zugehörigen Uhrzeiten verbindet. Man kann dann den gemessenen kleinen Abstand vom Mittelfaden als einen Collimationsfehler ansehen und dafür die an die Kreisablesung anzubringende Correction berechnen. Ist dann a die für den

Indexfehler verbesserte Kreisablesung, A das beobachtete Azimuth des Sternes, b die Neigung der Umdrehungsaxe und c der Collimationsfehler des Mittelfadens, die beiden letzten Grössen auf das Fernrohrende bezogen, so ist:

$$A = a + b \cot z + c \operatorname{cosec} z \quad \text{Fernrohr links}$$
$$= a - b \cot z - c \operatorname{cosec} z \quad \text{Fernrohr rechts.}$$

Wenn dann so die Beobachtungszeit, resp. die Kreisablesung für den Mittelfaden abgeleitet ist, kann man das Azimuth berechnen nach der Formel:

$$\tan a = -\frac{\tan p \sec \varphi \sin t}{1 - \tan p \tan \varphi \cos t},$$

wobei man sich bequemer Hilfstafeln bedienen kann. Setzt man nämlich $p = 90° - \delta$ und berechnet zunächst $\log \tan p \sec \varphi \sin t$ und $\log p \tan \varphi \cos t$, so kann man mit der letzten Grösse als Argument einer Tafel den Werth entnehmen, der die Correction, die an die erste Grösse anzubringen ist, um $\log \tan a$ zu erhalten, in Einheiten etwa der 6. Decimale des Logarithmus ist, sodass also:

$$\log \tan a = \log \tan p \sin t \sec \varphi + \text{Correct.}$$

Derartige Hilfstafeln in grosser Ausdehnung sind gegeben in ALBRECHT »Formeln und Hilfstafeln«, sowie übersichtlich unter dem Artikel Azimuth.

Für die Bestimmung des Uhrstandes kann man Zeitsterne in der Nähe des Meridians in beiden Lagen des Fernrohres beobachten. Die Reduction der Durchgangszeiten auf den Mittelfaden kann man vornehmen nach

$$J = i \sec \delta \sec q,$$

wo q, der parallaktische Winkel, bestimmt ist durch:

$$\sin q = \frac{\sin a \cos \varphi}{\cos \delta}.$$

Der Uhrstand selbst ergiebt sich dann aus der Gleichung:

$$\cot a \sin t = -\cos \varphi \tan \delta + \sin \varphi \cos t,$$

in welcher man

$$m \sin M = \sin \varphi$$
$$m \cos M = \cot a$$

setzen kann, sodass

$$\sin (M - t) = \cot \varphi \tan \delta \sin M$$

und

$$\Delta T = \alpha + t - T.$$

Zur Berechnung der Mondazimuthe endlich dienen die ebenfalls an anderer Stelle (s. Fadendistanzen) abgeleiteten Formeln zur Reduction auf den Mittelfaden und das Mondcentrum, die man in nachstehender Weise anordnen kann. Setzt man wieder

$$\sin n = -\sin a \cos \varphi$$

und

$$\tan m = \tan a \sin \varphi$$
$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos a = (\varphi - \varphi') \cos n \cos m,$$

ferner in

$$\sin \delta_0 = \sin \varphi \cos \zeta - \cos \varphi \sin \zeta \cos a$$
$$e \sin E = \sin \varphi$$
$$e \cos E = \cos \varphi \cos a,$$

wonach

$$\sin (E - \zeta) = \frac{\sin \delta_0}{e},$$

dann

$$A = (1 - \lambda) \cos n \cos \delta_0$$
$$B = \tfrac{1}{15} \lambda' \sin n \sec \delta_0$$

$$sin(\zeta' - \zeta) = \rho \, sin \, \pi \, sin(\zeta' - \gamma) \qquad f = \frac{sin \, \zeta}{sin \, \zeta'},$$

so ist

$$t = \vartheta_0 - \alpha_0 + m \qquad \text{und} \qquad J = \frac{f(c + i) \pm s}{A \, cos \, [t - \frac{1}{2}(1 - \lambda)J] + B},$$

wo die Buchstaben folgende Bedeutungen haben, nämlich ϑ, ϑ_0 die Sternzeit der Beobachtung des Durchganges des Mondrandes durch einen Faden, resp. die des Mondcentrums durch die Verticalebene des Instrumentes, α_0, δ_0 die Rectascension und Deklination des Mondcentrums für die Zeit ϑ_0, λ, λ' die Zunahme der Rectascension und Deklination in einer Secunde Sternzeit, φ die geographische, φ' die geocentrische Breite, ρ die Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt, π die Aequtoreal-Horizontalparallaxe, s der geocentrische Halbmesser des Mondes, der positiv zu nehmen ist, wenn der vorangehende, negativ, wenn der folgende Rand beobachtet ist.

Zur Vergleichung der am Altazimuth beobachteten Azimuthe mit den aus einer Mondephemeride folgenden, sind die beobachteten zuerst durch Anbringung von $- \rho \, sin(\varphi - \varphi') \dfrac{sin \, \pi \, sin \, a}{sin \, \zeta}$ auf den Erdmittelpunkt, und die Beobachtungszeiten unter Anbringung der Längendifferenz auf den Meridian der Ephemeride zu reduciren, dann aus diesen das Azimuth des Mondcentrums zu berechnen nach:

$$sin \, \zeta \, sin \, a = cos \, \delta \, sin \, t$$
$$sin \, \zeta \, cos \, a = - sin \, \delta \, cos \, \varphi + cos \, \delta \, sin \, \varphi \, cos \, t,$$

wo man setzen kann

$$r \, sin \, R = sin \, \delta$$
$$r \, cos \, R = cos \, \delta \, cos \, t$$

sodass

$$sin \, \zeta \, cos \, a = r \, sin(\varphi - R).$$

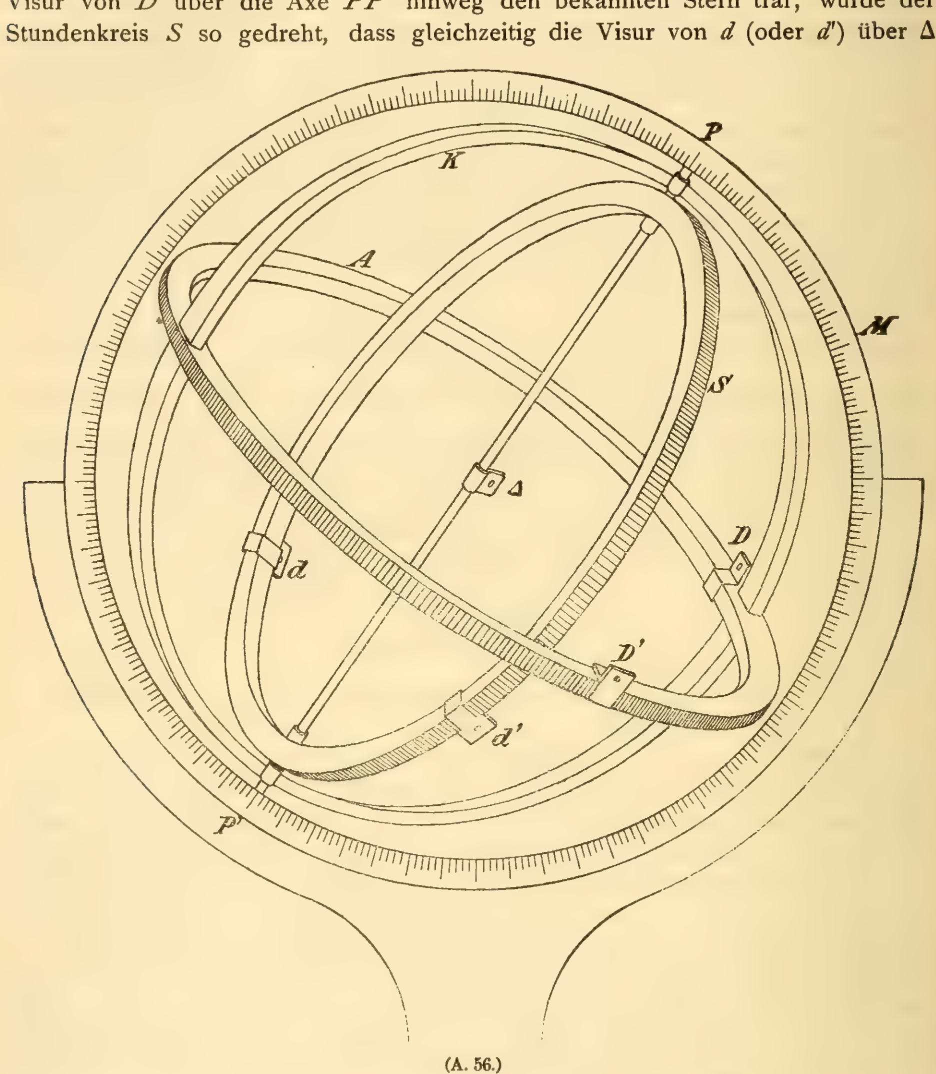
VALENTINER.

Armille oder Armillarsphäre ist ein aus mehreren ineinander liegenden Kreisen bestehendes astronomisches Instrument früherer Zeit. Der Name kommt von *Armilla* = Ring, Band; die Armillen stellen Kreise der Hmmelskugel selbst, den Aequator, die Ekliptik, Deklinations- oder Breitenkreise u. s. w. dar und beziehen demnach die Oerter der Gestirne unabhängig von dem Beobachtungsorte auf den Aequator oder auf die Ekliptik. Je nach dieser doppelten Anordnung unterscheidet man Aequatoreal- und Solstitialarmillen.

Die Aequatorealarmillen gelangten erst durch TYCHO zu allgemeiner Anwendung. Sie bestehen aus einem getheilten Kreise *M* (Fig. 56), welcher vertical in die Ebene des Meridians gestellt wurde, und in welchem bei *P*, *P'* die zur Weltaxe parallele Drehungsaxe der Kreise *K* und *S* befestigt ist. *K* dient nur als Träger des zum Aequator parallelen Kreises *A*, welcher ebenfalls eine Theilung in Graden und Unterabtheilungen derselben hat, während *S* einen beweglichen Deklinationskreis vorstellt, und daher ebenfalls eine entsprechende Theilung hat. Längs des Aequatorringes sind die beiden Diopter *D*, *D'*, längs des Deklinationsringes *S* die beiden Diopter *d*, *d'* verschiebbar (je in einer Hälfte des Kreises ein Diopter). In Δ, in der Ebene des Aequatorringes, an der Axe *P P'* befestigt, befindet sich ein Objektivdiopter.

Zur Beobachtung eines Gestirnes wird der Stundenkreis *S* so lange gedreht, bis die Visur von *d* (oder *d'*) über Δ den Stern trifft; die Stellung des Stundenkreises gegenüber dem Meridian (abgelesen an der Theilung des Kreises *A*) giebt den Stundenwinkel des Sternes, während die Deklination durch die Stellung

des Diopter d (oder d') an der Theilung des Kreises S abgelesen werden kann. Zur Bestimmung von Rectascensionsdifferenzen zweier Gestirne wurde eines der Diopter D, D' an der Theilung des Kreises A auf die Rectascension des bekannten Sterns eingestellt, und der Aequatorring A so lange gedreht, bis die Visur von D über die Axe PP' hinweg den bekannten Stern traf; wurde der Stundenkreis S so gedreht, dass gleichzeitig die Visur von d (oder d') über Δ



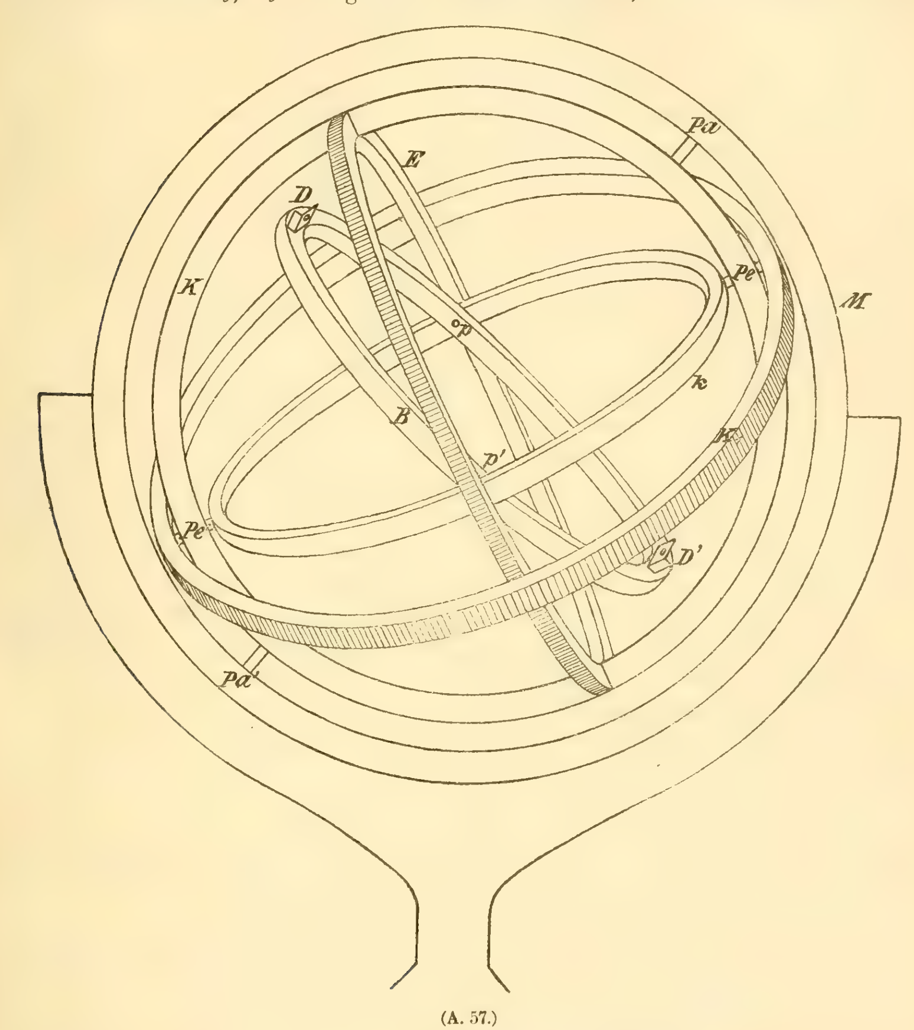
(A. 56.)

den zweiten Stern traf, so konnte aus der Stellung von S an der Theilung des Kreises A direkt die Rectascension dieses unbekannten Sternes abgelesen werden.

Die Solstitialarmillen, obwohl im Gebrauche complicirter, wurden doch viel früher angewendet. Schon das Astrolabium des Ptolemäus ist eine Solstitialarmille. Es besteht aus dem Kreise M_1 (Fig. 57), welcher vertical in der Ebene des Meridians aufgestellt wird, sodass die Axe P_aP_a' des Kreises K parallel zur Richtung der Weltaxe steht. In dem Kreise K sind in den Polen P_eP_e' der Ekliptik, in der entsprechenden Entfernung von P_aP_a' (gleich der Schiefe der Ekliptik, für Ptolemäus 23° 55′) Zapfen befestigt, und in einer zur Richtung P_eP_e' senkrechten Ebene der Kreis E, welcher die Ekliptik selbst vorstellt,

mit K fest verbunden. Um $P_e P_e'$ als Axe dreht sich der äussere Kreis K_i und der kleinere, innere k, welcher um 90° von $P_e P_e'$ entfernt, also in der Ebene der Ekliptik E die Zapfen p, p' für einen Ring B trägt, der mit den diametral gegenüber stehenden Diooptern D, D' versehen ist. Die Kreise E, K, K_1 sind getheilt.

Bei der Drehung des Kreises K um die Pole P_a, P_a' werden die Ekliptik E und deren Pole P_e, P_e' so gedacht werden können, dass die Ebene von E



(A. 57.)

parallel zur momentanen Lage der Ekliptik am Himmel ist[1]). Um diese Stellung herbeizuführen, wird der Kreis B in die Ebene von E gebracht (die Drehungsaxe pp' ist ja beständig in dieser Ebene), die Visur DD' durch Drehung des Kreises k auf die aus der Theorie der Sonnenbewegung bekannte Länge der Sonne (oder eines bekannten Sterns) gestellt, und dann der Kreis K so lange gedreht, bis die Visur DD' die Sonne (oder den eingestellten Stern) trifft. Dann wird sofort die Visur DD' auf das zu bestimmende Objekt gerichtet (nachdem der Kreis K um das der täglichen Bewegung in der Zwischen-

[1]) Man darf nicht übersehen, dass die Ekliptik zwischen den Sternen fest liegt, daher ihre Lage gegen den Horizont mit jedem Momente ändert.

14*

zeit entsprechende Stück nachgedreht wurde) und der Kreis K_1 in der Richtung der Diopter DD' gebracht. Der Punkt, welchen K_1 auf dem Ekliptikringe E bezeichnet, giebt die Länge des zu bestimmenden Objektes, während dessen Breite an der Theilung des Kreises K_1 selbst abgelesen werden kann. Wie man sieht, dient hier die Weltaxe nur dazu, den die Ekliptik repräsentirenden Ring parallel zur Ebene der Ekliptik im Raume zu stellen, welche dann als Grundebene angesehen wird, auf welche sich die Coordinaten beziehen. N. Herz.

Astrophotographie. Vorbemerkung: In diesem Artikel wird vorausgesetzt, dass der Leser mit der Photographie selbst und mit der Photochemie vollkommen vertraut ist, das Gleiche gilt in Betreff der Spectralanalyse, wobei übrigens auch auf den folgenden Artikel »Astrospectroscopie« verwiesen wird. Sodann muss besonders hervorgehoben werden, dass es bei den immensen Fortschritten, welche die Photographie und speciell die Astrophotographie in den letzten Jahren gemacht hat, nicht annähernd möglich geworden ist, auf dem in der Encyklopädie verfügbaren Raum aller Arbeiten und Untersuchungen, sowie der dabei gemachten Erfahrungen zu gedenken. Ferner steht auch zu befürchten, dass nach kurzer Zeit — in ganz anderer Weise als in den übrigen Zweigen der Astronomie — an Stelle der jetzt gebräuchlichen Verfahrungsweisen andere getreten sind. Andererseits muss zugegeben werden, dass ein Handbuch der Astronomie heutigen Tages als höchst unvollständig gelten müsste, wenn die Photographie nicht darin aufgenommen worden wäre. Es ist daher versucht worden, auf dem durch die Verhältnisse begrenzten Raum das Wesentliche zusammenzufassen und dem Leser einen Ueberblick dessen zu geben, was gegenwärtig die Astrophotographie umfasst, wodurch er befähigt wird, auch neueren Ergebnissen und Fortschritten an der Hand der Fach- und Specialliteratur zu folgen.

Die Himmels- oder Astrophotographie kann man eigentlich in sechs Gruppen eintheilen:

1) Das Photographiren der Sonne,
   a) im Brennpunkte einer Linse (oder eines Spiegels),
   b) durch ein Vergrösserungssystem,
   c) das Photographiren der Sonnencorona.
2) Das Photographiren des Mondes.
3) Das Photographiren von Planeten, Kometen und Sternschnuppen.
4) Das Photographiren der Fixsterne und Nebelflecke.
   a) mit Hilfe grosser Refractore (oder Spiegel),
   b) mit Hilfe kleinerer photographischer Objective, also mit Porträtobjectiven,
   c) die Arbeiten mit verschiedenen Instrumenten.
5) Die Spectralphotographie des Himmels.
   a) Das Photographiren des Sonnenspectrums,
   b) das Photographiren des Coronaspectrums,
   c) das Photographiren der Fixstern-, Nebelflecken- und Kometenspectra mit dem Spectrographen,
   d) Durchmusterungsaufnahmen mit dem Objectivprisma.
6) Die Ausmessung der Photogramme,
   a) Ausmessung der Sonnenbilder,
   b) Ausmessung der Sternpositionen,
   c) Ausmessung der Spectrogramme,
   d) die Reduction des ausgemessenen Photogrammes.

1) Die Aufnahmen der Sonne.

a) Das Photographiren im Brennpunkte einer Linse oder eines Spiegels. Zur Aufnahme der Sonne könnte man eigentlich jedes Fernrohr gebrauchen, wenn man seinen chemischen Focus ermittelt hat, der in den allermeisten Fällen vom optischen bedeutend abweicht. Die Spiegelteleskope lassen sich aber ohne Ausnahme zu diesem Zweck ganz vortrefflich verwenden. Wenn aber selbst der chemische Brennpunkt eines gewöhnlichen, für optische Strahlen achromatisirten Refractors noch so sorgfältig bestimmt worden, so ist das mit demselben erhaltene Resultat doch niemals ganz befriedigend, weil beim Achromatisiren dieser Gläser doch immer auf die sichtbaren und nie auf die unsichtbaren Strahlen Rücksicht genommen wird. So wird das photographische Bild gewöhnlich mit einer »Glorie« umgeben sein, oder mit anderen Worten, die Verschiedenheit der Brennebene verschiedenfarbiger Strahlen verursacht einen unscharfen Rand. Deshalb wird jeder, der sich mit dem Studium der Sonnenphotographie eingehend beschäftigen will, am besten thun, wenn er sich bei C. A. Steinheil & Söhne, München (und nirgends anders) eine Linse und Vergrösserungssystem bestellt. Diesen Luxus kann man sich um so eher erlauben, als es ganz überflüssig wäre, für Sonnenaufnahmen ein grösseres Objectiv als 10 *cm* Durchmesser zu wählen, wenn es sich nicht gerade darum handelt, Bilder zu erhalten, wie sie Janssen in Meudon macht. Ein solches Objectiv reicht vollständig aus, um mit einem passenden Vergrösserungssystem Sonnenbilder von 16 *cm* zu erzeugen, und dass diese Grösse zum Studium der Sonnenfleckenpositionen genügt, ist eine bekannte Thatsache. Sind nun aber diese Bilder völlig scharf, so lassen sich ja die Details so vergrössern, als wenn man ein ganzes Sonnenbild von 40—50 *cm* Durchmesser hätte.

Die Aufnahmen im Brennpunkte des Objectivs werden nur bei Gelegenheit totaler Sonnenfinsternisse gemacht, weil hier der Hauptschwerpunkt auf die Corona fällt, die zu lichtschwach ist, als dass sie mit den älteren unempfindlichen Platten photographirt werden könnte. Mit den heutigen äusserst empfindlichen Schleussner- oder Lumière-Platten wird man aber die Corona bei grösserer Objectivöffnung und mässiger Vergrösserung des Projectionssystems doch photographiren können.

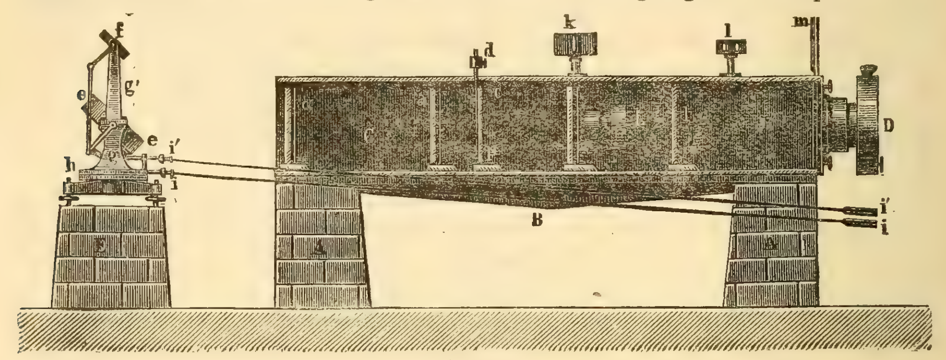
Die Amerikaner haben bei Gelegenheit der Sonnenfinsternisse Objective von abnorm langer Brennweite (z. B. bis 15 *m* Brennweite) genommen, um dadurch ein grösseres Brennbild der Sonne zu erhalten, ohne zugleich Licht einzubüssen. Es ist selbstverständlich, dass eine parallactische, äquatoreale Aufstellung einer Linse von 40 Fuss Brennweite mit bedeutenden Kosten verbunden wäre; ausserdem würde der Transport in oft ganz unbewohnte und entlegene Gegenden, die nur dem Fussgänger oder mit Maulthieren erreichbar sind, ungeheure Summen verschlingen. Daher hat das praktische Amerika (fast gleichzeitig und unabhängig mit Frankreich) eine ganz sinnreiche Methode zur Montirung solcher langer Fernröhre erfunden, wonach sich letztere mit Ausnahme des Heliostaten, des Momentverschlusses, der Cassette und des Objectivs sozusagen an Ort und Stelle bewirken lässt. Das Princip dieser Aufstellungsweise ist ein horizontal liegendes eisernes, oder aus Brettern zusammengezimmertes langes Rohr, welches im Meridian aufgestellt und mit dem Objectiv nach Norden gerichtet ist. Vor dem Objectiv steht der Heliostat (oder, wie man diese Instrumente, wenn sie grössere Dimensionen haben, nennt, Siderostat), welcher das Sonnenbild in das Fernrohr reflectirt. Am Südende des Rohres ist das Laboratorium aus Brettern aufgebaut, welches zugleich Cassette, Camera, und alles »in einer Person« bildet, da das Südende des Rohres in dasselbe einmündet, wo dann einfach die Cassette

ohne jede Dichtung in das Rohr eingeschoben wird. Ich sage »ohne Dichtung«, da das Laboratorium selbst ganz dunkel, und nur mit wenigen rothen Fenstern versehen ist, sodass man hier die Platte auch ohne Cassette handhaben kann, indem der Momentverschluss vor derselben im Rohre angebracht ist.

Ein solches »Expeditions-Observatorium«, wie es früher C. Wolf in Paris benutzt hat, stellt mit Fortlassung der Hütte die Fig. 58 dar.

Wolf benutzte indessen bei seinen Sonnenphotographien einen Cassegrain-schen Spiegel, und stellte ihn folgendermaassen auf[1]):

Auf zwei massiven Steinpfeilern *A*, *A* befindet sich eine stark verrippte Eisenplatte *B*, die das viereckige, aus Holz zusammengefügte Teleskoprohr *C* zu



(A. 58.)

tragen hat. Die beiden Pfeiler *A*, *A* befinden sich in der Hütte, sagen wir in dem Laboratorium, während der Pfeiler *E* ausserhalb des Hauses errichtet ist. Auf der grossen Eisenplatte sind verschiedene kleinere Platten aufgeschraubt, sie lassen sich aber in einer in *B* eingehobelten Nute verschieben und nach Bedarf festklemmen. Bei *a* befindet sich der Cassegrain'sche Spiegel, der in der Mitte durchbohrt ist, um dem Strahlengange vom kleinen Convexspiegel *α* freien Durchgang nach dem Vergrösserungssystem *L* zu gewähren. Im Brennpunkt des Spiegels befindet sich ein Diaphragma, welches den Momentverschluss *c* auf der Platte *p* trägt. *D* ist die Camera, welche die Cassette für die empfindliche Platte aufzunehmen hat. Ueber dem ganzen Holzgehäuse befindet sich ein kleines Objectiv *k*, welches als Sucher dient, indem das von ihm erzeugte Sonnenbild durch das Ocular *l* vergrössert und auf den Schirm *m* projicirt wird.

Der Momentverschluss ist bei dieser Art von Apparaten ein gewöhnliches Fallbrett mit einer verstellbaren Spalte.

Auf dem Pfeiler *E* ausserhalb der Hütte befindet sich der Heliostat, der hier nur ein ganz einfacher Handheliostat ist, dessen Spiegel mit den beiden Schlüsseln *i*, *i* und *i'*, *i'* vom Innern der Hütte dirigirt werden. Auf einem kräftigen Dreifuss ruht ein horizontaler gezahnter Kreis *h*, auf welchem das Lager *g* für den grossen Spiegel *e*, *e* aufgesetzt ist. Dieses Lager trägt ein zweites Lager *g'* für den kleinen Spiegel *f*. Die Axen der beiden Spiegel sind durch einen Hebel so verbunden, dass sie immer parallele Bewegungen erhalten müssen. Der grosse Spiegel dient zum Photographiren und muss sehr genau plan gearbeitet und auf der Vorderfläche versilbert sein. (Es ist hier zu bemerken, dass die Amerikaner ihre Spiegel, welche sie zur Sonnenbeobachtung benützen, heute nicht versilbern, sondern ihre Hinterfläche concav schleifen, damit kein

[1]) Da dieser Apparat mit Vergrösserungssystem versehen ist, habe ich der obigen Eintheilung wohl etwas vorgegriffen, doch geschah dies der Raumersparniss wegen.

doppelter Reflex eintritt. Diese einfache Einrichtung genügt vollkommen, um gute Resultate zu erhalten.)

Die amerikanische Aufstellung ist ganz ähnlich, nur ist das Rohr unverhältnissmässig länger und das vordere Ende ragt aus dem Laboratorium heraus.

b) Apparate mit Vergrösserungssystem. Diese Art Apparate hat verschiedene Aufstellungen; wegen der einfachen Reductionsweise der Photogramme wird am häufigsten ein parallactisches Stativ mit Uhrwerk dazu gewählt. Indessen findet man die Apparate auch horizontal aufgestellt, z. B. macht Deslandres in Paris solche (wie Fig. 58); ferner ist der Heliophotograph in Potsdam mit dem Objectiv nach dem Südpol gerichtet, und vor demselben ein parallactisch aufgestellter Heliostat montirt.

Dies letztere in seiner Form eigenthümliche Instrument verdient eine besondere Erwähnung. Es ist auf einem massiven Steinblock, wie gesagt, derart aufgestellt, dass das Objectiv gegen den Südpol gerichtet ist. Das Verhältniss der Objectivöffnung zur Brennweite ist 1:25, und letztere beträgt etwa 4 *m.* Wenn Objectiv und Heliostat zu ebener Erde stehen, befindet sich also die Camera etwa in der Höhe des ersten Stockwerks. Das Instrument besteht aus einem langen Stahlrohr, welches mit gusseisernen Lagern auf den beiden Pfeilern gelagert ist. Die Lager sind mit den nöthigen Stellschrauben versehen, um das Rohr in Azimuth und Polhöhe corrigiren zu können. Am oberen Pfeiler ist ausserdem noch ein gusseisernes Gestell angebracht, welches mit einem Schlitten versehen ist, auf dem sich die Hinterplatte der Camera verschieben und nach Bedarf festklemmen lässt, sodass die Grösse des Sonnenbildes auf der Mattscheibe, resp. der empfindlichen Platte, nach Belieben verändert werden kann. Als Momentverschluss ist ein ganz einfacher gewählt, bei dem sich nur die Spaltweite variiren lässt. Die Spalte bewegt sich an demselben in der Secunde 1·58 *m,* und die Bewegung erfolgt durch eine Spiralfeder, die Auslösung durch Drehen eines Knopfes.

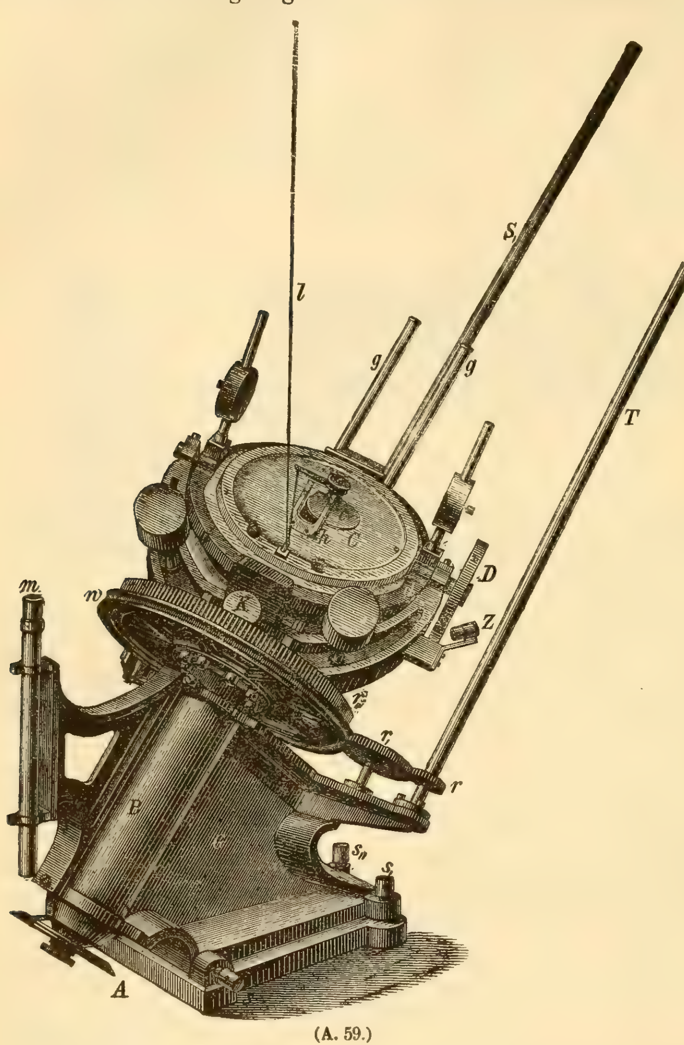
Der interessanteste Theil des Instrumentes bleibt aber der Heliostat, der wie alles, was aus Repsold's Meisterhand kommt, geistreich erdacht ist. Derselbe ist in Fig. 59 nach einer photographischen Aufnahme dargestellt, und mag an dieser Stelle zugleich als Muster solcher Apparate ausführlicher besprochen werden.

Es ist diesem Instrument die Aufgabe gestellt worden, das Sonnenbild stets nach dem Nordpol zu reflectiren, also auch in der Richtung der optischen Axe des Objectivs. Der Heliostat besitzt nur zwei Axen, eine Polar- und eine Deklinationsaxe. Die Stundenaxe befindet sich in einer gusseisernen Büchse *B*, die einen Theil des Gestelles *C* bildet, welches mit Correctionsschrauben für Azimuth und Polhöhe ($s_{,}$, $s_{,,}$) versehen ist. Mit der Stundenaxe in fester Verbindung steht der Bügel *Z*, welcher die Lager der Deklinationsaxe trägt, die mit der Spiegeldose *d*, *d* verschraubt ist. Auf die Deklinationsaxe lässt sich eine Reiterlibelle aufsetzen.

Das östliche Ende der Deklinationsaxe trägt einen von 10′ zu 10′ getheilten Kreis *D*; die Nummerirung geht von der Mitte nach beiden Seiten hin, entsprechend den vorkommenden Deklinationen der Sonne. Da nun der Spiegel bei einer Deklinationsänderung der Sonne nur um die Hälfte des Betrages jener Aenderung geneigt werden muss, so ist bei der Eingravirung der Zahlen darauf Rücksicht genommen, sodass diese gleich die Deklination der Sonne geben.

Der Stundenkreis *A* ist in Minuten getheilt, sodass man am Index noch 0·1 Minuten schätzen kann. Die Ablesung geschieht durch ein Mikroskop *m.* Der Planspiegel wird in der Spiegeldose *dd* durch ein Federband gehalten, mit demselben eingesetzt und herausgenommen, durch einen weiss gestrichenen Deckel geschützt.

Der Deckel C kann mit Hilfe der Schnur l vom Camera-Ende des Heliographen geöffnet und geschlossen werden. Um aber nicht den ganzen Spiegel den Sonnenstrahlen bei der Einstellung auszusetzen, ist in der Mitte des Deckels eine kleine Oeffnung angebracht. Wenn man die Schnur anzieht, so öffnet sich erst diese, so dass die Einstellung bewirkt werden kann; soll dann der ganze Spiegel freigelegt werden, so wird stärker an l gezogen, bis sich C gegen die Messingstangen gg legt. Der U-förmige Halter ist zur Aufnahme eines blauen Glases bestimmt, welches bei der Einstellung des Apparates benutzt wird, um bei längerer Operation den Spiegel gegen die Bestrahlung der Sonne zu schützen.



(A. 59.)

Die Bewegung des Uhrwerks wird durch die Stange S auf eine in der Figur nicht sichtbaren Schraube, und durch diese auf den Zahnkranz der Scheibe w übertragen. Der Spiegel folgt der Sonne, sobald die Klemme K angezogen ist.

Durch die Stange S wird ebenfalls die Feinbewegung vom Cameraende des Apparates besorgt, was mit Hilfe dreier Planetenräder geschieht. Die Feinstellung in Deklination geschieht mit Hilfe der Stange T durch Vermittelung der Zahnräder r, $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime}$.

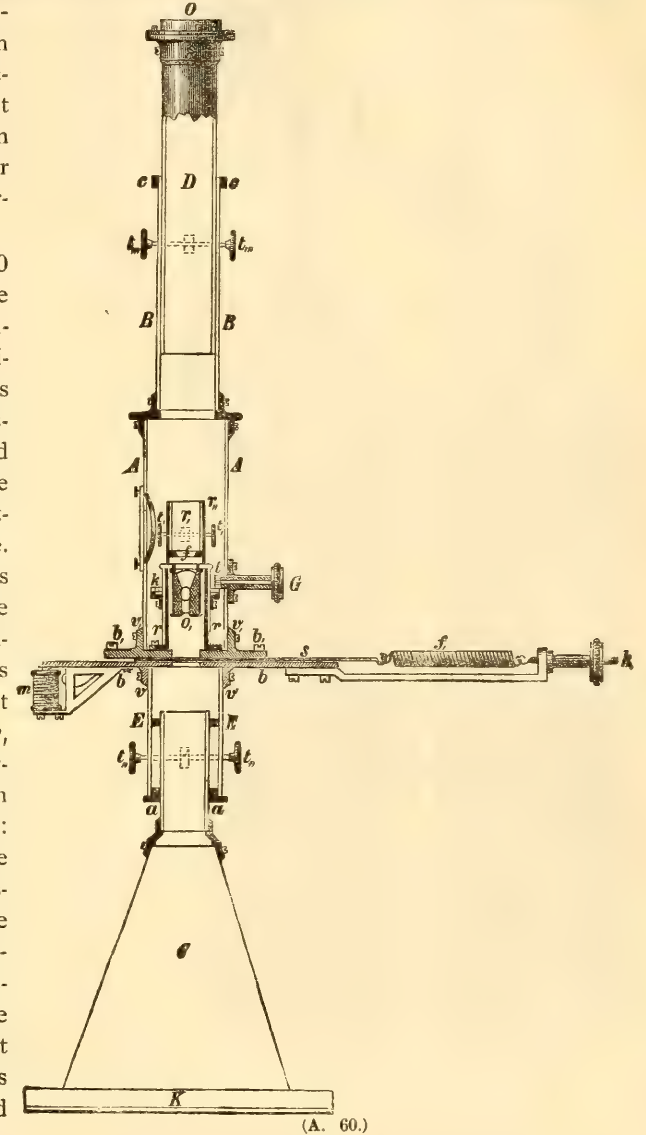
Für die weitere Beschreibung des Heliographen der Potsdamer Sternwarte, sowie für die Justirung desselben muss auf die »Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, Bd. IV., No. 6« (oder No. 19 der fortlaufenden Publikationen), wo die Beschreibung von O. Lohse gegeben ist, verwiesen werden.

Hansen schlug vor, die photographischen Fernröhre, welche zur Beobachtung des Venusdurchgangs 1874 bestimmt waren, auf ein Vieraxenstativ nach seinem eigenen System zu montiren. Diese Montirungen sind aber ganz vereinzelt geblieben und nur ein einziges Mal versuchsweise für die Privatsternwarte in

O'Gyalla nachgeahmt worden (vergl. KONKOLY, Anleitung zur Himmelsphotographie, pag. 248—250, Fig. 178, 179).

Alle diese Aufstellungen haben den grossen Nachtheil der langwierigen Reduction der Photogramme, weil für jeden Beobachtungsort parallactische Tafeln gerechnet werden müssen, da ein fest aufgestelltes Fernrohr doch nur Horizontalcoordinaten angiebt.

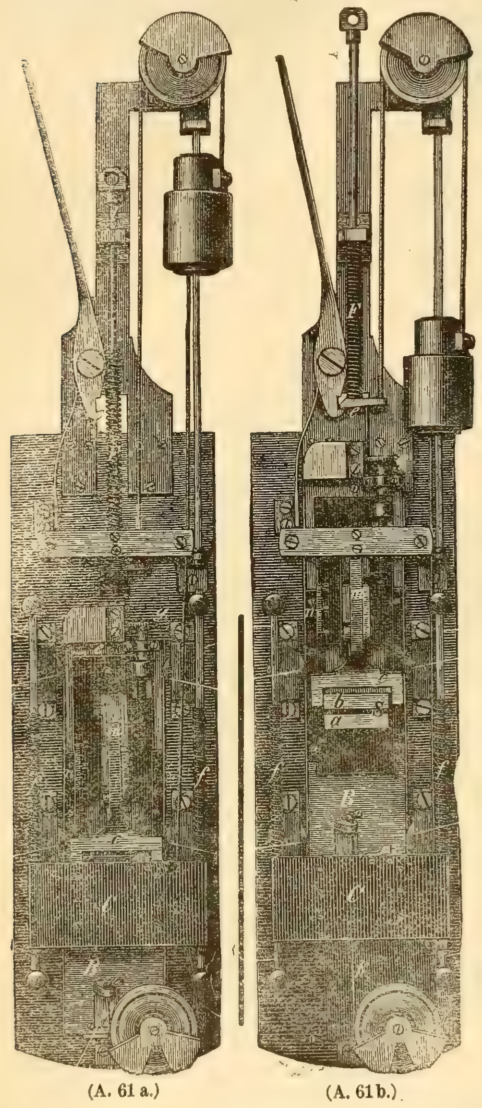
Die folgende Fig. 60 zeigt die schematische Darstellung im Durchschnitt eines photographischen Fernrohrs, welches mit einem Vergrösserungssystem versehen ist, und wie es in der Werkstätte meiner O'Gyallaer Privatsternwarte gebaut wurde. In der Mitte des Fernrohrs befinden sich zwei kräftige Platten bb, $b_{,}b_{,,}$ auf welche oben und unten das ganze Fernrohr aufgebaut ist. Zwischen bb und $b_{,}b_{,}$ spielt die Momentverschlussplattte s. Verfolgen wir den Bau nach oben: auf $b_{,}b_{,}$ ist eine kräftige Flantsche $v_{,}v_{,}$ mitgegossen, in welche das grosse Messingrohr AA eingeschraubt ist. Dieses Messingrohr ist in der Wiege des Aequatoreals befestigt und trägt inwendig das Projectionssystem o und das Fadenkreuz $r_{,}$. Dieser



(A. 60.)

ganze Apparat ist aber corrigirbar eingerichtet. Auf die Platte $b_{,}b_{,}$ ist eine gedrehte Flantsche aufgesetzt, welche nach oben in ein Rohr endet, auf dieses Rohr ist ein zweites Rohr rr passend aufgeschliffen, auf welchem bei k ein Kronrad aufgeschraubt ist, das mittelst des Triebes t und des Knopfes G von aussen herumgedreht werden kann. Dieses Rohr rr ist oben mit einem Ringe versehen, in welchem die Fassung des Vergrösserungssystems eingeschraubt wird. (Bei diesem Apparate besteht dasselbe aus einem für chemische Strahlen achromatisirten monocentrischen Ocular von STEINHEIL). Auf das Rohr rr ist noch ein weiteres Rohr r'' aufgesetzt, in welchem sich wieder ein zweites um einige Millimeter durch den Trieb $t't'$ verschieben lässt. Dies letztere trägt an seinem unteren Ende das Fadenkreuz oder Fadennetz.

Diese auf den ersten Blick complicirt erscheinende Anordnung ist unentbehrlich, da man erstens das Fadensystem genau in den gemeinschaftlichen Brennpunkt von Objectiv und Projectionssystem bringen können muss, was mittelst des Triebes $t' t'$ ermöglicht wird, zweitens auch das Fadenkreuz genau nach den Aequatorcoordinaten orientiren muss, was durch den Trieb t, das Kronrad k und den Knopf G bewirkt wird. Um jedoch den Trieb $t' t'$ erreichen zu können, ist auf der linken Seite des Rohres AA ein für gewöhnlich zugeschraubter Ausschnitt vorhanden.



(A. 61 a.) (A. 61 b.)

Am oberen Ende des Rohres AA befindet sich ein Ring, welcher zwei angegossene Flantschen hat. Die untere passt in AA, die obere trägt das Rohr BB, in dem sich durch den Trieb $t_{,,,}t_{,,,}$ das das Objectiv O tragende Rohr D um einige Centimeter verschieben und durch den Klemmring cc festklemmen lässt.

Wenn wir den Bau von der Momentverschlussplatte nach unten verfolgen, finden wir auf der unteren Platte bb die Flantsche vv mitgegossen, welche das Rohr EE festhält, in dem sich wieder durch den Trieb $t_{,,}t_{,,}$ das Rohr aa um einige Centimeter verstellen lässt. Letzteres trägt die Camera C, an deren unterem Ende man die Cassette k sieht; s ist die Momentverschlussplatte, welche durch die mit der Schraubenmutter k regulirbare Spiralfeder f immer nach rechts gehalten wird. Wenn man die Platte s nach links schiebt, so bleibt sie ungefähr zwischen bb (links) in einem Auslöser hängen, welcher mit dem Electromagneten in Verbindung steht.

Die Momentverschlussplatte hat hier einen einfachen Schlitz von 0·8 *mm*, der in etwa 0·005 Secunde an der Stelle vorbeigerissen wird, wo sich die aus dem Projectionssystem austretenden Strahlen kreuzen.

Diese Anordnung des Momentverschlusses genügt aber nur für ein Instrument von bescheidenen Dimensionen, wie es das eben beschriebene ist. Für grössere Instrumente empfiehlt sich stets der JANSSEN'sche Verschluss, wie er in Fig. 61 abgebildet ist. Unter a ist er in gespanntem, unter b in abgelassenem Zustand. (Vergl. die nähere Beschreibung in des Verfassers »Anleitung zur Himmelsphotographie«, pag. 211—214). Der Zweck dieser anscheinend complicirten Anordnung ist, dass, wenn man die Cassette vor dem Spannen des Verschlusses schon geöffnet hat, beim Spannen doch kein Licht eindringen kann. Hierzu dient die Deckplatte C, welche von B so lange mitgenommen wird, bis die

Spalte den Strahlenkegel passirt hat, dann hakt sie sich aus und fällt in ihre Ruhelage zurück, wie dies aus der Vergleichung beider Figuren hervorgeht.

An Momentverschlüssen verschiedenster Art fehlt es übrigens nicht, es liesse sich hierüber eine ganze Literatur zusammenstellen, die aber die Grenzen dieses Artikels weit überschreiten müsste.

Bei der Anfertigung von Sonnenphotographien empfiehlt es sich nicht, direkt grosse Bilder zu machen. Regelrecht sollte man mit einem Objectiv gegebener Oeffnung niemals ein grösseres Bild machen wollen, als wie das Objectiv selbst gross ist. Wenn indessen die optischen Theile des Photoheliographen von besonderer Vollkommenheit sind, so kann man es wagen mit denselben ein 1·5 mal grösseres Sonnenbild zu machen, als die Grösse des Objektivs beträgt. Diese Grenze dürfte aber nie überschritten werden.

Der Momentverschluss soll bei der Aufnahme sehr rasch vor dem Strahlenkegel vorbeifliegen; es ist aber gut, wenn sich die Schnelligkeit reguliren lässt, da man bei minder durchsichtiger Luft immer etwas länger exponiren wird, als bei abnorm guter Luft, ebenso wird auch im Winter stets länger als im Hochsommer belichtet werden müssen.

Was die Platten betrifft, die zur Sonnenaufnahme verwendet werden, so thut man gut, äusserst klare, aber recht unempfindliche Platten zu wählen. Verfasser hat einige gute Resultate bei seinen Versuchen mit MONCKHOVEN-Platten, die besten aber mit SCHLEUSSNER-Platten, die jedoch von Dr. C. SCHLEUSSNER speciell zu diesem Zweck angefertigt worden sind, erreicht. Von diesen Platten ist ein Paket im OGyallaer Laboratorium geblieben, und noch nach 3 Jahren hat Verfassers erster Assistent, Dr. VON ANDERKO, mit diesen sehr gelungene Gruppenaufnahmen gemacht.

Ueber die Entwickelung der Sonnenbilder lässt sich keine bestimmte Regel aufstellen. Im Potsdamer Observatorium wird beinahe alles mit Eisen entwickelt, v. GOTHARD entwickelt ausschliesslich mit Pyrogallus, Verfasser und seine Schüler mit Hydrochinon oder Eikonogen. Alles ist gut, wenn es gut behandelt wird; reine Chemikalien, Reinheit im Laboratorium, reinste Behandlung der Flüssigkeiten ist die erste Regel. Ich würde allerdings heute jedermann zur Entwickelung der Sonnenphotographien die gemischte Glycin-Lösung empfehlen, weil diese sehr langsam arbeitet, und die schwarzen Parthien ungemein dunkel hervorbringt, was bei der Klarheit der Flecken und ihrer Halbschatten von grösster Wichtigkeit ist.

Ich gebrauche folgendes Recept zur Herstellung des genannten Glycin-Entwickelers:

Glycin	5 *gr*	
Pottasche . . .	25 „	
Natriumsulf. . .	25 „	(krystallisirt)
Wasser . . .	100 *cbcm*	(destillirtes).

Bei Gebrauch verdünne man diese Flüssigkeit je nach Umständen bis aufs dreifache.

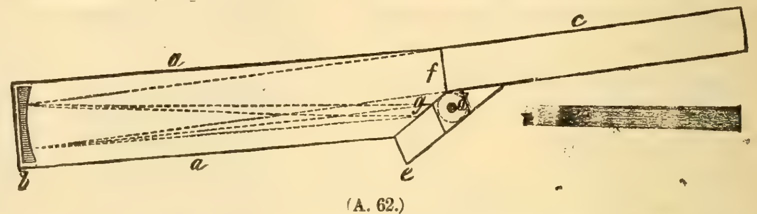
Man kann aber die Flüssigkeit auch getrennt herstellen, obwohl sie sich auch so wochenlang hält. Das Recept der getrennten Flüssigkeiten lautet:

Lösung I.	Glycin . . .	4 *gr*	Lösung II.	Pottasche .	10 *gr*
	Pottasche . .	1·5 „		Wasser . .	100 *cbcm*
	Natriumsulfit .	12 „			
	Wasser . .	100 *cbcm*			

Beim Gebrauche werden 1 Thl. von Lösung I. mit 2 Thln. von Lösung II. gemischt.

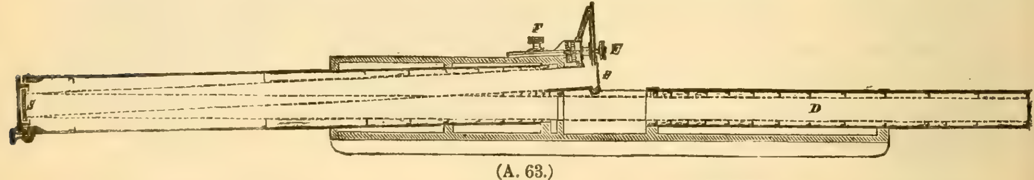
Wie oben schon bemerkt wurde, empfiehlt es sich nicht, grosse Sonnenbilder anzufertigen. Falls man bei einer Gelegenheit, wo alles zu Gunsten der Aufnahme zusammentrifft, ein äusserst scharfes Bild bekommt, was gewiss auch bei der sorgfältigsten Behandlung und unter Anwendung der allerbesten Gläser nicht jeden Tag erreicht werden wird, so kann man dann dieses Bild immer mit einem passenden Vergrösserungsapparat je nach Umständen vergrössern, oder daraus einzelne Parthieen vergrössern, wie wir solche Vergrösserungen oft bei Janssen finden.

c) Die Aufnahmen der Corona. Die Aufnahme der Corona ist in verschiedener Weise versucht worden, da es eine bekannte Thatsache ist, dass diese Operation bislang nur bei der Erscheinung einer totalen Sonnenfinsterniss gelungen ist. Auf der Sternwarte in Palermo und am Aetna hat man die Corona öfters bei ausserordentlich klarer Luft gesehen; es wurde eine runde Scheibe so lange im Visionsradius verschoben, bis die Sonnenscheibe verdeckt war, worauf dann die Corona manchmal dem Beobachter sichtbar wurde.



(A. 62.)

W. Huggins hat einen besonderen Apparat construirt, den er Coronograph nannte. Derselbe ist schematisch in Fig. 62 dargestellt. Der genannte Astrophysiker verwendete bei seinen Experimenten ein sechszölliges Spiegelteleskop, die Aufnahmen wurden direkt im Brennpunkt gemacht, und der Strahlengang im Apparat ist aus der Fig. 62 ersichtlich, während Fig. 63 den Durchschnitt des Instrumentes zeigt. *aa* (Fig. 62) ist das Teleskoprohr, *c* ein langes Blendrohr, *b* der parabolisirte Spiegel. Das Blendrohr scheint bei Huggins's Versuchen eine sehr wichtige Rolle zu spielen; *e* ist ein Schieber, in den eine längliche Cassette passt, um auf einer langen Platte hinter einander mehrere Aufnahmen machen zu können; durch das Loch *d* fallen die Sonnenstrahlen auf die Platte.



(A. 63.)

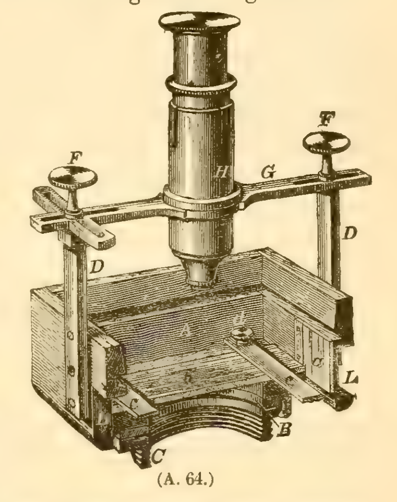
Das Rohr *D* (Fig. 63) besitzt eine Anzahl Diaphragmen, am unteren Ende befindet sich der Spiegel *S*, der ein Sonnenbild auf der Platte *p* entwirft, welch' letztere durch den Trieb *F* genau focussirt wird. Besonders ist darauf zu achten, dass die Platte kein falsches Licht erhalte, aus welchem Grunde die Röhre mit den Diaphragmen versehen sind.

Der Momentverschluss ist kreisförmig und konisch geschliffen, und wird durch den Knopf *E* aufgezogen. Der Verschluss legt einen Weg von 270° zurück, bevor die Exposition stattfindet, dadurch soll eine beträchtliche Geschwindigkeit erreicht werden. Von Wichtigkeit ist auch, dass der Verschluss ganz nahe an der Platte vorbeigleite.

Dr. Huggins soll es zu wiederholten Malen gelungen sein, die Corona zu photographiren. Verfasser hat bei Gelegenheit eines Besuches bei dem engli-

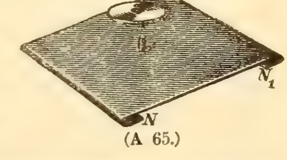
schen Gelehrten auch ein Negativ gesehen, welches den Eindruck der Corona machte. Auch Dr. LOHSE hat auf diesem Gebiete experimentirt und dem Verfasser vor Jahren einige Negative zur Ansicht geschickt, welche am Rande genau so ausgezackt waren, dass man ein Bild der Corona zu haben glauben möchte.

Nicht weniger als andere hat E. v. GOTHARD zu dieser Frage beigetragen, jedoch wandte er viel einfachere Mittel an. Er benutzte einen auf 6 Zoll abgeblendeten 10½ zölligen BROWNING'schen Spiegel und die in Fig. 64 abgebildete Camera. Diese wird mit dem Gewinde *CB* auf den Ocularauszug des Fernrohres geschraubt, und dann ebenso wie mit einer zu Sternaufnahmen dienenden Camera operirt. Auf die aus Mahagoniholz gefertigte Camera *A* sind aussen zwei Messingsäulen *DD* aufgesetzt, welche als Träger des Querstücks *G* dienen. Dies letztere trägt das Mikroskop *H*, welches mit den beiden Schrauben *FF* auf die Säulen *DD* aufgesetzt ist und sich nach jeder Richtung auf der Platte bewegen lässt. Bei *LL* befinden sich zwei Fensterchen, die durch Messingschieber geschlossen werden können. Im Innern der Camera endlich lassen sich verschiedenfarbige Glasplatten bei *b* einlegen, die durch die Messingstreifen *c* und die Schrauben *d* festgehalten werden.



(A. 64.)

Die Einstellung geschieht mit dem Mikroskop *H*, doch hüte man sich hierbei das gewöhnliche Verfahren mit einer »Visirscheibe« anzuwenden. Dasselbe wird nie zu einem richtigen Resultat führen, da man erstens niemals sicher ist, dass sich die Mattscheibe auf der Stelle der später einzusetzenden photographischen Platte befindet, und da zweitens die Struktur der feinsten Mattscheibe für die vorliegenden Zwecke viel zu grob ist. Am besten ist es, eine entwickelte und im Natron durchsichtig gemachte unexponirte Platte zu trocknen, diese in die Cassette einzulegen und dann das Mikroskop auf die Struktur der Gelatine zu focussiren. Die Cassette muss natürlich für diesen Zweck so gebaut sein, dass sich unter dem Mikroskop auf der Cassettenthür ein lichtdicht verschliessbares Fensterchen befindet. Wenn das Mikroskop focussirt ist, kann die Platte weggenommen und das Gestirn mit dem Trieb des Ocularauszugs für das Mikroskop scharf eingestellt werden. Dies ist eine wichtige Regel, die man bei anderen photographischen Aufnahmen auch gut anwenden kann.



(A 65.)

E. v. GOTHARD hat nun bei den Versuchen, die Corona photographisch zu fixiren, keine empfindlichen Platten, sondern ein empfindliches Chlorsilberpapier (JUST, SORTE A) benutzt. Er schob in seine Camera eine geschwärzte Blechplatte (Fig. 65) ein, die bei *N* und N_1 umgebogen und in deren Mitte eine Schraube eingelötet ist. Eine Anzahl kreisrunde, der Grösse der Sonnenscheibe entsprechende Scheiben *S* sind blank versilbert und lassen sich auf die Schraube der Platte aufschrauben. v. GOTHARD legt nun das Chlorsilberpapier auf die Platte, drückt es mit der Scheibe *S* nieder und biegt die Ränder in die Nuten *N*, N_1 ein, wodurch das Papier eben erhalten wird. Diese Einrichtung wird dann in die Cassette eingelegt. Vor der Cassette befindet sich ein Schieber, mit einer der Scheibe *S* genau gleich grossen Oeffnung, welche beim Einstellen

des Sonnenbildes auf die blanke Scheibe *S* vorgeschoben wird, damit das empfindliche Papier nicht vom Licht getroffen werde. Vor dem Belichten wird der Schieber weggezogen, und wenn der Momentverschluss in Thätigkeit gesetzt wird, so hält die Scheibe *S* das Sonnenlicht vom empfindlichen Papier ab, und die Umgebung der Sonne muss auf dasselbe einwirken. v. GOTHARD hat bei seinen zahlreichen Versuchen nach dieser Methode auch coronaähnliche Bilder bekommen, ob sie aber wirklich die Corona darstellen, weiss er selbst nicht bestimmt zu behaupten.

In neuester Zeit hat Mr. HALE in Chicago und insbesondere auf dem Aetna-Observatorium mit einem sinnreichen Apparate sehr schöne Resultate erhalten.

Der amerikanische Gelehrte schlug aber einen ganz anderen Weg als seine Vorgänger auf diesem Gebiet ein. Er bediente sich eines sehr grossen Gitterspectrographen von BRASHEAR mit einem ausgezeichneten ROWLAND-Gitter, und stellte die *k*-Linie des Sonnenspectrums auf seiner Platte ein, durch welche aber der Länge nach das ganze Sonnenbild aufgenommen wird. HALE bewegt dann mit hydraulischem Druck die ganze Spalte derart hin und her, dass sie öfters vor der Sonnenscheibe in voller Ausdehnung hin- und hergeht. Auf diese Weise erhält er die Fackeln, die Flecke, die Chromosphäre nebst der Umgebung auf seiner Platte photographirt. Diese Einrichtung des genialen Amerikaners ist als ein ungemein werthvoller Fortschritt zu bezeichnen; sie ist jedenfalls noch verbesserungsfähig, und wir dürfen sicherlich die weiteren Vervollkommnungen der Methode bald von HALE selbst erwarten.

Pater BRAUN, der frühere Direktor der Sternwarte in Kalocsa, schlug bereits einen in mancher Beziehung vielleicht ähnlichen Apparat vor (vergl. KONKOLY, Anleitung zur Himmelsphotographie, pag. 346—352, Fig. 211), der im Princip allerdings von dem HALE'schen ganz verschieden war. Er ist leider niemals zur Ausführung gekommen, darf aber, als höchst interessant, hier doch nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Was aber die Copien betrifft, so muss davor gewarnt werden, die Bilder auf Papier zu copiren, weil diese den Glasbildern oder Diapositiven meist nachstehen werden. Oft genug sieht man auf Ausstellungen Sonnenbilder-Diapositive, welche sicherlich nach geringwerthigeren Negativen angefertigt worden sind als die Papierbilder, welche aber bisher den letzteren gegenüber trotzdem immer den Sieg davongetragen haben.

2) Aufnahmen des Mondes.

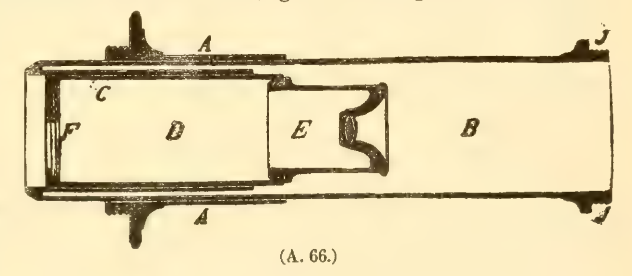
Ueber die Aufnahme des Mondes lässt sich eigentlich wenig sagen, der beste Rath für jeden, der sich mit diesem Thema beschäftigen will, ist »Uebung macht den Meister«. Verfasser bekam eines Tages vom Mechaniker JAN FRIČ aus Prag einige prachtvolle Mondaufnahmen, die er mit einem kleinen parallaktisch aufgestellten Spiegelteleskop erhalten hatte. Selbstverständlich waren es Vergrösserungen.

Mondphotographien pflegt man gewöhnlich nur im Brennpunkt eines Fernrohres anzufertigen, da das Licht, wenn es noch ein Vergrösserungssystem passirt hat, zu sehr geschwächt worden ist, als dass sich ein gut ausexponirtes Bild in weniger als mehreren Minuten erzielen liesse. Bei den Mondaufnahmen bieten natürlich Fernrohre mit grosser Brennweite und grossen Oeffnungen wesentliche Vorzüge. Ein direktes Brennbild am Lick-Refraktor z. B. hat einen Durchmesser von etwa 10 *cm*, und es übertreffen daher die Aufnahmen auf dem Mount Hamilton bis jetzt alle übrigen. In neuester Zeit hat übrigens auch

M. Löwy an seinem Aequatorial coudé von 65 *cm* Oeffnung, welches eine abnorm lange Brennweite besitzt, wunderschöne Mondphotographien erhalten. Es ist bei diesen Instrumenten zu bemerken, dass der Mount-Hamilton-Refractor eine photographische Correctionslinse besitzt, das Löwy'sche Aequatorial coudé ein grosses photographisches Objectiv, das mit demjenigen, welches für visuelle Strahlen angefertigt ist, einfach vertauscht werden kann.

Um gute Mondbilder zu erhalten, plage man sich nie mit gewöhnlichen Refractoren, die Ränder des Mondes erscheinen nie scharf und man erhält nur mangelhafte Resultate. So verschob ich z. B. bei verschiedenen derartigen Versuchen den Ocularauszug meines O'Gyallaer Refractors von 254 *mm* Oeffnung und 4·24 *m* Brennweite, dessen Objectiv ersten Ranges (von G. und S. Merz) ist, mit der Camera um 14 *mm* und erhielt stets gleiche Bilder, aber keins so brauchbar, dass es z. B. eine 6 fache Vergrösserung vertragen hätte. Anders ist es mit einem Spiegelteleskop, welches für diese Zwecke brauchbarer ist als ein achromatisirter Refractor. Indessen haben diese Instrumente wieder bei solchen Aufnahmen den Nachtheil, dass sie meistens eine ganz kurze Brennweite besitzen (1 : 6, 1 : 8, selten 1 : 10) und die direkten Bilder werden ausserordentlich klein. Es ist eigenthümlich, dass noch Niemand auf den Gedanken kam, ein Spiegelteleskop mit dem Brennweitenverhältniss 1 : 20—1 : 25 oder noch mehr, zu bauen, ein solches auf hohem Berge aufgestellt, würde die vorzüglichsten Mondaufnahmen liefern.

Beim Photographiren des Mondes muss man, ganz im Gegensatz zum Verfahren bei der Sonne, die allerempfindlichsten Platten anwenden, um sozusagen momentan exponiren zu können, da nicht zu übersehen ist, dass sich der Mond auch in Deklination so stark bewegt, dass die entstehende Ortsveränderung bei langer Exposition nicht vernachlässigt werden darf. Sodann wird durch möglichst kurze Exposition auch ein Fehler des Uhrwerks eliminirt.



(A. 66.)

E. v. Gothard macht wunderschöne Mondaufnahmen, indem er sie im Fernrohr gleich bis zu einer gewissen Grösse, z. B. 6 *cm*, vergrössert. Dazu benutzt er die in Fig. 66 dargestellte Einrichtung. Das Rohr *AA* wird mit seinem Schraubengewinde auf den Ocularauszug des Reflectors aufgesetzt und dann in dasselbe Rohr *B* eingeschoben, welches bei *JJ* die Camera trägt. Am linken Ende des Rohres *B* befindet sich das Rohr *C*, in welches sich wieder das Rohr *D* verschieben lässt. Das letztere ist an beiden Enden mit einem Schraubengewinde versehen, in welches bei *F* eine Barlow-Linse, oder nach Bedarf bei *E* ein Vergrösserungssystem eingeschraubt werden kann.

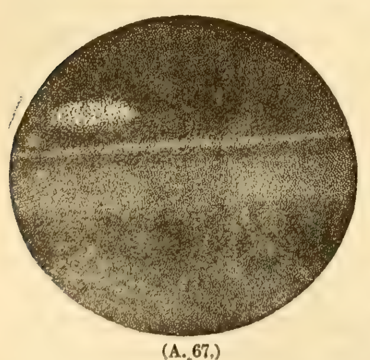
Mancher könnte aber in die Lage kommen, ein Spiegelteleskop von kurzer Brennweite und eine für chemische Strahlen durchaus nicht achromatisirte Barlow-Linse beim Mondphotographiren verwenden zu müssen. Dann ist es rathsam, in folgender Weise zu verfahren. Nachdem man die relative Stellung der Barlow-Linse und des Rohres für eine bestimmte Bildgrösse durch eingeritzte Zeichen festgelegt hat, wird der Mond am besten in oder nahezu in der Quadratur mit dem Mikroskop in der Camera (Fig. 64) scharf eingestellt, alsdann eine mit einer 3 *mm* weiten Spalte versehene Verschlussplatte vorgelegt,

so dass nur ein schmaler Streifen des Mondes auf der Visirscheibe erscheint. Nun belichtet man eine empfindliche Platte eine gewisse Zeit lang, verschiebt dann die Spalte um eine bestimmte, an der Montirung des Verschlusses durch eine Theilung controllirbare Grösse, verstellt den Ocularauszug um 0·5 *mm* und belichtet aufs neue. Mit dieser Manipulation fährt man so lange fort, bis das ganze Mondbild im Streifen erscheint. Nach der Entwickelung wählt man den allerschärfsten Streifen aus und macht dann die Aufnahmen bei der entsprechenden Stellung des Ocularauszuges, weil diese den richtigen chemischen Brennpunkt der Barlow-Linse giebt. Man darf aber dabei nicht übersehen, dass diese Verschiebung nicht in der Richtung der täglichen Bewegung, sondern senkrecht zu derselben erfolgen muss, damit man bei jeder Spaltschieberstellung den scharfen und ausgezackten Mondrand auf die Platte bekommt.

Die Entwickelung einer Mondphotographie kann schon mit einem energischen Entwickler geschehen, damit die Platte nicht durch das lange Einweichen in der Flüssigkeit gelb oder grün werde, was bei manchen im Handel vorkommenden, besonders gemischten Flüssigkeiten leicht eintreten kann. Es kann überhaupt nicht dringend und warm genug vor diesen käuflichen Entwicklern gewarnt werden; oft genug sind sie mit der grössten Gewissenlosigkeit hergestellt, werden dann unter den bizarrsten Namen in einer gefärbten oder ganz mit Papier umklebten Flasche verkauft, so dass der Käufer nicht im Stande ist, den schon längst zersetzten Inhalt zu erkennen, was in der Dunkelkammer in der Regel ebenso schwer ist. Erst der Misserfolg, der dann wohl meistens dem Käufer zur Last gelegt wird, giebt die Lehre. Man fertige alle Flüssigkeiten selbst an, nehme nur chemisch reine Präparate von den zuverlässigsten Geschäftshäusern.

3) Aufnahmen der Planeten, Kometen und Sternschnuppen.

a) Planeten. Die Resultate, welche die Photographie auf diesem Gebiete lieferte, sind recht bescheidener Natur. Die Hauptschwierigkeit, Planetenoberflächen so zu photographiren, dass gute Details sichtbar sind und die Aufnahmen für wissenschaftliche Forschungen verwerthet werden können, liegt in der Kleinheit der Planetendurchmesser. Damit ist also gesagt, dass die Planeten im Brennpunkt des Objektivs photographirt werden müssen und zwar bei möglichst kurzer Belichtungsdauer. Das Brennbild des Jupiter beträgt aber im Potsdamer Refractor, der etwa 17 Fuss Brennweite hat, rund 1 *mm*. Dieses Pünktchen müsste nun wenigstens 30 Mal vergrössert werden, um ein ähnliches Bild zu erhalten, wie die Zeichnungen in den Publikationen der Potsdamer und O'Gyallaer astrophysikalischen Observatorien die Jupiteroberfläche darstellen.

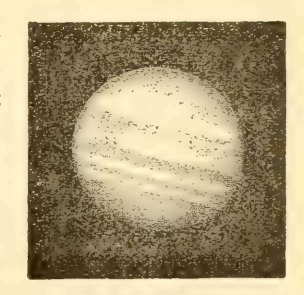

(A. 67.)

Bei dem nur 1 *mm* grossen Scheibchen kann man einen Trabanten, der sich gerade vor der Scheibe befindet, vom Silberkorn nicht mehr unterscheiden. Man muss mit ungemein dünnen Flüssigkeiten arbeiten und viele Verzögerungsmittel hinzuthun, um die Struktur zu verfeinern, jedoch wird damit noch bei weitem nicht das erreicht, was zur Sichtbarmachung des Details erwünscht ist.

O. Lohse war der erste, dem es gelang, das Millimeter grosse Jupiterbild 45 mal zu vergrössern, was bei unseren Hilfsmitteln als ein grosser Fortschritt angesehen werden kann. Fig. 67 zeigt eine Reproduction dieser Aufnahme vom 5. Aug. 1880 14^h. Man erkennt deutlich den rothen Fleck der südlichen Hemisphäre, der zu Folge seiner Farbe die geringste photographische Wirkung auf die Platte ausübt und daher die klarste Stelle im Negativ giebt. Ebenso tritt der Aequatorealgürtel, sowie die den Planeten charakterisirende Lichtabnahme gegen den Rand auf der Photographie deutlich hervor, was besonders bei unterexponirten Platten auffallend ist.

Lohse schlägt vor, die Planeten gleich von vornherein grösser zu photographiren, was entweder mit sehr grossen Fernröhren oder mit einem Vergrösserungssystem geschehen müsste. In der That hat man mit dem grossen Lick-Refractor solche Versuche an dem Jupiter gemacht, die wohl einen grossen Fortschritt gegenüber den Potsdamer Aufnahmen dokumentiren, die aber doch noch ungeheuer weit von den Erfolgen entfernt sind, die die Photographie auf anderen Gebieten der Astronomie gezeitigt hat. Der zweite Vorschlag Lohse's, die Platten gleich in der Camera zu vergrössern, liesse sich bei der Venus und dem Jupiter ihres hellen Lichtes wegen schon mit unseren jetzigen Platten durchführen, wenn nicht das Uhrwerk grosse Schwierigkeiten bereitete; selbst die fast minimalen, aber doch vorhandenen Schwankungen genügen, um das Bild bei 10 bis 20 *sec* langer Exposition unscharf zu machen. Wir werden hier noch warten müssen, bis man solche Platten hergestellt hat, die es ermöglichen, den Jupiter oder Mars in der Camera 40 bis 50 Mal vergrössert in 0^s5 zu photographiren.

Mr. Common in Ealing hat auch Versuche gemacht, an seinem dreifüssigen Spiegelteleskope den Saturn zu photographiren, indessen ist es einstweilen bei Versuchen geblieben. Aehnliches gilt von den Arbeiten v. Gothard's, der eigentlich als der erste den Lohse'schen Vorschlag aufgriff. Er gebrauchte etwa $2\frac{1}{2}$ fache Vergrösserung und benutzte das für chemische Strahlen achromatisirte monocentrische Ocular und des Verfassers Photoheliographen von Steinheil. Die Bildweite war so gewählt, wie sie am vortheilhaftesten zu sein scheint, dann wurde der Ocularauszug so lange verändert, bis der Planet im Einstellungsmikroskop völlig scharf erschien. Bei diesen Versuchen kommt es auf einen ausserordentlich günstigen Luftzustand an. Auf den Gothard'schen Photographien sind nun die Streifen auf dem Jupiter, sowie auch der Saturnsring recht gut zu unterscheiden, trotzdem kann man sie nur als Versuche ansehen, welche wie alle übrigen die Concurrenz mit einer guten Jupiterzeichnung nicht aushalten können.

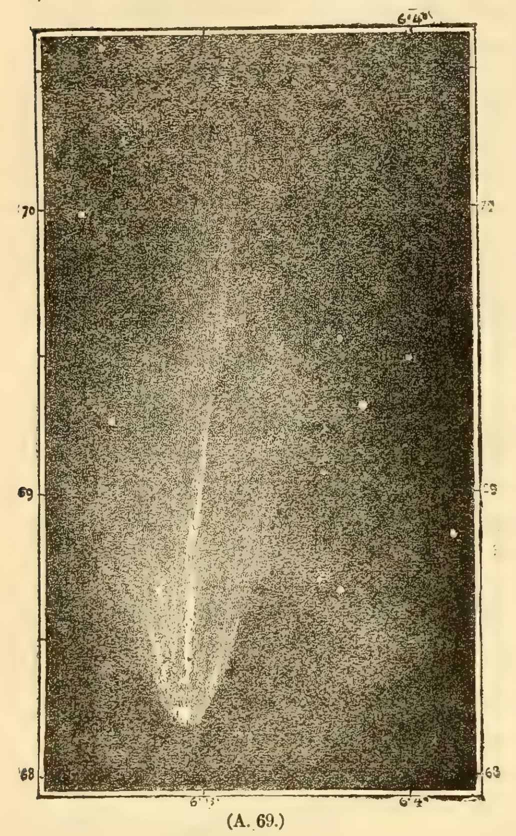


(A. 68.)

Einen erheblichen Fortschritt hat man aber neuerdings auf der Lick-Sternwarte erzielt, indem der Jupiter auch hier gleich im Fernrohr vergrössert photographirt worden ist. Bei dieser schönen Aufnahme (Fig. 68), von welcher Verfasser zwei prachtvolle Diapositive besitzt, ist, wenn man sie mit den Potsdamer Aufnahmen vergleicht, nicht zu übersehen, dass Holden mit einem Fernrohr arbeitete, welches nicht nur dem Potsdamer Refractor, der Lohse bei seinen Versuchen zur Verfügung stand, sondern allen anderen bis jetzt noch in Gebrauch befindlichen Fernröhren der Welt weit überlegen ist. Wenn man nun noch die durchsichtige Luft und den klaren Himmel des Mt. Hamilton berücksichtigt, so darf

man sich der Hoffnung hingeben, dass dort in kurzer Zeit noch viel schönere Jupiteraufnahmen werden gemacht werden, welche auch die zartesten Details der Planetenoberfläche darzustellen im Stande sind.

b) Kometen. Bei den Kometenaufnahmen ist man in den meisten Fällen da, wo man beim Mond war, als man nur noch die alten unempfindlichen Platten hatte. Man musste lange belichten, das Uhrwerk genügte nicht, und ausserdem veränderte unser Trabant seine Stellung in Deklination. Ein Komet muss auch lange exponirt werden, und wenn man jetzt auch Uhrwerke besitzt, die mit den GRUBB'schen oder amerikanischen Controlapparaten stundenlang halten, so kommt doch in den meisten Fällen noch in Betracht, dass auch die Kometen ihren Ort stark in Deklination verändern. Die einfachste, wenn auch nicht die angenehmste Methode, bleibt, mit dem Pointer den Kopf des Kometen einzustellen und festzuhalten, und auf diese Weise stundenlang zu belichten.

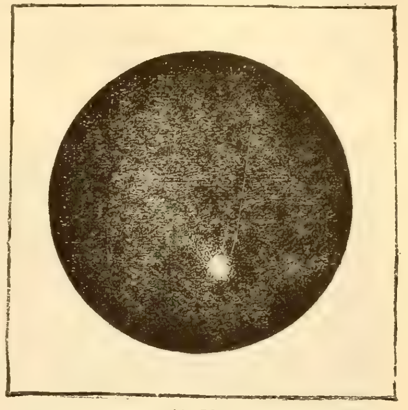


(A. 69.)

Die erste gelungene Kometenaufnahme verdanken wir JANSSEN, der den Junikometen des Jahres 1881 in einer halben Stunde auf Bromsilberplatten photographirte. Fig. 69 zeigt eine Reproduction dieser Photographie, deren Negative Verfasser bei seiner damaligen Anwesenheit in Paris sah; sie zeigten sehr viele Details, trotzdem, dass der Kopf, wie es auch in der Reproduction hervortritt, viel zu viel überlichtet ist. D. GILL hat dann auf der Cap-Sternwarte den Septemberkometen mit einer $2\frac{1}{2}$zölligen Portraitlinse und 11zölliger Brennweite photographirt. Dabei hatte er den photographischen Apparat auf die Deklinationsaxe hinter dem Gegengewichte des Fernrohrs aufgesetzt, und hiermit den Vortheil erreicht, dass er mit dem grossen Refractor den Kopf des Kometen verfolgen konnte. Er belichtete zwischen 30 und 140 Minuten. Auch E. v. GOTHARD in Herény hat eine grössere Anzahl Kometen photographirt, anfänglich mit seinem $10\frac{1}{2}$ zölligen Spiegelteleskop, später ebenfalls mit kleineren photographischen Objektiven, welche manchmal zu dreien an seinem Spiegelteleskop aufgehängt waren. Er benutzte bei dieser Gelegenheit den Reflector zum Photographiren des Spectrums des Kometen, da er als Pointer einen ausgezeichneten $4\frac{1}{2}$zölligen Refractor von MERZ neben seinem Spiegelteleskope angebracht hatte, welcher reichlich eine 350 bis 400malige Vergrösserung verträgt.

In Fig. 70 ist der Komet Barnard des Jahres 1886 wiedergegeben, wie er von GOTHARD in 60 Minuten Belichtungszeit aufgenommen wurde. Man bemerkt rechts vom Schweife einen dicken hellen Strich, der dann später in einem dünnen Faden endigt. Dies sind die dicht neben dem Kometen photographirten

Bilder von π Bootis. Als die Platte anfänglich dem Kometenlicht ausgesetzt wurde, stand der Stern dicht neben dem Kopf. Nun musste aber der Komet permanent auf demselben Fleck der empfindlichen Platte gehalten werden, was GOTHARD mit den beiden Feinbewegungen unter beständiger Beobachtung am Ocular des Suchers durch Einstellung auf das Fadenkreuz des letzteren erreichte. Der feine Faden, welchen der Stern auf der Platte zurücklästt, ist die Richtung der täglichen Bewegung, und ist durch π Bootis dargestellt; der Winkel, welchen die Bildreihe von π Bootis mit dem Kometen macht, giebt die Richtung seiner Eigenbewegung.



(A. 70.)

Mit unseren jetzigen Hilfsmitteln kann man eigentlich nur helle Kometen photographiren, besonders, wenn es sich darum handelt, Oberflächendetails oder irgendwie die Struktur zu erkennen. Will man jedoch nur Aufnahmen haben, um durch Ausmessung zu einer Kometenposition zu gelangen, so kann man auch mit unseren empfindlichen Bromsilberplatten in kürzerer Zeit weniger helle Kometen photographiren, ist es doch M. WOLF in Heidelberg bereits gelungen, auf photographischem Wege einen Kometen zu entdecken.

Uebrigens darf nicht übersehen werden, dass das Kometenlicht ungemein viele chemisch wirkende Strahlen besitzt, denn wenn das nicht der Fall wäre, so würde man in der That die schwachen Kometen nur mit den kräftigsten Fernrohren der Welt aufnehmen können.

Der Anfänger könnte glauben, dass man nur ein sehr lichtstarkes Objectiv beliebig lange zu exponiren brauchte, um alles mögliche, was nur ein Object zeigt, auf der Platte zu erhalten. Er wäre aber dann in grossem Irrthum. Man kann nämlich mit einem Objectiv von sehr kurzer Brennweite, also einem überaus kurzen Objectiv, auch nur bis zu einer gewissen Grenze in der Zeit exponiren, da der Himmelsgrund selbst einen Schleier auf der Platte macht.

c) Sternschnuppen. Die photographische Aufnahme von Sternschnuppen ist schon von vielen versucht worden, jedoch ohne nennenswerthen Erfolg. Der Grund liegt darin, dass die allermeisten Sternschnuppen (nach des Verfassers Erfahrungen $96\frac{0}{0}$) gelblich oder gelb gefärbt sind, also Strahlen aussenden, für welche die gewöhnlichen photographischen Platten unempfindlich sind. Wenn man aber zu diesem Zweck orthochromatische Platten nehmen wollte, so würde man damit auch zu keinem besseren Resultat kommen, da diese ja den gewöhnlichen Platten an Empfindlichkeit weit nachstehen. Die Dauer einer Sternschnuppe ist selten länger als eine Secunde, in den allermeisten Fällen bleibt sie unter einer Secunde. Es können also nur Sternschnuppen von grosser Helligkeit eine brauchbare Spur auf der Platte zurücklassen, welche aber auch nur dann zur Ausmessung des Anfangs- und Endpunktes ihrer Bahn verwendet werden können, wenn die Zeit des Aufleuchtens genau gegeben ist und auch die benachbarten Sterne auf der Platte klar erkennbar sind.

Die Versuche, gewöhnliche photographische Cameras gegen den Radiationspunkt zu stellen, halte ich deswegen für unbrauchbar, weil die Sterne auf der Platte einen Bogen beschreiben. Man kann nun wohl die Zeit, resp. die Rectascensionen in der Art fixiren, dass man den Objectivdeckel jede halbe Stunde

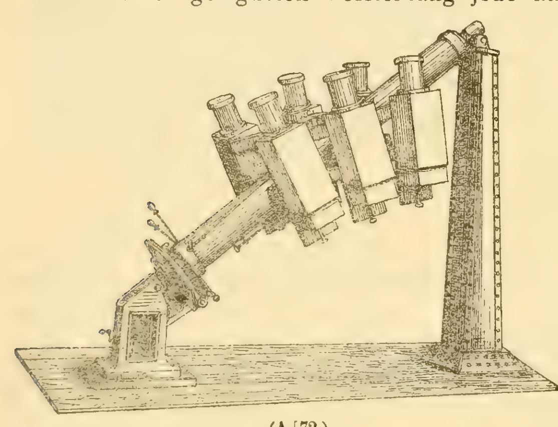
1 bis 2 Minuten schliesst, wodurch die Sterneindrücke auf der Platte ausbleiben; damit können aber gerade auch in dieser Zeit die interessantesten Phänomene verloren gehen.

In Fig. 71 ist eine photographische Aufnahme E. v. GOTHARD's mit seinem $10\frac{1}{2}$zölligen Reflector reproducirt. Zwischen einer Sterngruppe ist leicht eine Sternschnuppe zu erkennen, die GOTHARD unbewusst photographirte. Anfangs, als er am nächsten Tage die Platte entwickelte und das eigenartige Object sah, hielt er es für einen Kometen. Vergeblich suchte man in Folge der Benachrichtigung in Wien und O'Gyalla die Gegend des Himmels ab, kein Komet war zu sehen. Als GOTHARD dann einmal die verdächtige Platte dem Verfasser zeigte, dachte er sofort daran, in der Spur eine Sternschnuppe zu erkennen.



(A. 71.)

Verfasser möchte den Vorschlag machen, eine Camera auf ein parallactisch montirtes Fernrohr aufzusetzen, diese gegen den bekannten Radiationspunkt richten, wo man am ehesten hoffen kann, einige stationäre Meteore, oder solche mit recht kurzen Bahnen abzubilden, deren Positionen man dann nach den Gestirnen leicht ausmessen könnte. Noch besser wäre es, auf eine parallactisch montirte lange Axe, welche mit einem guten Uhrwerk getrieben wird, viele Cameras mit verschiedenen, aber bekannten Deklinationen aufzusetzen und mit einer geeigneten Vorrichtung jede halbe oder Viertelstunde das Uhrwerk genau eine Minute anzuhalten und dabei die Zeit genau zu notiren. Man müsste dann zwei identische Aufnahmen von jeder Gegend machen, wodurch sich sofort herausstellen würde, wo sich eine Sternschnuppe befindet. Wenn dieselbe hell gewesen ist, so könnte man sie schon durch Uebereinanderlegen der Platten erkennen.



(A. 72.)

Während des Schreibens dieser Zeilen kam mir die Abbildung und Beschreibung eines solchen Apparats, wie er für die Sternwarte in New Haven in Nord-Amerika angefertigt wurde, zur Hand; Fig. 72 giebt den Apparat wieder. Auf einer langen Polaraxe, die durch ein Uhrwerk am unteren Ende getrieben wird, sitzt eine beliebige Anzahl (an diesem Apparat 6) Cameras, welche nach jeder Himmelsgegend verstellt werden können, um mit den vor ihnen befindlichen Porträtobjectiven von kurzer Brennweite den Himmel zu photographiren. Uebrigens sind Erfolge bisher noch nicht mit dem Apparat erzielt worden.

4) Das Photographiren des Fixsternhimmels.

a) Mit grossen Refractoren oder Spiegelteleskopen. Es würde uns viel zu weit führen, wenn wir von Anfang an bis jetzt alles Geschichtliche be-

schreiben, alles besprechen und discutiren wollten, was auf dem Gebiete der Himmelsphotographie, bei der Daguerreotypie beginnend, bis zum Bromsilbergelatineemulsionsverfahren geschehen ist. Nur dürfen wir nicht vergessen, ehe wir in das Studium dieses Gebietes der Himmelsphotographie tiefer eindringen, der wahren Begründer der Photographie der Fixsternwelt, der Herren PROSPER und PAUL HENRY in Paris bewundernd zu gedenken.

Die Aufnahme des Fixsternhimmels war mit so geradezu unüberwindlich scheinenden Schwierigkeiten verbunden, dass es nur durch die Einführung des Bromsilberemulsionsprocesses ermöglicht wurde, dieselben doch zu besiegen. Man bedenke, wie lange die Platte im Brennpunkt einer Linse von 3 *m* Brennweite exponirt werden muss, wenn man einen Theil des Himmels, z. B. die Milchstrasse, photographiren und dabei noch Sterne etwa der 15. Grössenklasse erhalten will. Es handelt sich da nicht um Secunden, wie bei Portraitaufnahmen im Atelier, auch nicht um Minuten, sondern um viele Stunden. So hat z. B. M. WOLF in Heidelberg Sterne länger exponirt, als sie überhaupt über dem Horizont sichtbar sind. Das klingt freilich paradox, ist aber doch thatsächlich so, indem er einen und denselben Stern allerdings nie länger als drei Stunden vor und nach dem Meridian pointirte, diese Arbeit aber 2—3, ja 4 Nächte nach einander wiederholte; in der Weise erhielt er Expositionszeiten, die erheblich länger waren als die Zeit, während der sich das Gestirn in einer Nacht über dem Horizont befand. Es bedarf keiner besonderen Bemerkung, welche Geduld, Ausdauer und Hingabe an den grossen Zweck der astronomische Photograph besitzen muss.

Dass zum Photographiren des Fixsternhimmels ein für chemische Strahlen corrigirtes Objectiv nöthig ist, ist selbstverständlich. Ich möchte hier aber eine Bemerkung einschalten, die vielleicht für die Zukunft nutzbringend werden könnte. Es ist bekannt, dass, wenn heutigen Tages grössere Objective bestellt werden, in den meisten Fällen entweder ein zweites Objectiv (d. h. eine zweite CROWN-Linse) dazu bestellt wird, um das Objectiv in ein photographisches umzuwandeln, oder es wird ein Correctionssystem beigegeben, welches das Objectiv für photographische Strahlen corrigirt. Ich würde die Sache nun anders auffassen, nämlich ein möglichst grosses photographisches Objectiv und dazu ein Correctionssystem für visuelle Strahlen anfertigen lassen. Durch Rechnung lässt sich die Richtigkeit nachweisen und zugleich zeigen, dass das Correctionssystem sich dann viel einfacher gestaltet, als wenn es visuelle Strahlen für die Photographie corrigiren soll. Das Correctionssystem des Wiener 27 Zöllers soll angeblich völlig unbrauchbar sein[1]).

Viel geeigneter für photographische Zwecke wären die Spiegelteleskope, wenn sie von manchen anderen Fehlerquellen frei wären. Dass sie in photographischer Beziehung Refractoren gleicher Oeffnung überlegen sind, kann einfach bewiesen werden, wenn man die Arbeiten des Herrn v. GOTHARD betrachtet, die er mit einem Spiegelteleskop von recht bescheidener Dimension ausgeführt hat. Aber, wie schon erwähnt, haben sie den Refractoren gegenüber manche Fehler und Nachtheile. Sie haben zunächst ein viel geringeres Gesichtsfeld als letztere; sodann macht sich der auch bei Refractoren schwer wiegende Fehler, der von einer zu festen Fassung des Objectivs herrührt, doch hier bei weitem nicht in so hohem Grade geltend als bei den Spiegelteleskopen; ferner übt der Tem-

---

[1]) Das soll allerdings in besonderen, hier nicht näher zu erörternden Verhältnissen seinen Grund haben.

peraturwechsel auf einen Spiegel eine geradezu fabelhafte Wirkung aus. Endlich ist aber noch ein sehr misslicher Umstand anzuführen, die Montirung der Spiegelteleskope. Lange Zeit liess man sich von der sicher ganz falschen Ansicht leiten, dass, wenn ein Spiegel nur den vierten Theil eines Objectivs kostete, es ein Luxus wäre, demselben eine ebenso feine Montirung zu geben, als dem so viel werthvolleren Objectiv. So sind die Spiegel in hohem Grade discreditirt worden. Sieht man z. B. die alten FOUCAULT'schen Spiegelteleskope, unter denen es gewiss prachtvolle Exemplare giebt, so wird man sich kaum eines Lächelns mit Bezug auf die Montirung erwehren. Das wurde auch nicht viel besser bei den englischen Instrumenten, die man als rohe Schlosserarbeit bezeichnen könnte. JOHN BROWNING war der erste, der seinen Spiegeln eine, wenn auch nicht vollkommene, so doch gut gearbeitete Montirung gab, und Sir HOWARD GRUBB wusste die Güte der Spiegel richtig zu würdigen und montirte sie eben so gut als seine Refractoren. Danach haben dann aber auch dieselben in den Händen eines HUGGINS, ROBERTS und ESPIN freilich ganz andere Resultate gegeben, als sie von einer FOUCAULT'schen Montirung zu erwarten waren.

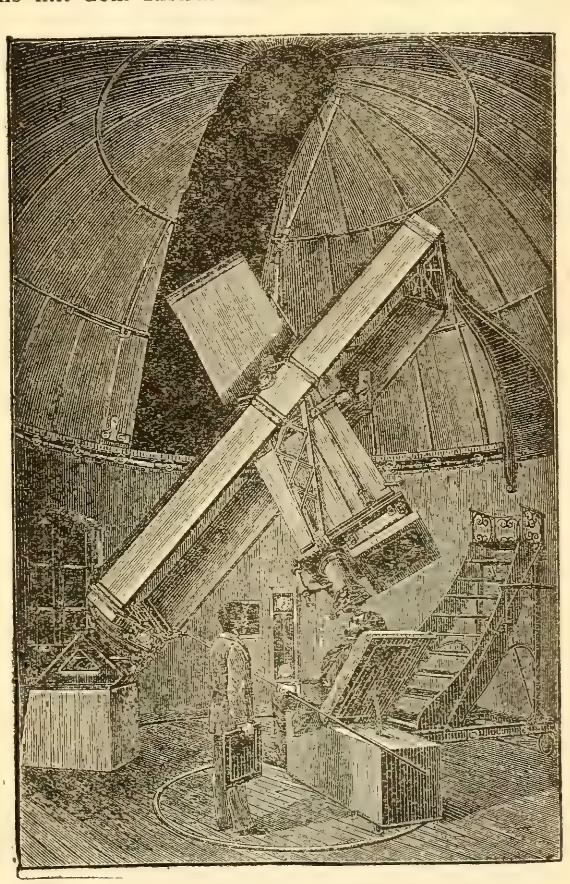
Bei der Himmelsphotographie ist die kurze Brennweite der Spiegelteleskope wegen ihrer grossen Lichtstärke von hohem Vortheil; es ist durchaus nicht schwer, einen Spiegel mit dem Verhältniss 1:5, ja auch $1:4\frac{1}{2}$ zu schleifen, was bei einem astronomischen Doppelobjectiv von bescheidenen Dimensionen, von z. B. 160 *mm* Oeffnung, ganz unmöglich wäre. PICKERING besitzt heute ein photographisches Objectiv von 24 engl. Zoll Oeffnung und 120 Zoll Brennweite, also im Verhältniss 1:5; dasselbe ist aber allerdings kein astronomisches Doppelobjectiv, sondern ein Aplanat im strengen Sinn, also ein vierfaches, symmetrisches, photographisches Objectiv. Dabei mag erwähnt werden, dass dieser amerikanische Gelehrte zu diesem Objectiv noch ein Objectivprisma von derselben Oeffnung besitzt; das ist heute das grösste Objectivprisma der Welt, wogegen vor Jahresfrist noch das O'Gyallaer mit 10 Zoll Durchmesser das grösste war.

Es wäre von allergrösster Bedeutung, wenn mechanische Künstler dahin strebten, die Spiegelfassung und das Problem vollkommener Ventilation im Rohr zu lösen, damit wäre den Astronomen ein Instrument geliefert, welches in jeder Beziehung als das Ideal eines Astrophotographen bezeichnet werden müsste. Ich erinnere hier an die compensirte Objectivfassung des Dr. RUD. v. STEINHEIL, dessen Anwendung nirgends besser am Platze wäre als in der Zelle eines Teleskopspiegels. (S. Zeitschr. für Instrumentenkunde 1894, No. 5, pag. 170).

Wenn ein Fernrohr ausschliesslich für die Himmelsphotographie angefertigt wird, so nimmt es in mancher Hinsicht eine andere Gestalt an, als ein gewöhnliches astronomisches Fernrohr. Es giebt kein Uhrwerk, welches im Stande wäre, das Fernrohr 4—5 Stunden lang auf demselben Punkt des Himmels gerichtet zu erhalten, und sollte es wirklich existiren, so wäre damit auch wenig geholfen, weil man doch in die Lage kommt, mit dem Instrument ein Object mit grosser Eigenbewegung (Kometen) zu photographiren, und dem Beobachter dann nichts übrig bleibt, als mit dem Sucher auf einen bestimmten Theil, also beim Kometen, auf den Kopf zu pointiren. Man wird bei einer solchen Aufnahme auf den ersten Blick sehen, dass der Komet schon dargestellt ist, dass jedoch die nebenstehenden Sterne auf der Platte eine Zickzacklinie beschreiben, besonders, wenn der Komet das Aequatorealcoordinatensystem diagonal durchläuft. Wenn aber bei dem besten Uhrwerk ohne Pointiren photographirt wird, so müssen die Sterne, wenn auch noch so wenig, doch länglich werden, und dies rührt vom oscillatorischen Gange des Triebwerks her. Wenn

das Fernrohr also der Himmelsphotographie dienen soll, ist es unumgänglich nöthig, einen grossen Sucher damit zu verbinden, und weil eben dieser Sucher weniger zum Suchen oder genäherten Einstellen, als vielmehr zum scharfen Pointiren bestimmt ist, so wird er im allgemeinen auch als »Pointer« bezeichnet, und wir werden uns im Folgenden ausschliesslich dieses Ausdrucks bedienen.

Da es hier nicht unsere Aufgabe ist, Refractormontirungen kennen zu lernen und zu besprechen, so sollen nur zwei typische Formen, welche für die Himmelsphotographie immer als Muster gelten werden, hier näher angeführt werden. In erster Reihe müssen wir uns mit dem Instrument der Brüder HENRY in Paris beschäftigen, welches schon wiederholt nachgeahmt worden ist, und sodann den Potsdamer Photorefractor besprechen.



(A. 73.)

Die Fig. 73 stellt das Fernrohr der Brüder HENRY in Paris dar, wie es in der Kuppel des »Observatoire du Jardin« aufgestellt ist. Es repräsentirt den Typus der alten englischen Montirung, wo die enorm lange Polaraxe auf zwei Pfeilern ruht. Diese ist aus verripptem, 2 *mm* dickem Blech hergestellt, und zwar in Form zweier Kästen mit dem Querschnitt eines abgestumpften Dreiecks. Die beiden Kästen sind oben und unten mit Gussstücken verbunden, in welche die Zapfen der Axe befestigt sind. Das Fernrohr selbst besteht aus einem viereckigen Blechkasten[1], welcher der Länge nach in zwei Theile getheilt ist. Die rechte Seite des Kastens in der Figur ist das photographische Fernrohr, die linke Seite der Pointer. Das photographische Objectiv, welches die beiden genialen Brüder selbst geschliffen haben, hat einen Durchmesser von 340 *mm*, wogegen der Pointer, der aus dem FOUCAULT'schen Objectiv des Observatoire du Jardin genommen, aber gründlich umgearbeitet wurde, eine freie Oeffnung von 240 *mm* hat.

Der Vortheil, den diese Montirungsweise gewährt, besteht unter anderem darin, dass, wenn man östlich vom Meridian mit Photographiren anfängt, das Fernrohr nicht umgelegt zu werden braucht, wenn man über den Meridian hinüberkommt; das Instrument kann dem Gestirn vielmehr bei jeder Deklination vom Aufgange bis zum Untergange folgen. Ferner soll das Instrument ausserordentlich stabil sein, besonders wenn das obere Lager der Polaraxe auf einem

isolirten Pfeiler und nicht an der Kuppelwand befestigt ist, wie dies leider bei den meisten Instrumenten ähnlicher Construction der Fall ist. Endlich braucht das Instrument nur in einer Richtung ausbalancirt zu werden, weil das Fernrohr centrisch mit der Polaraxe aufgehängt ist.

Als Nachtheile liessen sich bezeichnen, dass man wegen der langen Polaraxe doch wohl Bedenken haben könnte, ob sie sich nicht ungleichmässig durchbiegt und zwar während der Aufnahme selbst. Ferner lässt sich der Pol mit diesem Instrument, wenn nämlich das Fernrohr centrisch in der Polaraxe aufgehängt ist, nicht erreichen; ist es aber nicht centrisch, so muss es balancirt werden, so dass einer der oben erwähnten Vortheile fortfällt. Circumpolar könnte man überhaupt nicht mit ihm photographiren, weil der Nordpfeiler die Aussicht in der unteren Culmination verdeckt (dies ist allerdings ein Nachtheil von untergeordneter Bedeutung). (Vergl. a. u. Aequatoreal.)

Die Cassette, welche diesem Instrumente beigegeben ist, nimmt Platten von der Grösse 13×18 auf, die sich noch wegen ausserordentlicher Schärfe der Bilder viermal vergrössern lassen.

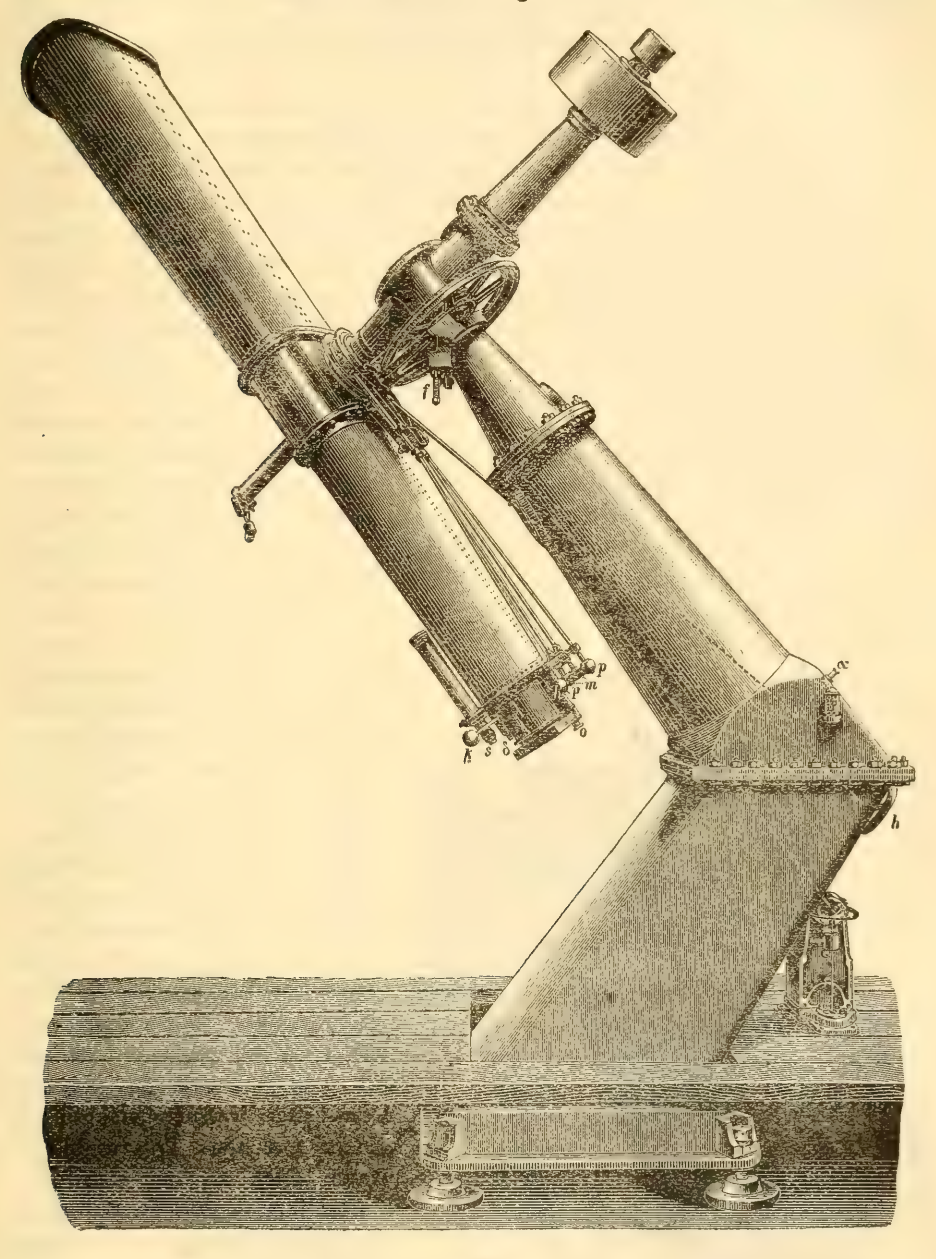
Der zweite Typus ist der des Potsdamer photographischen Refractors und kann als das Ideal einer solchen Montirung angesehen werden. Es stammt aus den Werkstätten der Gebrüder Repsold in Hamburg, ist äusserst elegant wie alles, was von diesen beiden Künstlern kommt, und dabei äusserst solid, was man beim ersten Blick kaum denken würde. Die Form ist ungewöhnlich, und als Verfasser durch die Freundlichkeit des Herrn H. Repsold die Photographie dieses Fernrohrs zu Gesicht bekam, hätte er fast lachen müssen, so eigenthümlich wirkte die merkwürdige Gestaltung; später freilich gewann er um so grössere Sympathie für dieselbe, und diese stieg jedesmal, wenn er das vollendete Instrument sah, der Art, dass er einzig und allein den Potsdamer Photorefractor copiren würde, wenn er nochmals in die Lage käme, sich ein grösseres Fernrohr für photographische Zwecke bauen zu lassen.

Die Aufstellung ist von derjenigen eines gewöhnlichen Refractors völlig verschieden, wie dies die Fig. 74 auf den ersten Blick erkennen lässt, indem die gerade senkrechte Säule eines gewöhnlichen Refractors durch einen kurzen Säulenschaft in der Richtung der Polaraxe ersetzt ist, welcher sich an einem massiven Untersatz von viereckigem Querschnitt anschliesst. Dieser Untersatz ist nach unten schräg gegen Norden vorgezogen, so dass die Horizontalprojection des Schwerpunkts des ganzen Instruments innerhalb der vier Füsse fällt, mit welchen es auf der Schlussplatte des Steinpfeilers ruht. Zwei dieser Füsse bilden Halbkugeln, welche in Fussplatten mit entsprechenden Höhlungen ruhen, die anderen beiden Fusspunkte sind senkrechte Schrauben, durch welche sowohl die Correction in Polhöhe als auch die Ausgleichung des Druckes auf die zwei letzten Fussplatten mit ebener Oberfläche bewirkt wird. Zur Azimuthcorrection dient ein Gussstück im Steinpfeiler mit zwei Schrauben, zwischen die ein Anguss des Untersatzes tritt.

Der Kopf des Säulenschaftes ist ein einfacher Conus, welcher gleichzeitig die Lagerbüchse der Polaraxe bildet. Letztere trägt oberhalb der Anschlussflächen zwischen Conus und Schaft den Stundenkreis und ein Zahnrad. Die Ablesung dieses Kreises geschieht mittelst eines langen Mikroskopes, dessen Ocular bei a sichtbar ist. Die Theilung wird durch eine kleine Lampe am Schaft beleuchtet, und zur schnellen Bewegung in Rectascension dient das Griffrad h, welches an einer in der Säule untergebrachten Transmission befestigt ist. Griffrad und Mikroskopocular können gleichzeitig benutzt werden. Die

Uhrwerkbewegung wird vom Triebwerk ebenfalls mit einer Transmission auf das Zahnrad der Polaraxe im Pfeiler übertragen.

Was die weitere parallactische Aufstellung des Fernrohrs anbetrifft, so ist diese die bekannte REPSOLD'sche Montirungsweise mit den vier Schlüsseln am



(A. 74.)

Ocularende, welche die Rectascensionsbewegungen mittelst Halsbandräder auf die Axe übertragen.

VOGEL hielt eine innige Verbindung der beiden Fernröhre für durchaus geboten, und zwar wegen der grösseren Stabilität und eines geringeren Unterschiedes in der Durchbiegung. Daher besteht das Fernrohr aus einem guss-

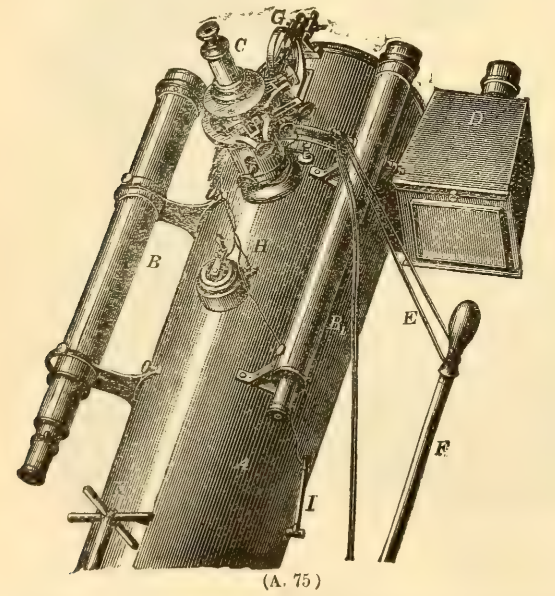
eisernen Mittelstück und zwei anschliessenden Conen aus Stahlblech. Das Rohr hat einen ovalen Querschnitt, dessen lange Axe auf der Deklinationsaxe senkrecht steht. Eine in der ganzen Länge des Fernrohres durchgezogene Scheidewand, die vom photographischen Rohr alles fremde Licht abhält, trägt auch bedeutend zur Versteifung des Fernrohres bei.

Der Auszug ist derart gewählt, dass er die Aufnahme von vier Quadratgraden am Himmel gestattet.

Die von verschiedenen Seiten in Vorschlag gebrachte Verbindung der Cassette mit dem Oculartheil des Pointers, und die gemeinsame Verschiebung beider zur Umgehung einer feinen Winkelbewegung am Instrument hat Vogel nicht in Anwendung bringen lassen, da sich bei solider Montirung des Ocularauszuges bei dem kurzen Rohre die Winkelbewegung jederzeit mit der erforderlichen Sicherheit und Freiheit ausführen lassen wird, andererseits aber eine gemeinsame Bewegung von Ocular und Cassette eine so gleiche Focallänge beider Objective voraussetzt, dass die Unterschiede zwischen der linearen Bewegung, die man dem Ocular und der Cassette ertheilt, gegen die entsprechende Winkelbewegung in beiden Fernröhren zu vernachlässigen sind.

Das Stativ selbst ist von ausserordentlicher Festigkeit. Es gestattet in allen Lagen dem Instrument ganz ungehinderte Bewegung und gewährt noch dem Beobachter den ausserordentlichen Vortheil, für die bei photographischen Aufnahmen besonders günstigen Stellungen stets die untere Lage des Fernrohrs benutzen zu können. Das Ocular des Pointers bleibt daher für die Zenithlage und für die Abstände bis zu 40° Zenithdistanz in solcher Höhe, dass ein einfacher Beobachtungsstuhl mit verstellbarer Sitzhöhe und Rückenlehne stets ausreichen wird.

b) *Aufnahmen mittelst kleinerer photographischer Objective, Portraitobjective.* Ausser den grossen Fernrohren, welche doch nur für die planmässige Herstellung der vom Pariser Congress vereinbarten, aber jetzt schon in mancher Beziehung im Plan veränderten Sternkarten (s. d.), oder für einzelne specielle Untersuchungen dienen, werden heutigen Tages sehr vielfach kleine photographische Objective benutzt, insbesondere Portraitobjective, welche ungemein lichtstark sind und an jedem Fernrohr angebracht werden können. Den ersten Versuch machte mit einem solchen Portraitobjectiv David Gill an der Cap-Sternwarte; ihm folgte E. v. Gothard, der diese Methode zur grössten Vollkommenheit entwickelte, und dann M. Wolf, dessen hervorragende Leistungen auf dem Gebiete der Himmelsphotographie bekannt sind.



(A. 75)

E. v. Gothard machte seinen ersten Versuch mit einem Voigtländer'schen Euryskop, welches er auf eine feste Mahagonicamera schraubte, und dann auf das obere Ende seines Reflectors aufsetzte, wie Fig. 75 zeigt. Diese Anordnung

verdient hier besondere Erwähnung. *A* ist das Reflectorrohr, *B* ein Sucher (an dessen Stelle später ein 4½zölliger Pointer mit prachtvollem MERZ'schen Objectiv trat) B_1 ein kleiner Sucher von 2 Zoll Oeffnung, *C* das Ocular des Reflectors, welches in einen Positionskreis und zwei Schlitten eingeschraubt ist, *G* ein Höhenkreis, *D* die Camera mit dem euryskopischen Objectiv, *F* der Deklinationsschlüssel, *E* die Rectascensionsschnur, *H* ein Rheostat für die elektrischen Lampen.

GOTHARD hat mit verschiedenen Objectiven in gleicher Anordnung wie oben Versuche gemacht, jedoch die besten Resultate mit einem 4zölligen VOIGTLÄNDER'schen Portraitobjectiv erzielt. Gegenwärtig besitzt er ein 6zölliges Portraitobjectiv von DALLMEYER, das aber an Lichtstärke nicht den gehegten Erwartungen entspricht, weil seine Brennweite von der im Catalog angegebenen insofern abweicht, als DALLMEYER wunderbarer Weise für die Brennweite die Entfernung von der Hinterlinse bis zum Bild annimmt.

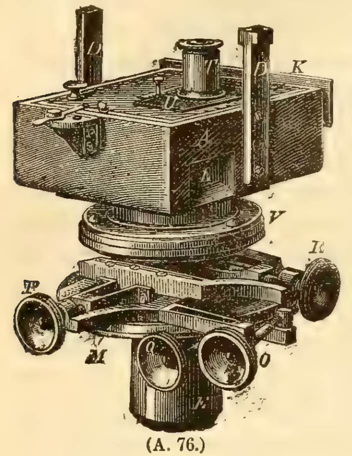
Der Vortheil der kleinen Objective, oder besser gesagt, der Objective von kurzer Brennweite, liegt beim Photographiren darin, dass ihr Gesichtsfeld ein viel grösseres ist, und die Lichtstärke den grossen Objectiven mit langer Brennweite selbstverständlich weit überlegen ist. Wenn es sich darum handelte, einen Kometen mit sehr langem Schweif zu photographiren, so würde dies mit einem Objectiv von langer Brennweite kaum möglich sein, man müsste sicher zu einem Portraitobjectiv seine Zuflucht nehmen, welches im Stande wäre, den ganzen Kometen sammt dem Schweif auf der Platte aufzunehmen.

Man sollte denken, dass man mit einem so lichtstarken Objectiv wie dem GOTHARD'schen Vierzöller bei ungeheuer langer Expositionszeit ganz Ausserordentliches würde leisten können. Indessen erreicht, was schon an anderer Stelle angedeutet wurde, die Expositionszeit bei einem sehr lichtstarken Objectiv bald ihre Grenze, da z. B. jeder VOIGTLÄNDER'sche Vierzöller bei dem schönsten Himmel, wo der Himmelsgrund tief schwarzblau erscheint, schon nach 3 Stunden Belichtungszeit die Platte zu verschleiern beginnt. Die Linse sammelt während dieser langen Belichtungszeit vom Himmelsgrund doch so viele actinische Strahlen, dass diese auf die Platte ungünstig zu wirken beginnen. Wann dieser Zeitmoment bei dem einen oder andern Objectiv eintritt, kann ebensowenig angegeben werden, wie ein geübter Diapositiv-Anfertiger bei trübem Wetter ohne Kenntniss der Tagesstunde oder der Empfindlichkeit der Platte anzugeben vermöchte, wie lange er belichten müsste. Dies ist lediglich Sache des Versuches, aber nach wenigen Versuchen wird schon jeder Beobachter wissen, wo die Grenze der Belichtung für sein Objectiv liegt.

Ein Beobachter kann nun auch in die Lage kommen, mit einem gewöhnlichen Spiegelteleskop oder Refractor photographische Aufnahmen zu machen. Es ist dann durchaus nicht nothwendig, deswegen das ganze Fernrohr in ein photographisches umbauen zu lassen, er kann vielmehr eine Camera auf seinen Ocularauszug aufschrauben. Da sich nun gegenwärtig fast täglich neue Beobachter diesem Zweige zuwenden und sich dann oft von ganz unerfahrenen Mechanikern wahre Ungetüme als »astronomische Camera« herstellen lassen, so dürfte es wohl am Platze sein, hier noch einiges über solche Cameras zu sagen, die sich auf jedes kleinere oder grössere Fernrohr aufschrauben lassen, und damit Anfängern nützliche Winke für deren Behandlungsweise, Einstellung u. s. w. zu geben.

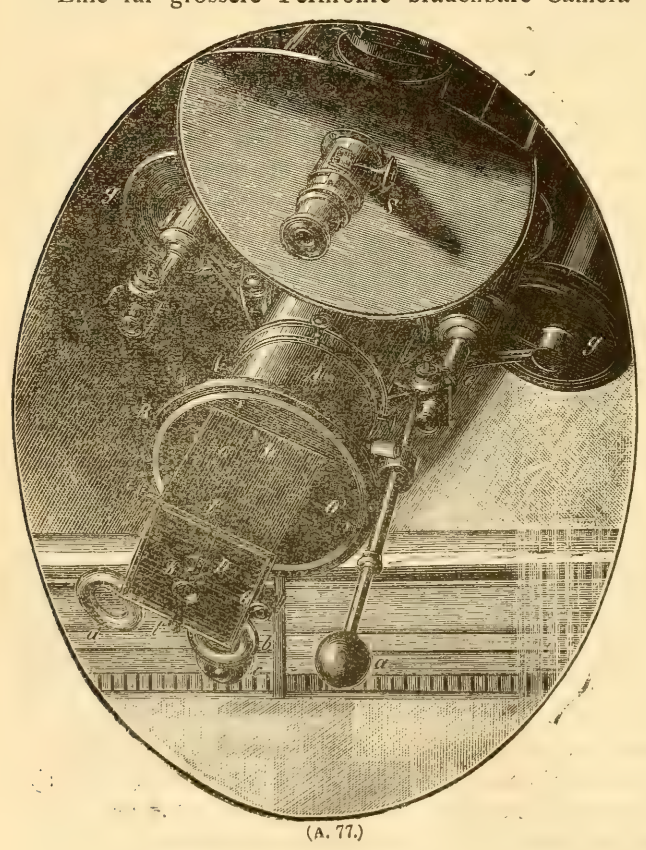
In Fig. 76 ist die erste Camera E. v. GOTHARD's dargestellt, wie sie auf einem Positionskreis und senkrecht auf einander stehenden Schlitten aufgesetzt

ist, um mit ihr am $10\frac{1}{4}$ zölligen Reflector Aufnahmen von Nebelflecken zu machen. Es ist dies dieselbe Camera, die wir schon in Fig. 64, pag. 221, gesehen haben, nur ist hier bei abgenommenem Mikroskop die Cassette eingeschoben und die Camera auf einen Positionskreis *M* aufgesetzt, welcher bei *E* in den Ocularauszug des Fernrohres geschraubt wird. Die Camera ist auf der Scheibe *V* befestigt, kann bei gelöster Klemme mit der Hand, und bei angezogener mit der Schraube *O* fein bewegt werden. Bei der Einstellung ist zu beachten, dass die beiden Schieber in der täglichen Bewegung resp. in der Richtung der Deklination stehen müssen. Die Bewegung der Sterne kann mit dem Ocular *T* controlirt werden. (Dieselbe Einrichtung traf auch O. Lohse bei seiner Camera gleichzeitig, unabhängig von Gothard). Später hat Gothard seine Camera noch bedeutend verbessert, die Bewegung der Cassette mit Trieb und Zahnstange versehen, und jede Vervollkommnung an gebracht, die für die praktische Handhabung nur denkbar ist.



(A. 76.)

Eine für grössere Fernröhre brauchbare Camera ist die von O. Lohse für den Potsdamer Refractor construirte. Fig. 77 stellt sie am Ocularende des genannten Instrumentes dar. *A* ist ein Messingrohr von 146 *mm* Durchmesser, welches nach abgenommener Ocularauszugsvorrichtung direkt an der Verschlussplatte befestigt ist; in diesem bewegt sich in einem Spiralschlitz ein zweites Rohr, welches zur Justirung der Camera dient. Dieses innere Rohr lässt sich je nach Bedarf festklemmen. Die Grösse der Verschiebung, die sich mittelst zweier knopfartiger Handgriffe bewirken lässt, kann an einer Millimeterscala abgelesen werden.


(A. 77.)

Am vorderen Ende des inneren Rohres ist ein viereckiger, kastenförmiger Ansatz *C*, der zur Aufnahme der Casette *D* dient. Die Verbindung des inneren Rohres mit dem Kasten wird durch die Platte *B* bewirkt, die sich im Sinne des Positionswinkels drehen lässt, und in einer jeden Lage, die an einer Kreis-

theilung ablesbar ist, festgeklemmt werden kann. Die Camera *C* ist gegen die Axe des Instrumentes etwas excentrisch angebracht, um am Rande des disponiblen Gesichtsfeldes Raum für ein Ocular *o* zu gewinnen. Das an der Aussenwand der Camera *C* befestigte Ocular *o* correspondirt mit einer Oeffnung *o'* in der Platte *B*, sodass vom Objectiv kommende Lichtstrahlen auch durch dasselbe aufgefangen werden können. Da nun das Ocular durch Drehung der Camera resp. der damit in fester Verbindung stehenden Platte *B* am ganzen Umkreis des Gesichtsfeldes hinbewegt werden kann, so sind der Auffindung eines in der Nachbarschaft des zu photographirenden Objectes befindlichen Sternes, der zur Pointirung während der Belichtungszeit benutzt werden kann, die günstigsten Bedingungen geboten.

Auch an der Cassette hat Lohse einige wesentliche Verbesserungen angebracht. Wenn sie eingeschoben ist, so steht nichts heraus, da z. B. der Schieber wegfällt, und die Belichtung mit einer Klappe bewerkstelligt wird, welche sich nach innen öffnet u. s. w. Das ausgenutzte Gesichtsfeld beträgt 60 × 73 Bogenminuten.

Ein nicht uninteressanter Theil ist bei Lohse's Camera das Pointer-Ocular, welches aus einem doppelten oder dreifachen Ringmikrometer mit Balmain'scher Leuchtfarbe besteht. Verfasser bekam ein solches Ringmikrometer von Dr. Lohse, hat mit demselben eingehende Versuche angestellt und dabei die allerbesten Resultate erhalten.

c) Die Arbeiten mit verschiedenen Instrumenten. Wie aus dem Gesagten ersichtlich, kann man die folgenden Fernrohrgattungen unterscheiden, die zur Himmelsphotographie dienen: erstens die gewöhnlichen photographischen Objective, die auf ein parallactisches Stativ aufmontirt sind, und zweitens Fernrohre von mittlerer, und solche von allergrössten Dimensionen.

Mit den photographischen Objectiven können grosse Theile des Himmels aufgenommen werden, und zwar ohne besondere Schwierigkeit im Maassstabe der Argelander'schen Uranometrie, wobei aber bedeutend mehr Sterne abgebildet werden würden, als wie sie die Uranometrie enthält. Die Brennweite eines für diesen Zweck angewandten photographischen Objectivs muss 20 *cm* betragen, dann werden 10° grössten Kreises auf der Platte 35 *mm* entsprechen, was der Maassstab der Uranometrie ist.

Solche Objective sind allein dazu geeignet, Nebelflecke von grosser Ausdehnung zu photographiren, sowie die unsichtbaren Nebel aufzunehmen und zu studiren. Solcher Nebel sind ja schon viele von M. Wolf und E. v. Gothard in dieser Weise entdeckt worden; sie befinden sich in grosser Anzahl im Sternbild des Orion; jedenfalls sind ihrer bereits über 40 bekannt geworden darunter der grosse unsichtbare Nebel in der Nähe von ξ Cygni.

Die Aufnahmen des Himmels mit ähnlichen, jedoch grösseren Objectiven als das genannte, haben eigentlich die grösste Zukunft, und man findet diese Methode, die Gill zum ersten Male anwandte, v. Gothard aber sofort nach ihm befolgte, heute an vielen grossen Fernröhren wieder. Selbst am photographischen Refractor der Potsdamer Sternwarte ist ein solches photographisches Objectiv angebracht. Man könnte in der That diese Methode vielen empfehlen, die ein Fernrohr mit gutem Uhrwerk besitzen und zu photographiren verstehen; sie würden der Wissenschaft von grossem Nutzen werden.

Mit mittelgrossen Fernröhren werden die Arbeiten indessen das ausgedehnteste Feld finden. Man kann mit ihnen Sternkarten herstellen, die an Reichhaltigkeit alle bisherigen bei weitem übertreffen, da es sich herausgestellt hat, dass bei hinreichend langer Belichtung noch Eindrücke von Sternen erhalten werden, die

für dasselbe Objectiv schon an der Grenze der direkten Sichtbarkeit sind, oder diese sogar unter Umständen weit überschreiten.

Die ganz grossen Fernrohre können nur für die Aufnahmen lichtschwacher Objecte mit geringer angulärer Ausdehnung verwendet werden. Hier möchte ich nochmals auf eine schon früher gemachte Bemerkung zurückkommen, wonach man bei Bestellung grosser Fernrohrobjective einem photographischen Objectiv den Vorzug geben sollte, unter Hinzufügung eines Correctionssystems für visuelle Strahlen, da es wünschenswerth ist, dass diese Fernrohre bei Specialuntersuchungen für chemische Strahlen achromatisirt sind. Man kann freilich die Brennebene experimentell bestimmen, wo die schärfsten photographischen Bilder entstehen, die Leistung derselben wird aber doch stets hinter solchen Objectiven zurückbleiben, die schon *a priori* für photographische Strahlen gerechnet sind. Ebenso möchte ich die schon öfter geäusserte Ansicht wieder erwähnen, dass nämlich die Spiegelteleskope erst jetzt einer grossen Zukunft entgegengehen, indem sie mit möglichst kurzer Brennweite bei grossem Spiegeldurchmesser leicht hergestellt werden können, keine Focaldifferenz besitzen, ausserordentlich lichtstark sind, sodass die Belichtungszeit aus diesem Grunde auf ein Minimum reducirt werden kann, was ebenso wichtig für den Beobachter als für das Resultat ist, endlich nach Wegnahme der Camera ebensogut für spectralphotographische als optische Arbeiten benutzt werden können. Ich möchte aber auch eine Bemerkung nicht unterlassen, dass ich nämlich meinerseits den Spiegeldurchmesser doch nicht ins Unendliche treiben würde, da man wohl Spiegel erster Qualität zwischen 30 und 60 *cm* Durchmesser kennt, sie jedoch über diese Dimensionen hinaus, wenn sie auch ungemein lichtstark sind, an Definition manches zu wünschen übrig lassen, und sie ausserdem, wenn sie nach NEWTON'scher Construction ausgeführt werden, äusserst unhandlich sind, wenn sie nach CASSEGRAIN'scher Form gemacht sind, aber durch einen grossen Fangspiegel viel Licht einbüssen. Jedenfalls sollte der Erbauer eines grösseren Spiegelteleskopes (was nur ein Astronom, der gleichzeitig Mechaniker ist, sein kann) dahin streben, ein grösseres CASSEGRAIN'sches Teleskop zu construiren, und zwar so, dass man den Fangspiegel, ohne ihn zu decentriren, von seiner Stelle herausschieben, und die photographische Cassette, welche weit ausserhalb dieses zu liegen kommt, also etwa am Ende des Rohres, wo der Brennpunkt des Spiegels ist, leicht, sicher und ohne Erschütterung hineinschieben kann. Bei dieser Operation müsste dann ein Assistent einmal auf die Leiter steigen, und zwar beim Einlegen der Cassette, und dann ein zweites Mal beim Herausnehmen derselben nach erfolgter Belichtung der Platte. Hier treten geringe mechanische Schwierigkeiten auf, die sich leicht überwinden lassen; und die Lösung der Constructionsaufgabe wäre sicherlich nicht so complicirt, als die Rectascensionsklemme und Feinbewegung vom Ocularende bei den REPSOLD'schen Refractoren.

Die Belichtungszeit bei Sternaufnahmen ist sehr verschieden, sodass man hierüber eigentlich keine Regel aufstellen kann. Die meisten Sterne, welche ein Spectrum des I. VOGEL'schen Typus haben, wirken sehr stark chemisch auf die Bromsilberplatten. Wenn wir uns zum Photographiren grösserer Himmelsflächen z. B. eines Euryskopischen Objectivs von Voigtländer bedienen, welches 38 *mm* Oeffnung und 200 *mm* Brennweite besitzt, so kann auf einmal das ganze Sternbild des Orion photographirt werden, und in 30 Secunden sind schon die Sterne 3. und 4. Grösse auf der Platte sichtbar, wogegen in 10 Minuten viel mehr Sterne hervortreten, als in der ARGELANDER'schen Uranometrie eingezeichnet sind. Andererseits sind wieder von den Sternen, deren Spectrum zum III. Typus gehört,

gar keine Spuren auf der Platte zu sehen. Wenn man die Platte 30—45 Minuten belichtet, so erscheinen auf derselben schon eine grosse Anzahl von Sternen, so hat z. B. GOTHARD auf einer Platte von 65 × 90 *mm* im Sternbilde des Scorpion 90 Sterne photographirt.

Mit der photographischen Methode hat M. WOLF in Heidelberg und CHARLOIS in Nizza schon eine ganz beträchtliche Anzahl von kleinen Planeten entdeckt und ersterer auch 2 Kometen. Wenn auf einer Platte nur Fixsterne photographirt werden, so erscheinen sie, wenn das Uhrwerk gut geht, und der Beobachter gut pointirt, als kreisrunde Scheibchen von verschiedenem Durchmesser, je nach der Grösse des Sterns; ist aber unter den Fixsternen ein Asteroid, so wird derselbe während einer längeren Belichtungsdauer von mehreren Stunden auf der Platte seine Bewegung zeigen, und zwar je nach der Belichtungsdauer; ist letztere beispielsweise eine kürzere, die Bewegung entsprechend eine geringere, so wird man den Planeten freilich auch nur als Punkt erblicken und ihn nicht ohne Weiteres von den Fixsternen unterscheiden können. Wenn aber dieselbe Gegend am nächsten Tage nochmals photographirt wird, so kann man den Planeten bei einiger Uebung bald finden, da dieser in Bezug auf die Aufnahme des vorigen Tages bereits an einem ganz anderen Orte stehen wird. Wenn man dann nämlich die beiden Platten übereinander legt, so wird sich bald zeigen, dass der Asteroid auf der ersten Platte an der betreffenden Stelle der zweiten und umgekehrt fehlt.

Die Entdeckung von Kometen ist bedeutend leichter, wenn sich dieselben nicht gerade in einer nebelreichen Gegend befinden, wo sie sich als verwaschene Objecte von den Nebeln schlecht unterscheiden lassen. Haben sie aber eine starke Bewegung, so werden sie auch bald als ein unregelmässig verwaschenes Object ins Auge fallen. Der Komet wird übrigens auf der Platte sehr bald einen Eindruck machen, da diese Himmelskörper, wie gesagt, ungemein viele actinische Strahlen besitzen.

An dieser Stelle mögen auch kurz die photographischen Platten besprochen werden. GOTHARD benutzt ausschliesslich SCHLEUSSNER'sche Platten, wogegen M. WOLF auch LUMIÈRE-Platten gebraucht. Die Empfindlichkeit der Platten ist durchaus nicht dieselbe, ob sie frisch oder schon einige Wochen oder Monate alt sind. Sie steigt mit dem Alter, bis dann einmal ein Zeitpunkt kommt, wo ein Randschleier und dann ein allgemeiner Schleier eintritt. Dieses Empfindlichkeitsmaximum muss man für alle Platten experimentell bestimmen. Es kommt auch sehr viel darauf an, an welchem Orte die Platte aufbewahrt wird. Verfasser besitzt auf seiner O'Gyallaer Sternwarte eine Dunkelkammer, wo noch nach 3½ Jahren CAUSLAND-Platten (recht unempfindlich) und nach 2½ Jahren SCHLEUSSNER-Platten völlig tadellos arbeiteten, dagegen hatten in seinem Budapester Bureau SCHLEUSSNER-Platten schon nach einem halben Jahr einen starken Randschleier. Der Ort, wo die Platten aufbewahrt werden, soll trocken, und kühl sein, eine geringe Feuchtigkeit, wie sie im O'Gyallaer Laboratorium vorkommt, schadet weniger als warme absolut trockene Atmosphäre. Man hüte sich, Platten in offener Schachtel zu bewahren, wenn man weiss, dass man nur 10 Tage lang diese Plattensorte nicht gebraucht, so klebe man die Schachtel mit einem Papierstreifen wieder zu, man wird diese kleine Mühe und Vorsicht reichlich belohnt finden. Der schlechteste Aufbewahrungsort sind Holzschachteln, insbesondere wenn sie aus Eichen- oder Buchenholz gemacht sind, da sie sehr viel feuchte, tanninhaltige Ausdünstung haben; etwas besser ist ganz trockenes Tannenholz, wenn es nicht harzhaltig ist. Will man durchaus die Platten in Holzkästen

aufbewahren, so ist das einzig richtige, völlig trockenes Birkenholz zu verwenden. Verfasser besass vier solcher Kästen, 13 × 18 zu je 12 Platten aus der Collodionzeit, welche mit einem JONTE'schen Apparat aus Paris stammen. Diese sind es, in denen jene CAUSLAND-Platten $3\frac{1}{2}$ Jahre lang vollkommen wohlerhalten blieben.

Vor Jahren war man noch genöthigt, die Platten selbst zu färben, heute bekommt man jedoch die besten orthochromatischen im Handel, und hier nimmt wieder C. SCHLEUSSNER in Frankfurt a. M. den ersten Platz ein. Es würde sich nur dann rechtfertigen, die Platten selbst zu färben, wenn man sie für eine bestimmte Strahlengattung zum Zwecke einer Specialuntersuchung gebraucht. Die orthochromatischen Platten sind viel längere Zeit haltbar als die gewöhnlichen, die man sich selbst durch Baden der Bromsilberplatten herstellt. Letztere sind kaum 48 Stunden mit Sicherheit verwendbar.

Um eine Platte von E bis $D\frac{1}{2}C$ im Spectrum zu sensibilisiren, benutzt man am besten das folgende, von H. W. VOGEL und OBERNETTER angegebene Recept:

10 *cbcm* Erythrosinlösung (1:1000)
6—8 „ Silbernitratlösung (1:1000)
1 „ Ammoniak
50 „ Wasser.

Die Platte wird in der oben angeführten Flüssigkeit eine Minute lang gebadet, getrocknet, und nach der Belichtung mit Soda-Pyro-Entwickler hervorgerufen.

LOHSE benutzte die orthochromatischen Platten mit Vortheil bei der Aufnahme von Doppelsternen mit verschiedenfarbigen Componenten, bei denen oft der eine Stern so stark in der photographischen Wirkung dominirt, dass er während der langen Belichtungszeit, die für den anderen erforderlich ist, ein übermässig grosses Bild hervorbringt, und zwar derart, dass die Trennung der beiden Objecte auf der Platte verschwindet. In solchen Fällen ist es erwünscht, eine Aufnahme mit möglichst monochromatischem Lichte machen zu können, was durch Einschalten eines blau absorbirenden Mediums leicht geschehen kann. Es ist nach LOHSE's Behauptung unzweifelhaft, dass dadurch auch die Schärfe der Bilder erhöht wird, indem dem mangelhaften Achromatismus eines gewöhnlichen, nicht für chemische Strahlen achromatisirten Objectivs in dieser Weise entgegengearbeitet werden kann.

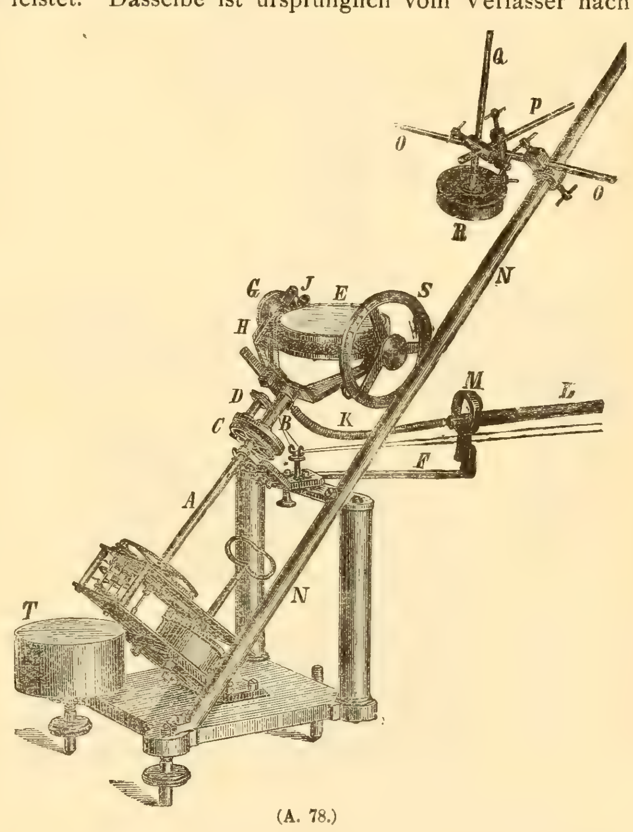
Bei der Operation mit orthochromatischen Platten muss man sich vor Licht ungemein schützen, da man auf denselben durch eine rothe Lampe, die für gewisse Operationen unschädlich ist, schon längst Schleier erhält. Man nehme einen rothen Cylinder über die Flamme, und setze darauf noch einen zweiten. Man wird dabei im Laboratorium anfangs allerdings kaum etwas sehen, sich aber doch bald auch an diese Dunkelheit gewöhnen. Der Doppelcylinder hat ausserdem noch den Vortheil, dass, wenn der innere Cylinder springen sollte, doch der zweite noch da ist, sodass man nicht Gefahr läuft, eine viele Stunden lang belichtete Platte in einem Moment durch ein solches Vorkommnis zu Grunde gerichtet zu sehen.

5) Spectralphotographie des Himmels.

a) Das Photographiren des Sonnenspectrums. Das Fixiren des Sonnenspectrums auf der photographischen Platte erfordert wohl bei weitem nicht die Geduld, welche bei der Aufnahme der Spectra von Gestirnen und Nebelflecken nöthig ist, immerhin soll damit durchaus nicht gesagt sein,

dass wer ein correctes Sonnenspectrum photographiren will, nicht ein ganz geschulter Fachmann sein müsste, handelt es sich doch um die minutiösesten Dinge, die man nicht aus einem Buch, sondern nur in der Praxis lernen kann. Dass diese Art der Himmelsphotographie eine einfachere ist, als die Aufnahme von Nebelflecken und Fixsternspectren, hat darin seinen Grund, dass die ganze Operation nicht am Fernrohr, sondern im Cabinet an einem fix aufgestellten Instrument ausgeführt werden kann.

Um aber das Sonnenbild längere Zeit auf der Spalte erhalten zu können, ist bei dieser Operationsart das Haupterforderniss, neben dem Spectrographen einen guten Heliostaten zu haben. Es mag daher auch an dieser Stelle die Beschreibung eines solchen Instrumentes folgen, welches trotz seiner Einfachheit doch die besten Dienste leistet. Dasselbe ist ursprünglich vom Verfasser nach MEYERSTEIN's Princip erbaut und später von E. v. GOTHARD ganz umgearbeitet, wie es Fig. 78 wiedergiebt.



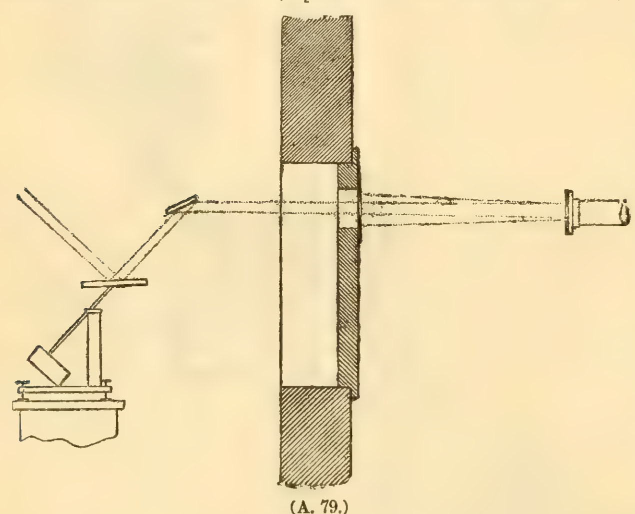
(A. 78.)

Auf einer massiven Gussplatte befindet sich ein kräftiges Uhrwerk mit Ankerechappement in der Aequatorebene des Beobachtungsortes aufgestellt, so dass die Axe *A*, welche in 24 Stunden eine Umdrehung macht, genau gegen den Himmelspol zeigt. Die Lager dieser Axe bestehen unten aus einer Körnerspitze und oben aus einer oben offenen Gabel, in welcher aber die Axe unten durch zwei Rollen unterstützt ist. Die Axe trägt nahe ihrem oberen Ende ein Zahnrad *C*, ferner die lose aufgesteckte Hülse *B*, welche dann in eine grosse Gabel endet, die die Spiegelfassung *E* zu tragen bestimmt ist. Die Hülse *B* findet unten ganz nahe am Zahnrade *C* in eine Scheibe, an welcher ein in einer langen Hülse drehbarer Trieb *D* angebracht ist; dieser greift in das Zahnrad *C* ein und dient als Mitnehmer für das ganze Spiegelgestell. Sollte aber die Uhr der Sonne nicht genau folgen, so wird nur an dem Knopf bei *D* etwas gedreht und das Spiegelgestell mittelst des Triebes, der als Planetenrad wirkt, weiter bewegt. Der Knopf *L* trägt aber eine Rille, in welcher eine Schnur ohne Ende läuft, mit der sich die Feinbewegung in Rectascension von der Camera des Apparates ausführen lässt.

Wie gesagt, trägt die Hülse *B* eine Gabel, an deren oberen Armen die Spiegelaxen gelagert sind. An einem Ende der Spiegelaxe sitzt ein in ganze

Grade getheilter Kreis S, auf dem anderen die Feinbewegung in Deklination, bei welcher man bei G ein kleines Gegengewicht, bei I die Klemmschraube, bei H die Gegenschraube der Feinbewegung erblickt. Letztere kann ebenfalls von der Camera dirigirt werden, und zwar mit dem Schlüssel L, welcher in dem Ringe M am Instrument gelagert und durch eine Drahtspirale K mit der Gegenschraube H verbunden ist.

Naturgemäss reflectirt der MEYERSTEIN'sche Heliostat die Sonnenstrahlen immer gegen den Nordpol; will man diese dagegen in eine andere Richtung leiten, so muss in der Verlängerungslinie der Polaraxe ein zweiter Spiegel, (in der Figur R), angebracht werden. Einen solchen hat GOTHARD durch den Stab NN permanent mit dem Heliostaten verbunden. Der Stab NN ist mit zwei kräftigen Schrauben auf der Grundplatte befestigt und ausserdem noch, um ihn gegen Vibrationen zu schützen, mit dem Ständer der Polaraxe verbunden. Der Spiegel R trägt an seiner Fassung die Stange Q, welche durch die Klammern und Stahlstäbe bei OO, p mit N so verbunden ist, dass die aus dem Spiegel E austretenden Sonnenstrahlen derart auf R fallen, dass sie immer nach dem gewünschten Ort geworfen werden.

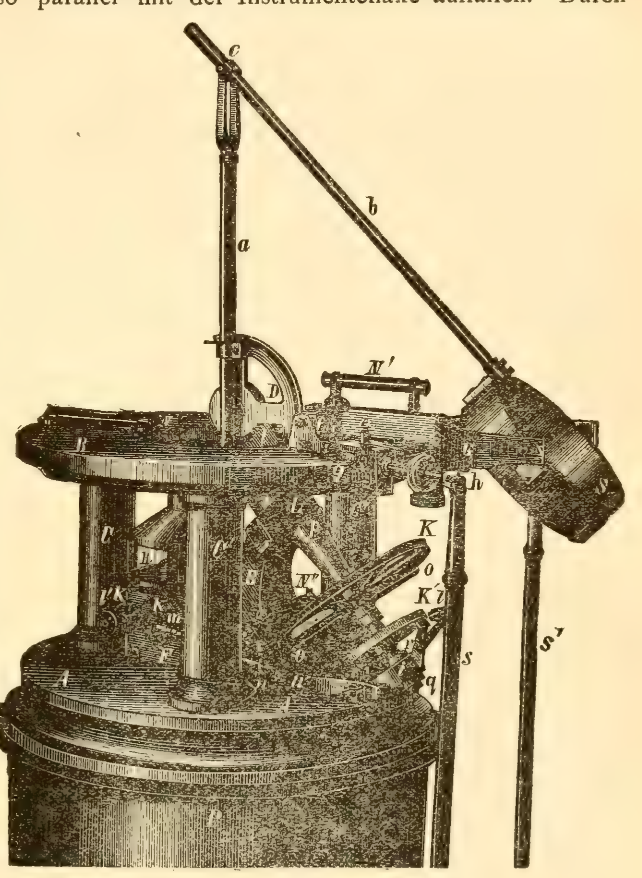

(A. 79.)

E. v. GOTHARD stellt nun seinen Heliostaten in der in Fig. 79 schematisch dargestellten Weise auf. Derselbe befindet sich vor dem Fenster auf einem isolirten Pfeiler und reflectirt nur die nöthige Menge der Sonnenstrahlen durch eine Oeffnung auf den Spalt des Spectrographen. Bei dieser verhältnissmässig rohen Aufstellung, welche aber für diesen Zweck genau genug ist, darf man auf eine präcise Constanz der Sonnenstrahlenrichtung nicht rechnen; die starke Insolation verursacht auch gewisse Störungen im Gange des verhältnissmässig schwachen Uhrwerks und beeinflusst auch gewiss die Aufstellung selbst. Bei manchen Arbeiten ist es aber erwünscht, dass die Constanz möglichst genau beibehalten werde, die kleinsten Abweichungen gleich bemerkt und leicht, aber sicher wegcorrigirt werden können.

E. v. GOTHARD benutzt bei seinen spectralphotographischen Arbeiten seit längerer Zeit eine sehr einfache Vorrichtung mit bestem Erfolg, die hier um so mehr erwähnt werden mag, da sich die Methode bei jedem anderen Heliostaten anwenden lässt.

Alle seine Spectralapparate sind am Spaltende mit einer Scheibe versehen, deren Fläche auf der Drehbank senkrecht zur optischen Axe hergestellt wurde. Mit dieser Scheibe kann er die Apparate auf das Fernrohr oder auf ein Universalstativ aufsetzen. Auf derselben lässt sich aber auch eine Messingfassung befestigen, die ein vorne versilbertes, in der Mitte durchbohrtes Planglas enthält. Es ist leicht die Fassung auf der Drehbank so herzustellen, dass die versilberte Fläche senkrecht zur optischen Axe steht. Wenn man nun auf die Spiegel-

fläche durch eine etwas grössere Bohrung, als diejenige des Planglases ist, Sonnenstrahlen fallen lässt, so wird ein Theil derselben durch die Bohrung des Planglases in das Instrument fallen, ein anderer Theil wird dagegen durch die Spiegelfläche zurückgeworfen, und da die durch eine kleinere Oeffnung hindurchgehenden Sonnenstrahlen immer divergent sind, so erzeugen sie um die erste Oeffnung einen Lichtkreis, der mit der Bohrung concentrisch ist, vorausgesetzt, dass die Bohrungen in einer Axe liegen, was sehr leicht zu erreichen ist, da man die Projection der ersten auf der Spiegelfläche sieht, und die Strahlen senkrecht auf die Spiegelfläche, also parallel mit der Instrumentenaxe auffallen. Durch Excentricität des Lichtkreises können die kleinsten Abweichungen bemerkt und gleich mit der Feinbewegung des Heliostaten corrigirt werden. Es empfiehlt sich, die Entfernung beider Oeffnungen etwas grösser, wenigstens einen Meter zu wählen, und die Platte, auf der die erste Bohrung angebracht ist, mit einem Papier zu überkleben und mit markirten concentrischen Kreisen zu versehen.



(A. 80.)

Es muss noch ein anderer Heliostat erwähnt werden, der nur einen Spiegel besitzt, mit dem aber die Sonnenstrahlen in beliebige Richtung reflectirt werden können. Es giebt eine grosse Anzahl derartiger Apparate, die mehr oder weniger gute Dienste leisten, wie z. B. der JOHNSTON'sche Heliostat, der bei ziemlich niedrigem Preise und weniger genauen Arbeiten recht genau functionirt; bedeutend besser, auch kostspieliger, ist der FUESS'sche Heliostat, für ganz exacte Arbeiten kann aber nur der grosse MONCKHOVEN'sche Heliostat empfohlen werden, wie er von T. COOKE in York gebaut wird (Fig. 80). Er ist fest auf einen Pfeiler P aufgestellt und ruht auf der Grundplatte AA, mit der ein grosser, gedrehter Ring B durch drei Säulen C, C', C'' verbunden ist. Zwischen diesen beiden Rahmen liegt das parallactische Gestell E, L, p, K, K', q und das Uhrwerk H. Die Polaraxe p ragt bis über den grossen Ring empor und trägt eine kurze Deklinationsaxe, die eigentlich nur aus einem Bolzen besteht, an dem sich der Deklinationskreisbogen D dreht: an letzterem ist dann noch die lange Stange a drehbar angebracht. Der Spiegel S ist in einer Gabel G gelagert, deren Horizontalaxe wieder in dem Stück e ruht. Die Lage der Axe

von G kann stets durch das Niveau N' controlirt werden. Die beiden Schlüssel SS' dienen zur Feinbewegung des Spiegels vom Beobachtungsplatz aus.

Was die Theorie dieses Heliostaten (oder wie man diese grösseren Maschinen auch nennt, Siderostaten) anbelangt, so muss auf die in des Verfassers »Handbuch für Spectroskopiker im Cabinet und am Fernrohr« pag. 118—122 gegebene Theorie des Fuess'schen Apparates verwiesen werden, da das Princip beider ziemlich dasselbe ist.

Um ein Spectrum auf einer photographischen Platte zu fixiren, würde theoretisch wohl ein beliebiges Spectroskop genügen, wenn man anstatt des Oculars eine Cassette anbrächte. In der Praxis ist es aber doch nicht so, da ein Spectrograph noch mancher Feinheiten bedarf und nicht einfach aus Spalte, Collimator, Prisma und Fernrohrobjektiv besteht. Es giebt viele Künstler, die solche Spectrographe anfertigen, welche der Theorie vollkommen entsprechen, mit denen aber Niemand jemals ein gutes Spectrum im strengen Sinne des Wortes photographiren wird. Man findet Spectrographe mit einer Menge achromatischer Gläser, es werden sogar als Projectionslinsen complete photographische Objective eingeschaltet; man bedenkt aber dabei nicht, dass diese grosse Zahl von Gläsern, insbesondere wenn sie mit Canadakitt verkittet sind, eine enorme Menge Strahlen absorbiren, vor allem zerstört der Canadakitt die brechbareren Strahlen vollständig. E. v. Gothard, Eder und Schumann photographiren jedenfalls schönere Spectra als irgend jemand, und sie benutzen einfache unachromatische Crownglaslinsen als Collimator und Cameralinse. Verfasser machte sich auch selbst einen Spectrographen mit unachromatischen Linsen, und erhielt die schönsten Spectra. Ein sehr grosser Fehler der Spectroskope, die man im Handel bekommt, ist der massenhafte Reflex, welcher sich um das Spectrum herum geltend macht. An der königlichen Meteorologischen Reichsanstalt in Budapest befindet sich unter anderen ein solches Prachtexemplar der modernen Mechanik, wo das Spectrum in einem förmlichen farbigen Nebel eingehüllt ist. Das rührt meistens von der falschen Blendenstellung her und davon, dass das Collimatorrohr inwendig garnicht geschwärzt ist. Es ist ganz wesentlich besonders hierauf zu achten, weil die ärgsten Reflexe bei einem Spectralapparat immer in erster Reihe vom Collimatorrohr herrühren und sodann von der ersten Prismenfläche. Wenn nun der Reflex des Spaltlichtes schliesslich noch von der ersten Prismenfläche auf eine Stelle geworfen wird, die zufällig blank oder glänzend schwarz ist, so ist ein Nebelhalo im Apparat sofort da.

Dass diese recht unangenehme Erscheinung bei einem Spectroskop ausserordentlich störend wirkt, wird wohl manchem nach trauriger Erfahrung bekannt sein. Die Sache ist aber bei einem Spectrographen noch eine ganz andere, da man von diesem nebligen Halo sofort einen Schleier auf der Platte bekommt. Man versehe also das Collimatorrohr mit passenden Blenden, die sorgfältig mit matter schwarzer Farbe gefärbt sind, oder man überklebe das Innere des Rohres wie auch die Camera mit schwarzem Sammt, welcher das beste, lichtabsorbirende Medium ist, das es giebt. Wenn im Collimatorrohre Blenden angebracht werden so untersuche man sie zuerst. Es ist leicht, dies mit Hilfe graphischer Darstellung zu thun. Da die Spalte doch im Brennpunkte der Collimetorlinse stehen soll, so kann man diese Linien, welche den Strahlengang darstellen, auf ein Papier auftragen, die Blendenöffnungen mit dem Zirkel abmessen und mit der Zirkelöffnung in den graphischen Strahlenkegel hineingehen; dann findet man sofort die richtige Stelle der Blenden. Von grosser Wichtigkeit ist die Stellung der ersten Blende beim Spalt, weil die falsche Stellung derselben am leichtesten

einen Reflex verursacht. Sie muss so gewählt werden, dass sie so nahe wie möglich an der Spalte steht, und diese in der Weise abblendet, dass das Spectrum gerade die nöthige Höhe bekommt. Sehr wünschenswerth ist es, dass der ganze Spectrograph inwendig vollkommen gut geschwärzt, und wo nur immer möglich mit schwarzem Sammt ausgeklebt ist, damit die Reflexe auch weiterhin verhütet werden.

Endlich ist von ganz besonderer Wichtigkeit eine tadellose Spalte. Ich kann dem Leser versichern, dass unter den selbst kostbaren Apparaten, die die Künstler den Spectroskopikern für ihre Spectrographe liefern, 80 % unbrauchbar sind! Es ist eigentlich unmöglich, dass ein Mechaniker dem Käufer eine solche Spalte liefern kann, wie sie z. B. V. SCHUMANN in seinem Spectrographen besitzt und an welcher er allein 14 Tage geschliffen hat, oder eine solche, wie sie GOTHARD für seinen Apparat anfertigte. Damit sollen in keiner Weise die Fertigkeiten der mechanischen Künstler in Zweifel gezogen werden, es soll vielmehr damit gesagt sein, dass eine solche Spalte das Instrument derartig vertheuern würde, dass nur derjenige einen so hohen Preis zahlen würde, der bei billigen Apparaten ein empfindliches Lehrgeld gezahlt hat.

Die Spalte muss mit einer äusserst sorgfältigen Führung versehen sein, in welcher sie durch eine feine Mikrometerschraube bewegt werden kann und zwar so, dass man sicher 0·01 *mm* der Spaltöffnung angeben kann, eventuell noch weniger (s. des Verf. »Anleitung zur Himmelsphotographie«, pag. 154—157, 171, 72, und ebenfalls des Verf. »Handbuch für Spectroskopiker« u. s. w., pag. 243 bis 257).

Wenn bei einem Spectrographen achromatische Linsen verwendet werden, so kann die photographische Platte auf der Cameraachse nahezu senkrecht stehen, um alle Linien des Spectrums scharf zu erhalten. Wenn aber einfache Linsen oder Quarzlinsen in Anwendung kommen, dann muss die Cassette verstellbar gemacht werden, da die scharfe Einstellung für den weniger brechbaren Theil des Spectrums eine ganz andere ist, als für die brechbareren Theile, oder anders ausgedrückt, wenn die Linien im Roth scharf sind, werden sie im Blau schon total verwaschen sein, und umgekehrt, da jeder Strahl einen anderen Brennpunkt hat. Um nun diesen Umstand zu berücksichtigen, wird man einfach die photographische Platte schief stellen, und zwar so, dass diese schiefe Stellung eben den verschiedenen Brennweiten entspricht. Das ist aber eine Aufgabe, die nur experimentell gelöst werden kann, deshalb genügt es nicht, die Cassette einfach verschiebbar zu machen, sondern man muss auch die Winkelgrösse, um die man sie verschoben hat, genau angeben können.

Um nun der Platte die richtige Neigung zu geben, verfährt man wie folgt. Man schiebt zuerst entweder eine matte Scheibe anstatt der Platte in die Cassette, und untersucht darauf das sichtbare Spectrum und giebt der Cassette die ungefähre Neigung; oder noch besser man untersucht, wenn sich auf der Camera ein Schlitten mit einem Ocular oder Mikroskop befindet, die Schärfe des sichtbaren Spectrums mit dieser Vorrichtung und stellt die Cassettenlage danach ein Nach dieser ganz rohen Stellung liest man die Stellung der Cassette an einer passenden Theilung ab und betrachtet diese als Ausgangspunkt. So macht man die erste Aufnahme, geht dann um einen Grad (oder einen halben Grad) weiter, macht die zweite und so fort die $x$te Aufnahme. Bemerkt man indessen, dass die Bilder in dieser Weise schlechter werden, was sich schon bei der dritten Aufnahme zeigt, so wird man die Verschiebung in dieser Richtung nicht fortsetzen, sondern man geht auf die andere Seite des Ausgangspunktes über, macht

dort die weiteren Versuche, und stellt endlich die Cassette auf jenen Scalentheil, der die schärfsten Linien das Spectrum entlang gegeben hatte.

Bedeutend schwieriger ist die Einstellung für die ultravioletten Strahlen, weil hier nur wenige Linien vorhanden sind, die dazu genügende Helligkeit haben. Am besten ist die Einstellung mit den Anfangslinien der Stickstoftbanden und den Cadmiumlinien. Die starke Fluoressenz macht aber die Magnesiumliniengruppe $\lambda = 280{\cdot}1$; $279{\cdot}7$; $279{\cdot}4$ und $279{\cdot}0$ auch sehr geeignet zur Einstellung des Spectrographen auf die ultravioletten Parthien des Spectrums.

Von besonderer Wichtigkeit ist, dass ein Spectrograph, wo immer derselbe bewegliche und verschiebbare Theile besitzt, überall mit Scalentheilungen versehen ist, sodass man jede minimale Veränderung sofort entdecken und corrigiren kann, sowie auch im Stande ist, einen grösseren Apparat mit Rücksicht auf den Temperatureinfluss einzustellen.

Was nun die Wahl der Prismen betrifft, so wird man jedenfalls in den meisten Fällen solche von maximaler Dispersion wählen, wo dies nur immer thunlich ist. Bei der Aufnahme des Sonnenspectrums kann auch unbedenklich ein Diffractionsgitter mit grösstem Vortheil zur Verwendung kommen, wogegen dies bei der Aufnahme von Sternspectren wegen der grossen Lichtschwäche des Gitters nicht thunlich ist. Bei den Spectrographen sind womöglich lange Prismensätze »*à vision directe*« zu vermeiden, weil diese mit Canadakitt verklebt sind, der, wie schon erwähnt, die brechbareren Strahlen total vernichtet. Wenn es aus irgend einem Grunde erwünscht ist, dass der Spectrograph mit einem Prisma *à vision directe* versehen werde und es bei der Untersuchung nicht gerade darauf ankommt, mit demselben die ultravioletten Strahlen zu erreichen, so nehme man ein AMICI'sches Prisma aus drei Gliedern aus sehr stark dispergirendem farblosen Jenenser Glas; so hat es Verfasser bei einem später beschriebenen Spectrographen gethan. Handelt es sich aber um die Aufnahme des Sonnenspectrums, so nehme man stark dispergirende RUTHERFURD- oder BROWNING'sche Prismen, oder am besten ein ROWLAND'sches Diffractionsgitter und zwar vorzugsweise gleich ein auf concaven Spiegel getheiltes.

Hier mag bemerkt werden, dass ein Gitter von nur einigermaassen langer Brennweite schon ein Spectrum in der Länge von 30 *cm* giebt, und bei solcher Ausdehnung muss das Spectrum an beiden Enden in Folge der Krümmung des Spiegels immer verwaschen bleiben (selbst wenn er parabolisirt wäre, würde man doch nicht im Stande sein, das Spectrum von dieser Ausdehnung auf einer ebenen Fläche erzeugen zu können). Man kann also in dieser Weise von vornherein nur kleinere Parthien des Spectrums photographiren. Um einem solchen Nachtheil abzuhelfen, kam Herr v. GOTHARD auf einen sehr sinnreichen Gedanken, der die Construction des Apparates nicht complicirt, aber seine Leistungsfähigkeit wesentlich erhöht. Er macht die Cassette ziemlich kräftig aus Metall und arbeitet diese derart gekrümmt aus, dass die Krümmung eben der Schärfe aller Theile des Spectrums entspricht. Dann presst er die photographische Platte mit einer Einlage derart hinein, dass sich das Glas soweit biegen muss, was es auch merkwürdiger Weise thut. Es muss aber erwähnt werden, dass dies drastische Verfahren nur blasen- und schlierenfreie, ganz dünne Spiegelglasplatten aushalten. Herr v. GOTHARD hat bis zum Schreiben dieser Zeilen schon über ein Dutzend SCHLEUSSNER-Platten in seine Cassette gepresst, ohne dass eine zersprungen wäre. Die Biegung beträgt von der Mitte bis zum Rand ca. 4 *mm* bei einer Plattenlänge von 36 *cm*. Schliesslich muss zugegeben werden, dass, wenn man so lange Spectra photographiren will und unter 12 Platten auch 3—4 zerbrechen, man

doch reichlich belohnt sein wird, indem man ohne Vergrösserungssysteme ein Spectrum von über 30 *cm* Länge in seiner ganzen Ausdehnung haarscharf erhält.

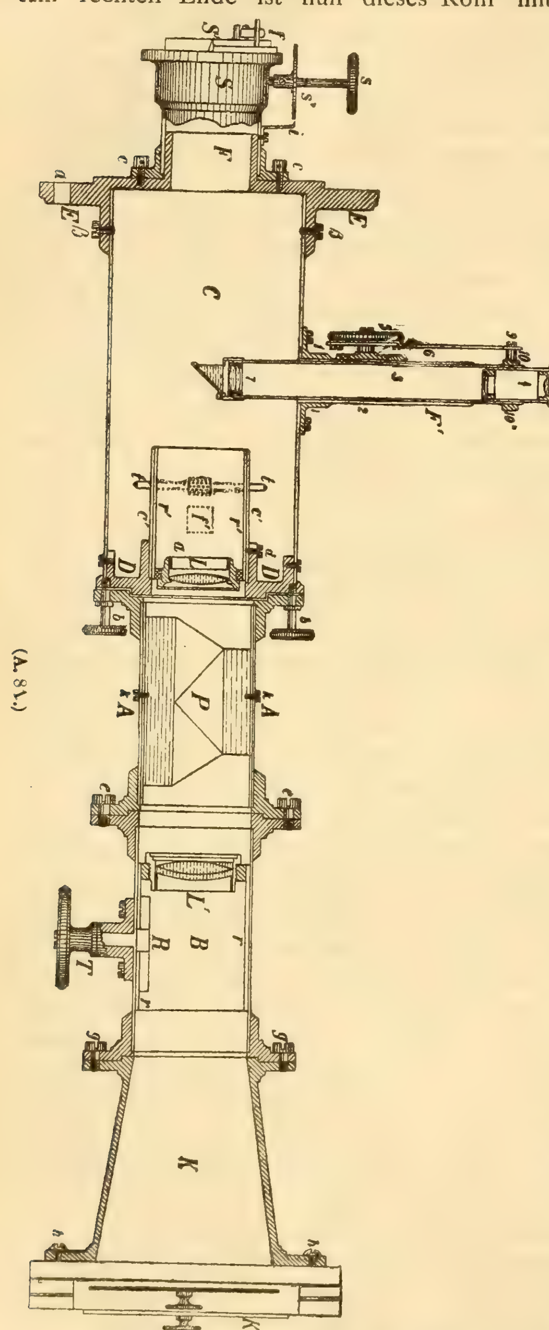
Es würde zu weit führen, wollte man hier die Beschreibung verschiedener Spectrographe wiedergeben; Verfasser möchte lieber denen, welche sich mit dem Photographiren des Sonnenspectrums befassen wollen, den Rath geben, sich in direkte Verbindung mit einem Praktiker, wie V. SCHUMANN, E. v. GOTHARD, B. HASSELBERG u. A. zu setzen. Eine kurze Correspondenz mit solchen Gelehrten würden ihn weiter bringen als das Studium vieler Werke, denn kaum irgendwo sonst, als in der Spectralphotographie, gilt, dass etwas Praxis manchmal mehr nützt als viele Theorie.

b) Das Photographiren des Coronaspectrums. Da das Coronalicht nicht besonders hell ist, und die Expositionszeit gewöhnlich doch etwas länger dauern muss, weil die markirtesten Linien im Grün liegen, so wird man hier immer einen Spectrograph von mittlerer Dispersionskraft anwenden müssen. In neuester Zeit haben sich mit dieser Aufgabe DESLANDRES in Paris auf seiner afrikanischen Expedition und G. HALE in Nord-Amerika beschäftigt. Letzterer construirte einen speciellen »Coronographen«, mit dem er auch nebenbei das Spectrum der Corona photographirte. In Betreff dieser selten vorkommenden Arbeit mögen die Leser auf die bezüglichen Abhandlungen der beiden Gelehrten verwiesen sein.

c) Das Photographiren des Spectrums von Mond, Planeten und Kometen. Das Photographiren des Spectrums unseres Trabanten kann nur wenig Interesse bieten, da es, wie bekannt, nichts weiter als ein schwaches Sonnenspectrum ist. Weit mehr Interesse würde das systematische Photographiren der Spectra der grossen Planeten bilden. Obgleich das Licht dieser Körper scheinbar hell ist, so erscheint es im Spectroskop doch ziemlich schwach, weil die Lichtfülle sich auf eine beträchtliche Oberfläche vertheilt, und nicht wie bei einem Fixstern nur als leuchtender Punkt auftritt. Verfasser hatte die Absicht, das Spectrum der grossen Planeten von Zeit zu Zeit zu photographiren, und liess zu diesem Zweck in seiner Werkstätte einen besonderen Spectrographen herstellen. Doch wurde er durch Amtsgeschäfte anderweitig so in Anspruch genommen, dass nur ein erster Versuch, das Spectrum des Jupiter zu photographiren — dieser freilich mit bestem Erfolg — gemacht werden konnte. Ich kann daher hier nur das Instrument schildern, welches hinsichtlich einiger wesentlicher Neuerungen noch wenig bekannt ist. Der Apparat wurde zur Anstellung solcher Untersuchungen construirt, bei denen es auf die ultravioletten Strahlen nicht ankommt, und desshalb wurde der Einfachheit wegen ein Prisma *à viscon directe* gewählt, und als Collimator und Projectionslinse zwei achromatische Linsen, letztere, damit die Cassette nur eine ganz geringe Neigung zu bekommen brauchte. Er ist besonders zur Aufnahme von Planetenspectren angefertigt und besonderes Gewicht darauf gelegt, dass man jeden Augenblick sehen kann, ob sich der Planet auf der Spalte befindet und ob centrisch oder excentrisch. Zu diesem Zweck ist ein besonderes kleines Fernrohr F' (Fig. 81) angebracht worden. Der ganze Apparat, der im Durchschnitt in Fig. 81 dargestellt ist, ist eigentlich auf der Scheibe EE aufgebaut, welche mittelst eines grossen VOGEL'schen Adapteurs (wie wir einen solchen später werden kennen lernen) mit dem Fernrohr verbunden ist. Auf EE ist links eine gewöhnliche Spaltvorrichtung S bei F aufgesetzt und zwar so, dass man demselben eine drehende Bewegung um die optische Axe ertheilen kann, um die Spalte der brechenden Kante des Prismas parallel zu stellen. Der Spaltbacken lässt sich mit einer Mikrometerschraube

einstellen, an deren Trommel s' und dem Index i die Spaltweite abgelesen werden kann.

Rechts auf EE ist ein dickes Rohr C aufgesetzt, welches den Apparat trägt. Am rechten Ende ist nun dieses Rohr mit einer Aluminiumplatte DD verschlossen, welche die mit Zahnstange und Trieb tt verstellbare Collimatorlinse L aufzunehmen bestimmt ist. Das Auszugsrohr r' der Linse hat eine Theilung, die man durch ein, für gewöhnlich geschlossenes Fensterchen f' ablesen kann. Auswendig trägt die Scheibe DD das Prismenrohr AA, welches durch drei Schrauben bb mit ihr verbunden ist. Das Prisma ist von Dr. M. Pauly in Mühlberg a. d. Elbe aus Jenenser Specialglas geschliffen worden und ist für violette Strahlen besonders durchsichtig. Auf das Rohr AA ist abermals mit drei Schrauben $c\ c$ das Projectionslinsenrohr B aufgesetzt, in welchem sich durch den Trieb R das Rohr $r\ r$ mit der Linse L' verschieben lässt. Die Verschiebung ist ebenfalls auf einer Theilung ablesbar. Endlich ist auf der Röhre B mit drei Schrauben $g\ g$ die Camera K befestigt, welche ebenso wie die Platte EE aus Aluminium hergestellt ist. Bei hh trägt die Camera einen hölzernen Ansatz mit einer Cassette »System Gothard«, die auch zum grössten Theil aus Aluminium besteht.



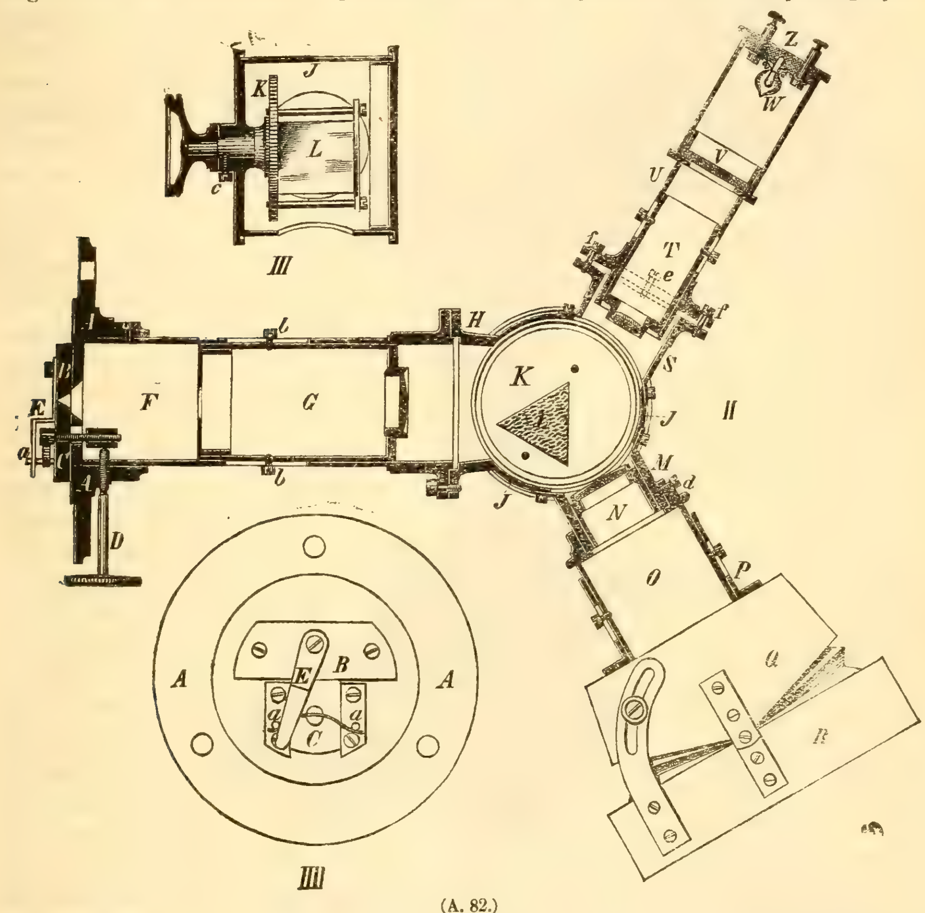
(A. 81.)

Nicht uninteressant ist die Controlvorrichtung des Apparates, welche bei F sichtbar ist. Sie ist eigentlich ein kleines Fernröhrchen, dessen Objectiv bei 7 und dessen Ocular bei 4 liegt. Vor dem Objectiv sitzt ein Prisma, und die Röhre 3 lässt sich in 2, welche durch die Flantsche 1 mit C verbunden ist, leicht und präcise verschieben. Wenn nun das Fernrohr die Stellung hat, wie die Figur sie zeigt, dann werden die Strahlen vom Prisma bei 7 aufgefangen und nach 4 reflektirt. Man sieht also die Spalte und den Stern, gleichzeitig ob sich letzterer auf der Spalte befindet. Wenn man exponiren will, hat man nur das Rohr 3

mit Hilfe des Knopfes 5 und der Hebel 6, 9, 10 zurückzuziehen, damit man dem Strahlenkegel einen freien Lauf auf die Collimatorlinse *L* und weiter in dem Apparat gestattet.

Der Apparat giebt mit dieser optischen Einrichtung etwa 30 *mm* lange Spectra von der präcisesten Schärfe.

Wir haben jetzt noch drei Spectrographe zu erwähnen, die ausschliesslich für solche Aufnahmen gemacht sind, bei denen es nicht nur auf das Fixiren des sichtbaren Spectrums ankommt, sondern wo man auch die weit im Violett, sogar die im Ultraviolett liegenden Theile des Spectrums auf der photographi-



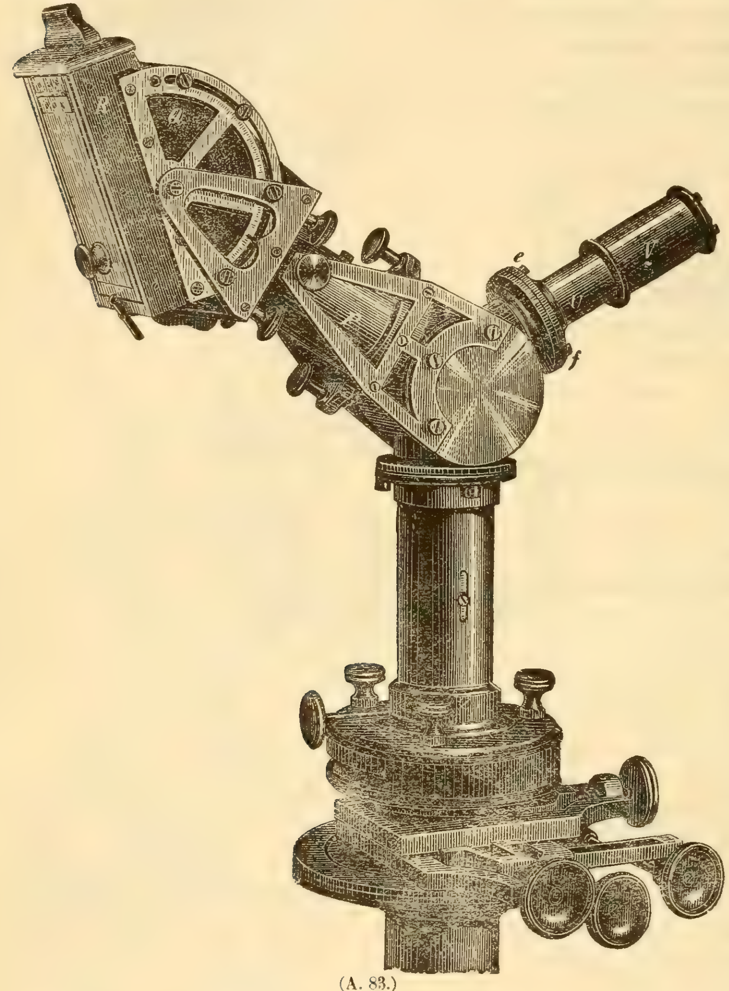
(A. 82.)

schen Platte zum Vorschein bringen will. Bei diesen Apparaten ist die Anwendung von Glas völlig ausgeschlossen, und man muss den optischen Theil aus solchen Medien herstellen, welche die brechbareren Strahlen des Spectrums nicht völlig absorbiren. Solche Medien sind Kalkspath, Quarz und Flussspath. Da nun letzterer in grösseren Blöcken in schlierenfreien Stücken sozusagen gar nicht vorkommt, so ist man genöthigt, sich auf die ersten beiden zu beschränken.

An erster Stelle nennen wir als besonders praktischen Siderospectrographen den Gothard'schen, welcher eigentlich, wie Gothard selbst sagt, nach des Verfassers Ideen entstand.

In den Fig. 82 und 83 ist der Apparat in Durchschnitt und Ansicht dargestellt, in beiden Abbildungen sind die gleichen Theile auch mit denselben Buchstaben bezeichnet, dieselben also ohne weiteres vergleichbar.

Die Spalte ist auf einem Messingschieber *B* montirt; die eine Spaltbacke *B* ist auf *A* festgeschraubt, die andere *C* aber durch die Schraube *D* verstellbar. Beide sind aus Messing gearbeitet und blank versilbert; vor der Spalte ist ein zweimal rechtwinklig gebogenes Deckblättchen *E* angebracht, welches die eine Spalthälfte immer zudeckt, so dass die Aufnahme zweier verschiedener Spectra ermöglicht wird. Die Nebenfigur IIII zeigt die Anordnung in der Vorderansicht ganz deutlich. In einem Ansatz der Scheibe *A* ist das Messingrohr *F* festgeschraubt, und in diesem befindet sich ein zweites Rohr *G*, welches die planconvexe Collimatorlinse aus Quarz nebst dem Diaphragma trägt, welch letzteres den Zweck hat, die bei einem Spectroskop so leicht auftretenden störenden Reflexe abzuhalten. Das Rohr *G* ist verstellbar, um die Spalte in den Brennpunkt des Collimators bringen zu können. Nach erfolgter Einstellung wird das Rohr mittelst der Schrauben *bb* festgeklemmt. Das Collimatorrohr ist auf das Prismengehäuse mit einer Flantsche befestigt, so dass man die Spalte mit der brechenden Kante des Prismas parallel stellen kann.



(A. 83.)

Das Prismengehäuse *J* besteht aus einem starkwandigen Messingrohr, welches einerseits mit einem angelötheten Boden, andererseits mit einem abnehmbaren Deckel geschlossen ist. In Boden und Deckel ist eine kreisförmige Nute eingedreht, welche zur Führung der an den Rohrstücken *M* und *S* sitzenden cylindrischen Segmente dient. Da die Segmente aus passenden Rohren ausgeschnitten sind, so erhält man in dieser Weise eine sehr solide und einfache Führung um die Axe des Prismengehäuses, was die Einstellung der Camera für das Minimum der Ablenkung des Prismas sehr erleichtert. Jedes Segment hat vier Schrauben, mit denen es sich auf das Mutterrohr des Prismengehäuses festklemmen lässt.

Das Prisma ist aus isländischem Doppelspath und auf einem Tischchen *K* befestigt, mit demselben um die Axe des Gehäuses drehbar, um das Prisma auf das Minimum der Ablenkung einstellen zu können. Nach erfolgter Justirung kann man es dann mit der Schraube festklemmen.

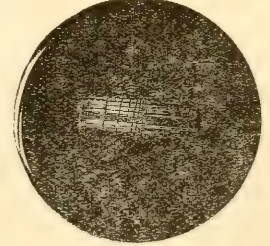
Der photographische Theil besteht aus einer der Collimatorlinse ganz ähnlichen planconvexen Quarzlinse *N*. Beide haben 26 *mm* Oeffnung und 105 *mm* Brennweite. Die Linse ist im Rohr *M* unverrückbar befestigt, und an ihm befindet sich die aus schwachem Holz gefertigte Camera. Auf das Rohr wird das Rohr *O* aufgeschoben und nach erfolgter Justirung mit den Schrauben *d* fixirt, auf dieses wird dann erst das die Camera tragende Rohr *P* geschoben.

Die Camera selbst besteht aus zwei Theilen, und zwar aus dem mit dem Rohr *P* verbundenen Theile *Q*, und aus dem um ein Charnier drehbaren Rahmen *R*, welcher zur Aufnahme der Einstellscheibe oder Cassette mit einer Nute versehen ist. Beide Theile sind mit Lederbalg untereinander verbunden, um Nebenlicht abzuhalten.

Der Rahmen muss wegen der nicht achromatischen Linsen gegen die optische Axe ziemlich stark geneigt sein, damit die Linien von verschiedener Brechbarkeit auf der photographischen Platte alle gleich scharf erscheinen. In der günstigsten Lage, die sich nur experimentell finden lässt, wird derselbe durch ein passendes Bogenstück festgeklemmt. Das vorläufige Justiren wird man am besten durch die Pointirung des Spectrums mit einem Mikroskop besorgen, wobei man immer das Sonnenspectrum zu Hilfe nehmen muss. Man sollte diese Operation aber nie auf einer Mattscheibe, sondern immer auf einer Spiegelplatte vornehmen, auf der man äusserst feine Striche mit einem Schreibdiamanten einritzt. Die beiden beigegebenen Cassetten nehmen Platten von 65 *mm* Länge und 20 *cm* Breite auf.

Zur schnelleren Orientirung der Linien wünschte v. GOTHARD eine Scala mit dem Spectrum mitzuphotographiren, und zu diesem Zweck brachte er an dem Prismenkasten ein drittes Rohr *U*, *V* an. Bei *V* befindet sich eine photographirte Scala, welche mit einer Glühlichtlampe *W* beleuchtet wird.

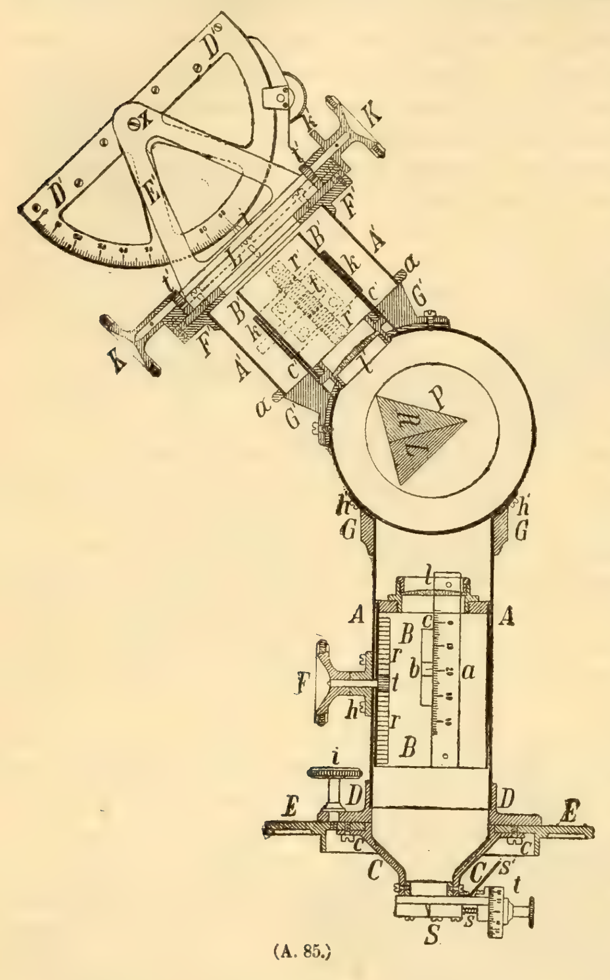
Die Belichtungszeit bei sternspectrographischen Aufnahmen ist sehr verschieden. Bei den hellsten Sternen des ersten Typus, wie z. B. Sirius und Wega, sind schon einige Secunden genügend, wenn man ein Fernrohr von wenigstens 25 *cm* Oeffnung anwendet. Dabei wird man allerdings nur einen schmalen Lichtstreifen bekommen, welcher bedeutend unterexponirt sein wird. Will man bei diesen Sternen ein vollkommen ausexponirtes Spectrum erhalten, so muss man die Platte doch zwei Minuten belichten. Das Spectrum der gelben Sterne erster Grösse gebraucht aber immer je nach der Intensität der gelben Färbung 10—15 Minuten; rothe Sterne des Typus III*a* brauchen eine noch bedeutendlängere Zeit. Um ein breiteres Spectrum zu bekommen, in dem die Linien deutlich hervortreten, verstellt man am besten den Regulator des Triebwerkes, wobei aber zu beachten ist, dass die Spalte parallel der täglichen Bewegung stehen muss (eine Regel, die übrigens stets befolgt werden muss).



(A. 84.)

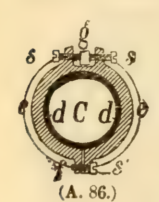
Fig. 84 zeigt ein Spectrum in natürlicher Grösse, wie es v. GOTHARD mit dem eben beschriebenen Apparat von α Lyrae und α Aquilae erhielt. Die Belichtungszeit betrug hierbei am $10\frac{1}{4}$ zölligen BROWNING'schen Spiegelteleskop 10 Minuten.

Einen etwas vollständiger construirten und vom Verfasser gearbeiteten Spectrographen stellt die Fig. 85 dar. Beim optischen Theil dieses Apparates ist ebenfalls das Glas vermieden worden. Ich habe anstatt des Kalkspatprismas ein CORNU'sches Doppelprisma *RL* verwendet, welches mit Glycerin zusammengekittet ist. Die beiden Theile des Prismas mit je 30° brechendem Winkel sind aus rechts und links drehendem Krystall angefertigt. Die Dispersion des Quarzes ist allerdings etwas geringer als jene des Kalkspaths, jedoch ist die Definition eine viel exactere. Das Instrument ist ebenso wie das vorige auf einer kräftigen Metallscheibe *EE* auf gebaut, die abermals auf einem später zu beschreibenden VOGEL'schen Adapteur angebracht wird. Auf die untere Seite von *EE* ist mit 3 Schrauben *cc* der Conus *CC* aufgesetzt, welcher die Spaltvorrichtung *S* aufzunehmen hat. Der bewegliche Spaltbacken wird mit einer Mikrometerschraube *s* bewegt und die Spaltöffnung auf der Trommel *t* durch den Diagonalspiegel *S'* ausserhalb des Instrumentes ablesbar gemacht.



(A. 85.)

Besonders wichtig ist es, dass man bei einem Spectroskop oder einem Spectrographen die Spalte leicht mit der brechenden Kante des Prismas parallel stellen kann. Wenn diese Anordnung auf einem schon vorhandenen Apparat nicht getroffen wurde, so sollte man die kleine Umänderung nicht scheuen. Bei meinem Spectrographen lässt sich der ganze Conus *CC* in einer genauen Führung um die Schrauben *cc* etwas verstellen, und mit dieser einfachen und soliden Vorrichtung kann die Correction leicht vorgenommen werden. Wo jedoch eine solche fehlt, da würde Verfasser zu der in Fig. 86 abgebildeten greifen. Hier ist *C* die optische Axe des Collimatorrohres, in welches das Rohr *dd* eingeschoben ist, auf dieses ist der aufgeschnittene Ring *ee* aufgezogen, welcher nach erfolgter roher Justirung auf *dd* mit der Schraube *S'* und der Nase festgeklemmt wird. Im Verschlusstück des Collimatorrohres *C* sitzt eine Anschlagschraube *g*, gegen welche die beiden Schrauben *ss* pressen, mit Hilfe deren die feinste Justirung bewerkstelligt werden kann.

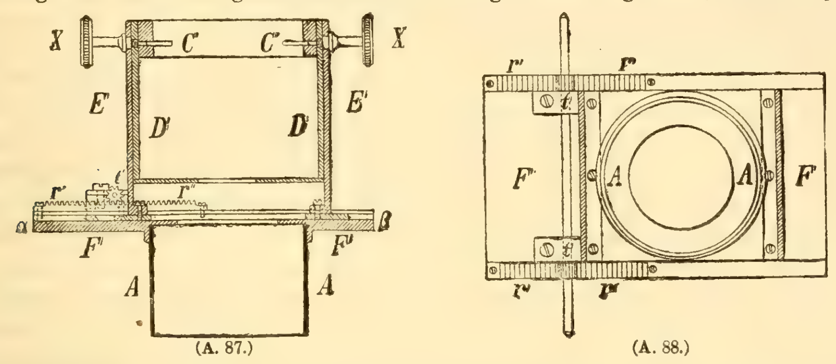


(A. 86.)

Auf die obere Fläche von *EE* wird nun die Scheibe *DD* aufgesetzt, welche

in EE eine solide Führung hat. Die beiden Scheiben werden mit 3 Kopfschrauben zusammengehalten. In DD ist das Collimatorrohr AA eingelöthet, in welchem sich das innere Rohr BB sehr genau durch den Trieb Fht und die Zahnstange rr bewegen lässt. AA trägt eine Millimetertheilung a, BB einen Nonius b, der in einem Schlitz gleitet. l ist die Collimatorlinse aus Quarz. Das Prismengehäuse P, die Befestigung des Prismas, die Verbindung des Collimatorrohrs und der Camera ist genau so, wie bei dem vorher beschriebenen Instrument. Dagegen weicht die Camera selbst und ihre ganze Anordnung von der GOTHARDschen sehr ab, sodass ihr doch einige Zeilen gewidmet sein mögen.

Die Camera im Ganzen besteht im Wesentlichen aus drei Haupttheilen: 1) der Camera im strengen Sinne, 2) dem Verbindungsstück derselben mit dem Prismengehäuse und 3) der Fassung der Cameralinse. Wir werden aber die Beschreibung mit 2 anfangen. Dieses Verbindungsstück besteht aus einem dicken Messingrohr $A'A'$, welches bei $\alpha\alpha$ auf dem massiven Messingstück $G'G'$ qefestigt ist. $G'G'$ ist genau auf das Prismengehäuse aufgedreht, und entspricht



(A. 87.) (A. 88.)

dem Führungssegmente beim GOTHARD'schen Spectrographen. Auf dem äusseren Ende des Rohres $A'A'$ ist die viereckige Platte FF (auch Fig. 87 und 88) befestigt, auf der sich eine weitere Platte β (Fig. 87) durch den Trieb $t't'$ und die beiden Zahnstangen $r'r'$ verschieben lässt. Auf dieser (L, Fig. 85 oder β, Fig. 86) ist die eigentliche Camera aufgebaut, deren Construction vollkommen von v. GOTHARD herrührt und von ihm für mich gemacht wurde. Auf der oben erwähnten Platte sind zwei A-förmige Ständer angebracht, zwischen denen sich dann die eigentliche Camera DD um den Zapfen X drehen lässt. Es ist nun noch zwischen den beiden Halbkreisen ein Rahmen aus Holz befestigt, der mit seiner Nute bei CC (Fig. 87) sichtbar ist; hierhinein passt die Cassette.

Wie schon erwähnt wurde, muss die Platte eine gewisse Neigung erhalten, damit alle Spectrallinien scharf erscheinen. Um die Neigung experimentell finden zu können, ist die Theilung auf DD vorhanden. Die Camera ist also eigentlich ein halber Cylinder, dessen Fläche mit Blech bedeckt ist, und der nur dort einen Ausschnitt hat, wo die Strahlen gerade vom Prisma eindringen können. Der Halbcylinder bewegt sich in einer Sammtführung, damit kein fremdes Licht in die Camera fallen kann. Nach erfolgter Justirung der Neigung wird der Halbcylinder mit der Klemmschraube k' festgeklemmt.

Es war früher von der Verschiebung der Camera auf der Platte β die Rede. Diese hat nun den Zweck es zu ermöglichen, dass 6 Spectra auf einer und derselben Platte neben einander photographirt werden können. Sie erfolgt mit dem erwähnten Trieb, an dessen beiden Enden die Knöpfe KK befestigt sind. Der eine derselben trägt bei k' eine kleine Scheibe, an deren Peripherie sich ein

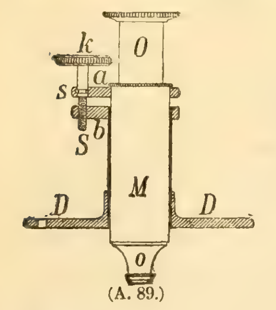
Einschnitt befindet, in den eine Feder einschnappt. Eine Umdrehung dieses Knopfes, welche durch das Einschnappen der Feder hörbar gemacht wird, genügt, um die Camera soviel weiter zu führen, dass die beiden Spectra nicht aufeinanderfallen. Eine kleine, etwa bei L, Fig. 85 befindliche, aber in der Abbildung nicht sichtbare Klappe im Innern dient zur Belichtung.

Der dritte Theil der Camera ist eigentlich die Fassung der Cameralinse l'. Ein Rohr CC (Fig. 85) ist ebenfalls in den Messingblock $G'G'$ eingelöthet, in das sich das Rohr $B'B'$ leicht einschiebt. In dieses ist die Cameralinse l' gefasst. Das Rohr lässt sich mit dem Trieb kkt und der Zahnstange $r'r'$ bewegen, und hat ebenso wie das Collimatorrohr eine Theilung mit Nonius, die sich auf 0·1 *mm* bei a ablesen lässt. Die Bewegung des Triebes t wird durch eine Oeffnung ausgeführt, die aber ebenso wie das Fensterchen, an dem man mit der Lupe die Theilung ablesen kann, nach erfolgter Justirung geschlossen wird. Uebrigens könnte auch, wenn sie offen blieben, kein fremdes Licht auf die Platte fallen, da das Rohr BB und die Platte $F'F'$ mit schwarzem Sammt verklebt sind.

Ein Controlocular liess sich leider nicht anbringen.

Wie bereits früher erwähnt wurde, ist es durchaus nothwendig, dass die Spalte genau in der Brennebene des Objectivs oder Spiegels sei. Die Einstellung geschieht wohl am einfachsten mit einem Mikroskop, da das Auge sich einer Loupe zu stark accommodirt. Ich habe eine von andern etwas abweichende Methode gewählt, die sich sehr gut bewährte, nur müssen die Theile des Apparates genau gearbeitet sein, besonders an der Stelle, wo das Collimatorrohr abgenommen und wieder aufgesetzt wird.

Nachdem die Scheibe EE, Fig. 85, auf den VOGEL'schen Adapteur aufgesetzt worden, schraubt man die drei Schrauben i heraus und nimmt den ganzen Spectrographen von EE ab und setzt statt seiner die Scheibe DD, Fig. 89, auf, welche so genau gearbeitet ist, dass sie sicher und solide in dieselbe Führungsnute passt, wie der Apparat. In dieser Scheibe sitzt das Mikroskoprohr M eingelöthet, in dem sich ein zweites Rohr mit dem Objectiv o und Ocular O, mit dem Feinbewegungsmechanismus $ksabS$ scharf auf die Spalte S (Fig. 85) einstellen lässt. (Das Mikroskop sollte nie mehr als höchstens 10 mal vergrössern.) Ist diese Einstellung geschehen, dann wird der zu photographirende Stern auf die ziemlich weit geöffnete Spalte gebracht und der Oculartrieb so lange bewegt, bis der Stern im Mikroskop durchaus scharf erscheint; dann kann man sicher sein, dass die Spalte genau in der Brennebene des Objectivs oder Spiegels liegt.



(A. 89.)

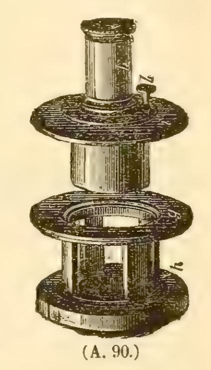
Diese mikroskopische Einstellung hat noch den weiteren Vortheil, dass man bei scharf eingestelltem Sternbild die Spalte schliessen und dann sofort den Sucher oder Pointer auf dieselbe centriren kann.

Nach der Einstellung wird das Mikroskop abgenommen und der Apparat aufgesetzt, der sofort zur Aufnahme bereit ist.

v. GOTHARD macht die Einstellungen in ähnlicher Weise, hierbei werden wir uns gleich mit dem schon mehrfach genannten VOGEL'schen Adapteur bekannt machen.

Es ist nicht allein lästig, sondern entschieden gefährlich, bei schweren Apparaten mit dem gebräuchlichen Gewinde am Ocularauszug zu operiren. Bei Fernröhren, die für astrophysikalische oder photographische Zwecke angefertigt

sind, findet man nun immer grosse Ocularauszugsrohre mit oft 10—12 *cm* grossem Durchmesser oder noch mehr. Eine Schraube von dieser Dimension in eine Oeffnung einzuschrauben, ist stets sehr misslich, zumal wenn der Apparat einseitig mit 10—12 *kg* Gewicht belastet herabhängt. Daher hat Prof. VOGEL die Vorrichtung, die in Fig. 90 abgebildet ist und Adapteur genannt wird angegeben. *h* ist ein Ring, der auf seiner rückwärtigen Seite ein Gewinde trägt, welches in den Ocularauszug des Fernrohrs eingeschraubt werden kann. In diesen Ring ist ein zweiter drehbar eingepasst, einem Positionskreis ähnlich, den ein dritter, in der Figur nicht sichtbarer Ring, vor dem Herausfallen schützt. Mit diesem drehbaren Ring ist das Gerippe, welches den weiteren Ring *g* trägt, mitgegossen, und alle diese bilden ein solides Ganzes. Ich liess auf meine Adapteure noch eine Theilung in ganzen Graden auftragen, wodurch die Einstellung der Spalte parallel zur täglichen Bewegung bedeutend erleichtert wird. Ist nun ein Spectrograph schon von vornherein für einen Adapteur construirt, so trägt er an seinem Spaltende kein Gewinde, sondeern ine Scheibe, wie alle beschriebenen Apparate. Diese Scheibe passt nun mit ihrer Nute genau auf den Ring *g*, wird auf denselben einfach aufgesetzt und mit 2, oder bei grossen Apparaten, mit 4 Schrauben mit ihm verschraubt. Das ist eine viel sicherere Operation, als wenn man einen schweren Apparat in das Gewinde des Ocularauszuges einschrauben muss.



(A. 90.)

Zur Einstellung der Apparate benutzte v. GOTHARD ein Ocular, welches in der Figur rechts bei *k* sichtbar ist. Dasselbe dient dazu, den Spectrographen rasch so umzustellen, dass die Spalte parallel zur täglichen Bewegung zu liegen kommt. Die Aufgabe wird wie folgt gelöst. Auf die Flantsche *g* wird die Scheibe *i* befestigt, die ein RAMSDEN'sches Ocular von etwas längerer Brennweite mit einem aus dünnem Silberdraht hergestellten Fadenkreuz trägt. Die Flantsche *g*, *i* und jene am Spectrographen sind mit möglichst sorgfältigen Führungsringen, die in Vertiefungen des Adapteurs (*g*) passen, versehen, und tragen am Rande je eine durch einen Sägeschnitt hergestellte Einstellungsmarke. (Verfasser hat die Theilung vorgezogen, um diese doch etwas rohe Marke zu umgehen). Eine gleiche Marke ist auch auf dem Ring *g* eingeschnitten. Durch die Anordnung wird die Möglichkeit geboten, die Flantsche des Spectrographen oder die Scheibe *i* schnell und sicher nach einander in genau die gleiche relative Lage zu *g* zu bringen. Das Ocular ist sammt dem aus zwei parallelen Fäden bestehenden Fadenkreuz auf der Scheibe *i* um die optische Axe drehbar, sodass die Fäden mit geringer Mühe in derselben Richtung zum Einschnitt auf *i* gebracht werden können, in der die Spalte gegen die Marke an der Spectrographenflantsche eingeschnitten ist. Nach dieser Justirung wird das Ocular mit der Klemmscheibe *i* festgestellt. Um nun den Spectrographen genau einstellen zu können, wird zuerst das Ocular auf dem Adapteur befestigt und die Flantsche *g* so lange gedreht, bis der Stern bei der Rectascensionsbewegung des Fernrohres zwischen den beiden Fäden bleibt. (Es ist übrigens viel vortheilhafter, nicht das Fernrohr zu bewegen, sondern den Stern zwischen den Fäden entlang laufen zu lassen.) Hierauf wird das Ocular entfernt und der Spectrograph aufgesetzt und so lange in der Flantsche *g* gedreht, bis die beiden Sägeschnitte zusammenfallen, was man mit dem Fingernagel fühlen kann. In dieser Lage wird dann der Spectrograph auf dem Adapteur befestigt und man kann sicher sein, dass der Stern,

wenn er mit dem Deklinationsschlüssel auf die Spalte gebracht wurde, dieselbe auch in Rectascension nicht mehr verlässt, falls das Aequatorial richtig justirt ist, was natürlich auch hier eine Hauptbedinguug ist. Diese Operation wird dadurch erleichtert, dass man die Spalte durch die vier Oeffnungen des Adapteurs immer zu sehen bekommt. Hiernach wird nun der ganze Ocularauszug auf die ein für allemal ermittelte und an der Millimetertheilung ablesbare Stelle gebracht, bei der das Bild des Sternes scharf in der Spaltebene erscheint.

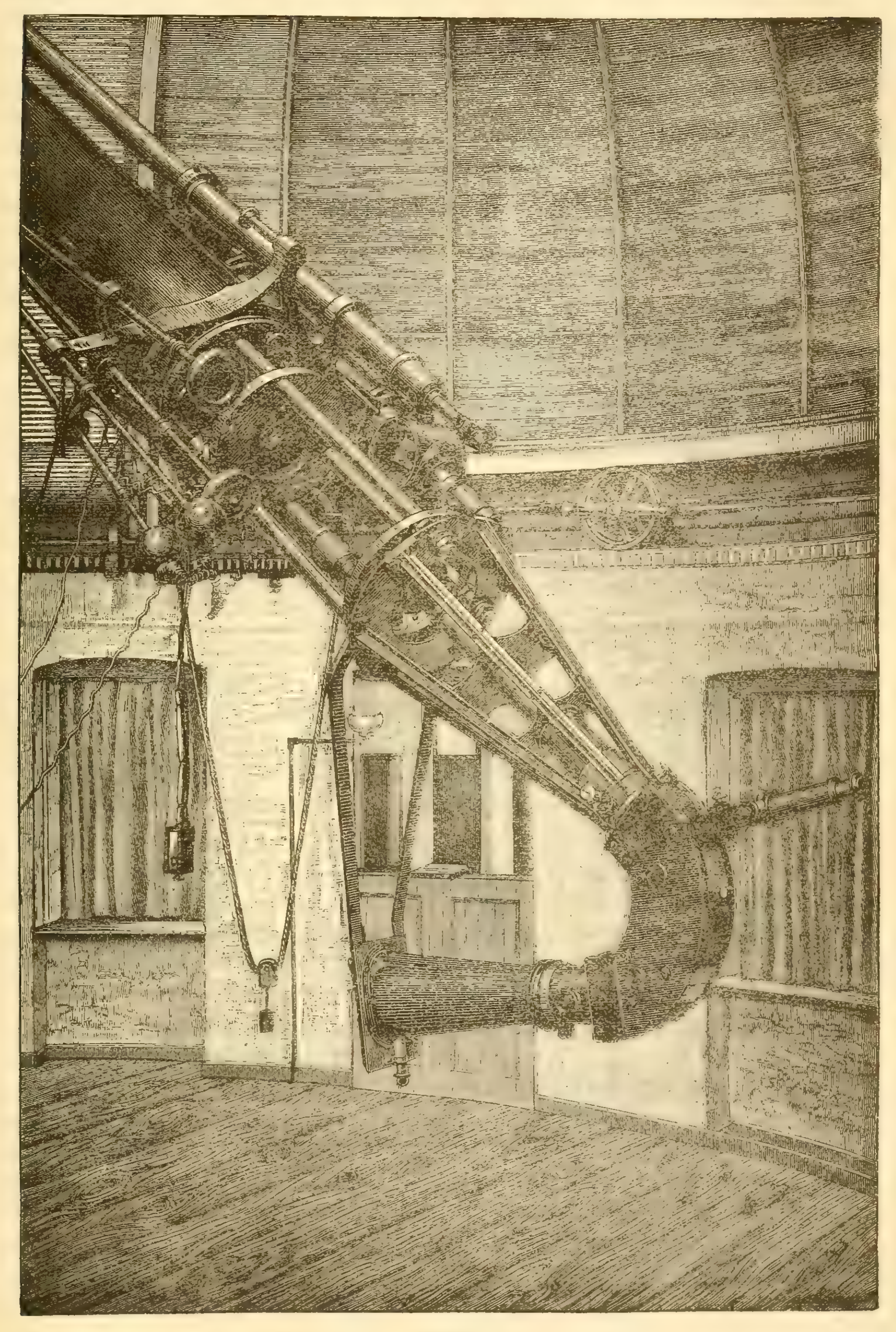
Huggins hat bei seinen hierher gehörigen Untersuchungen eine ganz andere Methode eingeschlagen. Er benutzte ebenfalls ein Quarzprisma, setzte aber den Spectrographen an Stelle des Fangspiegels in seinem 18zölligen Cassegrain'schen Reflector, sodass das Sternbild, welches vom grossen Spiegel entworfen wurde, scharf auf der Spalte erschien. Dann beobachtete er das Sternbildchen, welche auf der blank versilberten Spalte sichtbar war, durch die Oeffnung des Cassegrain-Spiegels mit einem als Pointer dienenden Galilei'schen Fernrohr. Der Spectrograph, den Gothard bei seinen Spectralaufnahmen von Sternen benutzt, ist bedeutend compendiöser und handlicher als der Huggins'sche, und dabei noch, was von Wichtigkeit ist, mit allen nur nöthigen Correctionsvorrichtungen versehen, die jenem fehlen.

Bisher haben wir nur Spectrographen mit geringer Dispersion erwähnt. Es ist klar, dass man wegen der Lichtschwäche der Sternspectren die Dispersion der Spectrographe nicht zu weit treiben darf, man würde sonst tagelang exponiren müssen. Indessen kommen doch Fälle vor, wo man auch eine grössere Dispersion verwenden kann, wo sich eine solche sogar als unumgänglich nöthig erweist. Es sind nun für verschiedene transoceanische Sternwarten von dortigen Künstlern recht schöne und sinnreiche Apparate dieser Art construirt worden, indessen können wir uns damit begnügen, den Spectrographen der Potsdamer Sternwarte zu besprechen, da dieser doch unter allen bekannten von grosser Dispersion den ersten Platz behauptet.

In Fig. 91 ist er abgebildet, wie er am Ocularauszug des Potsdamer zwölfzölligen Refractors befestigt ist. Der ganze Ocularkopf des Refractors ist abgenommen und an seiner Stelle befindet sich ein starkes Gestell aus drei eisernen Stangen, an dessen einem Ende der Spectrograph durch Schrauben feststellbar angebracht ist. Das Collimatorrohr sitzt der Stabilität wegen in einem conischen Gestell aus T förmigen stählernen Trägern, es ist in demselben durch einen Trieb beweglich angebracht um die jeweilige Stellung an einer Scala abzulesen. Auf dem Collimatorrohr ist das Prismengehäuse aufgebaut, welches der Festigkeit wegen sehr kräftig gemacht ist. In ihm befinden sich zwei stark dispergirende Rutherfurt-Prismen; andererseits ist an demselben die conische Camera befestigt, welche noch durch zwei Träger mit dem Collimatorgestell versteift ist, dadurch wird jede merkbare Durchbiegung verhütet.

Im Strahlenkegel des Objectivs ist nun eine mit Wasserstoff gefüllte Geissler'sche Röhre eingeschaltet, wodurch das Sternspectrum von der $H\gamma$-Linie, welche als Anhaltspunkt bei der Ausmessung des Spectrums dient, durchzogen erscheint. Die Controle, ob sich der Stern am Spalt befindet oder nicht, erfolgt durch ein kleines Fernrohr auf der rechten Seite des Prismengehäuses. Es ist so angebracht, dass ein Theil des Lichtes, welches auf die erste Fläche des ersten Prismas fällt und von dieser reflectirt wird, in das Objectiv gelangt, wodurch man im Gesichtsfeld die durch den Stern erleuchtete Spalte sieht. Die letztere wird nämlich von der Geissler'schen Röhre erleuchtet und der Stern erscheint in dieser erhellten Spalte als Punkt. Es ist dann sehr leicht, das Fernrohr mit

der Feinbewegung in Rectascension so zu erhalten, dass der Stern immer auf der Spalte bleibt.



(A. 91.)

Eine andere Controle ist noch am Cameraende vorhanden, und diese besteht aus einem mit einem totalreflektirenden Prisma verbundenen Ocular. Dieses kleine System ist ausserhalb der empfindlichen Platte, etwa dort, wo sich die

b-Gruppe des Sonnenspectrums befindet. Mittelst dieses Oculars kann der grüne Theil des Spectrums direkt beobachtet werden. Aber wegen der Schmalheit des Spectrums und seiner Lichtschwäche können in demselben Einzelheiten nicht beobachtet werden, und die Einrichtung bezweckt nur eine Controle für die Einstellung auf die Spalte. Wenn im direkt gesehenen Spectrum das Maximum der Helligkeit durch sanfte Bewegung des Deklinationsschlüssels hergestellt ist, befindet sich das Bild des Sternes in seiner besten Stellung auf der Spalte. Man kann sich dann im kleinen Fernrohr links den Anblick merken, den das Bild des Sternes in dieser Stellung auf dem Spalt gewährt, und lernt ihn hierdurch am besten für späterhin kennen.

d) Durchmusterungsaufnahmen mit dem Objectivprisma. Die einfachste Methode, photographische Aufnahmen der Spectra von Himmelskörpern, resp. Fixsternen zu erhalten, ist jedenfalls die mit dem Objectivprisma. Die Anwendung desselben für die spectroskopische Beobachtung der Gestirne stammt von FRAUNHOFER, der für diesen Zweck zwei Prismen anfertigte, eins mit 3 Zoll, das andere mit $4\frac{1}{2}$ Zoll Oeffnung und 37° 40′ brechendem Winkel. Später hat Pater SECCHI diese Methode wieder einführen wollen, verfiel aber in denselben Fehler wie sein grosser Vorgänger, indem er zu grosse Brechungswinkel (12°) anwandte. Ausserdem liess er ein solches Prisma von 6 Zoll Durchmesser schleifen und setzte es auf seinen neunzölligen Refractor. Dies Instrument hatte nun etwa 15 Fuss Brennweite, also ein Verhältniss 1 : 20, war also nicht sehr lichtstark; blendete er dasselbe nun gar mit dem Prisma auf 6 Zoll ab, so hatte er das Verhältniss 1 : 30 bekommen. Natürlich musste er so dem Ocularspectroskop gegenüber sehr im Nachtheil bleiben. Als ich ein PAULY'sches sechszölliges Prisma mit nur 5° brechendem Winkel auf meinen Sechszöller aufsetzte, erhielt ich wunderbar schöne Resultate, verband ich aber ersteres mit dem Zehnzöller, so war es dem Ocularspectroskop gegenüber beträchtlich im Nachteil; hinwiederum blieb das Ocularspectroskop stark zurück, als ich ein zehnzölliges Prisma von PAULY mit dem Zehnzöller verband.

Ob man nun das Objektivprisma zur spectroskopischen oder zur photographischen Beobachtung der Sternspectra anwendet, immer muss man es so einstellen, dass die brechende Kante entweder mit der täglichen Bewegung parallel oder senkrecht zu derselben steht. Man wird wohl in der Regel die erste Stellung wählen, da man dann mit der Kuppelspalte besser auskommt.

Wenn nun der Brechungswinkel auch noch so klein ist, so wird die Ablenkung doch immer einige Grade betragen. Entweder kann man daher die Einstellung am Kreis so vornehmen, dass man den Ablenkungswinkel zur Deklination addirt oder von ihr subtrahirt, oder man bringt am Fernrohr, wie es Verfasser that, noch einen zweiten Sucher an. Grosse Unkosten sind damit nicht verbunden, und will man mit dem Prisma auch photographiren, so ist eigentlich ein solcher zweiter Sucher fast unentbehrlich.

Längere Zeit versuchte S. MERZ ein Objektivprisma *à vision directe* herzustellen, lieferte auch ein solches von 3 Zoll Oeffnung für Herrn CAMPHAUSEN in Rüngsdorf bei Bonn. Natürlich muss ein solches Prisma sehr viel Licht absorbiren, ausserdem war dieses kleine Stück fabelhaft schwer und für einen dreizölligen Refractor sicher unbrauchbar. Setzte man es aber auf den Siebenzöller, so erreichte man ebenso wenig, da man letzteren damit wieder auf 3 Zoll abblendete, sodass man also in doppelter Weise an Licht verlor, erstens durch die Ablenkung, dann durch die Absorption in der Glasmasse.

In neuester Zeit wird nun das Objektivprisma zur systematischen Durchmusterung des Himmels von EDW. PICKERING in Cambridge (Mass.) angewandt. Diese Methode hat der anderen gegenüber, wo man mit einem Spaltapparat photographirt, den Vorzug, dass, während man mit letzterem nur ein einziges Sternspectrum photographiren kann, man mit dem Objektivprisma auf einmal soviel Sternspectra aufnehmen kann, als Sterne im Gesichtsfeld sind.

Die ersten Versuche machte PICKERING mit einem Prisma von 30°, sah jedoch bald ein, dass die Dispersion eine viel zu grosse war; er liess dann später Prismen aus gewöhnlichem weissen Spiegelglas mit einem Brechungswinkel von 5° bis 15° anfertigen und setzte diese vor das photographische Objectiv von 20 *cm* Oeffnung. Natürlich hatten die Prismen den gleichen Durchmesser wie das Objectiv, damit sie von letzterem nichts abblenden. Sodann bediente sich PICKERING eines achtzölligen, später eines elfzölligen Objectivprismas mit 15° Brechungswinkel, welches zu einem elfzölligen Refractor gehörte. Zur Erzielung einer stärkeren Dispersion wendete er dann mehrere solcher Prismen an, ein gewiss nicht zu empfehlendes Verfahren, da erstens die Prismenflächen ausserordentlich gut gearbeitet sein müssen, sodann ist der Lichtverlust ein recht beträchtlicher, endlich wird eine solche Glasmasse schon recht schwer, wenngleich in Bezug auf letzteren Punkt die PICKERING'sche Angabe, wonach 4 solcher Prismen über 50 *kgr* gewogen haben sollen, in hohem Grade verwundern muss.

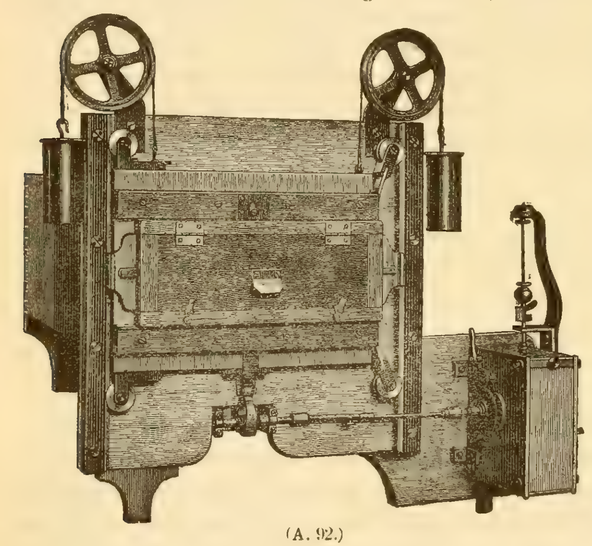
Gegenwärtig besitzt übrigens — beiläufig bemerkt — PICKERING schon ein vierundzwanzigzölliges photographisches Objectiv mit einem vierundzwanzigzölligen Objectivprisma.

Die Breite des Spectrums bei diesen Aufnahmen ist nun aber eine ganz minimale, und um auf einem Spectrum etwas zu erkennen, muss es wenigstens 1 *mm* breit sein. Um dies zu erreichen, wandte PICKERING Cylinderlinsen an, ein Verfahren, welches der Beobachter bald selbst als falsch erkannte. Man erreicht dasselbe, wenn man das Uhrwerk nicht folgen lässt, oder besser, wenn man den Regulator entweder vor- oder nachgehen lässt. Man erkennt dies aus folgender Erwägung; will man die feine Linie im Spectrum auf 1 *mm* verbreitern, so durchlaufen Aequatorsterne diese Breite in etwa 12 Secunden. Die längste angemessene Expositionszeit beträgt nun eine Stunde, daher ist es am besten, das Triebwerk so zu verstellen, dass es in einer Stunde 12 Secunden verliert oder gewinnt. Eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr verliert gegen Sternzeit in der Stunde etwa 10 Secunden, und so genügt es vollständig, das Triebwerk des Aequatoreals durch eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr reguliren zu lassen. Angenehmer ist freilich am Apparat ein Hilfstriebwerk, dessen Gang nach Belieben durch Einschalten von Hemmungen verschiedener Längen geändert werden kann. Es ändere z. B. eine derselben den Gang 12 Secunden in 5 Minuten, eine andere um ebensoviel in einer Stunde u. s. w. Hiermit wird dann dem Grössenunterschied von der 3·7 bis 6·1 Grössenklasse entsprochen. Da nun ein Stern 2. Grösse bei ruhendem Fernrohr noch eine Spectralphotographie liefert, so können unter Einschaltung der beiden Hemmungen Sterne der 6. bezw. der 8. Grössenklasse spectroskopisch photographirt werden. (Vergl. hierüber PICKERING's Schrift »An investigation on Stellarphotographie conducted on the Harvard College Observatory«, Mem. of the Americ. Academy Vol. XI).

Es giebt nun noch eine sehr sinnreiche Methode zur Erweiterung der Spectra von SCHEINER in Potsdam, bei der man sie aber nochmals, und am besten gleich etwas vergrössert vom Originalnegativ abphotographiren muss. Als PICKERING seine Cylinderlinse einführte, dachte er damit die störende Wirkung des Silber-

korns unschädlich zu machen, da er mit jener auch dieses in die Länge zog und dadurch unsichtbar machte. Scheiner hat dies in viel besserer und einfacherer Weise erreicht, denn während die Cylinderlinse nur eine beschränkte Veränderung in der Breite erlaubt, kann Scheiner dem Spectrum mit seinem Apparat eine beliebige Breite geben.

Das Princip desselben beruht darauf, dass die in einem Vergrösserungsapparat befindliche photographische Platte während der Expositionszeit in einer zur Längsrichtung des Spectrums normalen Richtung hin und her geführt wird. Wegen der Feinheit der Spectra muss diese Bewegung mit ausserordentlicher Genauigkeit ausgeführt werden, ferner muss sie mit constanter Geschwindigkeit erfolgen, weil sonst die Intensität des verbreiterten Spectrums eine ungleichmässige wird; endlich muss der Untergrund des Spectrums zu beiden Seiten desselben absolut undurchsichtig sein, weil sonst das nebenher eindringende Licht die Platte gleichmässig schwärzen würde. Ein Mattwerden des Spectrums ist nicht zu befürchten, da der Effekt derselbe ist, als wenn das Spectrum in vielfacher Wiederholung genau untereinander aufgenommen würde. Das Silberkorn verschwindet vollständig, indem jedes Körnchen in eine Linie über die ganze Breite des Spectrums ausgezogen wird. Wegen der zufälligen Vertheilung des Silberkorns entsteht eine gleichmässige Helligkeit, und nur grössere Flecken oder Stäubchen erzeugen falsche Linien, die aber in den meisten Fällen leicht von den wirklichen Linien unterschieden werden können.


(A. 92.)

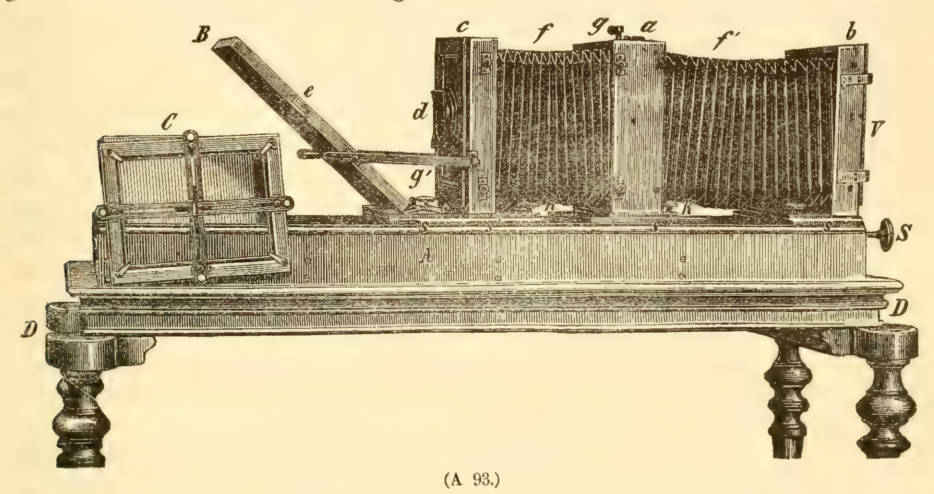
Die Einrichtung des Apparates ist aus Fig. 92 zu entnehmen. Vor der Vergrösserungslinse wird das Originalnegativ auf einem verstellbaren Spalt in der Weise befestigt, dass die beiden Spaltbacken genau mit der Begrenzung des Spectrums abschliessen, wodurch jedes seitliche Licht abgehalten wird. Die Weite des Spaltes richtet sich natürlich nach der Breite des betreffenden Spectrums.

Die Cassette selbst ist in einem beweglichen Rahmen befestigt, der vermittelst vier fein gearbeiteter Rollen, von denen zwei federnd anliegen, auf zwei am Kasten des Vergrösserungsapparates befindlichen Schienen hin und hergeführt werden kann. Die Bewegungsrichtung steht normal zur Richtung des Spaltes oder zur Längsaxe des Spectrums. Dieser durch Gegengewichte ausbalancirte Rahmen nebst Cassette ruht mit leisem Druck auf einem Excenter, dessen Form aus zwei gegeneinander gerichteten Spiralen gebildet ist, so dass bei gleichmässiger Drehung des Excenters ein Auf- und Niedergehen der Cassette mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt. Der Excenter wird selbst mit einem Uhrwerk getrieben, dessen gleichmässiger Gang auch bei wechselnder Belastung durch ein Federpendel garantirt ist. Das Laufwerk ist so regulirt, dass ein Auf- und Niedergang der Cassette in ungefähr einer halben Minute erfolgt. Da

die Umkehrpunkte praktisch nicht genau functionirend hergestellt werden können, so befindet sich im Innern des Apparates vor der Cassette ein Spalt, der mit auf- und abgeführt wird und der von etwas geringerer Breite ist als die ganze Bewegung beträgt, und der zu den Zeiten der Umkehr das Spectrum abblendet.

Die Linearvergrösserung des Apparates ist eine fünffache, die Breite des Spectrums ist zu 15 *mm* gewählt, so dass eine Breitenvergrösserung von etwa 150 erreicht ist. Selbstverständlich kann man leicht eine noch grössere Breite des Spectrums erlangen, wenn ein grösserer Excenter gewählt wird, aber natürlich muss dann auch die Expositionszeit eine bedeutend längere werden.

Oft kann man in die Lage kommen, eine astronomische oder spectroskopische Aufnahme vergrössern zu wollen, wobei es recht misslich ist, diese Operation mit einer gewöhnlichen Camera auszuführen. Abgesehen davon, dass die Vorbereitung zu einer solchen Vergrösserung mehr Zeitaufwand fordern würde, als die Durchführung der Arbeit selbst, würde man nur mit grösster Mühe unverzerrte Bilder erhalten, die nämlich nicht trapezartig bei quadratischem Original, oder oval bei rundem Original ausfallen würden. Es ist dann viel rath-



(A 93.)

samer, sich einen Vergrösserungsapparat zu construiren, mit Hilfe dessen man leicht und sicher jegliche Vergrösserung ausführen kann. Es muss aber jeder ernstlich gewarnt werden, solche Apparate in einer photographischen Handlung zu kaufen oder die Construction einem wenn auch noch so geschickten photographischen Tischler zu überlassen. Man würde kaum ohne weiteres etwas Brauchbares erhalten, weil der Tischler eigentlich kaum je weiss, um was es sich handelt. In Folgendem führen wir dem Leser einen Vergrösserungsapparat vor, wie ihn Verfasser allerdings auch mit Hilfe eines recht geschickten Tischlers, aber nach eigenen, ganz genauen Entwürfen hat anfertigen lassen, der allen Anforderungen vollkommen genügte.

Der Apparat, welcher in Fig. 93 abgebildet ist, steht gewöhnlich auf einem vierfüssigen Gestell; der Rahmen *A* kann aber auch abgehoben und so auf ein Fensterbrett gestellt werden, dass man mit dem Spiegel *B* direkt vom Himmel reflektirtes Licht in den Apparat bekommt. Die Aufnahmen können von 4×4 *cm* bis auf 16×21 *cm* vergrössert, oder umgekehrt können Bilder von 16×21 *cm* auf 4×4 *cm* verkleinert werden, oder es können damit Diapositive von 16×21 *cm* Original in derselben Grösse hergestellt werden. Dem Apparat ist nur eine Cassette für Platten von 16×21 *cm* beigegeben.

Die Cassette wird bei *b* von oben in den Rahmen *l'* eingeschoben und geht sehr exakt auf Metallführungen. Auch eine Einstellscheibe ist vorhanden, die beim Nichtgebrauch einfach an zwei Charnieren zur Seite geschlagen wird.

Der Aufbau des Apparates ist folgender. Auf dem oberen hochkantigen Rahmen *A* sind zwei Schienen aus sogen. gewalzten Flachdraht, der im Handel sehr gleichmässig dick und breit zu erhalten ist. Die Schienen sind so breit, dass sie vom Rahmen *A* nach innen um etwa 10 *mm* vorstehen, und sie dienen als Führung der Brücken *s*, *s'*, *s''*, *s'''*, die mit genau passenden Nuten versehen sind. Mittelst Klemmschrauben können die Brücken mit einem langen Gestänge (in der Figur nicht sichtbar) verbunden werden, bei der Cassette endigt dieses in Schrauben, die mit dem Knopfe *S* hin und her bewegt werden können. *S* dient zur Feinbewegung von *s'*, ein entsprechender unsichtbarer Knopf für die Brücke *s''*. Die Klemmungen können von der Einstellscheibe mit Schnur erfolgen.

Auf den Brücken *s*, *s'* und *s''* sind ebenfalls Schienen wie auf *A*, auf ihnen bewegen sich die Nuten der Rahmensockel *a* und *c*, und können mit den Schrauben *k* festgeklemmt werden. Der Rahmen *a* ist in der Mitte normal zur Hauptaxe des Instruments durch ein Brettchen in zwei Hälften getheilt; dieses trägt auf der linken, also vorderen Fläche das Objectivbrettchen, welches sich 3 *cm* weit vom Mittel nach oben oder unten verstellen lässt. An der hinteren Fläche der Scheidewand befindet sich eine mit schwarzem Sammet belegte Klappe, die zur Belichtung dient, und von oben durch den kleinen Elfenbeingriff *g* gehandhabt wird. Der Balg *f'* ist ein für allemal an den Rahmen *l'* und *a* befestigt, so dass er die eigentliche photographische Camera bildet. Vorn ist noch ein Rahmen *c*, welcher ebenso mit zwei Schienen versehen ist wie *b*, sodass man nöthigenfalls auch in diesen die Cassette lichtdicht einschieben kann. Der Rahmen *c'* dient zur Aufnahme der zu vergrössernden Platten in den Einlagen *d* und *C*. Von diesen Einlagen ist *d* ein Brett, auf dem bei *d* eine Messingscheibe befestigt ist, in der sich eine zweite leicht aber sicher drehen lässt. Sie hat vorne eine viereckige Platte, auf welcher man die zu vergrössernde Photographie (Negativ bis 9 × 12 *cm*) aufsetzen und mit zwei Federn festhalten kann. Die drehende Bewegung dient dazu, um z. B. die Aufnahmen eines Sternhaufens, Nebelflecks oder eines Kometen beim Vergrössern orientiren zu können. Die zweite Einlage *C*, die bei der photographischen Aufnahme des Apparates einfach auf den Sockel gesetzt abgebildet ist, nimmt Platten von 16 × 21 *cm* auf; dieselben werden mit den 4 Lamellen an den Ecken des Rahmens festgeklemmt, die mit Kopfschrauben angeschraubten 4 Leisten werden dann weggenommen. Diese Leisten haben Schlitze, wodurch sie mit den Knopfschrauben am Rahmen festgehalten und geklemmt werden. Die inneren Enden sind mit einer Nute versehen, in welche die Glasplatte hineingeht, und diese wird dann nach Einlegen in dieselbe durch eine kleine Pressschraube gehalten. Mit den 4 Leisten wird die Platte gefasst und nach Bedarf centrisch oder excentrisch eingestellt.

Der Balg *f*, der eigentlich zur Abhaltung von Seitenlicht dient, kann auch fortgenommen werden; er ist auf zwei Rahmen montirt, welche mit passenden Muttern versehen sind, in die die an den Rahmen *a* und *c* seitlich sichtbaren Schrauben mit geränderten Köpfen einpassen. Wenn diese 8 Schrauben gelüftet werden, so kann der Balg einfach entfernt werden.

Auf der Brücke *s* ist endlich noch ein Rahmen *B* befestigt, der auf der Seite bei *e* einen Spiegel trägt, während seine Hinterfläche ein Reissbrett darstellt. Der Spiegel lässt sich an 2 Charnieren in jeder Lage einstellen und mit

2 Leisten g' festklemmen. Wird nun der Rahmen B von der Brücke s herausgezogen, umgekehrt und vertical gestellt, wo er ebenfalls mit den Leisten g' festgeklemmt werden kann, so kann auf seiner Hinterfläche eine beliebige Zeichnung oder Photographie mit Reissnägeln befestigt und reproducirt werden.

Als Objectiv verwendet Verfasser entweder einen Gruppen-Antiplaneten, einen Portraitantiplaneten No. 1 oder einen 7 *mm* Weitwinkel-Aplanaten von Steinheil, die zu diesem Zweck reichlich genügen.

Die Schienen tragen Theilungen, welche das Einstellen sehr erheblich erleichtern.

Endlich wäre noch einiges über das Entwickeln der Sternaufnahmen zu sagen. Selbstredend kann man jeden Entwickler verwenden; Gothard ist conservativ und arbeitet mit Pyrogallus, in Potsdam ist man noch conservativer und arbeitet mit Eisen. Mit beiden Entwicklern werden gute Resultate erzielt, da sie von geübten Händen benutzt werden. Es mag aber bemerkt werden, dass Gothard seine Aufnahmen während der Entwickelung gar nicht ansieht. In der That würde es ihm auch wenig nützen, erstens geben die Sterne die feinsten Punkte und zweitens ist das Laboratorium beim Gebrauch orthochromatischer Platten so dunkel, dass man diese zarten Bilder gar nicht erkennen kann. Gothard entwickelt also stets nach der Zeit, etwa 12—15 Minuten je nach den Umständen, wäscht dann die Platte ab und fixirt. Wollte man im Gefühl der Unsicherheit bei der Arbeit die Platte herausnehmen und an der rothen Lampe prüfen, so würde man stets verschleierte Platten erhalten. Gegen die Methode, nach der Zeit zu entwickeln, ist nichts einzuwenden, nur darf man dabei keinen drastischen Entwickler, wie z. B. Rodinal oder Rapid-Hydrochinon verwenden.

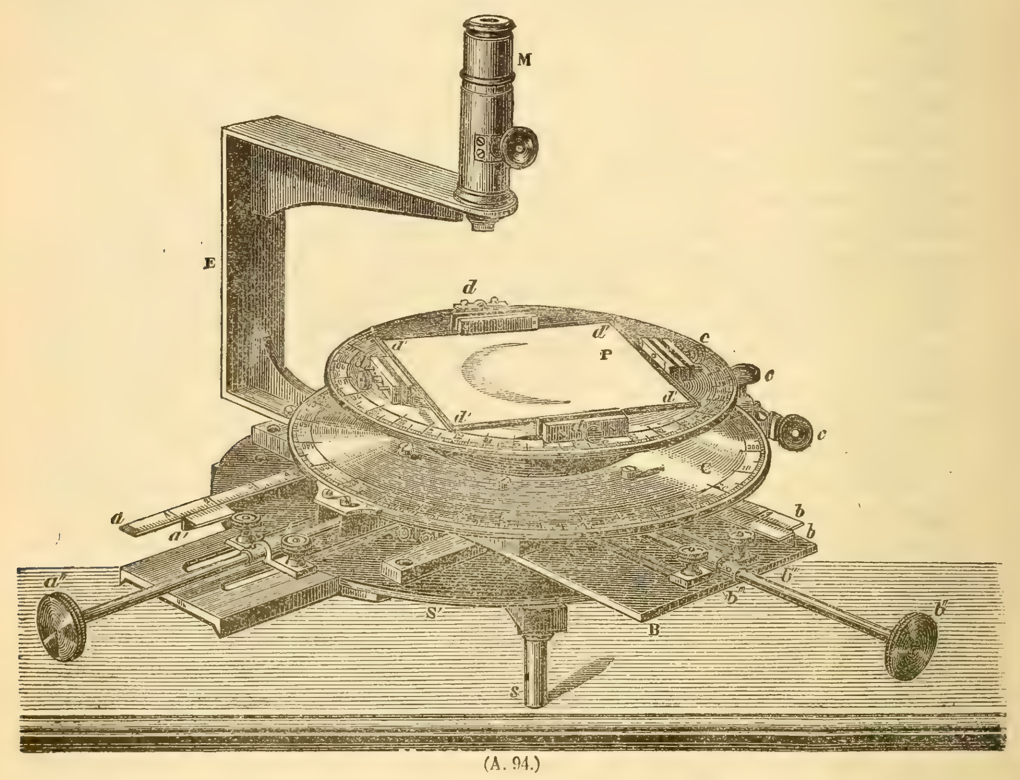
6. Das Ausmessen der Photogramme.

Wenn man eine noch so schöne photographische Aufnahme des gestirnten Himmels, von Nebelflecken, von einem Kometen, der Sonne oder einem Spectrum macht, so kann diese direkt nur zur Untersuchung der Oberflächenbeschaffenheit des Objects oder für Demonstrationszwecke dienen. Die Photographie ist aber ein Beobachtungshilfsmittel geworden, mit dem man die genauesten und exaktesten Angaben liefern kann, wenn sie entsprechend verwerthet wird, wenn man die Photogramme ausmisst. Wir wollen nun kurz die Methoden und Hilfsmittel angeben, welche die Photographie zur messenden Astronomie umwandeln und beginnen dabei wieder mit der Sonne.

a) Die Ausmessung der Sonnenbilder. Man machte früher Sonnenfleckenbeobachtungen mit einem Projectionsapparat, d. h. das vom Ocular vergrösserte Sonnenbild wurde auf einem Schirm aufgefangen und auf diesem entweder ein im Ocular aufgespanntes Fadensystem mitprojicirt, oder es war das Fadensystem auf dem Schirm aufgezeichnet. Da die Sonne in Folge der täglichen Bewegung durch das Gesichtsfeld läuft, so passirt sie also auch auf dem Schirm die Fäden von Ost nach West. Es ist nun das eine Fadensystem in einem Meridian, ein zweites senkrecht dazu parallel dem Aequator vorhanden. Ein Sonnenfleck wird demnach im Sinne der Rectascension nach der Uhr, im Sinne der Deklination mit einer am Schirm aufgetragenen Scala oder einem im Ocular angebrachten Faden gemessen. Man erhält also rechtwinklige Coordinaten. Bei der photographischen Methode haben wir dasselbe wie bei der Projectionsmethode, die Platte vertritt die Stelle des Schirms, der Projectionsapparat verwandelt sich in eine Camera, und die Fäden befinden sich hier im Ver-

grösserungssystem, werden also mit der Sonne mitphotographirt und dienen zur Orientirung.

Denken wir uns nun einen Apparat, auf welchen diese photographische Platte mit dem Sonnenbild aufgelegt und mit zwei senkrecht zu einander stehenden Schrauben messbar verschoben werden kann, und denken wir uns, dass diese Verschiebung am Sonnenbild mit einem Mikroskop beobachtet werden kann, welches mit einem Fadennetz versehen ist, und denken wir uns endlich, dass diese Verschiebungen im Sinne der Rectascension und Deklination geschehen, so können wir mit der, wenn wir sie so nennen wollen, Rectascensionsschraube den Aequatorealdurchmesser der Sonne und mit der zweiten senkrecht zur ersten liegenden Schraube den Polardurchmesser derselben messen. Natürlich können alle am Bild sichtbaren Objecte mit gemessen werden.



(A. 94.)

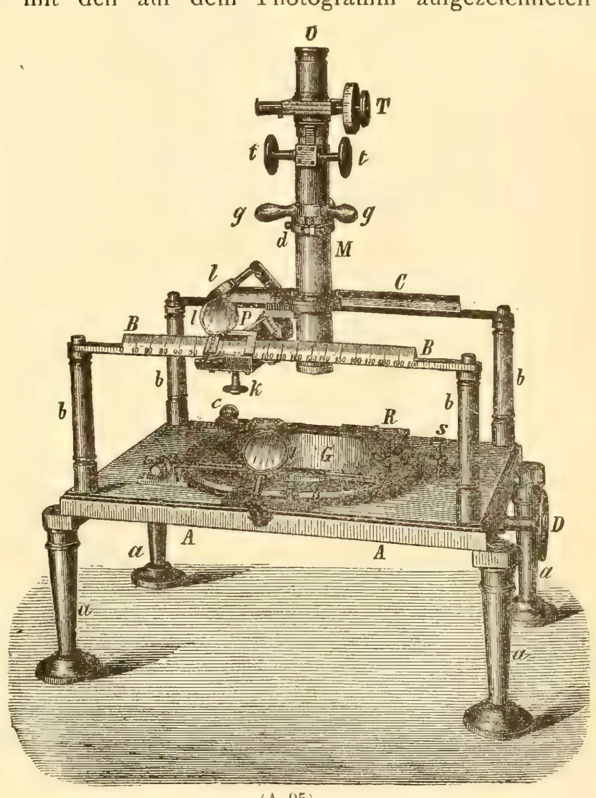
Es mag hier bemerkt werden, dass man auch mit einer einzigen Schraube und einer Bewegung auskommen würde, wenn der Apparat so modificirt würde, dass man das Sonnenbild genau um 90° drehen könnte, d. h. wenn er mit einem Positionskreis versehen wäre. Es ist übrigens ganz gleichgültig, ob die photographische Platte auf einem Schlitten verschoben wird, oder ob das Mikroskop bewegt wird. Manche Constructeure wählen die eine, manche die andere Weise.

Das eben erläuterte Princip dient allen hier in Betracht kommenden Messapparaten, die man kurzweg als Comparator bezeichnet, zur Grundlage.

Der erste zu erwähnende Comparator wurde von Warren de la Rue für die Ausmessung seiner Photogramme nach der Sonnenfinsterniss des Jahres 1860 angegeben (Fig. 94). Der Apparat steht auf einer mit drei Füssen *s* versehenen Grundplatte *S*, die den Mikroskoparm *E* mit dem Mikroskop *M* trägt. Das

Fadenkreuz des Mikroskopes wird so eingestellt, dass es mit der Lage der Schlitten *A* und *B*, die eine auf einander senkrechte Verschiebung des weiteren Apparates mittelst der Schrauben *a''*, *b''* erlauben, übereinstimmt. Die lineare Bewegung der Schlitten wird an den Scalen *a* und *b* mit Nonien abgelesen. Auf dem Schlitten *B* befindet sich die Führung der hohlen Axe für den Positionskreis *C*; ihre Oeffnung beträgt etwa 4 engl. Zoll. Die Ablesung des Kreises geschieht mit Nonius auf 10'' genau, seine Feinbewegung ist bei *c*.

Auf diesem Kreis befindet sich ein zweiter in 4 Quadranten getheilter, der sich ebenfalls in einer hohlen Axe bewegt. Die Theilung desselben giebt direkt Bogenminuten. Eigentlich dient dieser nur zur Justirung der Platte *P*, um nämlich die Mikroskopfäden mit den auf dem Photogramm aufgezeichneten Fadenbildern in Coincidenz zu bringen. Er hat 4 Klammern *d*, *d*, *d*, *d*, zur Befestigung der photographischen Platte *P*, die auf den Elfenbeinstangen *d'*, *d'* ruht. Unter dem Apparat befindet sich ein Planspiegel zur Beleuchtung des Objectes. Eine feine, zur Messung dienende Schraube existirt also am Apparat nicht.



(A. 95).

H. C. Vogel in Potsdam hat einen ganz einfachen, aber sehr praktischen Apparat hergestellt, um die Positionen der photographirten Sonnenflecke schnell und sicher ausmessen zu können, der ausserdem nicht kostspielig ist. In Fig. 95 ist er in $\frac{1}{6}$ natürlicher Grösse dargestellt, so wie ihn Verfasser mit einigen unwesentlichen Modifikationen in der Werkstätte seiner Sternwarte ausgeführt hat. Ein auf der oberen Fläche gedrehter und unten durch eine Anzahl von Rippen verstärkter Tisch *AA* steht auf vier Füssen *a*, *a*, *a*, *a*. Auf der Tischfläche sind vier Säulen *b*, *b*, *b*, *b* eingeschraubt, die die beiden Schienen *BB* und C tragen. *BB* ist prismatisch und so gestellt, dass die eine Kante des Prismas nach oben gekehrt ist. Die Vorderfläche trägt Millimetertheilung; auf dieser Prismenschiene bewegt sich ein Messingblock, den man mit der Schraube *R* beliebig festklemmen kann. Er ist vorne durchbrochen und trägt einen einfachen Index, die Ablesung geschieht mit der Lupe *l*. Auf diesem Block ist ein zweites Prisma befestigt, das ebenfalls Millimetertheilung trägt, und auf demselben gleitet wieder ein Block *p*, der den Index seiner Theilung, die mit der Lupe *l* abgelesen wird, trägt. Dieser Block trägt das Mikroskop *M*, welches sich um seine optische Axe um 90° drehen lässt. Das Drehen wird mit den Elfenbeinknöpfen *gg* vorgenommen; *d* ist ein regulirbarer

Anschlag, um den Drehungswinkel genau gleich 90° machen zu können. *tt* ist der Einstellungstrieb, *T* die Trommel des Fadenmikrometers, *o* endlich das Ocular. Damit sich nun das Prisma und das ganze Mikroskopgestell nicht durchbiege, ist die zweite Schiene *C* angebracht, welche [förmig ausgefräst ist.

Auf dem Tisch befindet sich noch der Plattenhalter, der eigentlich ein von Grad zu Grad getheilter Positionskreis *R* ist, dessen Angaben mit Hilfe eines Nonius abgelesen werden, welcher 0°·1 angiebt. (Die in der Abbildung sichtbaren Lupen hat Verf. seiner Weitsichtigkeit wegen angebracht, dieselben werden für ein normales Auge kaum nöthig sein.) Der Kreis ist in der Mitte durchbrochen und hat seine Führung in der Tischplatte *A*, *A*. Unten endet er in ein Kegelrad, das mit einem passenden Trieb mit dem Kopf *D* bewegt werden kann. Auf diesem Positionsring sind nur zwei federnde Plattenhalter angebracht, auf welchen die photographischen Platten des O'Gyallaer Photoheliographen passen, sie sind 14 *cm* im Quadrat. Ueber den Positionsring *R* wird der Rahmen *R* geklappt, der bei *c*, *c* Charniere hat; je nach Bedarf kann der Rahmen mit der Schraube *s* auf die photographische Platte gepresst werden. Er trägt ein von 2 zu 2 *mm* getheiltes Glasgitter *G*, dessen Striche parallel mit dem Prisma *BB* und dem das Mikroskop tragenden Prisma sind. Der Anschlag des Mikroskops bei *a* ist so gestellt, dass die Mikrometerschraube entweder mit dem einen oder anderen Liniensystem parallel ist.

Die Messung wird nun in folgender Weise vorgenommen. Das Negativ wird mit der Gelatineschicht nach oben eingelegt und der Rahmen *R* mit dem Gitter *G* darübergeklappt. Da die Striche an der Glasplatte unten sind, so legen sie sich auf die Gelatineschicht auf, und es wird dadurch eine Parallaxe ausgeschlossen. Man stellt das Sonnenbild mit dem mitphotographirten Fadenkreuz durch den Positionskreis so ein, dass die Sonnenaxe mit der einen Coordinate der Gitterstriche parallel ist, und misst nun die Entfernung der Flecke vom Mittelpunkt in beiden Coordinaten ab.

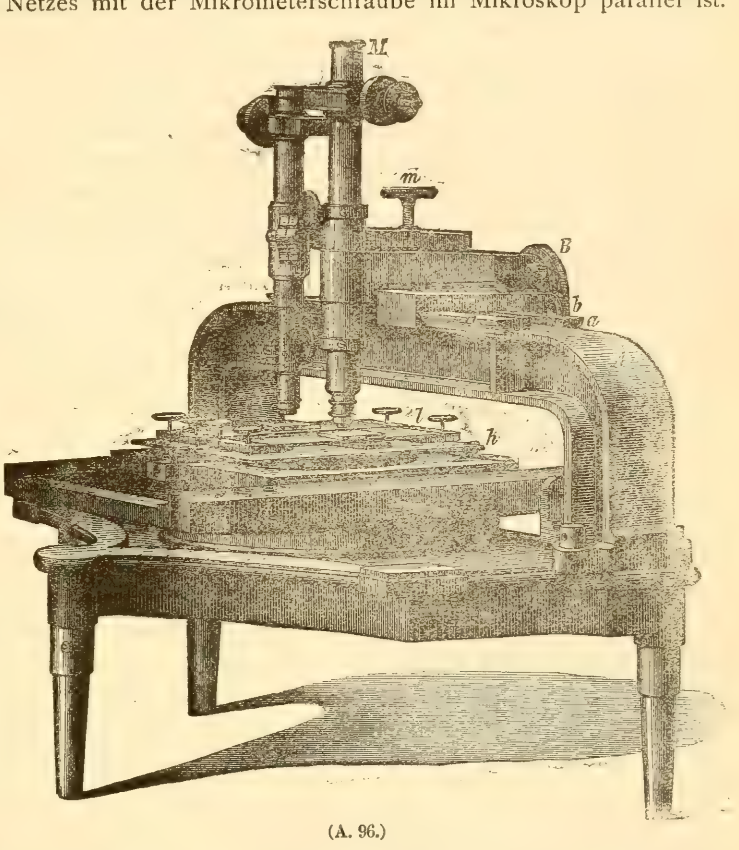
Die Messung geschieht immer innerhalb zweier Gitterstriche, daher ist eine genaue Theilung des Glasgitters sehr zu wünschen, jedenfalls muss sie aber vor der Justirung des Apparates aufs Sorgfältigste untersucht werden. Im Uebrigen wird auf den 4. Band der Potsdamer Publikationen verwiesen.

Einen wesentlich genaueren Apparat für diesen Zweck baute Repsold (Fig. 96). Auch dieser befindet sich auf dem Potsdamer Observatorium. Der äusserst solid ausgeführte Apparat ruht auf 3 Füssen, über zweien derselben erhebt sich ein massiver gusseiserner Bügel *A*, dessen obere Platte eine sehr sorgfältig gearbeitete Schlittenführung *a* trägt. Auf letzterer lässt sich mit der Schraube *B* der Schlitten *c* bewegen, mit dem die Mikroskope fest verbunden sind. Die Schraube *b*, welcher auf der anderen Seite von *B* eine zweite in der Abbildung nicht sichtbare entspricht, dient zur Festklemmung des Schlittens an beliebiger Stelle. Der Tisch des Apparates hat in der Mitte eine grosse, kreisförmige Oeffnung, um für die aufzulegenden Objecte, so z. B. eine Sonnenphotographie, durchgehendes Licht zu erhalten, und trägt einen Messingrahmen *d*, in dem der durch den Trieb *f* bewegte Schlitten *e* gleitet. Die Richtung dieses Letzteren ist senkrecht zu derjenigen der Mikroskopführung.

Wenn auf dem Sonnenbild statt des Fadenkreuzes ein Gitter mitphotographirt ist, so bietet die Messung keine weitere Schwierigkeit. Man stellt einfach das eine Fadensystem parallel zur Schlittenführung *a*, bezw. der Mikrometerschraube im Mikroskop, und misst den Sonnenfleck von einem Strich zum andern gehend; um aber alle Flecken in dieser Weise ausmessen zu können, muss man mit dem

Schlitten *d* weitergehen, sodass jeder Theil des Sonnenbildes in das Gesichtsfeld des Mikroskops kommt. Sind die Flecken in der einen Coordinate ausgemessen, dann dreht man die Platte bezw. den Schlitten mit der ganzen Vorrichtung um 90° und wiederholt die Messung nunmehr in der zweiten Coordinate.

Falls sich aber ein Positionskreis am Tisch unterhalb des Schlittens *d* befindet, dreht man die ganze Vorrichtung um 90° und macht nur die Feineinstellung am Gitter selbst. Ist aber kein Positionskreis vorhanden, dann dreht man, während man ins Mikroskop sieht, den Schlitten *d* so lange, bis das zweite Fadensystem des Netzes mit der Mikrometerschraube im Mikroskop parallel ist.



(A. 96.)

Die mitphotographirten Gitter sind entweder auf Deckglasplättchen eingeritzte Diamantstriche (von Breithaupt, Cassel), oder auf dem Diaphragma ausgespannte Spinnefäden. Ist ein einfaches Fadenkreuz in der Brennebene ausgespannt, so ist das Verfahren ganz das gleiche, nur kann dann die Messung nicht mit dem Mikroskop allein vorgenommen werden, da der Halbmesser des Sonnenbildes viel grösser als der Durchmesser des Gesichtsfeldes im Mikroskop ist. Es muss dann noch ein Hilfsapparat hinzugezogen werden, der darin besteht, dass man auf dem Schlitten *a* einen einfachen, aber guten Millimetermaassstab anbringt, dass man mit dem Mikroskop dann ebenso und von einem Theilstrich zum andern, wie beim Gitter, die Messung vornimmt.

b) Das Ausmessen der Sternpositionen. Es ist klar, dass man bei jeder Art der Ausmessung eine Orientirung haben muss, da die erhaltenen Grössen der gemessenen Distanzen sonst nur Längenunterschiede von einem Punkt zum andern wären. Die Orientirung wird ja bei der Sonne z. B. durch das mitphotographirte Fadennetz- oder -kreuz bewirkt (allenfalls kann das auch noch für den Mond gelten), da hier ein heller, also auf dem Negativ dunkler Hintergrund vorhanden ist, und die im Brennpunkt des Objektivs ausgespannten Fäden hell auf demselben erscheinen. Wenn nun diese Fäden entweder im Meridian bezw. parallel zum Aequator liegen, oder der eine horizontal, der andere vertical

steht, kann der betreffende Winkel der Sonnenaxe gegen den Aequator im ersten Fall, und durch Benutzung bequemer, parallactischer Tafeln im zweiten Fall leicht gefunden werden.

Ganz anders verhält sich die Sache bei der Photographirung des Fixsternhimmels. Hier fehlt einfach jede Möglichkeit zur Mitphotographirung eines Fadens oder Netzes. Anfänglich versuchte man die eine Kante der Cassette parallel zur täglichen Bewegung zu stellen, stiess dabei aber auf geradezu unüberwindliche Schwierigkeiten. Dann liess man nach erfolgter Belichtung einen hellen Stern über die Platte hingehen, womit man sowohl die Parallele, als auch einen Nullpunkt in der Deklinationsrichtung erhielt; für die Rectascension konnte der Nullpunkt aber nur in der Weise gegeben werden, dass man das Objectiv zu einer auf ein Zehntel Secunde sicheren Zeit momentan verdeckte, wodurch der helle Strich des Sterns auf der Platte unterbrochen erschien.

Um nun eine genaue Marke auf einem Negativ zu erhalten, gab LOHSE folgenden Weg an. Er zeichnete sich auf einem grossen Bogen matten Papiers ein Netz mit der erdenklichsten Genauigkeit, photographirte dasselbe in 4 mal verkleinertem Maassstabe, sodass die Zeichnungsfehler noch dadurch verkleinert wurden, und das Netz nun allen Anforderungen bezüglich der Genauigkeit Genüge leistete. LOHSE fürchtete nun wohl, dass der Hintergrund des Netzes (bei hellen Linien auf dunklem Grund) nicht genügend undurchsichtig sein würde, und es war diese Furcht nicht ohne Grund, da es schwer ist, ganz undurchsichtige Negative herzustellen, die auf die sehr empfindlichen Platten von 24 bis 25 Grad Warnercke absolut kein Licht durchliessen. Er nahm seine Zuflucht zu dem alten Collodionprocess, und verstärkte die Negative mit citronsaurem Silber. Das Verfahren ist folgendes. Man entwickelt die nasse Colodionplatte mit dem gewöhnlichen Eisenentwickler; wenn das Bild zum Vorschein gekommen ist, giesst man eine gleiche Menge der folgenden Lösung hinzu: 2 Theile Silbernitrat, 3 Theile Citronensäure, 2—3 Theile Alkohol und 100 Theile Wasser. Dieser Verstärker kann, ohne die Platte abzuspülen, verwendet werden, da die Operation doch nichts anderes ist als eine forcirte Weiterentwickelung der Platte.

Wenn man nur Gelatineplatten im Laboratorium hat, was heutigen Tages meist der Fall ist, so kann man sie nach LOHSE's Vorschlag mit Quecksilberchlorid und Jodkali verstärken und nach dem gründlichen Waschen mit Ammoniak schwärzen.

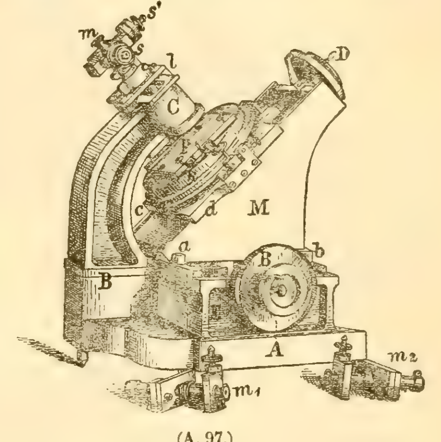
Verfasser hat freilich mit dieser Methode traurige Erfahrungen gemacht, indem die Platten nach Monaten fast citronengelb wurden. Merkwürdig genug copiren aber diese Platten doch sehr schön. Ich wende bei einer Verstärkung nur 2proc. Sublimat an, und schwärze die grau gewordene Platte mit Ammoniak. In Betreff des Verstärkens mag, obwohl die photographischen Manipulationen hier nicht besprochen werden können, an einen wichtigen Punkt erinnert werden. Wenn eine Platte verstärkt werden soll, so achte man darauf, dass sie vollkommen ausfixirt, ferner, dass das Fixirnatron peinlich gewissenhaft ausgewaschen werde. Hat man hiernach die Platte in Sublimat verstärkt, so wasche man dies Salz ebenso gut aus, wie vorher das Natron, und lege sie dann erst in die Ammoniaklösung von höchstens 1:3; eine stärkere Ammoniaklösung macht leicht Flecke.

In neuerer Zeit ist es mir aber gelungen, ganz undurchsichtige Platten herzustellen, und zwar auf MONKHOVEN Platten die durchaus nicht empfindlich waren. Ich exponirte ganz ordentlich, entwickelte, bis die Schichte recht dunkel geworden war, und verstärkte kräftig. Die Platten sind absolut undurchsichtig.

Die mit Netz versehenen Platten copirt LOHSE nun auf die unexponirte Gelatineplatte, sodass auf derselben ein latentes Bild des Netzes aufcopirt war, welches dann mit der Aufnahme zugleich entwickelt wurde. Dabei wurde das Netz so aufgelegt, dass die eine Coordinate der täglichen Bewegung, die andre den Deklinationen entspricht. Beim Aufcopiren muss übrigens doch eine gewisse Vorsicht angewandt werden, die Beleuchtung darf nämlich nur mit parallelem Licht geschehen, was man hinter einer Linse mit etwas längerer Brennweite ausführen kann, oder beim Vollmond.

Da sich nun das Netz auf die Platte übercopirt und mit der Aufnahme zugleich entwickelt wird, so erhält man zwischen den Sternen ein sehr schönes Netz, welches zur Ausmessung vollständig genügt. Es empfiehlt sich, beim Uebercopiren des Netzes den Copirrahmen so gross zu wählen, dass derselbe die Ränder der Netzplatte noch verdeckt, da sonst leicht durch Reflexe falsches Licht auf die Platte kommen und so ein unangenehmer, oft weit in die Platte verlaufender Randschleier entstehen könnte. Ist der Rahmen grösser als die Platte, so lege man um letztere schwarzes Papier herum.

Das Ausmessen geschieht wieder mit einem mehr oder weniger complicirten Comparator; hier mögen die drei gebräuchlichsten, die sich als besonders zweckmässig erwiesen haben, erwähnt werden.



(A. 97.)

Eine sehr beliebte Form ist die von GAUTHIER in Paris angegebene, und man kann annehmen, dass alle, die mit französischen oder englischen Fernröhren photographiren, auch zur Ausmessung den GAUTHIER'schen Comparator verwenden.

Auf einer sehr soliden Fundamentplatte *A*, Fig. 97 die auf drei Füssen ruht, ist der Mikroskoparm *B*, sowie das Brett *E* mit dem Führungsprisma *b* und der Führungsleiste *a* aufgebaut. Auf *E* lässt sich der Block *M* mit einer sehr feinen Schraube hin und her bewegen. Die Schraube trägt an ihrem Ende die Trommel *B* mit einem geränderten Knopf, indessen ist zur leichteren Drehung, wenn der Block rascher hin und her bewegt werden soll, auf dem Knopf noch eine kleine Kurbel angebracht. Die schiefe Ebene des Blocks *M* ist ähnlich wie *E* bei *a* und *b* ausgearbeitet, und auf diesen beiden Führungsstücken bewegt sich die Platte *c*, *d*, die den Positionskreis *k* mit dem Plattenhalter *P* trägt. Die Platte *c*, *d* kann wieder mit einer feinen Schraube auf und nieder bewegt werden, und die Messung geschieht an der Trommel *D*.

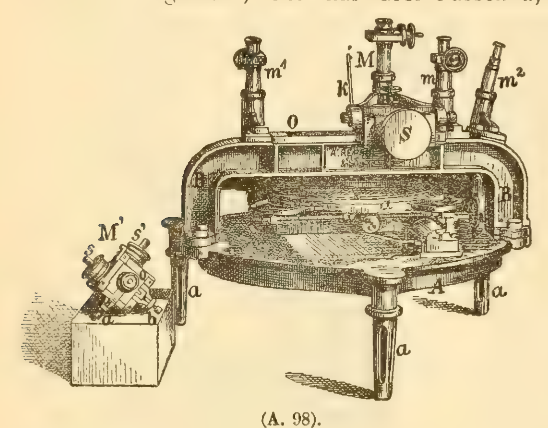
Der Arm *B* endet oben in einen hohlen, ovalen Stutzen *C*, der zur Aufnahme der verschiedenen Mikroskope dient. Er hat ebenfalls eine gehobelte Führung, an der die Mikroskope genau justirt werden können.

Das Mikroskop selbst ist ein Mikrometermikroskop mit zwei senkrechten Fadensystemen, welche durch die beiden Mikrometerschrauben *s* und *s'* bewegt werden können. Beigegeben werden dem Apparat noch zwei andere Mikroskope m^1 und m^2, die freilich nur einfache Schrauben haben (was unter allen Umständen genügend ist), die aber mit verschiedenen Gängen versehen sind; so ist auch die Vergrösserung der Mikroskope eine verschiedene.

Die gröberen Messungen können mit den beiden Schrauben *B* und *D* ausgeführt werden, wogegen für die feineren immer die Schrauben *s* und *s'* zur Verwendung kommen müssen, was übrigens leicht ist, zumal wenn auf den photographischen Platten ein LOHSE'sches Netz aufcopirt ist.

Der REPSOLD'sche Comparator weicht von dem GAUTHIER'schen sehr ab; man erkennt auf den ersten Blick, dass er viel eleganter und leichter gebaut ist. Was bei dem GAUTHIER'schen zunächst als Vorzug erscheinen könnte, dass das Hineinsehen ins Mikroskop durch dessen schräge Stellung eine viel bequemere ist, als beim REPSOLD'schen, kann auch beim letzteren leicht erreicht werden, und ist auch von REPSOLD selbst bei anderen ähnlichen Apparaten gemacht worden; man braucht nur ein Prisma von beliebigem Winkel in den Strahlengang des Mikroskops einzusetzen, um sofort die gewünschte schräge Stellung des Oculars zu erhalten.

In Fig. 98 ist der REPSOLD'sche Apparat, der schon mehrfach ausgeführt worden, abgebildet. Der ganze Ableseapparat ist auf einen runden, gusseisernen Tisch *A* aufgestellt, der auf drei Füssen *a*, *a*, *a* steht. Ueber dem Apparat befindet sich der Bügel *B*, der aber nicht im Durchmesser des Tisches, sondern in einer Sehne befestigt ist (weil die beiden Mikroskope m^1 und m^2 in den Durchmesser des Tisches fallen müssen. Der Bügel trägt alle nachher zu erwähnenden Ablesevorrichtungen. Auf der oberen Fläche des Tisches befindet sich ein grosser Positionskreis *a* mit allen möglichen Correctionsvorrichtungen, und hier wird die photographische Platte befestigt.



(A. 98).

Die Schraube *b* mit gerändertem Knopf *c* dient zur Feineinstellung des Kreises, der sowie seine Axe natürlich ebenso durchbrochen ist, wie wir es bei allen Apparaten dieser Art gesehen haben, damit das Negativ von unten mit einem Spiegel beleuchtet werden kann.

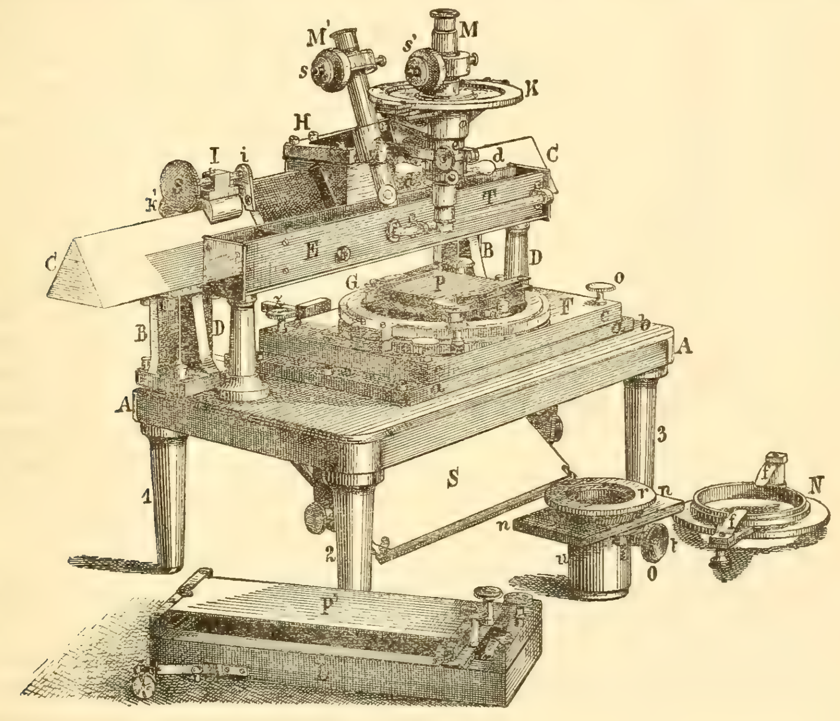
Am Bügel *B* befinden sich, wie erwähnt, vier Mikroskope, *m* und m^1 dienen zur Ablesung des Positionskreises, m^2 zur Einstellung desselben. Das eigentliche Messungs-Mikrometermikroskop ist *M*, dasselbe lässt sich durch den Knopf *S* mit dem Schlitten *r* am Bett *c* des Bügels *B* hin- und herführen und mit der Klemmvorrichtung *k* festklemmen. An dem Bett *c* befindet sich eine Längenteilung zur Orientirung des Mikroskops *M*. Dem Apparat ist noch ein zweites Mikroskopocular zum Umtauschen mit *M* beigefügt, dasselbe ist in der Nebenfigur bei *M'* abgebildet. Es besitzt ebenfalls zwei senkrecht auf einander stehende Mikrometerschrauben *s* und s^1, und ausserdem ist das Ocular *o* auch mit zwei senkrechten Bewegungen auf zwei Schlitten versehen, die mit den beiden Schrauben *a*, *b* bewegt werden können.

Da wir uns bald zur Ausmessung der Spectrogramme wenden werden, so kann füglich die Besprechung des Universalcomparators von GOTHARD, der zur Ausmessung der Sternphotographien wie auch der Spectrogramme dient, den Uebergang zu diesen bilden. Herr v. GOTHARD hat gleichzeitig drei dieser Comparatoren, die ihren Namen als Universalcomparator mit vollstem Recht

tragen, angefertigt, einen für die Sternwarte O'Gyalla, einen für sich selbst und einen dritten, mit Fortlassung des Positionskreises, für Prof. J. M. EDER in Wien.

Die Grundidee des Apparates stammt zwar von V. SCHUMANN und dem Mechaniker WANSCHAFF in Berlin, indessen hat GOTHARD ihn in so wesentlichen Theilen vervollkommnet, dass man seinen Namen füglich mit dem Apparat verbinden darf. Der WANSCHAFF'sche Originalapparat, der lediglich zur Ausmessung der Spectrogramme für V. SCHUMANN angefertigt wurde, findet sich in des Verfassers »Anleitung zur Himmelsphotographie« pag. 190—194 beschrieben und abgebildet.

In Fig. 99 ist der GOTHARD'sche Universalcomparator nach einer photographischen Aufnahme abgebildet. Ein niedriger, aus Gusseisen gehobelter, unten



(A. 99.)

verrippter und vernickelter Tisch *A A* steht auf vier Füssen 1, 2, 3, 4, von denen aber nur drei sichtbar sind. Zwei massive Ständer *B*, *B*, die das kräftige gusseiserne Prisma *C*, *C* tragen, sind auf ihm angebracht. Vor dem Prisma befinden sich noch weitere zwei Säulen *D*, *D* in den Tisch geschraubt, die den Scalentrog *E* zu tragen haben, an dem sich das Thermometer *T* befindet, dessen Kugel auf der inneren Seite flachgedrückt ist, damit sie sich auf die Scala, deren Temperatur sie anzeigen soll, gut anlegt. Auf dem Tisch *A A* ist eine sehr sorgfältig gehobelte Platte *a a* zwischen zwei Leisten *b b* in einer Schwalbenschwanznute beweglich; diese wird hinten mit Hilfe eines Zahntriebes (in der Figur nicht sichtbar) und der Zahnstange quer über den Tisch geführt. Auf dieser Platte können alle weiteren Nebenapparate, sowie die Platte *c c* mit dem Positionskreis *F*, *G*, dann der Plattenhalter *N* (Nebenfigur), ferner der kleine Plattenhalter *O* (Nebenfigur) und der Plattenhalter für Spectralaufnahmen *P'* (Nebenfigur) aufgesetzt werden.

Bleiben wir zunächst bei der Platte *c c*, welche zur Ausmessung der Sternpositionen dient. Die Platte *a a*, sowie *c c* und selbstverständlich auch die Tischplatte *A A* ist in ihrer Mitte durchbrochen, damit die auszumessenden Platten von dem Spiegel *S* Licht bekommen können. Der Positionskreis ist natürlich ebenfalls durchbrochen, wie dies schon bei allen früheren Apparaten erwähnt worden ist. Er wird an zwei diametralen Nonien abgelesen, und zwar bis zur Genauigkeit einer Bogenminute. Die Feinbewegung des Kreises ist jedoch von den früher beschriebenen ganz verschieden. Eine Klemmung fehlt überhaupt, da der Kreis an seiner Peripherie mit feinen Zähnen versehen ist, in welchen der Trieb *k* eingreift, mit dem er gedreht wird. Diese Einstellungsweise ist fein genug, und die Bewegung geht rasch. Auf dem Positionskreis befindet sich nun abermals zur Aufnahme der photographischen Platten, die mit schwachen Uhrfedern niedergedrückt werden, eine viereckige Platte *m*. Anstatt dieser kann man auch den Plattenhalter *N* (in der Nebenfigur sichtbar) aufsetzen, auf dem das Negativ durch die beiden Federn *f f* gehalten wird. Ebenso kann auch die Vorrichtung *O* aufgesetzt werden, die in Anwendung kommt, wenn man z. B. Glasmikrometer ausmessen will, die auf die Scheibe *r* gelegt werden. Die Platte *nn* wird an Stelle von *m* gesetzt, und die Scheibe *r*, die auf einem in einem weiteren Rohre *w* verschiebbaren Rohr sitzt, kann durch den Trieb *t* zur Einstellung in den Kreis des Mikroskops *M* höher oder niedriger gestellt werden.

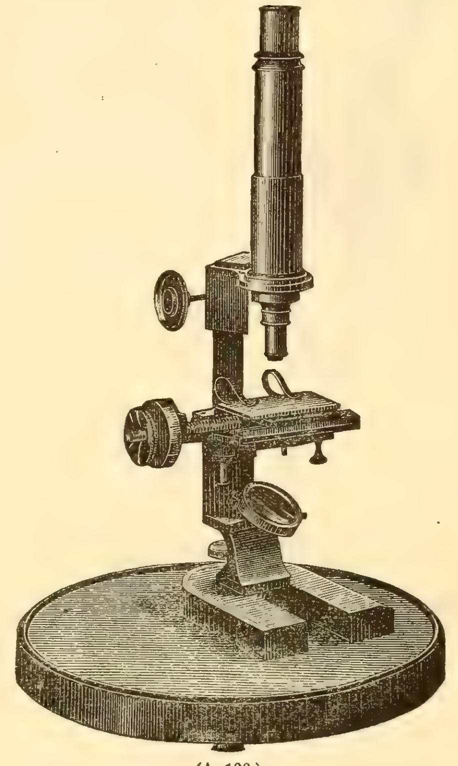
Die Vorrichtung *P'* dient zur Ausmessung der Spectra, und wird über diese nachher einiges gesagt werden. Zunächst wenden wir uns zur eigentlichen Messvorrichtung. Wie schon erwähnt wurde, sind auf dem Tisch zwei Ständer *B B* angeschraubt, die das starke gusseiserne Prisma *C C* tragen. Auf diesem sind zwei Schieber *I* und *H* aufgesetzt, von denen sich *I* mit Hilfe der Schraube *k'* auf das Prisma aufklemmen lässt, während *H* durch ein Getriebe (unsichtbar) und eine an der unteren Basis des Prismas befindliche Zahnstange rasch und grob bewegt werden kann. Auf dem Schieber *I* befindet sich aber eine feine Schraube, die mit dem geränderten Kopf S gedreht werden kann; sie lehnt sich an den Anschlag *i* an, der auf dem Schieber *H* sitzt. Wenn also *I* festgeklemmt ist, so lässt sich *H* mit der Schraube *S* um einen geringen Betrag fein weiterbewegen. Wie ersichtlich, erfolgt die Feinbewegung nur in einer Richtung; wenn man aber den Trieb von *H* in der Hand hat und damit *H* permanent an *S* drückt, so kann die Feinbewegung in beiden Richtungen erfolgen.

Auf dem Schieber *H* sind die beiden Mikroskope *M* und *M'* befestigt. Letzteres correspondirt mit einer von WANSCHAFF meisterhaft ausgeführten Millimeterscala, die mit zwei Schrauben (nur eine bei *E* ist sichtbar) befestigt ist. Das Mikroskop *M'* ist unverrückbar und die Messung geschieht auf der Scala mit der Mikrometerschraube *s*, wogegen sich das andere Mikroskop *M* um seine Axe drehen lässt, welche Drehung durch den Positionskreis auf halbe Minuten angegeben wird. Die grobe Drehung wird durch die Elfenbeinknöpfe *d*, *d*, *d* bewirkt, die Feinbewegung durch eine gewöhnliche Tangentenschraube. Der Positionskreis hat den Zweck, den Positionswinkel von Doppelsternen auf der Platte zu bestimmen. Wenn nämlich die Richtung der täglichen Bewegung auf der Platte gegen die Kante des Prismas *CC* orientirt ist, sowie der Nullpunkt des Positionskreises *k*, so ergiebt die Einstellung sofort den Positionswinkel der Doppelsterne. Die kleinen Entfernungen können in jedem Positionswinkel mit der Mikrometerschraube *s'* gemessen werden, wogegen grössere Entfernungen

nur in der Richtung des Prismas an der Scala gemessen werden können. Zu bemerken ist, dass die Scala in Zehntel Millimeter getheilt und von Millimeter zu Millimeter beziffert ist.

Wenn sich aber auf der photographischen Platte ein Netz aufcopirt befindet, und man dieses normal zur Prismenkante einstellt, so kann man mit dem Mikroskop M, bezw. seinem Mikrometer s' auch senkrecht zum Prisma messen, da man dann von Strich zu Strich weitergeht und die Platte immer mit dem Trieb z um ein Strichintervall fortbewegt.

c) Ausmessung der Spectrogramme. Das Ausmessen der Spectrogramme ist womöglich noch schwieriger als das der Sternaufnahmen, weil der Stern doch mehr oder weniger als rundes Scheibchen erscheint, das sich noch leicht mit dem Fadenkreuz einstellen lässt.



(A. 100.)

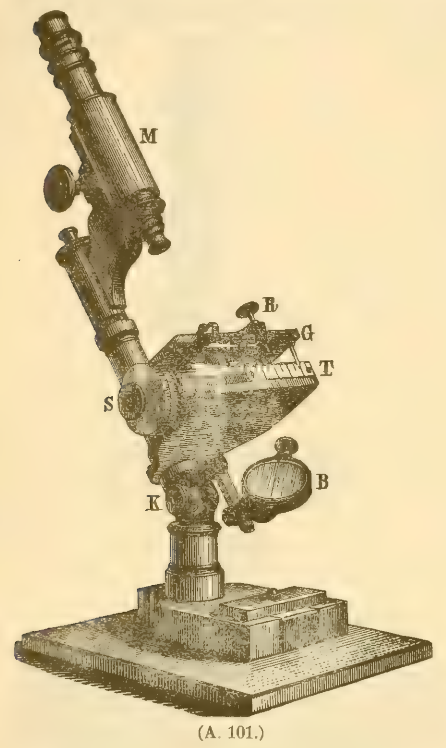
Für die Ablesung von Spectrallinien giebt es auch ganz verschiedene Apparate. Verfasser würde als Universalapparat nur den WANSCHAFF-GOTHARD-schen empfehlen, sonst aber rathen, wenn es die Mittel erlauben, einen grösseren Apparat zur Ablesung von grösseren oder grossen Spectrogrammen, hingegen einen einfachen kleineren zur Ablesung der kleineren Aufnahmen, zu verwenden. Letztere sind von GOTHARD und VOGEL construirt worden. Fig. 100 giebt den allereinfachsten dieser Apparate, wie er von ersterem angefertigt wurde. Der ganze Ablesungsapparat besteht aus einem gewöhnlichen NACHET-schen Mikroskop, auf dessen Tischchen eine einfache Schlittenvorrichtung angebracht ist, die aber auch leicht abgenommen werden kann. Der Schlitten, auf den die Platten aufgelegt werden, ist mit einer Mikrometerschraube versehen und mit derselben verschiebbar. Der Schraubenkopf ist in 100 Thle. getheilt, und man kann, wenn die Schraube eine Ganghöhe von 0·5 *mm* hat, 0·05 *mm* direkt messen, 0·005 *mm* schätzen. Zur grösseren Bequemlichkeit ist am Schlitten eine Theilung von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ Millimeter aufgetragen, die die ganzen Umdrehungen der Schraube angiebt. Das Objectiv des Mikroskops vergrössert 12 bis 15 mal; als Anhaltspunkt bei der Bestimmung des Trommelwerthes dienen natürlich diejenigen Linien, die durch subjective Beobachtungen am gewöhnlichen Spectroskop bekannt sind.

Fig. 101 stellt den VOGEL'schen Apparat dar. Man sieht schon auf den ersten Blick, dass hier ein bedeutend werthvolleres Mikroskop angebracht ist, welches ausserdem durch seine Bewegung in Scharniren dem Beobachter beim Ablesen viel grössere Bequemlichkeit bietet, als der GOTHARD'sche. Der Apparat besteht aus dem Mikroskop M, welches um das Gelenk K geneigt werden kann. Auf dem Tisch F steht der Mikrometerapparat, der in einer Schlittenvorrichtung

beweglich ist. Die zu messende Aufnahme, welche durch eine Schraube *R* mit Klammern gehalten ist, wird durch die 40 *mm* lange Schraube mit dem getheilten Kopf *S* weiterbewegt. Die Schraube hat eine Ganghöhe von 0·25 *mm* und auf der Trommel lässt sich daher noch $\frac{1}{4000}$ *mm* ablesen.

Bevor wir noch einen anderen demselben Zweck dienenden Apparat kennen lernen, mögen hier einige Worte über die Ausmessung selbst Platz finden.

Die Ausmessung eines photographirten Sternspectrums ist eine erheblich leichtere Operation, als das Messen der Linien an einem gewöhnlichen Spectralapparat am Fernrohr, und man erzielt dabei doch eine wesentlich grössere Genauigkeit. Der Grund ist leicht einzusehen. Am Fernrohr hat man ein stets mehr oder weniger unruhiges Bild vor sich, und der Kopf des Beobachters muss sich der Lage des Oculars anbequemen, kommt dabei also oft in die allerunangenehmsten Stellungen, was natürlich bei der Ausmessung des Photogrammes ganz anders ist. Man hat hier einen unveränderten Anblick, sowie ein absolut ruhiges Bild, und man kann endlich die Messung bei Tage mit der grössten Ruhe und Bequemlichkeit im Zimmer am Schreibtisch vornehmen. Trotzdem gehört die Ausmessung so gut wie jede andere Beobachtungsart zur Beobachtungskunst, die nur durch grosse Uebung und Erfahrung, mit gewisser handlicher Geschicklichkeit zu vollkommenen Resultaten führen kann.



(A. 101.)

Wie wir gesehen haben, kann ein Photogramm, wenn das Spectrum nicht zu lang ist, unter einem beliebigen Mikroskop gemessen werden. Das Mikroskop darf aber nicht allzustark vergrössern, die Vergrösserung muss immer nach der Feinheit des Silberkorns gewählt werden, sowie nach der Schärfe der Aufnahme. Es reichen in den meisten Fällen Mikroskope mit 10—15maliger Vergrösserung aus, man sollte aber nie eine stärkere als eine 25fache wählen.

Nach den Erfahrungen Scheiner's in Potsdam muss die Einstellung bei scharfer Vergrösserung stets mit einem sehr feinen Faden gemacht werden, nur bei schwachen Vergrösserungen genügt ein Doppelfaden. Manche Linien, sagt Scheiner, sind so schwach, dass sie wohl eben noch unter dem Mikroskop sichtbar sind, dass sie aber bei Annäherung des Fadens verschwinden. In solchen Fällen kann man sich in der Weise helfen, dass man sich irgend ein stärkeres Silberkorn oder eine kleine Verunreinigung auf der Platte, die möglichst in der Mitte der Linie steht, merkt, und dann auf dieser den Faden einstellt. Derartige Anhaltspunkte wird man in den meisten Fällen finden können.

Eine besondere Aufmerksamkeit ist nach Scheiner dem Aussehen der Linien zuzuwenden. Je nach der Stärke der Dispersion werden auf den Aufnahmen zwei oder mehrere Linien manchmal in einer einzigen vereinigt sein. An der Verwaschenheit und Breite dieser Linien lässt sich schon meistens erkennen, ob

man es hier mit einer breiten Linie oder mit der Vereinigung mehrerer Linien zu thun hat. Besonders aber ist dieser Unterschied an der Helligkeit der Linien (im Negativ) zu erkennen, da bei Vereinigung mehrerer Linien eine Linie von matterem Aussehen entsteht, als dies im Allgemeinen bei Einzellinien der Fall ist.

Mit dem Ausmessen der Linien am Spectrogramm ist eigentlich noch nichts erreicht, da man nur Differenzen zwischen den Entfernungen der Linien in z. B. Millimetern ausgedrückt erhält. Wenn man aber ein absolutes Maass haben will, so muss man mit dem Comparator genau so verfahren, wie bei einem Spectralapparat, wo man sich mit Hilfe bekannter Linien (immer am besten mit dem Sonnenspectrum, nur beim Ultraviolett wird man gut thun, die Cadmium-Linien zu nehmen) eine genaue Reductionstabelle anlegt. In den meisten Fällen wird man gut auskommen, wenn man mit dem Spectrographen, mit dem man die Sternspectra photographiren will, das Sonnenspectrum photographirt, und mit den Linien dieses wohlbekannten Spectrums die Tabelle für Wellenlängen berechnet. Es ist zu bemerken, dass man einen und denselben Comparator für verschiedene Spectrographen anwenden kann, nur muss für jeden eine eigene Tabelle angefertigt werden.

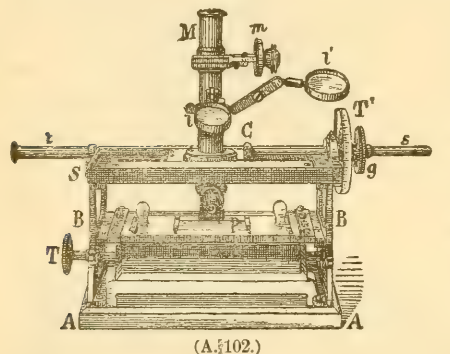
Bei grossen Spectrographen, insbesondere wenn sie einen Collimator und eine Projectionslinse von langer Brennweite haben, muss auch ganz nothwendig die Temperatur, bei welcher photographiert wird, berücksichtigt werden, auch hat die Temperatur auf die Grösse der Dispersion bedeutenden Einfluss, der z. B. bei dem Potsdamer Spectrographen nicht vernachlässigt werden darf, da sonst die grosse Genauigkeit, die man zu erreichen glaubt, illusorisch wird. Man darf auch nicht übersehen, dass sich die Brennweitenänderungen im Collimator und der Projectionslinse bei Temperaturänderungen addiren. Bei einem Spectrographen von grosser Dispersion entspricht jedem Temperaturgrade eine andere Einstellung der Cameralinse, da der Collimator nicht verstellt werden darf. Dementsprechend ist selbstverständlich das Spectralblild verschieden gross, und während sich die Aenderung der Bildgrösse auf dem Spectrum proportional vertheilt, thut dies die Temperatur nicht, weshalb beide zusammen es bedingen, dass die bei verschiedener Temperatur aufgenommenen Spectra weder einander congruent noch ähnlich sind. Als Ausgangs- oder Fixpunkt diene dann wieder die Aufnahme des Sonnenspectrums, und man reducire alle anderen Aufnahmen auf die Cameralinsenstellung und Temperatur, bei welcher diese Aufnahme geschehen ist.

Man kann nun auch bei der Ausmessung ein solches Normalspectrum auf eine Spectralaufnahme legen und zwar so, dass sich die Gelatineschichten berühren, und beide unter das Mikroskop bringen. Man wird in den meisten Fällen, wenn nichts anderes, so doch die Wasserstofflinien identificiren können, was besonders bei den Sternspectren des II. und III. Typus leicht geht, da diese mit dem Sonnenspectrum viele Aehnlichkeit haben. Man misst dann die Linien im Sternspectrum aus und notirt hierbei die Zahlen der Normallinien. Für einige Stellen der Platte, z. B. für die beiden Enden und die Mitte, ermittelt man aus der Vergleichung derselben Distanzen im Sonnen- und Sternspectrum die Reduction auf das Normalspectrum. Bei einigermaassen dicht stehenden Normallinien ist diese Correction immer so klein, dass sie ohne weitere Rechnung zu den Tafelgrössen hinzugelegt werden kann, welche man zur Interpolation der zwischen den Normallinien gelegenen unbekannten Linien benutzt. Diese Methode, bei der gleichzeitig die geringen Verzerrungen der Gelatineschicht praktisch völlig eliminirt werden, zeichnet sich durch sehr grosse Genauigkeit aus.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn im Spectrum lauter unbekannte Linien vorhanden sind, und nur eine Wasserstofflinie als bekannt nachweisbar ist. Solche Fälle treten bei den Sternen des I. Typus ein, bei denen nur vereinzelte Metalllinien gesehen werden. Dann wird man am besten das Wasserstoffspectrum einer GEISSLER'schen Röhre auf die Platte mitphotographiren. Es wird hier eine Nichtcoincidenz nur von der Verschiebung der Linie, die durch die Bewegung des Sterns im Visionsradius hervorgerufen wird, herrühren. Schaden dürfte es übrigens nicht, um allen Zweifeln und Unsicherheiten vorzubeugen, auf die Platte auch ein Metallspectrum, so z. B. das des Eisens oder Cadmiums, mit aufzunehmen.

Wenn die Aufnahmen bei Mondschein gemacht werden, empfiehlt es sich, auf dieselbe Platte das Spectrum des Mondes mit aufzunehmen, keinenfalls aber den nächsten Tag abzuwarten und dann das Sonnenspectrum als vergleichendes Object zu photographiren, da man durch die verschiedenen Temperaturen, die zwischen den beiden Aufnahmen stattfinden, leicht gröbere Fehler bekommen könnte. Ist kein Mondlicht vorhanden, so kann man auch das Spectrum eines Sternes des II. Typus mitphotographiren, und dessen Spectrum als Normalspectrum zur Reduction herbeiziehen.

Bei der Ablesung der Spectrallinien haben wir bisher immer vorausgesetzt, dass die Spectra nur kurz sind, da ja die ganze Schraube des Potsdamer Mikroskops nur 40 *mm* lang ist. Man wird aber leicht in die Lage kommen, auch ein längeres Spectrogramm ausmessen zu müssen, und hier versagen die eben beschriebenen Apparate ihren Dienst. ADAM HILGER in London hat nun für das Potsdamer Observatorium einen Apparat angefertigt, der die Ausmessung eines bedeutend längeren Spectrums zulässt. Die Schraubenlänge beträgt 100 *mm*. Fig. 102 stellt den Apparat dar, wie er mit einigen Modifikationen für die O'Gyallaer Sternwarte gemacht wurde. Er muss als Ableseapparat für einen Spectrographen angesehen werden, der zur Aufnahme des Sonnenspectrums dient. *AA* ist eine gehobelte Platte, auf welcher die durchbrochenen Ständer *BB* aufgesetzt sind. Sie sind zweifach mit einander verbunden, erstens in der Mitte durch den Rahmen *T*, der gleichzeitig als Objectivtisch dient, und zweitens dem oberen, etwas kräftiger gearbeiteten Rahmen *SS*, welcher zur Führung des Mikroskops *M* bestimmt ist.



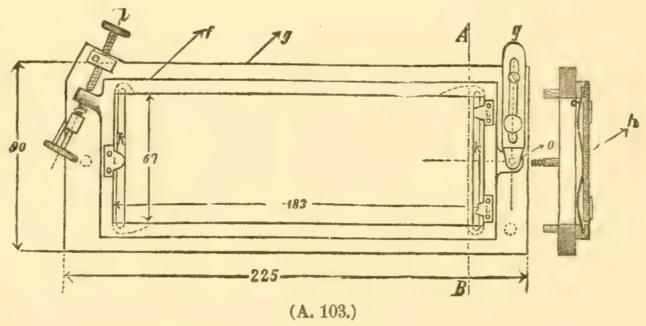
(A. 102.)

Der Rahmen *SS* ist schwalbenschwanzförmig gearbeitet und schliesst den Schlitten *C* ein, auf dem das Mikroskop *M* durch drei Zug- und Druckschrauben befestigt ist. Er wird mitsammt dem Mikroskop mit der Mikrometerschraube *s* weitergeführt. Die Schraube endet in einer Kugel, die in einem förmlichen Lager mit anspannbarem Deckel gelagert ist; sie würde sich in jeder Lage einstellen können, wenn dies nicht durch einen Stift verhindert würde. Derselbe ist aber im Lager nicht in einem Loche befestigt, wie das gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, sondern in einem etwas länglichen Schlitz; diese Einrichtung ermöglicht die freie Einstellung der Schraube nach den Unvollkommenheiten, welche durch die gröberen Theile des Apparats (z. B. die Schwalbenschwanzführung) verursacht wird. Als Mutter der Schraube dient die Rolle der Trommel *T'*, die in 100 Thle. getheilt ist und mit dem Knopf *g* gedreht werden kann.

Um dem todten Gang der Schraube entgegenzuwirken, befindet sich auf der entgegengesetzten Seite des Schlittens *C* eine Spiralfeder, die theilweise in der Hülse *t* untergebracht ist. Es ist anzurathen, diese Spiralfeder recht lang zu lassen, da eine kurze Feder im Anfang sehr grob und später gar nicht wirkt. Verfasser beabsichtigt aber dieselbe ganz zu beseitigen und sie durch ein Gewicht zu ersetzen, welches über einer Rolle neben dem Instrument abläuft. Die Schraubenmutter *s*, sowie mit ihr die Trommel können den Apparat nicht, wie bei dem ursprünglichen HILGER'schen, verlassen, weil hier die Trommel auch im Rahmen *SS* gelagert ist.

Auf dem Rahmen *SS* befindet sich eine Millimetertheilung, welche die ganzen Umdrehungen von T' angiebt; sie können mit der Lupe *l* abgelesen werden, wogegen die Trommel ebenfalls mit einer Lupe l' gleich vom Ocular des Mikroskops abgelesen werden kann.

Die schon erwähnte untere Verbindung der beiden Ständer *BB* bildet der Objectivträger. Auf dem Tisch *T* liegt ebenfalls in schwalbenschwanzförmiger Führung ein Rahmen, welcher mit einer vierfachen, schnell steigenden Schraube (in der Figur nicht sichtbar) senkrecht zur Mikroskopbewegung geführt werden kann. In diesen Rahmen wird das Negativ eingelegt und mit zwei sanften Stahlfedern festgehalten. Die Grösse des Negativs, welches der Rahmen aufnehmen kann, ist 60×130 *mm*. Um aber den Ableseapparat auch für kleinere Negative benutzen zu können, ist ihm eine Einlage beigegeben, die mit zwei Elfenbeingriffen versehen und in der Figur mit *p* bezeichnet ist. Diese Platte hat eine bedeutend kleinere Oeffnung als die ganze Oeffnung des Rahmens. Selbstverständlich können dem Apparat mehrere solche Rahmen bezw. Einlagen beigegeben werden.



(A. 103.)

Die schnellsteigende Schraube hat übrigens den Zweck, die Platte senkrecht zur Mikrometerschraube weiter zu bewegen, um mehrere Spectra, falls sich solche auf der Platte befinden, hintereinander unter das Mikroskop bringen zu können.

Unter dem Objectivtisch befindet sich ein langer Spiegel, welcher auf die zu untersuchenden Negative von unten das nöthige Licht reflektirt. Die Neigung des Spiegels lässt sich von aussen mit einem geränderten Knopf stellen.

Handelt es sich nun aber doch um eine Ausmessung äusserster Genauigkeit, so würde man immer am geeignetsten den WANSCHAFF-GOTHARD'schen Apparat brauchen. Wenn man mit demselben längere Spectralnegative ausmessen will, so entferne man den grossen Positionskreis, und setze den Nebenapparat P' (Fig. 99) ein. Derselbe ist in Fig. 103 schematisch dargestellt. Wenn die vier Schrauben *o*, *o* (nur zwei sind in Fig. 99 zu sehen) herausgenommen werden, so lässt sich die Platte *F*, *c*, *c* mit dem Positionskreis herausheben und anstatt ihrer die Platte *g* einsetzen. Auf derselben liegt der Rahmen *F* auf, der sich um den Zapfen *o* ein wenig verschieben lässt um das Spectrum parallel mit dem Prisma stellen zu können. Zur Feinstellung gehört die Schraube *l* mit ihrer Gegenfeder. Wenn die Klemmschraube des Riegels *g* gelüftet und der

Riegel zurückgezogen wird, dann lässt sich der Rahmen *f* einfach herausheben. Die Nebenfigur bei *h* zeigt den Durchschnitt dieses Rahmens *f*. Die Negative werden in denselben eingespannt, und zwar werden sie von unten eingeführt, wenn der Rahmen herausgenommen ist. Sie pressen sich mit den Federn *k*, *k* an die Vorsprünge *i*, *i*, *i* an.

Wenn man mit diesem Apparat Spectrogramme ausmessen will, so muss selbstverständlich, wie bei einem gewöhnlichen Spectralapparat eine Tabelle angelegt werden, um die Millimeter und Unterabtheilungen in Wellenlängen verwandeln zu können. Es ist ferner schon oben bemerkt worden, dass man beim Spectrographen auf die Temperatur Rücksicht nehmen muss. Dasselbe gilt auch für grössere Comparatoren in Folge der Variation des Scalenwerthes mit der Temperaturänderung. Der Millimetermaassstab hat seine Normallänge bei 0°. Der wahre Werth derselben wird bei SCHUMANN's Apparat gefunden, wenn man zu der ausgemessenen Länge den Betrag des Ausdrucks

$$-\frac{I}{1000}\,(t \times 0{\cdot}0181\,mm)$$

addirt. *I* ist der Normalwerth des Intervalles in Millimetern, *t* die Temperatur in Centigraden beim Ablesen des Mikroskopes.

Die Photographie wird in der Astronomie mit zunehmender Entwickelung immer mehr Anwendung finden. So versucht man mit Hilfe der Photographie die Helligkeit der Sterne zu bestimmen, eine Methode, die gewiss ihre Früchte tragen wird. Nicht uninteressant ist der Photochronograph, ein in Amerika angegebenes Instrument, mit dem man in Verbindung mit einer Contactuhr und unter Anbringung desselben an ein Passageninstrument eine Zeitbestimmung oder sonst beliebige Sterndurchgänge beobachten und aufnehmen kann. Indessen dürfte es hier jedenfalls noch zum mindesten fraglich sein, ob man mit Entwickeln, Fixiren, Trocknen und Ausmessen der Platte nicht mehr Zeit verliert, als mit der einfachen Berechnung der Sterndurchgänge. Aehnliches dürfte wohl auch noch in Betreff der Doppelsternmessungen gelten.

d) Die Reduction des ausgemessenen Photogrammes. Nachdem im Obigen die Hilfsmittel zur Ausmessung der Photogramme und die dabei nöthigen Manipulationen besprochen sind, ist im folgenden auseinander zu setzen, wie aus den so gewonnenen Abmessungen die Resultate zu erlangen sind, wobei aber nur die Ermittelung der endgültigen Sternpositionen behandelt zu werden braucht. Diese kann, wie schon mehrfach angedeutet, in verschiedener Weise geschehen. Es können 1) rechtwinklige Coordinaten auf der Platte gemessen werden, 2) die Positionswinkel und Distanzen, 3) unmittelbar die Rectascensionen und Deklinationen. Alle drei Methoden haben ihre Vertheidiger, und da ja die Anwendung der Photographie auf die messende Astronomie erst vor einigen Jahren begonnen hat und dementsprechend verschiedene Instrumente und Apparate in Vorschlag gebracht worden sind, wird nur die Folgezeit entscheiden können, ob einer Methode, und welcher ganz besondere Vortheile anhaften. Es wird hierbei namentlich ins Gewicht fallen, welche Zwecke man im einzelnen Falle im Auge hat, ob es z. B. darauf ankommt, mit möglicht geringem Zeitaufwand selbst auf Kosten höchster Genauigkeit Positionen zu gewinnen (dritte Methode) oder ob andererseits die möglichste Schärfe der Messung Hauptbedingung ist.

Besonders hat sich die Theorie der messenden Photographie hinsichtlich der Sternpositionen entwickelt mit dem Beginn der photographischen Himmels-

karte, die zugleich den Katalog sämmtlicher Fixsterne bis zur 11. Grösse liefern soll, und an deren Vollendung zahlreiche Sternwarten arbeiten. Fast alle hierauf bezüglichen Publikationen sind in dem (nicht im Handel befindlichen) »Bulletin du comité international permanent pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel«, welches vom »Institut de France« herausgegeben wird, veröffentlicht. Es wird daher wohl geeignet sein, hier etwas näher auf die Methoden an der Hand jener Veröffentlichungen einzugehen. Abgesehen aber von der photographischen Karte hat man, wie im obigen Artikel ausgeführt, auch an verschiedenen Sternwarten Einzelaufnahmen, insbesondere von Sternhaufen gemacht, und die zahlreichen Glieder einer solchen Gruppe mit Schärfe gemessen, schon um zu untersuchen, ob die photographische Methode hier der direkten Messung gewachsen oder gar überlegen ist. In letzteren Fällen handelt es sich meist nur um die Ausmessung sehr kleiner Distanzen, und es lassen sich die Reductionen für den speciellen Fall dann erheblich vereinfachen und in der Berechnung abkürzen. Solche Aufnahmen sind in neuerer Zeit in Potsdam, an der v. KUFFNER'schen Sternwarte in Wien u. s. w. gemacht, während vor über 20 Jahren schon RUTHERFURD viele ähnliche Versuche machte; die Platten sind nach dem Tode des letzteren in den Besitz des Columbia College, New-York, übergegangen und dort zum Theil vermessen.

Mit den Ausmessungen und der Ableitung der Sternpositionen nach den photographischen Platten haben sich namentlich D. GILL (Cap der guten Hoffnung), G. H. v. d. SANDE BAKHUYZEN (Leiden), KAPTEYN (Groningen), THIELE (Kopenhagen), SCHEINER (Potsdam), H. JACOBY (New-York) und OPPENHEIM (Wien) beschäftigt.

Welche Methode der Messung und Reduction man anwendet, jede ist in den Resultaten folgenden Fehlerquellen unterworfen, die beseitigt, untersucht oder eliminirt werden müssen: 1) der optischen Distorsion des Feldes, 2) der Deformation oder Verzerrung der empfindlichen Schicht, 3) der fehlerhaften Lage der Platte, indem die vom Objectivmittelpunkt zum Mittelpunkt der Platte gezogene gerade Linie nicht senkrecht zur empfindlichen Schicht ist, 4) dem Fehler im Scalenwerth, der von der Entfernung des Objectivs von der empfindlichen Schicht abhängt und in Folge der Ausdehnung sowohl des Rohres als auch der Platte, und der Aenderung der Brennweite durch die Temperatur auch mit dieser veränderlich ist, und endlich 5) den Fehlern in der Orientirung und des Nullpunktes des Negativs. Hierzu treten dann die Correctionen für Refraction, Aberration, Präcession und Nutation, um den Sternort für eine gegebene Epoche zu erhalten, schliesslich event. die Umwandlung der gemessenen Coordinaten in Rectascension und Deklination.

Die Distorsion oder optische Verzerrung kann für jedes Objectiv durch besondere Aufnahme ermittelt werden. Hierzu, wie für die Ermittelung der Deformation der Schicht, ist, wie schon an anderer Stelle gesagt wurde, die Aufphotographirung eines Netzes auf die Platte erforderlich, oder doch von grösster Wichtigkeit. Alsdann ist die einfachste Methode zur Bestimmung der optischen Distorsion des photographischen Feldes die, dass man Himmelsgegenden photographirt, die eine grosse Anzahl von Sternen enthalten, deren relative Oerter so genau als möglich nach verschiedenen und unabhängigen Methoden bestimmt sind. Es werden dann die Entfernungen dieser Sterne vom Centrum des photographirten Netzes gemessen und diese mit denselben Abständen verglichen, die nach den in unabhängiger Weise ermittelten Coordinaten berechnet sind. Es ist eine sich hier sofort aufdrängende Frage die, ob es möglich ist, die

relativen Coordinaten einer solchen Sterngegend mit aller nöthigen Genauigkeit zu bestimmen. Vor allem werden dazu Heliometermessungen das Material bieten, und in dem dieses Instrument behandelnden Artikel wird nachgewiesen werden, dass dieselben allen gestellten Bedingungen genügen; damit ist, nebenbei bemerkt, auch das Verhältniss der direkten mikrometrischen Ausmessung zur photographischen Methode festgelegt. Eine solche Vergleichung der auf dem Cliché gemessenen Entfernungen mit den anderweitig ermittelten wird nun eine Anzahl von Gleichungen der Form $as + bs^2 + cs^3 + \ldots$ ergeben, wo s die Lineardistanz in einem angenommenen Maass bedeutet, gezählt vom Mittelpunkt aus, und wo a, b, c .... zu bestimmende Coëfficienten sind. Man wird nach dem Ausfall solcher Untersuchungen entscheiden können, ob das Objectiv vollkommen centrirt ist oder nicht, und gegebenen Falles Correcturen vornehmen, bevor man zu weiteren Arbeiten mit dem Fernrohr schreitet. Uebrigens kann, worauf Gill aufmerksam macht, die Untersuchung der Distorsion verwickelter sein, als hier angenommen ist. Es können z. B. die nicht symmetrischen optischen Ringe bei hellen Sternen einen merkbaren Eindruck auf der Platte hervorbringen, sodass der als Mittelpunkt der Sternscheibe angenommene Punkt auf der entwickelten Platte verschoben erscheint, bei den schwachen Sternen werden dagegen diese Ringe keinen merkbaren Eindruck hervorrufen. Es könnte daher bis zu einem gewissen Grade die optische Distorsion als eine Function der Sterngrösse erscheinen. Man müsste dann in die betreffenden Gleichungen einige Glieder mehr einführen, die vom Durchmesser der Sternscheibe und der Entfernung des Sternes vom Mittelpunkt des Feldes abhängen.

Zur Ermittelung der Deformation der Schicht dient, wie erwähnt, die Ausmessung des Netzes in allen Schnittpunkten und die Vergleichung mit dem Originalnetz. Man hat dabei als einfachstes Mittel zur Constatirung einer Deformation vorgeschlagen, das Originalnetz auf das Bild des Netzes zu legen und event. alle Platten, die hierbei eine Deformation zeigten, zu verwerfen, sodass eben nur die Platten, die eine vollständige Coincidenz der Linien lieferten, als brauchbare zu bezeichnen und einer mühevollen Ausmessung werth wären. Indessen würden damit oft Platten verworfen werden, die bei gehöriger Ausmessung der Netzpunkte sehr wohl brauchbare Resultate liefern können, vorausgesetzt nur, dass die Schicht nicht geradezu gesprungen und verletzt ist. Wenn die Netzlinien nahe genug sind, erhält man die Deformation mit stets ausreichender Sicherheit und man kann sich dann ebenso wie übrigens auch für die Berücksichtigung der Distorsion Tabellen anlegen, die die nothwendigen Verbesserungen in einfacher Weise ergeben.

Die dritte Fehlerquelle lässt sich nach einem Vorschlage von Gill durch eine besondere Montirung der Platte wenigstens für eine grosse Anzahl Platten constant machen, sodass ihr der Einfluss eines zufälligen Fehlers genommen wird.

Von Wichtigkeit ist besonders die Bestimmung des Scalenwerthes. Den gewöhnlichen Werth erhält man ebenfalls durch die Ausmessung bekannter Sterndistanzen, und zwar kann man entweder besondere Aufnahmen sternreicher Gegenden machen, oder auch den Werth aus der Gesammtheit aller auf der Platte befindlichen bekannten Sterne ermitteln, die zugleich, wie nachher angegeben wird, zur Ermittelung des Nullpunktes auf der Platte führen. Es schwankt nun aber dieser Scalenwerth, mag er noch so gut bestimmt sein, mit der Temperatur, und man würde der obigen Gleichung für den Winkelwerth der vom Centrum der Platte aus gezählten Linearmessungen noch ein Glied $s \cdot \Delta a$ hinzufügen müssen, wo eben Δa einen kleinen zu bestimmenden Faktor bezeichnet,

der unter gewissen Vorsichtsmaassregeln als der Temperaturcoëfficient des Scalenwerthes angesehen werden kann.

Bezeichnet m die Länge des Rohres, soweit es aus Messing ist, n seine Länge soweit es aus Stahl ist, β den linearen Ausdehnungscoëfficienten des Messings, σ den des Stahls, t' die Temperatur während der Aufnahme, t die Normaltemperatur, auf die alles bezogen werden soll, so ist:

$$\Delta a = \frac{m\beta + n\sigma}{m + n} (t' - t).$$

Nach einer Resolution des für die Anfertigung der photographischen Karte zusammengetretenen Congresses sollen die photographischen Rohre aus dem Metall gemacht werden, welches am günstigsten für die Erlangung einer unveränderlichen Brennebene ist, d. h. es soll der Ausdehnungscoëfficient des Rohres soviel als möglich dem Coëfficienten der Veränderung der Objectivbrennweite durch die Temperatur gleich sein. Nach mannigfachen Erfahrungen, die man mit den verschiedensten Instrumenten in dieser Hinsicht gemacht hat, wird man eine den Einflüssen der Temperaturänderung am wenigsten unterworfene Scala erhalten, wenn man das Rohr entweder ganz aus Stahl oder ganz aus Messing, oder theils aus Stahl und theils aus Messing anfertigen lässt, je nachdem sich der Temperaturcoëfficient für die Objectivbrennweite ergeben hat. Der Einfluss der Temperatur der Platte während der Exposition wird dadurch vollständig eliminirt, dass auf dieselbe eine genaue Copie des Originalnetzes aufcopirt ist, falls man nur dieses Aufcopiren für alle Platten bei derselben Normaltemperatur vornimmt. Es vermischt sich dann eine Ausdehnung der Platte durch die Temperatur mit den anderweitigen Deformationen der Schicht, welche durch Ausmessen aller Schnittpunkte des Netzes leicht auf das Originalnetz bezogen werden.

Es folgt nun die Bestimmung der Fehler in der Orientirung und des Nullpunktes des Clichés, die Ermittelung der Rectascension und Deklination des Mittelpunktes der Platte, welche durch Anhaltsterne bestimmt werden müssen. Es liefert nun jeder solche Stern eine Gleichung zwischen dem Fehler des Nullpunktes der Orientirung und einer bekannten Grösse. Nimmt man an, dass diese Anhaltsterne in der Zahl n gleichmässig auf dem Cliché vertheilt, und dass ihre Oerter durch rechtwinklige, den Seiten der Platten parallele Coordinaten bestimmt sind, so wird der mittlere Fehler der x-Coordinate irgend eines Sternes der vom Fehler des Nullpunktes und der Orientirung herrührt, sein

$$\mu = m\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{3y^2}{2nl^2}},$$

wo m den mittleren Fehler der x-Coordinate der Anhaltsterne bedeutet, l die halbe Länge der Platte in der Richtung der y-Axe. Einen entsprechenden Ausdruck erhält man für den mittleren Fehler der y-Coordinate. Zur Bestimmung von m und n kann man auf die Zonenbeobachtungen der »Astronomischen Gesellschaft« recurriren, wonach man etwa 100000 bekannte Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 0° und + 90° Deklination hat; es wird danach jedes Cliché von 4 Quadratgraden im Mittel 20 bekannte Sterne enthalten, also $n = 20$ sein. Für l ergiebt sich 60′ im grössten Kreis. Nach den bekannt gewordenen Resultaten der genannten Zonenbeobachtungen ist für beide Coordinaten m kleiner als $\pm 0''\cdot4$. Es mag hier daher $m = \pm 0''\cdot4$ angenommen werden. Dann findet sich als totaler mittlerer Fehler in einer x-Coordinate, der aus den zufälligen Fehlern in den Oertern der Anhaltsterne herrührt:

für $y = 0'$	$\mu = 0''{\cdot}089$
$15'$	$0{\cdot}093$
$30'$	$0{\cdot}105$
$45'$	$0{\cdot}120$
$60'$	$0{\cdot}141.$

Damit nun die Genauigkeit der Coordinatenmessungen der Sterne in Uebereinstimmung mit der Genauigkeit des Nullpunktes und der Orientirung ist, soll angenommen werden, dass die Messungen so genau sind, dass der mittlere Fehler einer Coordinate in Bezug auf die Axen den mittleren Maximalfehler aus der fehlerhaften Lage der Axen nicht überschreite, also gleich $0''{\cdot}141$ sei. Wenn der mittlere Fehler einer Pointirung und einer Scalenablesung gleich gross sind, so müssten sie beide in obiger Annahme $0''{\cdot}10$ sein. Danach wird also der mittlere Werth der zufälligen Fehler in beiden Coordinaten der Sterne, in Rectascension und Deklination $\pm 0''{\cdot}20$ im grössten Kreise sein. Diese Genauigkeit zu erreichen ist also Bedingung, wenn die Resultate denen der direkten Beobachtung gleichwerthig sein sollen, und dass dies im allgemeinen möglich ist, ist von THIELE, GILL, JACOBY u. A. hinsichtlich der Messungen in Distanz und Positionswinkel gezeigt, von KAPTEYN hinsichtlich der direkten Messung von Rectascension und Deklination, von BAKHUYZEN hinsichtlich der Messung in rechtwinkligen Coordinaten.

Was die Bestimmung des Nullpunktes der Positionswinkel betrifft, so ist das naheliegendste Verfahren das gewesen, das Uhrwerk des Fernrohres anzuhalten, sodass dann ein Stern in Folge seiner täglichen Bewegung die Richtung der letzteren aufzeichnet. Indessen hat diese Methode ihre Nachtheile. Es ist zunächst unbequem, wenn auf der Plattenoberfläche eine Reihe von Linien vorhanden sind, die, wenn sie von hellen Sternen herrühren, so stark hervortreten, dass sie die Bilder der schwächeren Sterne, die zufällig mit ihnen zusammenfallen, verdecken. Es ist nun wohl vorgeschlagen worden, die Platte zur Zeit des Stillstandes des Uhrwerkes durch einen Schirm derartig zu verdecken, dass nur der Süd- und Nordrand frei bleiben, auf dem dann ein hellerer Stern seine Bahn aufzeichnet. Dabei kommen dann also nur ganz wenige Linien, eine oder zwei, zur Bestimmung dieser für alle auf der Platte befindlichen Sterneindrücke fundamentalen Grösse in Betracht, und noch dazu liegen diese Linien an Stellen der Platte, wo die optische Definition die schlechteste, die Distorsion die grösste ist. Dasselbe gilt, wenn auch in etwas modificirter Weise, von dem Vorschlag, die Platte in der Weise mit einem Diaphragma zu versehen, dass nur die Ost- und Westränder exponirt werden, und dann die Exposition so lange auszudehnen, dass der Stern eine Linie an beiden Rändern beschreibt. Dann würde man allerdings wohl eine grössere Anzahl Sternspuren erhalten, aber die Nachtheile, die aus den photographischen Eindrücken an den ungünstigsten Stellen der Platte entstehen, bleiben hier die gleichen, wie vorher. Zudem lässt sich leicht zeigen, dass eine solche Bestimmung des Nullpunktes der Positionswinkel für jede Platte eine ganz erhebliche Zeit fordert, die natürlich einmal abhängig ist von der Oberfläche des Clichés, sodann aber auch sehr rasch mit der Deklination zunimmt, da sich die für den Aequator gültige Zeit mit der Secante der Deklination multiplicirt. Beispielsweise wird allein diese Operation, wenn sie für Aequatorgegenden 15 Minuten fordert, für Sterne von 60° Deklination schon 30 Minuten in Anspruch nehmen. Während einer solchen Zeit bleibt aber der Einfluss der Refraction, selbst wenn die Sterne in der Nähe des Meridians beobachtet werden, wo sich die Höhe ja am wenigsten ändert, doch in Folge der

Temperatur- und Barometerschwankungen nicht derselbe. Es dürfte sich daher allgemein auch hier empfehlen, den Nullpunkt der Positionswinkel aus den Coordinaten bekannter Sterne auf dem Cliché herzuleiten. Freilich wird damit der sonst vielleicht anscheinend erreichbare, fundamentale Charakter der photographischen Bestimmungen aufgegeben. Wir erhalten dann ganz und gar relative Bestimmungen, deren Genauigkeit von der der Anhaltsterne abhängt. Von dieser Art der Rectascensions- und Deklinationsbestimmungen wird man aber schwerlich je abgehen können, die Grundlage aller bilden die Beobachtungen am Meridiankreis, und nehmen wir nur eine möglichst grosse Anzahl der am Meridiankreis absolut oder auch relativ bestimmten Anhaltsterne, so werden wir hier Nullpunkte erhalten, die eine grosse Sicherheit besitzen. Die gefährlichsten Fehler sind immer hierbei die systematischen, die von der persönlichen Gleichung des Beobachters, von der Farbe und Grösse des Sternes abhängen. Nimmt man aber Sternörter, die an möglichst vielen Sternwarten, mit verschiedenen Instrumenten, von verschiedenen Beobachtern erhalten wurden, so darf man annehmen, dass auch diese systematischen Fehler zum grössten Theil eliminirt werden. Darin ist zugleich auch hier wieder angezeigt, wo und wie weit die astronomische Photographie in den Messungen von der direkten Beobachtung abhängig ist.

Wir kommen jetzt zur Besprechung der drei verschiedenen Methoden der Ausmessung und Reduction, und beginnen mit

I. der Methode, der Ausmessung der Platte nach rechtwinkligen Coordinaten, indem wir dabei im Wesentlichen den Ausführungen BAKHUYZEN's in dem schon erwähnten »Bulletin du comité international permanent« folgen. Der von BAKHUYZEN benutzte Apparat ist der REPSOLD'sche, der im Wesentlichen oben beschrieben ist. Um nun die Platte nahezu zu orientiren, wählt man einen gut bestimmten Stern sehr nahe der Mitte der Platte und einen solchen möglichst entfernten, und stellt durch Drehung des Positionskreises und durch Bewegung der Platte entlang der angebrachten Scala beide zugleich in die Richtung zwischen die Fäden des Mikroskopes. Berechnet man nun den Positionswinkel des entfernten Sternes gegen den in der Mitte der Platte liegenden und dreht die Platte mittelst des Positionskreises um diesen Winkel, so ist die Platte orientirt, d. h., wenn man die Platte dann der Scala entlang bewegt, so schreitet der auf der Platte gedachte Deklinationskreis ihres Mittelpunktes in sich selber fort. Derselbe muss, wenn auch vorher bei der Exposition im Fernrohr die Platte gut orientirt war, sehr nahe mit einer Linie des aufphotographirten Netzes zusammen fallen.

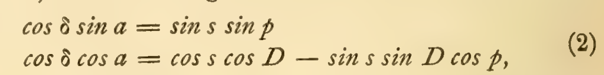
(A 104.)

Wir haben nun zu zeigen, wie die Rectascensionsunterschiede a und Deklinationsunterschiede d der einzelnen Sterne gegen die Mitte der Platte aus den gemessenen rechtwinkligen Coordinaten x und y abgeleitet werden.

In dem Dreieck SAO (Fig. 104), wo O das Centrum der Platte, S das Bild des Sternes bezeichnet, ist $\sphericalangle ASO$ offenbar gleich dem Positionswinkel p von S an O und $SO = l \, tang \, s$, wenn l den Abstand der Platte vom Mittelpunkt des Objectivs und s den sphärischen Abstand der Punkte O und S am Himmel bedeutet; also folgt aus dem Dreieck:

$$x = l \, tang \, s \, sin \, p$$
$$y = l \, tang \, s \, cos \, p. \tag{1}$$

Sind aber A und D die Coordinaten von O an der Sphäre, α und δ von S, sodass $a = \alpha - A$, $d = \delta - D$, so gelten in dem von diesen beiden Punkten mit dem Pole gebildeten Dreieck (Fig. 105) die Beziehungen:



$$cos \, \delta \, sin \, a = sin \, s \, sin \, p$$
$$cos \, \delta \, cos \, a = cos \, s \, cos \, D - sin \, s \, sin \, D \, cos \, p, \tag{2}$$

also durch Division

$$tang \, a = \frac{tang \, s \, sin \, p}{cos \, D - tang \, s \, sin \, D \, cos \, p} \tag{3}$$

und indem wir aus (1) substituiren

$$tang \, a = \frac{\frac{x}{l}}{cos \, D - \frac{y}{l} \, sin \, D} = \frac{x}{l \, cos \, D - y \, sin \, D}. \tag{4a}$$

(A. 105.)

Ferner entnehmen wir dem Dreieck PSO

$$sin \, s \, cos \, p = sin \, \delta \, cos \, D - cos \, \delta \, sin \, D \, cos \, a$$
$$= sin \, (\delta - D) + 2 \, sin^2 \tfrac{1}{2} a \, cos \, \delta \, sin \, D$$
$$cos \, s = sin \, \delta \, sin \, D + cos \, \delta \, cos \, D \, cos \, a$$
$$= cos \, (\delta - D) - 2 \, sin^2 \tfrac{1}{2} a \, cos \, \delta \, cos \, D, \tag{5}$$

also durch Division

$$tang \, s \, cos \, p = \frac{sin \, (\delta - D) + 2 \, sin^2 \frac{1}{2} a \, cos \, \delta \, sin \, D}{cos \, (\delta - D) - 2 \, sin^2 \frac{1}{2} a \, cos \, \delta \, cos \, D} = \frac{y}{l}$$
$$= \frac{sin \, d + 2 \, cos \, (d + D) \, sin \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a}{cos \, d - 2 \, cos \, (d + D) \, cos \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a} \tag{6}$$
$$= \frac{sin \, d \, (1 - 2 \, sin^2 D \, sin^2 \frac{1}{2} a) + 2 \, cos \, d \, cos \, D \, sin \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a}{cos \, d \, (1 - 2 \, cos^2 D \, sin^2 \frac{1}{2} a) + 2 \, sin \, d \, sin \, D \, cos \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a}$$

und wenn wir mit $cos \, d$ dividiren und nach $tang \, d$ ordnen, kommt

$$tang \, d = \frac{y - 2 \, (y \, cos \, D + l \, sin \, D) \, cos \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a}{l - 2 \, (y \, cos \, D + l \, sin \, D) \, sin \, D \, sin^2 \frac{1}{2} a}. \tag{4b}$$

Die Gleichungen (4a) und (4b) gestatten nun aus den Grössen x und y, a und d zu berechnen, wenn noch D, die Deklination der Plattenmitte, bekannt ist.

Bezeichnet nun q die Anzahl von Bogenminuten, die auf den Radius gehen, so ist bekanntlich

$$\frac{a}{q} = tang \, a - \tfrac{1}{3} \, tang^3 \, a + \tfrac{1}{5} \, tang^5 \, a - \ldots\ldots \tag{7}$$

Wenn wir danach die rechten Seiten von (4a) und (4b) in Reihen entwickeln und in (4b) noch $tang \, d = \frac{y - \varepsilon_1}{l - \varepsilon_2}$ ersetzen durch:

$$tang \, d = \frac{y}{l} - \frac{\varepsilon_1}{l} + \frac{y \varepsilon_2}{l^2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{l^2} + \frac{y \varepsilon_1{}^2}{l^3} + \ldots.$$

und wenn $\frac{q}{l} = p$ gesetzt wird, so ist

$$a = p x \frac{1}{cos \, D - \frac{p y}{q} \, sin \, D} - \frac{1}{3 q^2} \left(p x \frac{1}{cos \, D - \frac{p y}{q} \, sin \, D} \right)^3 \ldots.$$

$$d = p y - \frac{a^2}{4 q} \, sin \, 2 D - \frac{p y a^2}{2 q^2} \, cos \, 2 D - \frac{p^3 y^3}{3 q^2} + \frac{p^2 y^2 a^2}{2 q^3} \, sin \, 2 D - \tag{8}$$
$$\frac{a^4}{8 q^3} \, sin^2 D \, sin \, 2 D \ldots,$$

wobei nur die Glieder bis zur dritten Ordnung von $\frac{1}{q}$ mitgenommen sind, da die der vierten für $D < 75°$ den Werth $0''·05$ nicht erreichen. Nur für höhere Deklinationen hätte man also diese noch zu berücksichtigen. Selbst die beiden Glieder dritter Ordnung in dem Ausdruck für d erreichen erst für $D = 65°$ den Werth $0''·05$, und man kommt bis zu dieser Deklination ohne sie aus.

Nach den Bestimmungen der Conferenz ist darauf hinzuwirken, dass $\frac{q}{l} = p$ möglichst nahe $= 1$ ist, d. h. es soll der Abstand der Platte vom Objectiv nahezu $3437·75^{mm}$ sein und sonach 1^{mm} auf der Platte sehr nahe gleich einer Bogenminute sein; dann kann man px und py oben direkt durch x und y ersetzen. Sollte indessen die Abweichung von p von der Einheit zu berücksichtigen sein, so kann man für alle mit demselben Refractor aufgenommenen Platten die Ausmessung an einer Scala besorgen, welche nicht in Millimeter, sondern in $\frac{1}{p}$ Millimeter getheilt ist, oder auch sich eine Tafel anlegen, die mit dem Argument x resp. y gleich px resp. py giebt.

Aberration. Da man die Unterschiede der mittleren Rectascensionen und Deklinationen erhalten will, so sind die gemessenen Werthe noch für die Differenz der Aberrationen für den Stern und die Plattenmitte zu corrigiren. Die Aberration für die Plattenmitte ist mit den Bezeichnungen des Berliner astronomischen Jahrbuches, welches die Werthe von C und D füı jeden Sterntag giebt

$$\begin{aligned}&\text{in Rectascension} \quad (C \cos A + D \sin A) \sec D\\ &\text{in Deklination} \quad C \tang \varepsilon \cos D - (C \sin A - D \cos A) \sin D,\end{aligned} \tag{9}$$

also ist die Differenzialaberration

$$\begin{aligned}&\text{in Rectascension } (C \cos A + D \sin A) \frac{\sin D}{\cos^2 D} d \sin 1'' - (C \sin A - D \cos A) \sec D\, a \sin 1'',\\ &\text{in Deklination } - (C \tang \varepsilon \sin D + C \sin A \cos D - D \cos A \cos D) d \sin 1'' -\\ &\qquad (C \cos A + D \sin A) \sin D\, a \sin 1'',\end{aligned} \tag{10}$$

welche hier bereits durch Hinzufügung des Factors $\sin 1''$ linear ausgedrückt erscheint.

Setzen wir aber

$$\begin{aligned}C \sin 1'' &= K\\ D \sin 1'' &= L\\ a &= x \sec D\\ d &= y\end{aligned}$$

so werden diese Ausdrücke übergehen in die folgenden:

$$\begin{aligned}&\text{in der } x\text{-Coordinate}\\ &\quad y(K \cos A + L \sin A) \tang D - x \sec D(K \sin A - L \cos A),\\ &\text{in der } y\text{-Coordinate}\\ &- y(K \tang \varepsilon \sin D + K \sin A \cos D - L \cos A \cos D) - x \tang D(K \cos A + L \sin A),\end{aligned} \tag{11}$$

wofür wir als Abkürzung einführen wollen

$$\text{Aberration in der } x\text{-Coordinate} = e_x \cdot x + f_x \cdot y$$
$$\text{Aberration in der } y\text{-Coordinate} = e_y \cdot x + f_y \cdot y.$$

e_x, e_y, f_x, f_y sind für jede Platte Constanten, und die Correction ist mit doppeltem Eingang leicht zu tabuliren. Um diese Beträge sind die gemessenen x und y zu vermindern, um sie von der Aberration zu befreien.

Refraction. Auch bei der Refraction handelt es sich nur um die Differenz für das Centrum der Platte und den Stern. Wir entnehmen also aus dem Artikel Refraction die Formeln, welche die Refraction in Rectascension und Deklination nach beiden Coordinaten differenzirt enthalten, indem wir dabei für $\Delta\alpha$, a und

für $\Delta\delta$, d setzen. Um aber gleich die Refractionscorrection für die rechtwinkligen Coordinaten zu haben, ersetzen wir noch a durch $x\sec\delta$, d durch y und gelangen so zu den Refractionscorrectionen

$$\begin{aligned} &\text{für } x:\ k\frac{n\cos\delta\cos(2\delta_0+N)}{\cos^2\delta_0\sin^2(\delta_0+N)}y+k\left[1+\frac{n^2}{\sin^2(\delta_0+N)}\right]x=g_x x+h_x y,\\ &\text{für } y:\ k\frac{n\cos N}{\cos\delta\sin^2(\delta_0+N)}x+\frac{ky}{\sin^2(\delta_0+N)}=g_y x+h_y y. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Werthe von g_x, g_y, h_x, h_y sind nicht für die ganze Platte constant, aber doch numerisch so wenig veränderlich, dass sie bei niedrigen Deklinationen als unveränderlich angesehen werden dürfen, und δ, also dann auch δ_0 durch D ersetzt werden kann. Um zu entscheiden, ob dies zulässig ist, rechne man vorerst ihre Werthe für die Mitte der Platte, für das eine Ende des mittelsten Deklinationskreises auf der Platte und endlich für eine Ecke der Platte. Sollten diese drei Werthe nicht gleich sein, so müsste man in obiger Formel δ durch $D+d$ ersetzen, ebenso n und N nach a und d differenziren und somit das Glied in einen constanten und einen von a und d, d. h. von x und y abhängigen Theil zerlegen, d. h. noch Glieder, die mit x^2, xy, y^2 multiplicirt erscheinen, einführen. Bei sehr hohen Deklinationen ist auch die einfache Ersetzung von d durch y nicht zulässig, da neben y noch ein Glied erster Ordnung in der Gleichung für d auftritt, dessen Produkt mit den Gliedern, die $\cos\delta$ im Nenner haben, dann nicht mehr verschwindet. Diese Correctionen müssen mit ihren Zeichen an die gemessenen x und y angebracht werden, da die Formeln, aus denen sie abgeleitet sind, so gegeben sind, dass sie die von der Refraction beeinflussten, beobachteten Grössen auf wahre reduciren. Die Gesammtcorrectionen für Aberration und Refraction

$$(-e_x+g_x)x+(-f_x+h_x)y$$
$$(-e_y+g_y)x+(-f_y+h_y)y$$

können also für geringe Deklinationen gut in einer Tafel mit doppeltem Eingang tabulirt werden.

Im »Astronomical Journal« No. 350 giebt H. JACOBY noch an, wie die Berechnung der Refraction für rechtwinklige Coordinaten durch Tafeln erleichtert werden kann. Da nämlich diese Correctionen ausser von der Polhöhe noch von Deklination und Stundenwinkel der Plattenmitte abhängen, so wäre für jede Sternwarte eine Tafel mit doppeltem Eingang nothwendig. Um diese zu vermeiden, entwickelt JACOBY obige Formel nach steigenden Potenzen des Stundenwinkels und zwar so, dass die Correction für x

$$(\omega_1+\omega_2 t^2)x+\omega_3 y$$

diejenige für y

$$\omega_4 t\cdot x+(\omega_5+\omega_6 t^2)y \tag{13}$$

wird, wo dann

$$\omega_1=[6{\cdot}4532-10]\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi-\delta)}$$
$$\omega_2=[1{\cdot}1308-10]\frac{\sin 2\varphi\cos(\lambda+\delta)}{\cos^2(\varphi-\delta)\cdot\sin\lambda}$$
$$\omega_3=[2{\cdot}9169-10]\frac{\sin(\varphi-2\delta)\cos\varphi}{\cos\delta\cos^2(\varphi-\delta)}$$
$$\omega_4=[4{\cdot}9681-10]\frac{\sin 2\varphi}{\cos^2(\varphi-\delta)}$$
$$\omega_5=[6{\cdot}4532-10]\sec^2(\varphi-\delta)$$
$$\omega_6=[6{\cdot}4637-10]\tan(\varphi-\delta)$$

und $tang\,\lambda = \frac{1}{2}\,tang\,\varphi$ ist. Die in Klammern gesetzten Faktoren sind logarithmisch ausgedrückt, und als Einheit für t hat die Zeitminute zu gelten. Die $\omega_1 \ldots \omega_6$ sind dann in Tafeln mit dem Argumente der Deklination zu bringen. Allerdings ist diese Reihenentwickelung nur gültig für kleine Stundenwinkel etwa bis zu 1^h, aber genaue astrophotographische Aufnahmen werden immer in der Nähe des Meridians gemacht, und speciell gilt dies von den Platten der photographischen Himmelskarte.

Der numerische Werth der Constante der Refraction ist in allen diesen Formeln nicht der gleiche, wie der für Beobachtungen mit dem Auge. Die Luft bricht Strahlen von verschiedener Wellenlänge verschieden stark, und während für das gewöhnliche Fernrohr der Brechungsexponent für die gelben Strahlen in Frage kommt, handelt es sich für das photographische um den für die violetten, oder genauer, wenn A der Betrag der Refraction in 45° Zenithdistanz ist, so ist nach Untersuchungen von PROSPER HENRY

für die Wellenlänge	700 $\mu\mu$	$A = 57''\!\cdot\!79$
„ „ „	600 $\mu\mu$	$A = 58''\!\cdot\!11$
„ „ „	575 $\mu\mu$	$A = 58''\!\cdot\!22$
„ „ „	500 $\mu\mu$	$A = 58''\!\cdot\!60$
„ „ „	430 $\mu\mu$	$A = 59''\!\cdot\!13$
„ „ „	400 $\mu\mu$	$A = 59''\!\cdot\!42$.

Bei der Wellenlänge 575 $\mu\mu$ liegt nun das Maximum der Intensität für das Auge, bei 430 jenes für die Platte, somit ist der in üblichen Refractionstafeln angewandte Werth von A um $0''\!\cdot\!91$, d. h. um $\frac{1}{64}$ zu vergrössern, um jene bei der Ausmessung von Platten verwenden zu können.

Ausser der Refraction und Aberration sind nun zunächst bei der Reduction der Ausmessungen zu berücksichtigen die Distorsion des Feldes, die aber ein für alle Mal für das Fernrohr untersucht sein muss, und die Deformation der empfindlichen Schicht, welche durch Ausmessung des aufcopirten Netzes für jede Platte besonders bestimmt wird. Es kommen dann die Fehler in Betracht, die durch unvollkommene Erfüllung der gemachten strengen Voraussetzungen entstehen. Die Platte kann bei der Ausmessung nicht scharf genug orientirt sein, indem der Deklinationskreis der Mitte noch einen kleinen Winkel mit der Axe der y bildet; sie kann im Fernrohr so gelegen haben, dass die Verbindungslinie ihrer Mitte mit der Mitte des Objectives nicht senkrecht zu ihr stand, es kann der Scalenwerth nicht richtig angenommen sein, endlich können die Coordinaten des Nullpunktes um kleine Beträge fehlerhaft angesetzt werden. Die Summe aller dieser Fehlerquellen würde, wenn sie bekannt wären, durch Anbringung von Verbesserungen von der Form

$$l_x + m_x x + n_x y \quad \text{in} \quad x$$
$$l_y + m_y x + n_y y \quad \text{in} \quad y$$

beseitigt werden. Wir können aber die numerischen Werthe dieser Correctionen nur aus den auf der Platte vorhandenen, ihren Coordinaten nach schon bekannten Sternen der Zonenbeobachtungen der Astronomischen Gesellschaft bestimmen. Es kommen hier die umgekehrten Formeln wie in (8) in Betracht. Hier sind die Rectascensions- und Deklinationsunterschiede a und d gegen die Mitte der Platte bekannt, und es folgen daraus theoretisch die zu messenden x und y, wenn nämlich $p = 1$ gesetzt wird:

$$x = \left(a + \frac{a^3}{3q^2}\right)\left(\cos D - \frac{y \sin D}{q}\right)$$

$$y = d + \frac{a^2}{4q} \sin 2D + \frac{da^2}{2q^2} \cos 2D + \frac{d^3}{3q^2} - \frac{d^2a^2}{2q^3} \sin 2D + \frac{a^4}{8q^3} \cos^2 D \sin 2D, \tag{15}$$

wo bei D unter 68° die beiden letzten Glieder in y fortbleiben können. Vergleicht man nun diese theoretischen Werthe von x und y, von welchen y zuerst berechnet werden muss, da es in den Ausdruck für x eingeht, mit den gemessenen, nachdem diese für Refraction, Aberration, Distorsion und Deformation der Schicht verbessert sind, so ergeben die Unterschiede Δx, Δy im Sinne von Theorie weniger Messung Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \Delta x &= l_x + m_x x + n_x y \\ \Delta y &= l_y + m_y x + n_y y, \end{aligned} \tag{16}$$

und zwar eben so viele, als Vergleichsterne vorhanden sind. Die Behandlung derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate, unter Umständen mit Anwendung von Gewichten, wenn die schwächeren Sterne weniger sicher bestimmt zu sein scheinen sollten als die helleren, ergiebt die 6 Unbekannten

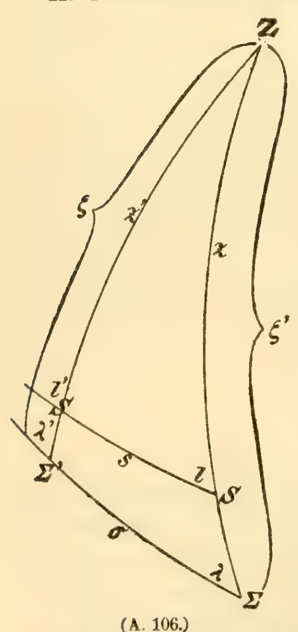
$$l_x, \; m_x, \; n_x, \; l_y, \; m_y, \; n_y.$$

An die auf der Platte gemessenen Coordinaten der zu bestimmenden Sterne sind dann also der Reihe nach anzubringen die Correctionen für Distorsion des Feldes, Deformation der Schicht, die für Refraction und Aberration, die mit den oben besprochenen von der Form $l_x + m_x x + n_x y$ resp. $l_y + m_y x + n_y y$ leicht zusammengezogen werden können zu

$$B + Cx + Dy \quad \text{resp.} \quad E + Fx + Gy,$$

und ebenso leicht in eine Tafel mit zwei Eingängen gebracht werden können. Aus den so erhaltenen x und y sind dann nach den Formeln (8) die a und d zu berechnen, welche durch Hinzufügung zu den Polarcoordinaten die wahren Oerter der Sterne zur Zeit der Aufnahme der Platte ergeben.

II. Methode der Messung von Positionswinkeln und Distanzen. Diese Methode erscheint als die einfachste und natürlichste, denn von den beiden Elementen, die sie bestimmt, geht das eine, der Positionswinkel, ganz unverändert vom Himmel auf die Platte über, da die Platte als eine die Sphäre in ihrem Mittelpunkt berührende Ebene betrachtet werden kann, und die Distanzen erscheinen in der einfachen Function ihrer Tangenten auf der Platte. Es ist also zur Ausmessung der Platten ein gewöhnliches Mikrometer mit Positionskreis geeignet; auch ist die Aufcopirung eines Netzes auf die Platte vor der Exposition unnöthig, ja sogar schädlich. Man nimmt einen Stern nahe der Plattenmitte als Centralstern und misst die Positionswinkel aller Sterne an ihm und die Distanzen aller Sterne von ihm aus. Von den Correctionen, welche an diese einfachen Messungen angebracht werden müssen, soll zunächst die für Refraction betrachtet werden. Wir können uns aber bei deren Ableitung nicht auf eine von BESSEL gegebene stützen, da dieser den Positionswinkel an dem in der Mitte beider Sterne liegenden Punkte bestimmt, während er hier an dem einen Sterne selbst ausgemessen wird.



(A. 106.)

Wir betrachten das Dreieck zwischen dem Zenith Z (Fig. 106) und den Bildern des Centralsternes S und eines anderen Sternes S' auf der Platte, welche ohne Refraction in Σ und Σ' stehen würden. Es ist zu untersuchen, was aus dem Winkel $ZSS' = l$ und der Distanz $SS' = s$, d. h. den scheinbaren auf der Platte zu messenden Grössen wird, wenn wir S nach Σ, S' nach Σ' um den Betrag der Refraction vom Zenith hinwegschieben, und wollen die wahren, dann entstehenden Werthe λ und σ kennen lernen. Wir differenziiren zunächst die Gleichung

$$\cos s = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos A \tag{17}$$

nach z, z' und erhalten, unter Weglassung der Glieder zweiter Ordnung

$$-\sin s\, ds = -\sin z \cos z'\, dz - \cos z \sin z'\, dz' + (\cos z \sin z'\, dz + \sin z \cos z'\, dz') \cos A. \tag{18}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dz &= \frac{k}{\sin 1''} \tang z \\ dz' &= \frac{k'}{\sin 1''} \tang z' = \left[k + \frac{dk}{dz} \sin(z' - z)\right] \frac{\tang z'}{\sin 1''}, \end{aligned} \tag{19}$$

also

$$\begin{aligned} -\sin s\, ds = &\frac{k}{\sin 1''}\left(-\frac{\sin^2 z}{\cos z}\cos z' - \frac{\cos z \sin^2 z'}{\cos z'} + 2 \sin z \sin z' \cos A\right) + \\ &\frac{dk}{dz}\frac{\sin(z' - z)}{\sin 1''}\left(\sin z \sin z' \cos A - \frac{\cos z \sin^2 z'}{\cos z'}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

und wenn wir $\sin z \sin z' \cos A = \cos s - \cos z \cos z'$ setzen

$$\begin{aligned} -\sin s\, ds \sin 1'' = &\frac{k}{\cos z \cos z'}(2 \cos s \cos z \cos z' - \cos^2 z - \cos^2 z') + \\ &\frac{dk}{dz} \sin(z' - z) \tang z' \sin s \cos l'. \end{aligned} \tag{21}$$

Während wir nun in dem zweiten Ausdruck rechts $\sin(z' - z)$ durch $-\sin s \cos l$ und $\tang z' \cos l'$ durch $\tang z \cos l$ ersetzen dürfen, weil dadurch nur Fehler von der nächst niederen Ordnung begangen werden, ersetzen wir im ersten $\cos z'$ durch $\cos s \cos z + \sin s \sin z \cos l$ und erhalten nach leichten Umformungen

$$-\sin s\, ds \sin 1'' = -\frac{k}{\cos z}\,\frac{\sin^2 s(\cos^2 z + \sin^2 z \cos^2 l)}{\cos s \cos z + \sin s \sin z \cos l} - \frac{dk}{dz}\sin^2 s \cos^2 l \tang z \tag{22}$$

oder

$$ds \sin 1'' = k \tang s\,\frac{1 + \tang^2 z \cos^2 l}{1 + \tang s \tang z \cos l} + \frac{dk}{dz} \sin s \cos^2 l \tang z \tag{23}$$

und wenn wir den ersten Bruch in eine Reihe entwickeln

$$\begin{aligned} ds \sin 1'' = &k \tang s(1 + \tang^2 z \cos^2 l - \tang z \tang s \cos l - \tang^3 z \tang s \cos^3 l \ldots) \\ &+ \frac{dk}{dz} \sin s \cos^2 l \tang z, \end{aligned} \tag{24}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} \sigma - s = ds = &ks(1 + \tang^2 z \cos^2 l) - k \sin 1'' s^2 \tang z \cos l(1 + \tang^2 z \cos^2 l) \\ &+ \frac{dk}{dz} s \cos^2 l \tang z. \end{aligned} \tag{25}$$

Um die Refraction für den Positionswinkel d. h. zunächst für den Winkel l zu berechnen, gehen wir aus von den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin s \cos l &= \cos z' \sin z - \sin z' \cos z \cos A \\ \sin s \sin l &= \sin z' \sin A, \end{aligned} \tag{26}$$

woraus durch Division

$$\cotang l = \cotang z' \frac{\sin z}{\sin A} - \cotang A \cos z. \tag{27}$$

Die Differenziation ergiebt

$$-\frac{dl}{\sin^2 l} = \text{cotang}\, z' \frac{\cos z\, dz}{\sin A} - \frac{\sin z\, dz'}{\sin^2 z' \sin A} + \text{cotang}\, A \sin z\, dz$$

$$= \frac{k}{\sin A \sin 1''}\left(\sin z\, \text{cotang}\, z' + \cos A \sin z\, \text{tang}\, z - \frac{\sin z}{\sin z' \cos z'}\right) - \frac{dk}{dz}\frac{\sin(z'-z)}{\sin 1''}\frac{\sin z}{\sin z' \cos z' \sin A} \qquad (28)$$

oder

$$\frac{dl \sin 1''}{\sin^2 l} = \frac{k \sin z}{\sin A \sin z' \cos z \cos z'}(\cos z - \cos z \cos^2 z' - \cos A \sin z' \cos z' \sin z) - \frac{dk}{dz}\frac{\sin s \cos l \sin z}{\sin s \sin l \cos z'}$$

$$= \frac{k \sin z}{\sin A \cos z \cos z'}(\cos z \sin z' - \cos A \cos z' \sin z) - \frac{dk}{dz}\text{cotang}\, l\, \text{tang}\, z \qquad (29)$$

$$= -\frac{k \sin z \sin s \cos l'}{\cos z \sin A \cos z'} - \frac{dk}{dz}\text{cotang}\, l\, \text{tang}\, z.$$

Da nun

$$-\cos l' = \frac{\cos z - \cos s \cos z'}{\sin z' \sin s}, \qquad (30)$$

so wird

$$dl \sin 1'' = k \sin^2 l \frac{\sin z(\cos z - \cos s \cos z')}{\cos z \sin z' \cos z' \sin A} - \frac{dk}{dz}\sin l \cos l\, \text{tang}\, z$$

$$= \frac{k \sin l\, \text{tang}\, z(\cos z - \cos z \cos^2 s - \cos s \sin s \sin z \cos l)}{\sin s(\cos s \cos z + \sin s \sin z \cos l)} - \frac{dk}{dz}\sin l \cos l\, \text{tang}\, z$$

$$= k \sin l\, \text{tang}\, z \frac{\cos z \sin s - \cos s \sin z \cos l}{\cos z \cos s + \sin s \sin z \cos l} - \frac{dk}{dz}\sin l \cos l\, \text{tang}\, z \qquad (31)$$

$$= k \sin l\, \text{tang}\, z \frac{\text{tang}\, s - \text{tang}\, z \cos l}{1 + \text{tang}\, s\, \text{tang}\, z \cos l} - \frac{dk}{dz}\sin l \cos l\, \text{tang}\, z$$

und wenn wir auch hier den Bruch in eine Reihe auflösen

$$dl \sin 1'' = k \sin l\, \text{tang}\, z\, \text{tang}\, s - k\, \text{tang}^2 z \sin l \cos l - k \sin l \cos l\, \text{tang}^2 z\, \text{tang}^2 s + k \sin l \cos^2 l\, \text{tang}\, s\, \text{tang}^3 z - k \sin l \cos^3 l\, \text{tang}^4 z\, \text{tang}^2 s - \frac{dk}{dz}\sin l \cos l\, \text{tang}\, z. \qquad (32)$$

Also haben wir endlich

$$\lambda - l = dl = -\frac{k}{\sin 1''}\text{tang}^2 z \sin l \cos l + ks\, \text{tang}\, z \sin l(1 + \text{tang}^2 z \cos^2 l) - k \sin 1'' s^2 \sin l \cos l\, \text{tang}^2 z(1 + \text{tang}^2 z \cos^2 l) - \frac{dk}{dz}\frac{\sin l \cos l\, \text{tang}\, z}{\sin 1''}. \qquad (33)$$

Da indessen nicht der Winkel l, sondern der Positionswinkel p auf der Platte gemessen wird, welcher mit l durch die Gleichung

$$p - q = l,$$

wo q der sogen. parallactische Winkel ist, verbunden ist, so führen wir überall $p - q$ für l ein und für

$$dl = dp - dq,$$

wo

$$dq = \frac{k}{\sin 1''}\text{tang}\, z \sin q\, \text{tang}\, \delta \qquad (34)$$

(s. Refraction) ist, und es ist der Unterschied zwischen dem wahren Positionswinkel π und p zu suchen.

Führen wir nun mit BESSEL (Astr. Unters. I, pag. 157) statt der scheinbaren die wahre Zenithdistanz ζ ein, nach

$$\varkappa \, tang^2 \zeta = k \, tang^2 z + \frac{dk}{dz} tang \, z,$$

so gehen die Gleichungen (25) und (33) über in

$$\sigma - s = ks + \varkappa s \, tang^2 \zeta \, cos^2(p - q) + Bs^2 \tag{35}$$

$$\pi - p = - \frac{\varkappa}{sin \, 1''} tang^2 \zeta \, sin(p - q) cos(p - q) - \frac{k}{sin \, 1''} tang \, z \, sin \, q \, tang \, \delta + A's + B's^2.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} B &= - k \, sin \, 1'' tang \, z \, cos \, (p - q)[1 + tang^2 z \, cos^2 (p - q)] \\ A' &= k \, tang \, z \, sin(p - q)[1 + tang^2 z \, cos^2 (p - q)] \\ B' &= - k \, sin \, 1'' sin \, (p - q) \, cos \, (p - q) \, tang^2 z [1 + tang^2 z \, cos^2 (p - q)]. \end{aligned} \tag{36}$$

Diese Gleichungen (35) erlauben die Berechnung der Refractionscorrectionen in sehr einfacher Weise; k und $\varkappa$ sind den BESSEL'schen Tafeln zu entnehmen, ζ, z, q, δ sind die für den Mittelstern der Platte geltenden einfach zu berechnenden Ausdrücke, die also für alle Sterne gleichmässig gelten. Die jedesmalige Messung liefert s und p, womit die Correctionen leicht mit Hilfe von Tafeln gewonnen werden können. In der Gleichung für $\pi - p$ kann das Glied $B's^2$ immer bei Seite gelassen werden, da die Messungen der Positionswinkel doch nicht dieselbe Genauigkeit haben, wie die der Distanzen. Bei nicht zu grossen Zenithdistanzen werden auch die Glieder Bs^2 und $A's$ vernachlässigt und $k = \varkappa$ gesetzt werden dürfen. Endlich ist der Ausdruck

$$- k \, tang \, z \, sin \, q \, tang \, \delta$$

eine constante Correction aller gemessenen Positionswinkel und kann, da sie die der Anhaltsterne und die der unbekannten Sterne in gleicher Weise beeinflusst, überhaupt fortgelassen werden.

Mit allen diesen Einschränkungen wird die Refractionscorrection einfach:

$$\begin{aligned} \sigma - s &= ks[1 + tang^2 \zeta \, cos^2 (p - q)] \\ \pi - p &= - \frac{k}{2 \, sin \, 1''} tang^2 \zeta \, sin^2 (p - q). \end{aligned} \tag{37}$$

Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration. Da Präcession und Nutation nur die Lage des Himmelsäquators resp. des Poles verschieben, so wird durch sie nur der Deklinationskreis der Mitte der Platte, von welchem alle Positionswinkel an gezählt werden, um einen kleinen Winkel gedreht, also alle Positionswinkel um eben diesen Betrag gleichmässig verändert, die Distanzen aber nicht beeinflusst. Die Aberration hingegen bewirkt ebenfalls eine für alle von demselben Stern aus gezählten Positionswinkel constante Drehung, und vergrössert alle von demselben Stern aus gemessenen Distanzen in dem gleichen Maasse (BESSEL, Astron. Unters. I, pag. 207). Drücken wir die erforderlichen Correctionen in den im »Berliner Astronom. Jahrbuch« für die Berechnung der scheinbaren Oerter üblichen Hilfsgrössen aus, so werden die gemessenen Positionswinkel und Distanzen auf wahre für den Anfang des Jahres gebracht durch

$$\begin{aligned} \Delta p &= - (a'A + b'B + c'C + d'D) \\ \Delta s &= s \, (cC + dD). \end{aligned} \tag{38}$$

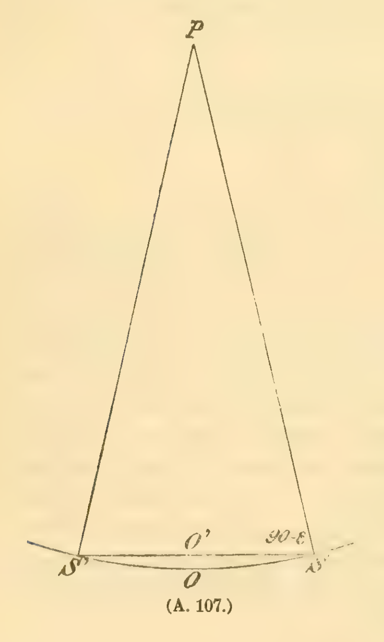
Der Faktor von s ist ebenso wie Δp constant für alle Sterne. Ersterer kann daher bequem mit der gleich zu erwähnenden Nullpunktscorrection, letzterer mit dem Scalenwerth vereinigt werden.

Scalenwerth. Die auf der Platte gemessenen Distanzen correspondiren, wie schon zuvor erwähnt, mit den Tangenten der wirklichen Distanzen der Sterne, falls keine weitere Distorsion des Feldes vorhanden ist. Man wird nun auf der Platte eine Anzahl gut bestimmter, möglichst symmetrisch um den Mittelstern gelegener Sterne auswählen (JACOBY nahm bei den Plejadenplatten 6), welche in grosser Entfernung, aber nicht dem Rande allzu nahe liegen. Die symmetrische Lage um den Mittelstern bezweckt, Fehler in dessen Position und etwaige Messungsfehler, die von der Richtung abhängen sollten, unschädlich zu machen. Ist nun s die berechnete Distanz in Bogensecunden, m die Anzahl der Scalentheile, die am Mikrometer gemessen sind, und r der zu bestimmende Werth eines einzigen Scalentheiles, so ist

$$s = mr + \alpha\,(mr)^2 + \beta\,(mr)^3 + \ldots .$$

wo, wenn keine eigentliche Distorsion stattfindet $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{\sin^2 1''}{3}$ ist; r sowie die Coëfficienten α, β sind nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln. Eine nicht senkrechte Lage der Platte im Fernrohr zur optischen Axe würde sich dadurch verrathen, dass die Anhaltsterne auf der einen Seite andere Scalenwerthe ergeben als auf der anderen, man könnte dann aus vielen Anhaltsternen eine Formel für s ableiten, die auf der rechten Seite noch ein Zusatzglied $\varepsilon \sin (p + \rho)$ hätte, wo ε und ρ als weitere Unbekannte zu bestimmen wären, doch erspart man Zeit, wenn man die Platte verwirft und die anderen besser orientirt.

Nullpunktscorrection. Die Richtung des Deklinationskreises lassen einige Astronomen bekanntlich sich selbst auf der Platte aufzeichnen, indem nach Vollendung der Aufnahme das Fernrohr festgehalten wird, sodass die Sterne über die Platte hinlaufen. Bei der raschen Bewegung zeichnen aber nur die helleren eine Spur, unter anderen auch der bei den Messungen zum Ausgangspunkt genommene Centralstern. Die von ihm nach dem äussersten Ende seiner Spur gezogene Gerade ist der eine Schenkel sämmtlicher zu messenden Positionswinkel, und diese sind zunächst um 270° zu vermehren, um auf wahre Positionswinkel gebracht zu werden, aber dann noch um einen kleinen Winkel, da die genannte Gerade (am Himmel der grösste Kreis, der zwei nahe Punkte eines Deklinationskreises verbindet) mit dem Stundenkreis des Centralsternes weniger als einen rechten Winkel einschliesst. Der kleine Winkel ε (Fig. 107), welcher die Abweichung beträgt, findet sich durch sein Complement, den Winkel $PSO'S'$ im sphärischen Dreieck, während SOS' der Parallelkreis ist. Es ist nämlich, nach den Bezeichnungen in der Figur



(A. 107.)

$$\cos PS' = \cos PS \cos SO'S' + \sin PS \sin SO'S' \cos (90 - \varepsilon) \tag{39}$$

oder

$$\sin \delta = \sin \delta \cos s + \cos \delta \sin s \sin \varepsilon,$$

wenn s der Abstand SS' in Bogen grössten Kreises bedeutet, also

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin \delta (1 - \cos s)}{\cos \delta \sin s} = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s$$

oder (40)

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} s \operatorname{tang} \delta,$$

s ist auf der Platte auszumessen und δ ist bekannt. Nun wird aber der Ort des Endpunktes der Sternspur auch durch die Refraction verschoben, und zwar im Positionswinkel 270° laut (37) um $+\frac{k}{2 \sin 1''} \operatorname{tang}^2 \zeta \sin 2q$, wo das Vorzeichen umgekehrt wurde, weil hier von wahren auf scheinbare Grössen übergegangen wird (dabei ist das Glied $k \operatorname{tang} z \sin q \operatorname{tang} \delta$ wie immer fortgelassen). Endlich fügen wir auch die für alle Positionswinkel constante Correction für Präcession, Nutation, Aberration hier an, sodass die Nullpunktscorrection wird

$$\tfrac{1}{2} s \operatorname{tang} \delta + \frac{k}{2 \sin 1''} \operatorname{tang}^2 \zeta \sin 2q - (a' A + b' B + c' C + d' D). \tag{41}$$

Dieselbe ist für jede Platte constant, und den von dem Ende der Sternspur aus gemessenen Positionswinkeln hinzufügen.

Falls, wie es auch vorgeschlagen ist, das Aufzeichnen der Sternspur unterbleibt, muss man durch Vergleichung der gemessenen Positionswinkel einer grossen Zahl bekannter Sterne mit den berechneten unter alleiniger Rücksicht auf die Refraction, die Nullpunktscorrection empirisch bestimmen.

Aus den corrigirten s und p erhält man dann die gesuchte Rectascension α und Deklination δ des Sterns mittelst der geschlossenen und strengen Formeln

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin s \cos p \cos D + \cos s \sin D, \\ \sin (\alpha - A) &= \sin s \sin p \sec \delta, \end{aligned} \tag{42}$$

wenn A und D die Coordinaten des Centralsternes sind. Man erhält so zunächst δ und mit Hilfe dieses die Rectascensionsdifferenz und so die Rectascension des Sterns selbst. Tafeln vermögen hier die Rechnung zu erleichtern. Man kann aber auch auf die Coordinatendifferenzen ausgehen und die erste Gleichung nach Mac Laurin wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin D + (\delta - D) \cos D - \frac{(\delta - D)^2}{2} \sin D - \frac{(\delta - D)^3}{6} \cos D + \frac{(\delta - D)^4}{24} \sin D \\ &= \left(s - \frac{s^3}{6}\right) \cos p \cos D + \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24}\right) \sin D, \end{aligned} \tag{43}$$

wobei nur die Glieder vierter Ordnung noch berücksichtigt wurden. Hieraus ist dann $\delta - D$ nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zu ermitteln. Es sei

$$\delta - D = s \cos p + \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4, \tag{44}$$

so haben wir für α, β, γ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\alpha \cos D - \tfrac{1}{2} \cos^2 p \sin D = - \tfrac{1}{2} \sin D, \\ &\beta \cos D - \alpha \cos p \sin D - \tfrac{1}{6} \cos^3 p \cos D = - \tfrac{1}{6} \cos p \cos D, \\ &\gamma \cos D - \beta \cos p \sin D - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin D - \tfrac{1}{2} \alpha \cos^2 p \cos D + \tfrac{1}{24} \cos^4 p \sin D = \tfrac{1}{24} \sin D, \end{aligned} \tag{45}$$

woraus der Reihe nach wird

$$\begin{aligned} \alpha &= - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} D \sin^2 p, \\ \beta &= - \tfrac{1}{6} \cos p \sin^2 p - \tfrac{1}{2} \sin^2 p \cos p \operatorname{tang}^2 D = - \tfrac{1}{6} \sin^2 p \cos p (1 + 3 \operatorname{tang}^2 D), \\ \gamma &= \tfrac{1}{24} \operatorname{tang} D (1 - \cos^4 p) + \tfrac{1}{8} \operatorname{tang}^3 D \sin^4 p - \tfrac{1}{4} \operatorname{tang} D \sin^2 p \cos^2 p \\ &\quad - \tfrac{1}{6} \sin^2 p \cos^2 p \operatorname{tang} D (1 + 3 \operatorname{tang}^2 D) \\ &= [\tfrac{1}{24} \operatorname{tang} D \sin^4 p - \tfrac{1}{6} \sin^2 p \cos^2 p \operatorname{tang} D][1 + 3 \operatorname{tang}^2 D]. \end{aligned} \tag{46}$$

Um in gleicher Weise $\alpha - A$ in eine Reihe nach Potenzen von s zu entwickeln, müssen wir es zuerst durch p, D und s allein ausdrücken. Dies geschieht durch Benutzung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - A)\cos\delta &= \sin s \sin p \\ \cos(\alpha - A)\cos\delta &= \cos s \cos D - \sin s \sin D \cos p, \end{aligned} \tag{47}$$

woraus

$$\operatorname{tang}(\alpha - A)[\cos D - \operatorname{tang} s \sin D \cos p] = \operatorname{tang} s \sin p$$

oder

$$[(\alpha - A) + \tfrac{1}{3}(\alpha - A)^3][\cos D - (s + \tfrac{1}{3}s^3)\sin D \cos p] = (s + \tfrac{1}{3}s^3)\sin p, \tag{48}$$

und setzt man nun

$$\alpha - A = \frac{s \sin p}{\cos D} + \alpha' s^2 + \beta' s^3 + \gamma' s^4, \tag{49}$$

so wird

$$\begin{aligned} &\alpha' \cos D - \sin p \cos p \operatorname{tang} D = 0 \\ &\beta' \cos D + \frac{\sin^3 p}{3\cos^2 D} - \alpha' \sin D \cos p = \tfrac{1}{3}\sin p \\ &\gamma' \cos D + \frac{\alpha' \sin^2 p}{\cos D} - \beta' \sin D \cos p - \tfrac{1}{3}\sin p \cos p \operatorname{tang} D - \frac{\sin^3 p}{3\cos^3 D}\sin D \cos p = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

woraus

$$\begin{aligned} \alpha' &= \sin p \cos p \frac{\operatorname{tang} D}{\cos D} \\ \beta' &= \frac{\sin p}{3\cos D} + \frac{\sin p \cos^2 p \operatorname{tang}^2 D}{\cos D} - \frac{\sin^3 p}{3\cos^3 D} \\ &= -\frac{\sin^3 p \operatorname{tang}^2 D}{3\cos D} + \frac{\sin p \cos^2 p}{3\cos D}(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ \gamma' &= \frac{\sin^3 p \cos p \operatorname{tang} D}{3\cos D}(1 + \sec^2 D) + \frac{\sin p \cos^3 p \operatorname{tang} D}{3\cos D} - \frac{\sin^3 p \cos p \operatorname{tang} D}{\cos^3 D} \\ &+ \frac{\sin p \cos^3 p \operatorname{tang} D}{3\cos D}(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) - \frac{\sin^3 p \cos p \operatorname{tang}^3 D}{3\cos D} \\ &= -\frac{\sin^3 p \cos p \operatorname{tang} D}{3\cos D}(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) + \frac{\sin p \cos^3 p \operatorname{tang} D}{3\cos D}(2 + 3\operatorname{tang}^2 D). \end{aligned} \tag{51}$$

Führen wir nun noch die abkürzenden Bezeichnungen ein

$$s \cos p = m \qquad s \sin p = n,$$

so wird

$$\begin{aligned} \delta - D &= m - \tfrac{1}{2}n^2 \sin 1'' \operatorname{tang} D - \tfrac{1}{6}m n^2 \sin^2 1''(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ &\quad + (\tfrac{1}{24}n^4 - \tfrac{1}{6}n^2 m^2)\sin^3 1''(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ (\alpha - A)\cos D &= n + m n \sin 1'' \operatorname{tang} D - \tfrac{1}{3}n^3 \sin^2 1'' \operatorname{tang}^2 D \\ &\quad + \tfrac{1}{3}n m^2 \sin^2 1''(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) - \tfrac{1}{3}n^3 m \sin^3 1'' \operatorname{tang} D(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}n m^3 \sin^3 1'' \operatorname{tang} D(2 + 3\operatorname{tang}^2 D). \end{aligned} \tag{52}$$

Hier sind die entsprechenden Potenzen von $\sin 1''$ beigesetzt, die in den vorausgehenden Entwickelungen der Kürze halber weggelassen waren. Die Faktoren, mit welchen die Produkte und Potenzen von m und n multiplicirt sind, sind für die ganze Platte constant, sodass die einzelnen Glieder aus Tafeln mit dem doppelten Argument m und n entnommen werden können. Dann gestalten sich die Ausdrücke, in denen nun die Faktoren logarithmisch angesetzt sind, wie folgt, wobei noch zu bemerken ist, dass die beiden Glieder 4. Ordnung, wenn D nicht sehr grosse Werthe annehmen sollte, unberücksichtigt bleiben können:

$$\begin{aligned} (\delta - D) = m &- [4{\cdot}384545 - 10]\, n^2 \operatorname{tang} D \\ &- [8{\cdot}59300 - 20]\, m n^2 (1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ &+ [2{\cdot}67651 - 20]\, n^4 \operatorname{tang} D(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \\ &- [3{\cdot}27857 - 20]\, m^2 n^2 \operatorname{tang} D(1 + 3\operatorname{tang}^2 D) \end{aligned} \tag{53}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha - A)\cos D = n &+ [4{\cdot}685575 - 10]\, mn \operatorname{tang} D \\
&- [8{\cdot}89403 - 20]\, n^3 \operatorname{tang}^2 D \\
&+ [8{\cdot}89403 - 20]\, m^2 n\,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 D) \qquad (54)\\
&- [3{\cdot}57960 - 20]\, mn^3 \operatorname{tang} D\,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 D) \\
&+ [3{\cdot}57960 - 20]\, m^3 n \operatorname{tang} D\,(2 + 3 \operatorname{tang}^2 D).
\end{aligned}
$$

Wir kommen endlich zur dritten Methode, der sogenannten

III. parallactischen Methode, die von KAPTEYN vorgeschlagen wurde. Die Idee, von welcher KAPTEYN ausgeht, ist die folgende: Betrachtet man eine Platte aus der Entfernung, welche gleich dem Abstand der Platte von der Mitte des Objectivs während der Aufnahme im Fernrohr ist, so kann man, wenn die Verzerrungen der Schicht als verschwindend vorausgesetzt werden, die wirklichen Sterne am Himmel durch ihre Bilder auf der Platte verdecken, und man kann also, wenn man das Auge durch den Durchkreuzungspunkt zweier Axen eines Aequatoreals ersetzt, auf der Platte ebenso wie am Himmel Rectascensions- und Deklinationsunterschiede messen, falls sich nur die optische Axe, die Stundenaxe und die Deklinationsaxe genau in einem Punkte schneiden. Dieses Aequatoreal ist mit Stundenkreis und Deklinationskreis (beide fein getheilt) und Ocularmikrometer ebenso versehen wie ein zum Zwecke astronomischer Messungen bestimmtes. Die Platte muss ihm gegenüber fest vertikal montirt und in ihrer Ebene um einen Positionswinkel drehbar sein, der an einer Kreistheilung abgelesen werden kann. Das Aequatoreal, dessen Stundenaxe horizontal liegt, ist dann auf einem Tisch aufgesetzt, der um eine verticale Axe drehbar ist. Um nun die Beobachtungen anzustellen, klemmt man die Deklinationsaxe fest auf die Ablesung, welche der Deklination der Mitte der Platte für 1900·0 entspricht, dann dreht man das Rohr um die Stundenaxe, sodass es in die Ebene des Horizontes kommt, und hierauf um die vertikale Axe, bis die Plattenmitte in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, und klemmt zuletzt die Vertikalaxe. Nimmt man nun auf der Platte zwei bekannte Sterne nahe gleicher Rectascension aber recht verschiedener Deklination und bestimmt mittelst des Instrumentes ihren bekannten Rectascensionsunterschied für die Epoche 1900·0, so muss die Platte mittelst des Positionskreises so lange gedreht werden, bis die Messung den bekannten Werth ergiebt; dann ist die Platte sehr nahe richtig gegen den Aequator von 1900·0 in Bezug auf das Instrument orientirt.

Man kann nun entweder direkt von allen Sternen die Rectascensions- und Deklinationsunterschiede gegen die Plattenmitte ausmessen, dann ist es aber nothwendig, die Fehler des Instrumentes, deren nicht wenige bei der grossen Zahl von vorgeschriebenen Bedingungen in Betracht kommen, genau zu kennen, und ihren Einfluss bei den Messungen zu berücksichtigen. KAPTEYN hat im »Bulletin du Comité permanent« pag. 401 eine ausführliche und vollständige Theorie der Fehler des parallactischen Instrumentes gegeben, welche hier zu reproduciren einem vollständigen Abdruck der umfangreichen Arbeit gleichkommen würde. Will man der grossen Mühe der Bestimmung dieser Fehler und ihrer rechnerischen Berücksichtigung bei den Messungen aus dem Wege gehen, so kann man nach dem Vorschlage von GILL auch so verfahren, dass man ausser sämmtlichen Sternen der Platte auch sämmtliche Durchschnittspunkte des auf sie copirten Netzes misst, und so gewissermaassen das Instrument nur zur Interpolation der Sterne zwischen die Maschen des Netzes benutzt. Freilich wird dadurch wieder die Arbeit des Messens sehr erhöht, und wenn die Linien des Netzes nur 5′ (anstatt 10′ wie anfangs beabsichtigt) nach dem Beschlusse

der Commission von einander abstehen, so hätte die Platte, die 2 Grade im Geviert enthält, 576 solcher Schnittpunkte, und das ist mehr, als Sterne auf ihr im Durchschnitt innerhalb der zunächst in Betracht kommenden Grössenklasse zu erwarten sind.

Geht man nach letzterer Methode vor, so hat man noch die Wahl, ob man jeden Stern auf das Fadenkreuz in die Mitte des Feldes einstellen und beide Kreise ablesen will, oder ob man die Deklinationsaxe ungeändert geklemmt lassen und zonenweise fortschreitend die Differenzen der Sterne gegen den Parallelkreis der Mitte des Gesichtsfeldes mittelst der Mikrometerschraube ausmessen will. KAPTEYN befürwortet den letzteren Vorgang, da es dann weniger leicht ist, Sterne zu übersehen, und wenn ein Gehilfe am Stundenkreis sitzt, dann thatsächlich ohne Ortsveränderung der Beobachter die Platte rasch durchmessen werden kann. Damit zeigen sich erst ganz die Vortheile dieser Methode, die nun sofort die Rectascensions- und Deklinationsunterschiede für die Epoche 1900·0 durch die direkten Ablesungen liefert.

Zur Reduction der Beobachtungen sind nun zuerst wie bei jedem Aequatoreal, der Schraubenwerth und die Neigung des Fadennetzes gegen den wahren Stundenkreis zu ermitteln, ferner muss, weil bei einem so grossen Instrument während der Messungen Veränderungen hauptsächlich in Folge der Körperwärme der Beobachter zu befürchten sind, wenigstens ein Punkt des Netzes vor Beginn und nach Schluss der Beobachtung jeder Zone darauf hin untersucht werden, ob sich beide Male für ihn dieselben Coordinaten ergeben, andernfalls sind die stattgehabten Veränderungen der Zeit proportional anzubringen.

Was bei der Reduction der Beobachtungen die Refraction angeht, so kommt dieselbe nur in differenzieller Weise in Betracht, und es können die hierher gehörigen Formeln dem Artikel Refraction entnommen werden.

$$\begin{aligned} d(\Delta\alpha) &= k\left[\frac{n\,cos\,(2\,\delta + N)}{cos^2\,\delta\,sin^2\,(\delta + N)}\,\Delta\delta + \left(1 + \frac{n^2}{sin^2\,(N + \delta)}\right)\Delta\alpha\right] \\ d(\Delta\delta) &= k\left[\frac{n\,cos\,N}{sin^2\,(\delta + N)}\,\Delta\alpha + \frac{\Delta\delta}{sin^2\,(\delta + N)}\right], \end{aligned} \qquad (55)$$

wo $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ den Rectascensions- bezw. Deklinationsunterschied bedeuten, δ die Deklination des gemessenen Sternes, n und N, sowie k die bei der Refractionsberechnung üblichen Grössen sind. Falls man die Faktoren von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ in diesen Formeln nicht für die ganze Platte constant setzen kann, indem man mit den für die Mitte der Platte geltenden Werthen rechnet, also bei hohen Deklinationen und geringen Höhen, so wird man sie für 9 äquidistante, um 1° in jeder Coordinate von einander entfernte Punkte rechnen, nämlich für die Mitte der Platte, ihre Ecken und Seitenmitten, und kann dann leicht für jeden anderen Punkt der Platte interpoliren.

Ferner ist der Einfluss der optischen Distorsion und der Deformation sowie eines Orientirungsfehlers des auf die Platte aufcopirten Netzes gegen den Stundenkreis der Mitte der Platte während der Exposition zu erörtern. Die Distorsion kann für jeden Durchschnittspunkt des Netzes ein für alle Mal für alle Platten desselben Fernrohrs ermittelt werden, indem man im Originalnetz und bei einigen Platten die Coordinaten der gleichen Punkte ausmisst, und so kann man sich eine Tafel anlegen, welche die Distorsion Δx und Δy für jeden Netzpunkt x, y giebt. In Folge der verschiedenen Temperatur bei der Aufcopirung des Netzes und während der Aufnahme mögen nun die Coordinaten der Netzpunkte auf der Platte in $(x + \Delta x)\,(1 + \mu)$ und $(y + \Delta y)\,(1 + \mu)$ über-

gehen, ferner sei die durch die Mitte der Platte gehende Linie des Netzes, anstatt mit dem Stundenkreis während der Aufnahme zusammenzufallen, vielmehr um den Winkel ω gegen ihn verdreht. Wird dann $x + \Delta x = \xi$, $y + \Delta y = \eta$ gesetzt, und ist p der scheinbare Positionswinkel des durch ξ, η repräsentirten Netzpunktes an der Mitte des Netzes, und $F_0 (1 + \nu)$ die Focaldistanz während der Aufnahme, s die scheinbare Distanz des Netzpunktes ξ, η von der Mitte, so ist

$$tang\,(p + \omega) = \frac{\xi}{\eta} \tag{56}$$

$$(1 + \mu)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = F_0(1 + \nu)\,tang\,s.$$

Der Einfluss der Präcession von der Epoche der Aufnahme bis 1900·0, der Nutation und der Aberration auf den Positionswinkel und die Distanz sind nun aber, wie schon früher erörtert, derart, dass alle wahren Positionswinkel π sich von dem scheinbaren p um einen für die ganze Platte constanten Winkel τ,

$$\tau = (1900 - t)\,n\,sin\,A\,sec\,D - (a'A + b'B + c'C + d'D) \tag{57}$$

unterscheiden, während alle Distanzen um $1 - h$ verkleinert werden, wo $h = cC + dD$ ist. Also ist die wahre Distanz

$$\sigma = s\,(1 - h),$$

der wahre Positionswinkel

$$\pi = p + \tau,$$

sodass wir erhalten

$$tang\,(\pi - \tau + \omega) = \frac{\xi}{\eta} \tag{58}$$

$$(1 + \mu)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = F_0(1 + \nu)\,tang\,\frac{\sigma}{1 - h} = F_0(1 + \nu)(1 + h)\,tang\,\sigma,$$

welche letztere Umwandlung wegen des kleinen Werthes von h erlaubt ist. Kürzen wir nun weiter ab

$$\omega - \tau = \Delta p; \qquad \frac{(1 + \nu)(1 + h)}{1 + \mu} = 1 + \lambda,$$

so wird

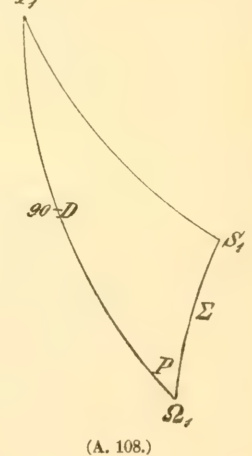
$$tang\,(\pi + \Delta p) = \frac{\xi}{\eta}$$

$$F_0(1 + \lambda)\,tang\,\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

oder

$$\pi = arctang\,\frac{\xi}{\eta} - \Delta p$$

$$\sigma = arctang\,\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0} - \frac{\lambda F_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0^2 + \xi^2 + \eta^2}.$$



(A. 108.)

In dem Dreieck $P_1 \Omega_1 S_1$ (Fig. 108) stelle nun P_1 den Pol, Ω_1 die Mitte des Netzes, S_1 den Netzpunkt $\xi_1 \eta$ vor, wie er sich scheinbar an den Himmel projicirt, dann ist der Winkel $P_1 \Omega_1 S_1$, den wir gleich P setzen wollen, $= p + \omega$ oder $arctang\,\frac{\xi}{\eta}$ und die Seite $\Omega_1 S_1$, die kurz Σ heissen möge, $= arctang\,\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0}$; wir müssen diesen Winkel also um das Differential Δp, die Seite um $\frac{\lambda F_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0^2 + \xi^2 + \eta^2}$ verkleinern, um auf die wahren Werthe π und σ zu kommen, und haben nun die entsprechenden Differentiale in Rectascension und Deklination zu suchen. α, δ seien dabei die wahren Coordinaten des Netz-

punktes ξ, η; $\alpha' \delta'$ die scheinbaren dem Dreieck $P_1 \Omega_1 S_1$ entsprechenden, A, D die der Mitte der Platte, also die von Ω_1. Nach den Differenzialformeln des sphärischen Dreiecks haben wir, wenn wir noch den Winkel $P_1 S_1 \Omega_1$ mit S_1 bezeichnen

$$d(\Omega_1 P_1 S_1) = d(\alpha' - A) = (\sin S_1 \, d\Sigma - \sin\Sigma \cos S_1 \, dP) \sec d$$
$$d\delta' = -\cos S_1 \, d\Sigma - \sin\Sigma \sin S_1 \, dP \tag{61}$$
$$dP \text{ ist } = -\Delta p$$

$$d\Sigma = -\frac{\lambda E_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0{}^2 + \xi^2 + \eta^2} = -\lambda \frac{\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{F_0}}{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{F_0{}^2}} = -\lambda \frac{\operatorname{tang}\Sigma}{1 + \operatorname{tang}^2\Sigma} = -\lambda \sin\Sigma \cos\Sigma, \tag{62}$$

also

$$\alpha - A = \alpha' - A - (\lambda \sin S_1 \cos\Sigma - \Delta p \cos S_1) \sin\Sigma \sec\delta'$$
$$\delta - D = \delta' - D + (\lambda \cos S_1 \cos\Sigma + \Delta p \sin S_1) \sin\Sigma, \tag{63}$$

mithin

$$\alpha = A + K + L\lambda + M\Delta p$$
$$\delta = D + K' + L'\lambda + M'\Delta p, \tag{64}$$

und in diesen Gleichungen ist

$$K = \operatorname{arctang}(\alpha' - A) = \operatorname{arctang} \frac{\sin P}{\cos D \operatorname{cotang}\Sigma - \sin D \cos P} \tag{65}$$

$$K' = \operatorname{arctang}(\delta' - D) = \operatorname{arctang} \frac{\operatorname{tang}\delta' - \operatorname{tang} D}{1 + \operatorname{tang}\delta' \operatorname{tang} D},$$

oder da

$$\operatorname{tang}\delta' = \cos(\alpha' - A) \frac{\cos P + \operatorname{cotang}\Sigma \operatorname{tang} D}{\operatorname{cotang}\Sigma - \operatorname{tang} D \cos P}$$
$$= \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha' - A}{2}\right) \frac{\cos P + \operatorname{cotang}\Sigma \operatorname{tang} D}{\operatorname{cotang}\Sigma - \operatorname{tang} D \cos P} \tag{66}$$

$$K' = \operatorname{arctang} \frac{\cos P - 2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha' - A)(\cos P + \operatorname{cotang}\Sigma \operatorname{tang} D)\cos^2 D}{\operatorname{cotang}\Sigma - 2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha' - A)(\cos P + \operatorname{cotang}\Sigma \operatorname{tang} D)\sin D \cos D}. \tag{67}$$

Da nun aber

$$\xi = F_0 \sin P \operatorname{tang}\Sigma$$
$$\eta = F_0 \cos P \operatorname{tang}\Sigma, \tag{68}$$

so giebt dies

$$\operatorname{tang} K = \frac{\xi}{F \cos D - \eta \sin D}$$

$$\operatorname{tang} K' = \frac{\eta - 2\sin^2\frac{1}{2}K(\eta + F_0 \operatorname{tang} D)\cos^2 D}{F_0 - 2\sin^2\frac{1}{2}K(\eta + F_0 \operatorname{tang} D)\sin D \cos D}. \tag{69}$$

und setzen wir

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\eta}{F_0}, \tag{70}$$

und dann

$$\operatorname{tang}\varphi = \sin^2\tfrac{1}{2}K \sin 2(D + \vartheta),$$

so wird

$$\operatorname{tang} K' = \frac{\sin\vartheta \cos(D + \vartheta)\cos\varphi - \sin\varphi \cos D}{\cos\vartheta \cos(D + \vartheta)\cos\varphi - \sin\varphi \sin D}$$

$$\operatorname{tang} K' - \operatorname{tang}\vartheta = -\frac{\sin\varphi \cos(D + \vartheta)\sec\vartheta}{\cos\vartheta \cos(D + \vartheta)\cos\varphi - \sin\varphi \sin D}$$

$$1 + \operatorname{tang} K' \operatorname{tang}\vartheta = \frac{\cos(D + \vartheta + \varphi)\sec\vartheta}{\cos\vartheta \cos(D + \vartheta)\cos\varphi - \sin\varphi \sin D}$$

also

$$\frac{\operatorname{tang} K' - \operatorname{tang}\vartheta}{1 + \operatorname{tang} K' \operatorname{tang}\vartheta} = \operatorname{tang}(K' - \vartheta) = -\frac{\sin\varphi \cos(D + \vartheta)}{\cos(D + \vartheta + \varphi)}.$$

Die anderen in den Gleichungen (64) auftretenden Hilfsgrössen L, L', M, M' werden erhalten, wenn man zunächst berechnet,

$$sin\, S_1 = \frac{sin\, K\, cos\, D}{sin\, \Sigma}$$

$$L = \frac{sin\, K}{sin\, P} sin\, S_1\, cos\, \Sigma \qquad M = \frac{sin\, K}{sin\, P} cos\, S_1$$

$$L' = cos\, S_1\, sin\, \Sigma\, cos\, \Sigma \qquad M' = sin\, S_1\, sin\, \Sigma.$$

Wenn nun die Coordinaten aller Netzpunkte mit dem Aequatoreal ausgemessen werden, und wir für die einzelnen Werthe α_1, δ_1 erhalten, und wenn wir kurz mit J_α, J_δ die Summe aller Fehler des Instrumentes, der Distorsion des Feldes und der Platte bezeichnen, so sind die wahren Coordinaten jedes Netzpunktes für 1900·0

$$\alpha = \alpha_1 + J_\alpha$$
$$\delta = \delta_1 + J_\delta$$

wo

$$J_\alpha = A + K - \alpha_1 + L\lambda + M\Delta p$$
$$J_\delta = D + K' - \delta_1 + L'\lambda + M'\Delta p$$

und wenn

$$A = A_0 + \Delta A, \quad D = D_0 + \Delta D$$

gesetzt wird, so ist

$$J_\alpha = (A_0 + K - \alpha_1) + \Delta A + L\lambda + M\Delta p$$
$$J_\delta = (D_0 + K' - \delta_1) + \Delta D + L'\lambda + M'\Delta p,$$

in welchen Gleichungen noch ΔA, ΔD, λ und Δp unbekannt, die Werthe A_0, D_0 als die genäherten Coordinaten des Mittelpunktes der Platte angenommen sind, α_1, δ_1 für jeden Netzpunkt gemessen sind, und K, L, M sowie K', L', M' für jeden Netzpunkt berechnet sind. Nimmt man nun alle bekannten, auf der Platte verkommenden Sterne, berechnet ihre α, δ für 1900·0, interpolirt für sie die Factoren K, L, M, und K', L', M', misst ferner ihre α_1, δ_1 mit dem Aequatoreal, so liefert jeder Stern zwei Gleichungen von der Form

$$\Delta A + L\lambda + M\Delta p = e$$
$$\Delta D + L'\lambda + M'\Delta p = e'.$$

Wenn man die Gesammtheit dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate für ΔA, ΔD, λ und Δp auflöst, so kann man sich nachher Tafeln construiren für J_α und J_δ und erhält dadurch die Mittel, an die Ablesung jedes Sternes nach Verbesserung für Refraction die Correctionen anzubringen, welche dann sofort erlauben, seine Coordinaten für 1900·0 zu ermitteln.

Für alle Platten derselben Deklinationsmitte dürfen die Werthe von L, L', M, M' als für jeden Netzpunkt constant angenommen werden. Für K und K' ist dieses nicht zulässig, da kleine Verschiebungen in D bei der Inconstanz der grossen Aequatoreale nicht zu vermeiden sind, man kann aber auch hier die Grössen K und K' constant annehmen und die kleinen Verbesserungen, welche von dD abhängen, berechnen nach:

$$dK = \tfrac{1}{2}\, sin^2\, K\, tang\, (D + \vartheta)\, dD$$
$$dK' = -\tfrac{1}{2}\, tang^2\, K dD$$

und zu den ein für alle Mal berechneten Werthen von K und K' hinzulegen.

7) Geschichtliche Bemerkungen.

Die ersten Versuche, photographische Abbildungen der Himmelskörper zu erhalten, beziehen sich natürlich auf Mond und Sonne, die durch ihre grosse Helligkeit am meisten erwarten liessen, dass ein scharfes Bild auf der photographischen Platte entstände, ohne dass eine übermässig lange Exposition nöthig würde. In der täglichen Fortbewegung der Gestirne lag eine nicht leicht zu beseitigende Schwierigkeit, und in der ersten Zeit der Versuche namentlich, wo die mit den Fernrohren verbundenen Uhrwerke nicht die heute erreichte Exactheit besassen, machten sich die Uebelstände und Mängel in dieser Beziehung in hohem Grade geltend. Man hat damals in sehr verschiedener Weise probirt, das Licht des betreffenden Objects immer auf dieselben Theile der Platte wirken zu lassen, indem man entweder durch Bewegung des Fernrohres mit der Hand unter gleichzeitiger Beobachtung durch den mit dem Hauptfernrohr verbundenen Sucher das Object an derselben Stelle des Gesichtsfeldes erhielt, oder indem man mit einer Schraube die Platte, soweit es die Verhältnisse gestatteten, bewegte. Die geringe Empfindlichkeit der Platten in jener Zeit mag dazu beigetragen haben, dass die erhaltenen Abbildungen nicht zum Theil noch mangelhafter ausfielen, jedenfalls konnte dieses an sich rohe Verfahren zu keinem scharfen Bilde führen.

Bald nach Erfindung der Daguerreotypie wandte H. Draper im Jahre 1840 unter Benutzung eines Fernrohres von 130 *mm* Oeffnung dieses Verfahren auf den Mond an und erhielt eine Anzahl Monddaguerreotypen, welche bei einem Durchmesser von 25 *mm* die hervortretendsten Gebirge des Mondes zeigten. Trotz dieses sichtlichen Erfolges wurden keine weiteren Versuche in den nächsten 10 Jahren gemacht, bis G. Bond in Cambridge (Mass.) unter Beihilfe der Photographen Whipple und Jones mit dem dortigen 14 zölligen Refractor Monddaguerreotypen erhielt, die auf der Ausstellung in London 1851 Aufsehen erregten. Seit dieser Zeit hat die Sternwarte in Cambridge mit keinen wesentlichen Unterbrechungen den stellarphotographischen Aufnahmen ihre Arbeitskraft, abgesehen von anderen Arbeiten, gewidmet. Ausser ihr sind es lange fast nur Freunde der Astronomie gewesen, welche auf ihren eigenen, mehr oder minder reich ausgerüsteten Sternwarten dieses Gebiet zu kultiviren strebten.

Auch zur Zeit der Phasengestalten wurden Photographien von Bond verfertigt, welche vielfachen Beifall fanden, die aber Bond selbst noch nicht befriedigten, da das Uhrwerk des Refractors diesen nicht mit genügender Regelmässigkeit fortbewegte. Erst als im Jahre 1856 ein neues Uhrwerk angebracht war, setzte man die begonnenen Arbeiten auf diesem Gebiet mit erneutem Eifer fort. Schon damals zeigten die Anwendungen der Photographie auf andere Himmelskörper das ganz verschiedene Verhalten derselben gegenüber der photographischen Platte. Jupiter z. B. wirkte bei reducirter gleicher Helligkeit 14 mal stärker auf die Platte als der Mond. Auch die Erkennung der Thatsache, dass der Brennpunkt der chemisch wirksamen Strahlen nicht mit dem optischen Brennpunkt zusammenfiel, machte neue Schwierigkeiten, indem man entweder empirisch den ersten Punkt suchen musste, wenn gewöhnliche Refractoren zur Anwendung kamen, oder indem man dahin trachtete, eigens construirte, photographische Fernrohre zu benutzen.

Einer der eifrigsten Förderer der Astrophotographie war Warren de la Rue in Cranford bei London, der im Jahre 1852 schon gute Abbildungen des Mondes erhielt, indem er ein 12 zölliges Spiegelteleskop gebrauchte. Indessen sind die Resultate, welche ihn in dieser Beziehung so bekannt gemacht haben, aus

späterer Zeit, und aus diesen ersten Jahren muss der Bemühungen des Prof. Philipps in Oxford, der sich auch mit Zeichnungen der Himmelskörper beschäftigte und die vorzüglichsten Marszeichnungen lieferte, gedacht werden. Er gebrauchte aber immerhin mit seinem 6zölligen Fernrohr eine Expositionszeit von 5 Minuten, und irgend eine Vergrösserung gestatteten die erhaltenen Photographien nicht; die Unebenheiten der Mondoberfläche waren jedoch deutlich zu erkennen. Was die Länge der Expositionszeit betrifft, so gebrauchte Warren de la Rue damals nur etwa 20 Secunden, und auch Philipps hatte ein Jahr später in Folge der erhöhten Empfindlichkeit der Platten keine längere Zeit nöthig. Bald nachher gelang es sogar Crookes, in Folge weiterer sehr erheblicher Vervollkommnung der Platten, ein Bild nach nur 4 Secunden Exposition zu erhalten. Der grösste Versuch wurde damals mit dem 23zölligen Spiegelteleskop von Craig durch Read gemacht, aber man scheiterte an dem Fehlen des Uhrwerks. Bemerkenswerth ist jedoch, dass es Read gelang, schon damals eine Sonnenphotographie zu erhalten, welche deutlich die schuppige Oberfläche der Sonne zeigt.

Es würde natürlich zu weit führen und beträchtlich über den Rahmen dieser historischen Notizen hinausgehen, wenn aller Versuche in dieser Richtung gedacht werden sollte, die zum grossen Theil doch keinen nennenswerthen Fortschritt bezeichnen. Von grösserem Einfluss wurden die technischen Arbeiten aus den fünfziger Jahren, freilich mehr in indirekter Weise, indem die Schärfe der erhaltenen Photographien sehr viel zu wünschen übrig lässt, ja indem dieselben eher geeignet scheinen, die photographische Methode zu discreditiren. Vielmehr sind sie durch die zahlreichen Untersuchungen von Wichtigkeit geworden, auf welche Secchi geleitet wurde, und die sich vorzugsweise auf die verschiedene Wirkung der Strahlen auf die Platte beziehen, die aber die Schwierigkeiten kennen lehrten, welche vor allem beseitigt werden mussten, wenn gute Bilder erhalten werden sollten, und die dadurch unstreitig für die spätere Entwickelung von Wichtigkeit wurden.

Sehr werthvoll sind die Photographien, welche im Laufe der Jahre, wie erwähnt, Warren de la Rue erhielt. Seine ursprünglichen Negative waren kaum einen englischen Zoll im Durchmesser gross und ertrugen eine 17malige Vergrösserung mit dem Mikroskop recht gut, so dass sich nach de la Rue's Behauptung Objecte auf der Oberfläche unterscheiden liessen, welche kaum mehr als 2 Bogensecunden gross waren, und im ganzen konnten sie danach der Beer- und Mädler'schen Karte gleichgestellt werden. Auch eine Mondfinsterniss photographirte er und — was von noch grösserem Interesse — er erhielt eine Abbildung des Mondes unmittelbar vor dem Eintritt einer Saturnsbedeckung, wobei die Photographie des Saturn sehr gut gelang. Später hat de la Rue sich der Sonnenphotographie zugewandt. An den de la Rue'schen Mondphotographien ist zum ersten Mal die mikrometrische Ausmessung versucht worden, dem Anschein nach jedoch ohne Erfolg.

Wesentlich geringere Schwierigkeiten bot in vieler Beziehung die Sonnenphotographie. Die ausserordentliche Leuchtkraft legte die Schwierigkeit wenigstens an eine ganz andere Stelle, es kam auf Anwendung einer möglichst kurzen Belichtungszeit an; ganz geringe Bruchtheile der Secunde genügten bereits zur Herstellung des Sonnenbildes, und es gelang bald genug, Photographien zu erhalten, die die Beschaffenheit der Oberfläche mit Deutlichkeit zeigen, viele Einzelheiten der Flecken, der Fackeln erkennen lassen, und auch die Wirkung der Atmosphäre unzweideutig zum Ausdruck bringen. In neuerer Zeit wird an

verschiedenen Sternwarten täglich, wenn es die Witterung erlaubt, die Sonne photographirt, sodass thatsächlich die Vorgänge auf ihrer Oberfläche fortwährend zu verfolgen sind. Diese Sonnenphotographien haben nicht allein für die den Sonnenkörper selbst betreffenden Fragen Wichtigkeit, sie haben z. B. vor mehreren Jahren nachweisen können, dass ein einem Planeten ähnlicher Fleck auf der Sonne, den man damals für einen intramerkuriellen Planeten gehalten hatte, nur ein gewöhnlicher Sonnenfleck gewesen war. Ein weiterer Erfolg der Sonnenphotographie ist der erste positive Nachweis, dass die Protuberanzen dem Sonnenkörper selbst angehören. Zum ersten Male gelang eine solche Daguerreotypie bei der totalen Sonnenfinsterniss 1851 an der Königsberger Sternwarte. Der Photograph BARKOWSKI benutzte ein nur zweizölliges FRAUNHOFER'sches Fernrohr, welches mit dem grossen Heliometer fest verbunden war. Zwei Aufnahmen wurden gemacht, von denen aber nur die erste bei einer Exposition von 84 Secunden einigermaassen brauchbar war; der zweite Versuch missglückte, da nach 40 Secunden Belichtung die Sonne wieder hervorbrach. Natürlich konnte auch eine Photographie einer totalen Finsterniss, die eine Belichtung von 84 Secunden forderte, in Folge der starken Bewegung des Mondes gegen die Sonne nur eine unvollkommene Vorstellung des Phänomens geben. Und nicht besser glückte die Aufnahme der totalen Sonnenfinsterniss in Westpoint im Jahre 1854. Die Finsterniss im Jahre 1860, welche viele Astronomen zu ihrer Beobachtung nach Spanien und Algerien zog, führte dagegen zu den vorerwähnten Resultaten, die Protuberanzen zeichneten sich scharf bei nur sehr kurzer Exposition ab, die Corona selbst trat deutlich hervor, wenn die Belichtung länger war, wobei dann freilich die Protuberanzen überexponirt waren. Erst viel später gelang es SCHUSTER und DRAPER, das Sonnenspectrum zu photographiren.

In den Dienst der messenden Astronomie trat die Photographie zum ersten Mal 1874 bei Gelegenheit des damaligen Venusvorüberganges. Die grosse Seltenheit des Phänomens liess auf möglichste Vervielfältigung der Beobachtungsmethoden Bedacht nehmen, namentlich musste man bestrebt sein, das Gelingen der ausgesandten Expeditionen womöglich nicht auf Beobachtung des Moments der ersten und letzten Berührung nach den Methoden des vorigen Jahrhunderts zu gründen. Die verschiedenen Messungsmethoden, ganz besonders die Heliometermessungen, waren geeignet, die parallactische Verschiebung der Venus vor der Sonnenscheibe während des ganzen Vorüberganges ermitteln zu lassen. Eine Frage grösster Wichtigkeit war nun die, ob es möglich sein werde, etwaigen photographischen Bildern eine solche Schärfe zu geben, dass unter Anwendung starker Vergrösserung nachträglich auf der Platte der Abstand des Venus- und Sonnencentrums sich messen lassen werde und zwar mit einer Genauigkeit, die diese Messungen den Heliometermessungen gleichwerthig machte. Wenn sich dies erreichen liess, musste die photographische Methode eigentlich allen anderen überlegen erscheinen, da man durch sie das seltene Phänomen gleichsam fixirte und zu jeder späteren Zeit noch Nachmessungen vornehmen konnte. Ein anderer Vortheil lag noch darin, dass sich bei unbeständiger Witterung jeder klare Moment benutzen liess, ja dass schon eine plötzliche nur momentane Aufklärung durch die Herstellung eines Bildes auch zu einem Resultat führen musste, was bei den anderen Methoden nur beim Zusammentreffen besonders glücklicher Zufälligkeiten eintreten konnte. Diese Vortheile mussten natürlich auch die Schwierigkeiten aufwiegen, welche in der Mitnahme aller hierzu erforderlichen Apparate lagen, indem die Masse, der Umfang der letzteren bei weitem die der zu den anderen Methoden nothwendigen übertraf. Es galt aber nicht allein die

Frage des vollkommen scharfen Bildes, sondern es kam besonders auch die der getreuen Wiedergabe der Erscheinung in Betracht, d. h. es blieb festzustellen, ob nicht die Fixirung ausser den optischen Unvollkommenheiten Irrthümer hervorzubringen vermöchte. Die in der ersten Zeit bekannten Verfahrungsweisen ergaben bei den angestellten ferneren Versuchen eine sehr bemerkbare Verzerrung der Collodiumschicht, und auch das später eingeführte Trockenverfahren wollte anfangs nicht irgendwie brauchbare Resultate finden lassen. Es zeigten sich unregelmässige Verzerrungen bis zum Betrage von 0·02 *mm*. Indessen gelang es den Bemühungen doch, neue Methoden aufzufinden, sodass Verzerrungen von kaum 0·003 *mm* übrig blieben. Dazu trat als Hilfsmittel, dass man im Brennpunkt des Fernrohrs ein feines Glasnetz anbrachte, auf welchem die Entfernung der einzelnen Linien mit vollster Schärfe bestimmt werden konnte, wie dies ja im vorstehenden Artikel mehrfach Erwähnung gefunden hat. Das photographische Bild der Sonne erschien daher mit den schwarzen Linien durchzogen und durch Nachmessung der Entfernung der Linien liess sich so die Grösse etwaiger Verzerrungen ermitteln. Die Erfolge der Voruntersuchungen waren derart, dass von den verschiedenen Nationen die Aussendung photographischer Expeditionen beschlossen wurde, man konnte sich der Anstellung eines solchen Versuches, der, wenn er gelang, ganz ausserordentlichen Werth haben musste, nicht entziehen. Schwierigkeit bereiteten die vorher beschriebenen Constructionen der Photoheliographen, der Fernröhre, welche zum Entwerfen des Bildes dienten.

Die Zahl der überhaupt erhaltenen Aufnahmen war sehr befriedigend und übertraf an einzelnen Stationen selbst die grössten Erwartungen; der Erfolg in der Qualität war aber doch nicht gleich günstig, und im Jahre 1882 wurde von verschiedener Seite, im Speciellen auch von Deutschland und England, von der Anwendung photographischer Aufnahmen ganz abgesehen.

Der erste Versuch mit Sternphotographien geht auch schon in das Jahr 1850 zurück, wo Bond in Cambridge ein Deguerreotyp von α-Lyrae und α-Geminorum erhielt; letzterer zeigte ein längliches Bild, welches jedenfalls durch den Begleiter verursacht wurde. Aber mehr liess sich damals nicht erreichen, selbst lang andauernde Belichtung durch α Urs. min. brachte keinen Eindruck auf der Platte hervor und demzufolge ruhten die weiteren Bemühungen bis zum Jahre 1857, wo die Photographie als solche einen neuen Anstoss gab. Es ist staunenswerth, welche Erfolge Bond schon damals erzielte. Es gelang ihm ohne Schwierigkeit, den Doppelstern ξ Urs. min. mit *g* Urs. maj. in 80 Secunden zu fixiren, und unmittelbar danach versuchte er die Distanzmessungen. Die Genauigkeit war eine überraschende, und zwar trotz der zunächst vermutheten Unsicherheit, da das Bild des Hauptsterns eine beträchtliche Ausdehnung hatte. Bei näherer Betrachtung waren aber die Umrisse scharf und symmetrisch genug, sodass sich aus einer Combination der Messungen die Distanz wirklich auffallend genau ergab. Eine grössere Reihe solcher Aufnahmen und Messungen liess für die Distanz 14″·49 und den Positionswinkel 147°·5 finden, während W. Struve hierfür 14″·40 und 147·4 erhalten hatte. Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen photographischen Distanz war ± 0″·08, ein kleinerer Werth selbst, als ihn W. Struve für eine einzelne Mikrometermessung gefunden hatte, ± 0″·127. Dieser ungeahnte Erfolg trieb natürlich zu weiteren Versuchen, und während es 1850 unmöglich gewesen, von einem Stern 2. Grösse ein Bild zu erhalten, konnten jetzt die photographischen Aufnahmen auf Sterne 6. und 7. Grösse ausgedehnt werden. Helle Sterne, wie α Lyrae, gaben fast momentan einen Eindruck auf der Platte, wie daraus ersichtlich, dass Bond bei angehaltenem Uhr-

werk auf der Platte eine scharfe Linie erhielt, welche von dem durchs Fernrohr dahin ziehenden Stern hervorgerufen wurde. Bemerkenswerth ist der Versuch BOND's, durch Versetzung des Fernrohrs in Deklination eine Reihe paralleler Linien zu erhalten; dieselben erschienen zeitweise schwach wellenförmig, sodass sich sogar die Schwankungen des Gestirns, die Folge der Unruhe der Luft, der Veränderungen der Refraction darstellten. Aber trotzdem konnte die Photopraphie in ihrer damaligen Gestalt nicht geradezu von grossem Nutzen für die Astronomie sein, die Anwendbarkeit beschränkte sich auf die helleren Sterne, deren Zahl zu gering ist im Vergleich zu der grossen Menge der schwächeren. Namentlich war die Klasse der Doppelsterne, der Sternhaufen, der Nebelflecke mit wenigen Ausnahmen ganz von dieser Methode ausgeschlossen, so lange nicht die Empfindlichkeit der Platte so erheblich gesteigert wurde, dass wenigstens Sterne der 11. Grösse zu erkennen waren. Und diesen Fortschritt bezeichnet die neuere Zeit, wobei aber immer nicht ausser Acht zu lassen ist, dass die allgemeine Anwendung der Photographie, der Ersatz aller astronomischen Beobachtungen für Messungszwecke kaum jemals zu erwarten ist, da in jedem einzelnen Falle die Frage der Zeitökonomie von hoher Bedeutung ist, und auf weiten Gebieten der Astronomie die direkte Beobachtung rascher und sicherer zum Ziele führt, als die Zuhilfenahme der photographischen Platte.

Schon wenige Jahre später gelang es RUTHERFURD in New-York, zahlreiche Doppelsterne und selbst Sternhaufen zu photographiren, aber erst in jüngster Zeit konnten in der Ausmessung der Photogramme erfolgreiche Schritte geschehen. RUTHERFURD selbst hatte schon die Ausmessungen mit grösster Sorgfalt vorgenommen, aber nach Verlauf mehrerer Jahre zeigte sich, dass der angewandte Werth der Schraubenrevolution sich inzwischen verändert hatte, und es liess sich nicht mehr ermitteln, wann und wodurch diese Veränderung verursacht worden. Die Arbeiten und Untersuchungen, die hierüber am Columbia-College in New-York, welchem RUTHERFURD sein sämmtliches photographisches Material hinterliess, angestellt wurden, haben jenen lange für veraltet und unbrauchbar gehaltenen Platten grosse Bedeutung gegeben. Dagegen sind die in den siebziger Jahren von GOULD in Cordoba erhaltenen Photographien südlicher Sternhaufen und Doppelsterne seither noch für die Astronomie ohne Nutzen geblieben. Wie sehr sich aber die Empfindlichkeit der Platten entwickelt hatte, geht daraus hervor, dass RUTHERFURD bereits Sterne der 9. Grösse im Jahre 1864 erhielt. Später wandte dann H. DRAPER seine volle Aufmerksamkeit der Anwendung der Photographie zu, und er ging dabei auch über zur Photographirung der Sternspectren, womit er einen ganz neuen Zweig dieser Beobachtungsart entwickelte. Im Jahre 1881 photographirte er den Nebelfleck im Orion, und auf der Platte traten Sterne hervor, die sicher nicht heller als 14. Grösse waren, und jetzt haben die WOLF'schen Arbeiten ergeben, dass es gelingt, bei genügend langer Exposition mit einem 6zölligen Objectiv Sterne zu photographiren, die wenigstens der 16. Grösse angehören und daher für das grosse Fernrohr der Licksternwarte an der Grenze der Sichtbarkeit liegen. Damit ist denn wirklich ein weites Arbeitsfeld eröffnet, die photographische Platte ist so wirksam geworden, wie das Auge mit dem kräftigsten Fernrohr.

Auf Weiteres einzugehen, ist hier nicht nöthig, die bedeutendsten Leistungen der neuen Zeit sind im vorstehenden Artikel besprochen. Nur mag noch an dieser Stelle des grossen, von der Pariser Sternwarte angeregten Unternehmens, der Mappirung des ganzen Himmels, gedacht werden, welches übrigens in dem Artikel über Sternkarten ausführlichere Besprechung findet. v. KONKOLY.

Astrophotometrie. Unter »Photometrie« versteht man einmal die theoretische Lehre vom Leuchten und von der Beleuchtung, sowie andererseits auch die praktische Bestimmung der Stärke, in welcher ein selbstleuchtender Körper Licht ausstrahlt, und die Grösse der Erleuchtung, welche ein dunkler Körper erfährt. Die »Astrophotometrie« ist die Anwendung der Photometrie auf die sämmtlichen Gestirne des Himmels.

Obgleich die reine Photometrie in das Gebiet der Physik gehört, so soll doch hier das theoretische Grundgesetz derselben kurz angeführt werden. Sei $d\sigma$ das Element einer selbstleuchtenden Fläche und df das einer erleuchteten, und bezeichnet r die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, so nennt man den Winkel, den r mit der Senkrechten auf $d\sigma$ bildet, den Emanationswinkel (ε), während der Winkel zwischen r und dem Loth auf df der Incidenzwinkel (i) heisst. Die Lichtmenge, welche die Einheit der selbstleuchtenden Fläche senkrecht ausstrahlt, führt den Namen Leuchtkraft oder Intensität (I), während man die auf df fallende Lichtmenge mit Q zu bezeichnen pflegt. Für die Berechnung hat LAMBERT die Formel aufgestellt:

$$Q = I \cdot \frac{d\sigma \cdot df \cdot \cos\varepsilon \cdot \cos i}{r^2}, \tag{1}$$

wobei angenommen ist, dass sich zwischen $d\sigma$ und df kein durchsichtiges Mittel befindet, welches eine merkliche Absorption von Licht hervorruft. In dieser Formel sind die drei folgenden Gesetze enthalten:

1) Die von einem leuchtenden Punkte senkrecht auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes des Punktes von dem Flächenelement.

2) Die auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge, welche von einem anderen Flächenelement senkrecht ausgestrahlt wird, ist dem Cosinus des Incidenzwinkels direkt proportional.

3) Die auf ein Flächenelement senkrecht fallende Lichtmenge, welche von einem anderen Flächenelement ausgestrahlt wird, ist dem Cosinus des Emanationswinkels direkt proportional.

Diese Anschauungsweise LAMBERT's wurde über ein Jahrhundert als vollkommen einwurfsfrei angesehen, bis E. LOMMEL darauf aufmerksam machte, dass das von einem leuchtenden Körper ausgestrahlte Licht nicht allein von den Oberflächenelementen desselben ausgehe, sondern auch in grösserer oder geringerer Tiefe des leuchtenden Körpers selbst seinen Ursprung habe. Er ersetzt also in obiger Anschauung die Flächenelemente der leuchtenden Oberfläche durch Volumenelemente des leuchtenden Körpers und gewinnt damit den Vortheil, dass das dritte der obigen Gesetze überflüssig wird, und dass dagegen die Absorption berücksichtigt wird, welche das ausgestrahlte Licht auf seinem Wege sowohl innerhalb wie ausserhalb des leuchtenden Körpers erfährt. Dann formuliren sich die Grundsätze der Photometrie wie folgt:

1) Die von einem leuchtenden Volumenelement senkrecht auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes des Volumenelementes von dem Flächenelement.

2) Die auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge, welche von einem Volumenelement ausgestrahlt wird, ist dem Cosinus des Incidenzwinkels direkt proportional.

3) Das von einem Volumenelement ausstrahlende Licht wird innerhalb des leuchtenden Körpers nach dem bekannten Absorptionsgesetz theilweise absorbirt.

Bezeichnet man demnach ein selbstleuchtendes Volumenelement mit dv und sein Emissionsvermögen mit E, so ist die von demselben nach irgend einer Richtung ausgehende Lichtmenge $E \cdot dv$. Hat der von dem Lichte im selbstleuchtenden Körper durchlaufene Weg die Länge r' und der ausserhalb desselben bis zum beleuchteten Flächenelement df zurückzulegende die Länge r_0, so ist nach der früheren Bezeichnung jetzt $r = r_0 + r'$, während i seine obige Bedeutung beibehält. Nennt man endlich den Auslöschungs- oder Extinctionscoëfficienten des leuchtenden Körpers für das gerade in Rede stehende homogene Licht k, so erfährt df von dv in dem betreffenden homogenen Licht die Erleuchtung

$$Q = E \cdot \frac{dv \cdot df \cdot cos \cdot i e^{-kr'}}{(r_0 + r')^2} \,. \tag{2}$$

Diese Formel ist viel umfassender als die LAMBERT'sche, da sie für alle verschiedenen Emanationsgesetze gilt und somit auch das obige LAMBERT'sche Cosinusgesetz als speciellen Fall umfasst. LOMMEL hat nun ferner gezeigt, dass für undurchsichtige glühende Körper, d. h. für solche, bei denen k so gross ist, dass das Licht, wenn es auch nur einen sehr kleinen Weg in ihnen zurücklegt, bereits völlig ausgelöscht wird, in der That das Q dem Cosinus des Emanationswinkels (ε) proportional wird, d. h. für undurchsichtige glühende Körper das obige LAMBERT'sche Gesetz richtig ist. Für durchsichtige leuchtende Körper tritt dagegen statt des einfachen Cosinus des Emanationswinkels der Ausdruck

$$cos\, \varepsilon \cdot \frac{1 - e^{-k\frac{R}{cos\, \varepsilon}}}{1 - e^{-kR}}$$

ein, in welchem R die Dicke der Schicht des glühenden Körpers ist. Dieser Werth unterscheidet sich vom einfachen Cosinus dadurch, dass für Beträge von ε zwischen 0° und 90° derselbe grösser ist als der letztere, während er für $\varepsilon = 0°$ und $\varepsilon = 90°$ in die Werthe des Cosinus, nämlich die Einheit bezw. Null übergeht. Für $R = \infty$ wird der obige Ausdruck gleich $cos\, \varepsilon$, d. h. also für unendlich dicke Schichten durchsichtiger Körper gilt ebenfalls das LAMBERT'sche Gesetz.

In der Photometrie kommt es nun darauf an, die Grösse der Intensität (I) oder des Emissionsvermögens (E) eines leuchtenden Körpers zu bestimmen, was am einfachsten dadurch geschehen würde, dass man die Erleuchtung Q misst, die ein Flächenelement einmal durch den zu untersuchenden leuchtenden Körper und dann unter sonst gleichen Verhältnissen durch die Einheit von I bezw. E erfährt. Nun giebt es aber keine absolute Lichteinheit, d. h. es ist bisher nicht gelungen, eine vollkommen unveränderliche und unter den verschiedensten Verhältnissen absolut gleich hell leuchtende Lichtquelle zu finden, denn die in der Praxis gebrauchten »Lichteinheiten«, wie die »Normalkerze« (Wallratkerze von 45 *mm* Flammenhöhe), die »HEFNER'sche Lichteinheit« (Amylacetatlampe von 40 *mm* Flammenhöhe bei 8 *mm* dickem Docht) und die »Normaleinheit« von VIOLLE (1 *qcm* schmelzendes Platin) erfüllen diese Bedingungen sämmtlich durchaus nicht streng. Für die Bedürfnisse des praktischen Lebens reichen die genannten Einheiten aus, doch bei streng wissenschaftlichen Untersuchungen wird man sich nicht auf dieselben beziehen, sondern nur die Verhältnisse zweier Lichtintensitäten zu einander bestimmen, und das ist nur dadurch möglich, dass man die Lichtmengen vergleicht, welche ein und dasselbe Flächenelement unter möglichst gleichen Bedingungen von den beiden Lichtquellen erhält. Nun ist aber das menschliche Auge nicht im Stande, das Verhältniss zweier verschieden

grosser Lichtmengen mit einiger Sicherheit zu bestimmen, dagegen nimmt es noch ausserordentlich geringe Helligkeitsunterschiede wahr. Wenn daher dem Auge zwei Lichteindrücke als vollkommen gleich erscheinen, so wird ihre thatsächliche Helligkeitsdifferenz nur noch sehr klein sein. Da nun der Mensch ausser dem Auge kein Mittel besitzt, um die Gleichheit von Lichtmengen zu prüfen, so muss er dieselben, sobald das Auge keinen Unterschied mehr zu entdecken vermag, für gleich erklären. Der dabei begangene Fehler wird um so grösser sein, je grösser die Helligkeit der verglichenen Lichtquellen ist, d. h. bei zwei sehr stark leuchtenden Objecten kann das Auge jene ganz geringen Helligkeitsdifferenzen nicht mehr wahrnehmen, die es bei schwach leuchtenden Gegenständen noch entdeckt. Will man also den unvermeidlichen Fehler in möglichst engen Grenzen halten, so muss man nicht zu helle Lichteindrücke auf ihre Gleichheit prüfen und das Auge vor störenden Einflüssen bewahren. Um nun zwei verschieden helle Lichteindrücke, die ein Flächenelement treffen, gleich zu machen, muss man, da man die Quellen derselben nicht verändern kann, den stärkeren der beiden Lichteindrücke so lange messbar schwächen, bis beide gleich hell erscheinen; aus der gemessenen Abschwächung kann man dann das Verhältniss der verglichenen Lichtmengen und damit der Intensitäten der ursprünglichen Lichtquellen bestimmen. In der »Astrophotometrie« handelt es sich im Wesentlichen um die Vergleichung der Helligkeit zweier Sterne, von denen der eine zuweilen ein künstlich hervorgerufener ist, dessen Licht sich dann bequem so lange abschwächen lässt, bis es dem des natürlichen gleich ist. Wie eine derartige Abschwächung zu erreichen ist, dazu geben die obigen Formeln für Q mehrere Wege an, denn dasselbe wird kleiner, wenn man

1) r oder $r_0 + r'$, d. h. den Abstand der Lichtquelle vergrössert. Ist das auf df fallende Licht parallel, so kann man es durch ein convergentes dioptrisches System in die Form eines Doppelkegels bringen, dessen Scheitel im Brennpunkte des Systems liegt. Legt man senkrecht zur Axe des Kegels Querschnitte durch denselben, so sind die Helligkeiten in gleich grossen Flächenelementen derselben umgekehrt proportional den Quadraten der Abstände der Querschnitte vom Scheitel des Kegels.

2) df, d. h. das Licht empfangende Flächenelement verkleinert.

3) zwischen die Lichtquelle und die beleuchtete Fläche verschieden stark absorbirende Medien einschiebt. Diese letztere Art der Schwächung ist in folgender Form für die Messung besonders bequem. Man polarisirt das von der helleren Lichtquelle kommende Licht, indem man es durch ein Nicol'sches Prisma schickt; lässt man es darauf noch ein zweites derartiges Prisma passiren, so kann man durch Drehen dieses zweiten analysirenden Nicols das Licht ganz allmählich bis zum völligen Verlöschen bringen. Die Grösse des Drehungswinkels giebt ein Maass für die Stärke der Abschwächung. Auf diesen drei Methoden beruhen alle hier zu erwähnenden

Astrophotometer.

In chronologischer Reihenfolge ist zuerst der Apparat zu nennen, den John Herschel bei seinen Beobachtungen in Feldhausen am Kap der guten Hoffnung benutzte. Um die Spitze eines 6·1 *m* hohen, senkrecht aufgestellten Pfahles ist eine Rolle frei drehbar, über die ein Seil läuft, mittelst welchem man das eine Ende einer 3·7 *m* langen Stange emporziehen kann, deren anderes Ende in Augenhöhe frei um den Pfahl beweglich ist. An dieser Stange kann ein mit einem Gegengewicht ausbalancirter Schlitten durch Schnüre auf- und abgezogen werden.

Auf demselben ist eine kleine Linse von 5·7 *mm* Brennweite in einer grossen Blende so befestigt, dass ihre Axe der Bewegungsrichtung des Schlittens parallel ist. Auf dem letzteren ist ausserdem ein gleicharmiger Hebel auf der dem Beobachter abgewandten Seite der Linse derartig angebracht, dass er durch Schnüre vom Platz des Beobachters leicht so gedreht werden kann, dass ein auf ihm befestigtes Prisma das Licht des Mondes oder des Jupiter auf die Linse wirft, so dass in dem dem Beobachter zugekehrten Brennpunkt derselben ein Lichtpunkt entsteht, der als künstlicher Stern benutzt wird. Durch geeignete Bewegungen der Stange bringt man den letzteren in eine solche Lage, dass er in möglichste Nähe der zu untersuchenden Lichtquelle am Himmel zu stehen kommt, worauf man seine Entfernung vom Auge des Beobachters so lange ändert, bis er die gleiche Helligkeit wie der natürliche Stern hat. Aus den Entfernungen, die der künstliche Stern vom Auge haben muss, um mit verschiedenen Objecten am Himmel von gleicher scheinbarer Lichtstärke zu sein, kann man die Helligkeiten dieser letzteren unter einander bestimmen; dieselben verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung des künstlichen Sternes vom Auge des Beobachters.

Die ganze Vorrichtung ist eine ziemlich rohe und das Beobachten mit derselben nach des Erfinders eigener Angabe recht schwierig, so dass es nicht Wunder nehmen kann, wenn ausser ihm, der die Helligkeiten von 69 Sternen mittelst des Apparates verglich, Niemand sich desselben bedient hat. Auf demselben Princip der Helligkeitsänderung wie dieses beruht auch das folgende Instrument, nur dass dabei das oben erwähnte Verfahren der Ausbreitung des Lichtes in einen Doppelkegel benützt ist. STEINHEIL's Prismenphotometer besteht aus einem Fernrohr, dessen Objectiv in der Mitte durchschnitten ist. Jede Objectivhälfte lässt sich in der Richtung der optischen Axe im Rohr des Instrumentes messbar verstellen. Vor dem Objectivende des Rohres sitzen zwei verstellbare Blenden entsprechend den beiden Objectivhälften. Diese Blenden bestehen je aus zwei Blechstücken, welche durch eine halb rechts, halb links geschnittene Schraube mit getheiltem Kopf gleichzeitig gegen einander so verschoben werden, dass ihre Kanten stets die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen Hypothenuse die Schnittlinie des Objectivs ist. Vor der einen Blende ist ein totalreflektirendes Prisma so befestigt, dass Strahlen, die senkrecht zur Fernrohraxe darauf fallen, durch die Blende hindurch zur betreffenden Objectivhälfte reflektirt werden; dieses feste Prisma ist in einem auf das Rohr aufgesetzten Würfel mit seitlicher Oeffnung eingeschlossen. Auf diesem letzteren sitzt eine um die optische Axe drehbare Scheibe mit Kreisteilung, welche eine centrische, der Rohrweite entsprechende Oeffnung besitzt und ein diese überdeckendes totalreflektirendes Prisma trägt, welches seitlich einfallendes Licht an dem festen Prisma vorbei nach der zweiten Objectivhälfte hin reflektirt. Das Fernrohr selbst ist um drei Axen drehbar.

Will man die Helligkeiten zweier Sterne mittelst des Instrumentes vergleichen, so bringt man beide Objectivhälften in gleiche Entfernung vom Ocular, und zwar am besten in die Mitte des Rohres, und stellt das mit einer Scala versehene Ocular so ein, dass man das Bild eines durch das feste Prisma reflektirten Sternes scharf sieht. Dann richtet man das Fernrohr derartig auf den Pol des grössten Kreises, welcher durch die beiden zu vergleichenden Sterne geht, dass der eine derselben durch das feste Prisma nach der einen Objectivhälfte reflektirt wird; dann dreht man das bewegliche Prisma so lange, bis durch dasselbe das Licht des zweiten Sternes auf die andere Objectivhälfte

geworfen wird. Hat man vorher den Winkelabstand der beiden Sterne von einander berechnet, so kann man denselben an dem das Prisma tragenden Theilkreise einstellen und sich damit das Aufsuchen erleichtern. Sind nun beide Sterne im Gesichtsfeld, so verschiebt man die Objectivhälften in der gleichen Richtung, dann dehnen sich die punktartigen Sternbilder im Gesichtsfeld zu Flächen aus, welche die Form der Blenden annehmen, die vor den Objectivhälften angebracht sind. Man verrückt nun die letzteren so weit, bis die im Gesichtsfeld aneinander grenzenden Dreiecksflächen gleich hell erscheinen. Die letzteren hält man durch Verstellung der Blenden dabei stets von gleicher Grösse.

Verschiebt man das Ocular eines Fernrohres aus seiner Focalstellung, so dehnt sich das Bild eines Sternes im Gesichtsfeld zu einer mattleuchtenden Kreisfläche aus, deren Helligkeit mit wachsender Verschiebung des Oculars mehr und mehr abnimmt. Misst man bei einer bestimmten Helligkeit H die Verschiebung des Oculars aus seiner Focalstellung und richtet dann das Fernrohr auf einen anderen Stern, so kann man auch von diesem durch Verstellen des Oculars eine Kreisfläche von der Helligkeit H im Gesichtsfeld erzeugen, nur wird dabei diesmal das Ocular einen anderen Abstand vom Focus des Objectivs haben. Nach den einleitenden Erläuterungen ist leicht einzusehen, dass die Helligkeiten der beiden Sterne sich zu einander verhalten wie die Quadrate der jedesmaligen Ocularverschiebungen; dieser Satz gilt auch, wenn man umgekehrt das Objectiv gegen das Ocular verstellt. Lässt bei dem STEINHEIL'schen Apparat das feste Prisma P_1 mit seiner zugehörigen Objectivhälfte nur $\frac{1}{p_1}$ und das andere Prisma P_2 mit seiner Objectivhälfte nur $\frac{1}{p_2}$ von der Lichteinheit hindurchgehen, haben die zu vergleichenden Sterne α und β die Helligkeiten H_α und H_β, und sind die Verschiebungen der Objectivhälften aus der Focalstellung v_1 und v_2, wenn Stern α durch Hälfte 1 und Stern β durch Hälfte 2 betrachtet wird, so ist

$$\frac{H_\alpha}{p_1} : \frac{H_\beta}{p_2} = v_1^2 : v_2^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{H_\alpha}{p_1}} : \sqrt{\frac{H_\beta}{p_2}} = v_1 : v_2. \tag{a}$$

Tauscht man nun die Sterne gegen die Objectivhälften aus und findet nunmehr als Verschiebung der ersten v_1' und als die der zweiten v_2', so wird

$$\sqrt{\frac{H_\alpha}{p_2}} : \sqrt{\frac{H_\beta}{p_1}} = v_2' : v_1'. \tag{b}$$

Durch Multiplikation der letzten beiden Gleichungen erhält man

$$H_\alpha : H_\beta = v_1 v_2' : v_2 v_1'$$

oder logarithmisch geschrieben

$$\log H_\alpha - \log H_\beta = \log \frac{v_1}{v_2} - \log \frac{v_1'}{v_2'},$$

sodass man also durch Vertauschung der Sterne gegen die Objectivhälften und Prismen von den durch dieselben erzeugten Absorptionen frei wird. Dividirt man Gleichung (a) durch (b), so ergiebt sich

$$1 : \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_1 v_1'}{v_2 v_2'}$$

oder logarithmisch ausgedrückt

$$\log \frac{p_1}{p_2} = \log \frac{v_2}{v_1} + \log \frac{v_2'}{v_1'}.$$

Man kann $\frac{p_1}{p_2}$ auch durch Beobachtung eines einzigen Sternes bestimmen, indem man beide Prismen auf ihn richtet und die Objectivhälften auf gleiche Helligkeit stellt; sind die dabei abgelesenen Verschiebungen derselben v_3 für P_1 und v_4 für P_2, so ist, wie leicht abzuleiten,

$$log \frac{p_1}{p_2} = - 2 \, log \frac{v_3}{v_4}.$$

Um die Verschiebungen der Objectivhälften bestimmen zu können, muss man die Scalenablesung bei der Focusstellung der Objectivhälften kennen. Nun kann man aber sowohl durch Annähern einer solchen an das Ocular als auch durch Entfernen von demselben das punktartige Sternbild in eine leuchtende Fläche ausdehnen, d. h. es giebt für jede Objectivhälfte zwei Stellungen, bei welchen im Gesichtsfeld ein leuchtendes Dreieck von bestimmter Helligkeit erscheint. Betrachtet man wieder Stern α durch P_1 und Stern β durch P_2, und sind f_1 und f_2 die Ablesungen an den Objectivschiebern 1 und 2 bei Focusstellung, a_1 und a_2 die entsprechenden bei Annäherung an das Ocular, b_1 und b_2 bei Entfernung von demselben, so ist unter Beibehaltung der sonstigen Bezeichnungen in

$$\text{Ocularnähe:} \quad \sqrt{\frac{H_\alpha}{p_1}} : \sqrt{\frac{H_\beta}{p_2}} = (f_1 - a_1) : (f_2 - a_2)$$

$$\text{Ocularferne:} \quad \sqrt{\frac{H_\alpha}{p_1}} : \sqrt{\frac{H_\beta}{p_2}} = (b_1 - f_1) : (b_2 - f_2);$$

durch Addition kommt

$$\sqrt{\frac{H_\alpha}{p_1}} : \sqrt{\frac{H_\beta}{p_2}} = (b_1 - a_1) : (b_2 - a_2)$$

oder logarithmisch geschrieben

$$log \, H_\alpha - log \, H_\beta = 2 \, log \, (b_1 - a_1) - 2 \, log \, (b_2 - a_2) + log \frac{p_1}{p_2}.$$

Dadurch wird man von den Scalenablesungen bei Focalstellung der Objectivhälften unabhängig. Das Verhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ ist nun nicht constant, sondern wechselt von Abend zu Abend, ja es ändert sich während einer Beobachtungsreihe, da es unmöglich ist, alle Objectiv- und Prismenflächen immer von Staub und Thau frei zu halten. Man muss also entweder durch Umtauschen der Sterne gegen die Prismen $\frac{p_1}{p_2}$ eliminiren, oder, wenn die Messungen dadurch zu zeitraubend werden, das Verhältniss zu Anfang und Ende einer abendlichen Beobachtungsreihe bestimmen. Die verschiedene Helligkeit des Himmelsgrundes, welche bei photometrischen Messungen von sehr nachtheiligem Einfluss sein kann, ist bei diesem Instrument dadurch ohne einen solchen, dass sich die grössere oder geringere Helle des Hintergrundes für beide Sterne zu einem Mittel mischt. Die Mängel des Apparates sind einmal in der Mühe, die das Auffinden der richtigen Objecte verursacht, und dann besonders darin zu suchen, dass durch die Reflexionsvorrichtungen und die Ausbreitung in Flächen das Sternlicht derartig geschwächt wird, dass man schon ziemlich grosser Instrumente bedarf, um schwächere Sterne mit einander zu vergleichen. Der ursprüngliche STEINHEIL'sche Apparat hatte eine Objectivöffnung von 3·5 *cm*, und SEIDEL, der zahlreiche photometrische Messungen am Himmel damit gemacht hat, während der Erfinder ihn nur an künstlichen Sternen versuchte, konnte ihn nur noch gut auf Sterne

der vierten Grössenklasse anwenden. Eine leicht auftretende Fehlerquelle wird dadurch gebildet, dass gelegentlich mehr als ein Stern durch ein Prisma in die Objectivhälfte reflektirt wird, so hatte z. B. SEIDEL mit α Tauri zugleich immer noch einen kleinen Stern im Gesichtsfeld. Ein Instrument dieser Art, das STEINHEIL im Jahre 1842 für die Wiener Sternwarte lieferte, hat er insoweit gegen das eben besprochene abgeändert, als er die optische Axe des zerschnittenen Objectivs in die Weltaxe legte. Jede Objectivhälfte erhielt Licht durch zwei Spiegel, die mit der Deklinations- und Stundenaxe constante Winkel von 45° bildeten und um diese Axen drehbar waren. Dadurch konnte jeder beliebige Stern in das Rohr reflektirt und durch Drehung desselben um seine optische Axe darin gehalten werden. Dass durch diese Anordnung die Handlichkeit und damit die Brauchbarkeit des Instrumentes erhöht wurde, unterliegt keinem Zweifel, dagegen erscheint die Vermehrung der Reflexionen um zwei entschieden als ein Nachtheil.

STEINHEIL hat noch einen anderen Apparat construirt, welcher zur Vergleichung von Helligkeiten erleuchteter Flächen dient. Derselbe wird statt des Ocularauszuges in ein Fernrohr eingesetzt, und ist so construirt, dass von einer seitlich angebrachten Lampe durch eine regulirbare Blende Licht auf einen Spiegel fällt, welcher das Gesichtsfeld des Oculars zur Hälfte einnimmt. Letzteres wird auf die Kante des Spiegels scharf eingestellt, und dann schwächt man das von der Lampe kommende Licht so weit, bis es dem durch das Hauptrohr einfallenden an Helligkeit gleichkommt, was man dadurch erkennt, dass man die Kante des Spiegels nicht mehr unterscheiden kann. Dieses Instrument ist nur vom Erfinder versuchsweise zur Helligkeitsmessung des Himmelsgrundes angewendet worden.

Ein Photometer hauptsächlich zur Untersuchung der Lichtstärke an verschiedenen Stellen der Sonnenoberfläche hat der frühere Direktor der Münchener Sternwarte, LAMONT, construirt, aber wohl nie ausgiebig benutzt; auch sonst ist über eine Verwendung desselben nichts bekannt geworden, obwohl das dabei angewandte Princip der Lichtschwächung ganz einwurfsfrei ist. In den Ocularauszug eines Fernrohres wird seitlich unter rechtem Winkel ein Rohr eingesetzt, das an seinem äusseren Ende ein kleines Objectiv trägt. In dieses wird das Sonnenlicht durch einen unter 45° geneigten Spiegel geworfen, sobald das Hauptrohr auf die Sonne gerichtet ist. In das Gesichtsfeld des letzteren ist ein totalreflektirendes Prisma so eingesetzt, dass es ersteres halbirt und das durch das seitliche kleine Objectiv einfallende Sonnenlicht im Focus des Hauptfernrohres zu einem halben Sonnenbilde, dessen Durchmesser von der Prismakante gebildet wird, vereinigt. Dieses kleine halbe Sonnenbild berührt nun das vom Hauptfernrohr entworfene und ebenfalls durch die Prismakante halbirte grosse Sonnenbild. Vor dem Objectiv des Hauptfernrohres ist nun eine fächerförmige Blende derart angebracht, dass sie beim Ausbreiten, welches vom Ocular aus erfolgt, immer zwei einander gleiche Sectoren des Objectivs verdeckt. Durch grössere oder geringere Ausdehnung derselben kann man diejenige Stelle des Hauptsonnenbildes, welche gerade an das kleine Bild im Prisma grenzt, diesem gleich hell machen. Hat man nun verschiedene Stellen der Sonne mit dem kleinen Bilde verglichen und war dabei der Flächeninhalt der freigebliebenen Sectoren des Objectivs der Reihe nach $s_1, s_2, s_3 \ldots$, so verhalten sich die Helligkeiten der verschiedenen Stellen wie

$$\frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3} .$$

Ganz eigenthümlich ist ein von SECCHI construirtes Photometer; dasselbe beruht auf der bekannten Erscheinung, dass bei einem schnell rotirenden Rade der von den Speichen überstrichene Raum je nach der Breite der Speichen mehr oder weniger hellgrau gefärbt erscheint. SECCHI benutzt zwei ganz gleiche Räder aus geschwärztem Eisenblech, deren 12 sectorenförmige Speichen genau so gross sind wie die zwischenliegenden Hohlräume. Durch Verstellen der beiden concentrischen Räder gegen einander lassen sich jene bis zu völligem Abschluss verkleinern. Man bringt nun die beiden aufeinander liegenden Räder so am Fernrohr an, dass ihre Fläche senkrecht zur optischen Axe desselben steht und ihre Speichen bei der Rotation das Gesichtsfeld überstreichen. Durch Verstellen der beiden Räder gegen einander werden die Hohlräume zwischen den Speichen soweit geschlossen, dass bei einer sehr schnellen Rotation des ganzen Apparates der Stern, dessen Helligkeit bestimmt werden soll, im Gesichtsfeld gerade verschwindet. Aus den Grössen der Hohlräume, die nöthig sind, um verschiedene Sterne zum Verlöschen zu bringen, lässt sich das Helligkeitsverhältniss der Sterne bestimmen. Die ganze Vorrichtung scheint weder vom Erfinder noch sonst Jemandem ausgiebig benutzt zu sein; SECCHI selbst hat nur die Helligkeiten ganz weniger Sterne damit verglichen, doch stimmen die gewonnenen Resultate mit denen von JOHN HERSCHEL schlecht überein.

Ein zwar sehr sinnreich construirtes, aber aus mancherlei Gründen niemals ausgiebig benutztes Photometer ist das von Professor SCHWERD in Speyer erfundene und für die Sternwarte in Bonn ausgeführte Instrument. Dasselbe besteht aus zwei Fernröhren, von denen das grössere parallactisch montirt ist, während das kleinere einmal um die optische Axe des ersteren und mit dieser parallel, und dann noch um eine dazu senkrechte Axe gedreht werden kann. Die Winkel, um welche das kleinere Fernrohr gedreht wurde, sind an zwei Theilkreisen ablesbar, sodass man also, wenn das Hauptrohr auf einen bestimmten Stern gerichtet ist, an den beiden erwähnten Kreisen nur Distanz und Positionswinkel eines zweiten Sternes in Bezug auf den ersten einzustellen braucht, um den zweiten Stern in das Gesichtsfeld des kleineren Rohres zu bringen. Durch Prismen, die in geeigneter Weise in beiden Fernröhren zwischen Objectiv und Brennpunkt angebracht sind, wird bewirkt, dass die Bilder der beiden Sterne, auf welche die Rohre eingestellt sind, in einem gemeinschaftlichen Ocular nebeneinander erscheinen und so bequem in Bezug auf ihre Helligkeit mit einander verglichen werden können. Das grössere Fernrohr hat eine freie Oeffnung von 5·2 *cm* und eine Brennweite von 126 *cm*, während bei dem kleineren die entsprechenden Maasse 2·6 und 63 *cm* sind, sodass aus bekannten optischen Gründen ein durch das grössere Fernrohr gesehener Stern gerade so hell und so gross erscheint, wie ein in Wahrheit viermal so heller, auf den das kleinere Rohr gerichtet ist. Um nun solche Sterne, deren Helligkeiten in anderm Verhältniss als dem von 4 zu 1 stehen, auf gleiche Helligkeit im Ocular zu reduciren, können die Oeffnungen beider Objective durch vorgeschobene concentrische Blenden beliebig verkleinert werden, und zwar sind die Oeffnungen der Blenden so gewählt, dass durch das Vorschieben der nächst engeren die Helligkeit des Focusbildes um $\frac{1}{16}$ einer Grössenklasse geschwächt wird. Dadurch werden also die Focalbilder der beiden Sterne auf gleiche Helligkeit gebracht, während man die Focalweiten der beiden Fernrohre ändern muss, um auch die optischen Scheibchen der beiden Sternbilder auf gleiche Grösse zu bringen. Um dies zu erreichen, sind verschiebbare Collectivlinsen zwischen den Objectiven und ihren Brennpunkten angebracht, und Scalen eben diejenigen Stellungen derselben an, die den vorgesetzten

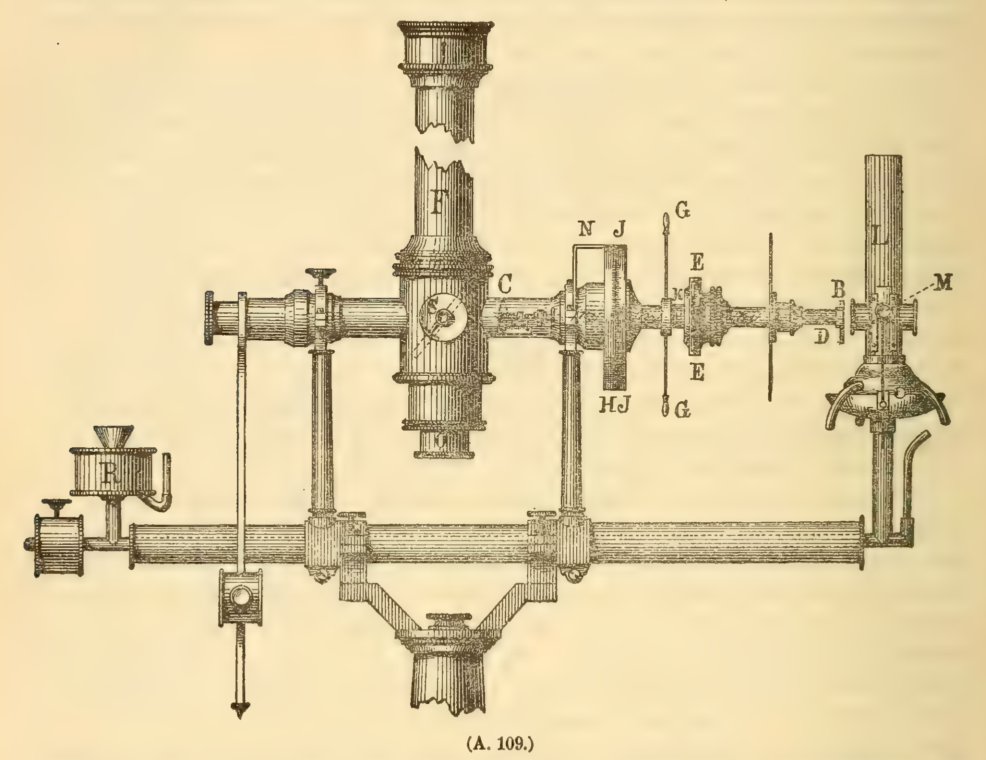
Blendungen entsprechen. Ausserdem lässt sich bei dem grösseren Fernrohr, um einen weiteren Spielraum zu gewähren, das Objectiv selbst messbar verschieben, während das des kleineren Rohres gegen ein solches von 31 *cm* Brennweite und 2·2 *cm* Oeffnung oder gegen ein drittes von 15 *cm* Brennweite und 1·5 *cm* Oeffnung ausgetauscht werden kann. Dadurch ist es ermöglicht, Sterne 9. Grösse direkt mit den hellsten am Himmel vergleichen zu können. Die verschiedene Helligkeit des Himmelsgrundes lässt sich dadurch eliminieren, dass beide Fernrohre ganz gleichmässig durch Lampenlicht erleuchtet sind, welches in seiner Stärke leicht moderirt werden kann.

Die Beschreibung zeigt wohl zur Genüge, wie complicirt das Instrument ist, und wie umständlich und zeitraubend sich die Messungen mit demselben gestalten, auch wenn ein Gehilfe zur Hand ist. Ausserdem ist es principiell bedenklich, dass die zu vergleichenden Objecte durch zwei verschiedene optische Systeme betrachtet werden, die im allgemeinen nicht gegen die Objecte ausgetauscht werden können. Dazu kommen noch in beiden Rohren die grosse Anzahl von Brechungen und Reflexionen der Lichtstrahlen, wodurch diese nicht nur sehr erheblich geschwächt werden, sondern durch das Beschlagen oder Verstauben bald der einen bald der andern der vielen Glasflächen werden auch willkürliche und schwer zu erkennende Fehler in die Messungen hineingetragen. Alle diese Uebelstände haben es bewirkt, dass das an sich so sinnreiche Instrument niemals zu ausgedehnteren Untersuchungen benutzt und dass kein zweites dieser Art etwa für eine andre Sternwarte ausgeführt ist.

Ebenfalls keine weitere Verbreitung hat das Zonenphotometer von HORNSTEIN gefunden, welches hauptsächlich zur Helligkeitsmessung schwacher Fixsterne und Planetoïden dienen soll. Dasselbe wird vor das Objectiv eines Fernrohres gesetzt und besteht aus zwei Blenden mit hyperbolischen Ausschnitten, die gegen einander bewegt etwa $\frac{3}{4}$ der Objectivöffnung mehr oder weniger stark verdecken. Durch das vierte Viertel der letzteren wird mittelst eines gegen die Axe des Fernrohres mehr oder weniger stark geneigten Spiegels das Licht eines seitlich stehenden schwachen Fixsternes in das Fernrohr geworfen. Dieser dient als Vergleichstern, welchem der zu untersuchende durch mehr oder weniger starkes Schliessen der Blenden an Helligkeit gleich gemacht wird. Zur Auffindung des Vergleichsternes dient ein kleines Fernrohr, welches mit dem Spiegel durch ein Räderwerk derart verbunden ist, dass der Spiegel stets die richtige Stellung hat, wenn der Vergleichstern im Gesichtsfeld des Hilfsfernrohres ist. Der ganze Apparat kann um die Axe des Beobachtungsfernrohres gedreht werden, was ebenso wie die Verschiebung der Blenden und die Ablesung ihrer gegenseitigen Stellung, wie auch das Neigen des Spiegels vom Ocular aus geschehen kann.

In mehr als einer Beziehung viel brauchbarer als die bisher beschriebenen Instrumente ist das ZÖLLNER'sche Astrophotometer, und dasselbe hat sich daher vielfacher Anwendung zu erfreuen gehabt. Fig. 109 stellt dasselbe in einer Form dar, wie es zuerst von der Firma AUSFELD in Gotha angefertigt wurde. Das Licht der allseitig geschlossenen Lampe L, welche aus dem Reservoir R gespeist wird, und deren Flammenhöhe man an der verschiebbaren Marke M durch ein dunkelblaues Glas beobachtet, sendet durch eine kleine Oeffnung ihr Licht auf die verstellbare Blende B, durch deren feines Diaphragma es auf die biconcave Linse D fällt, welche es parallel macht. Es passirt dann nach einander die drei NICOL'schen Prismen n_1, n_2 und n_3, sowie eine zwischen n_1 und n_2 angebrachte, senkrecht zur optischen Axe geschnittene,

linksdrehende Bergkrystallplatte k von 5 *mm* Dicke, und fällt schliesslich auf die biconvexe Linse C, welche mit Schraube und Scala so eingestellt werden kann, dass sie nach Reflexion der Strahlen an der planparallelen Platte S im Focus des Fernrohres F ein Bild der kleinen Oeffnung der Blende B entwirft, welches durch das Ocular O zugleich mit einem durch das Fernrohr gesehenen Stern scharf erscheint und den künstlichen Stern bildet. In Wahrheit sieht man nicht einen solchen, sondern deren zwei im Gesichtsfeld, weil die Reflexion



(A. 109.)

nicht nur an der Vorder-, sondern auch an der Hinterseite von S erfolgt. Der auf die letztere Art hervorgerufene künstliche Stern ist natürlich etwas schwächer als der auf die erstere entstandene; bei der Beobachtung stellt man das Bild des wirklichen Sternes zwischen die beiden künstlichen und schwächt diese soweit ab, dass sie mit ihren Helligkeiten das Licht des Objects am Himmel gerade einschliessen. Diese Modifikation der Helligkeit der künstlichen Sterne wird nun dadurch erreicht, dass man die beiden Nicol n_1 und n_2 zusammen mit k gegen n_3 dreht. Stehen die Hauptschnitte zweier Nicol parallel, so geht bekanntlich das auffallende Licht ungehindert hindurch, es wird jedoch, wenn man die Nicol mehr und mehr gegeneinander dreht, immer stärker und stärker geschwächt, bis es endlich ganz ausgelöscht ist, sobald die Hauptschnitte senkrecht aufeinander stehen. Dabei wird die Intensität des auffallenden Lichtes proportional dem Quadrate des Cosinus desjenigen Winkels geändert, um welchen die Hauptschnitte aus ihrer parallelen Lage gedreht sind. Da bei dem ZÖLLNERschen Instrument jedoch der Theilkreis J (der »Intensitätskreis«), an welchem die Drehung von n_1 und n_2 gegen n_3 mittelst Nonius abgelesen werden kann, 90° zeigt, wenn die Hauptschnitte der Nicols parallel sind, so verhalten sich im Apparat die Helligkeiten der künstlichen Sterne wie die Sinusquadrate der am Intensitätskreis abgelesenen Winkel. Um nun auch die Farbe der künstlichen

Sterne beliebig ändern zu können, ist die Bergkrystallplatte k zwischen n_1 und n_2 angebracht. Fällt auf eine solche polarisirtes Licht, welches nach dem Durchgang durch die Platte von einem zweiten Nicol analysirt wird, so erscheint der Krystall je nach dem Winkel, den die Hauptschnitte der beiden einschliessenden Nicol (n_1 und n_2) mit einander bilden, in einer bestimmten Farbe, die sich aus diesem Winkel und der Plattendicke von k berechnen lässt. Diese letztere misst man ein für allemal, und den Winkel, den die beiden Hauptschnitte der Nicol n_1 und n_2 mit einander bilden, liest man an dem Theilkreise E (dem »Farbenkreis«) an diametral gegenüberstehenden Nonien ab. Indem man also n_1 gegen k und n_2 dreht, kann man dem künstlichen Stern auch jedes Mal die Farbe des natürlichen geben und diese so bestimmen; das ZÖLLNER'sche Instrument ist also auch ein Colorimeter. Um es als solches benutzen zu können, muss man den Indexfehler des Farbenkreises kennen, d. h. der Farbenkreis wird nicht genau Null zeigen, wenn die Hauptschnitte von n_1 und n_2 parallel sind, man muss also ermitteln, was er in diesem Falle zeigt. Zu dem Behufe nimmt man die Bergkrystallplatte heraus und beobachtet, bei welchen Stellungen des Farbenkreises man die künstlichen Sterne zum völligen Verlöschen bringt. Die Ablesungen des Farbenkreises bei parallelen Hauptschnitten von n_1 und n_2 sind von den gefundenen genau um 90° verschieden. Im Allgemeinen wird das Colorimeter an dem Apparat nicht zum Bestimmen der Sternfarben benutzt, da diese letzteren mit den Mischfarben, welche die Krystallplatte zwischen den Nicols liefert, nicht übereinstimmen. Man verwendet daher meistens das Colorimeter nur, um die Farben der künstlichen Sterne denen der natürlichen möglichst ähnlich zu machen, weil dann die Herstellung gleicher Helligkeiten eine genauere wird. Zur bequemeren Drehung des Nicol n_1 ist vor dem Farbenkreis E ein doppelter gezähnter Rand angebracht, während die Einstellungen des Intensitätskreises J mittelst der Griffe GG erfolgt. Derselbe schleift an dem Kreise H hin, welcher einmal den Nonius für J und dann auf einem Viertel seines Umfangs eine von 0° bis 90° gehende Kreistheilung trägt. Mit dem Fernrohr bewegt sich auch Kreis H gegen den mit dem Stativ fest verbundenen Nonius N, und man kann auf diese Weise an H gleich die Höhe ablesen, welche das gerade eingestellte Object über dem Horizont hat.

Um das Verhältniss der Lichtstärken H_1 und H_2 zweier Sterne zu bestimmen, macht man nacheinander die künstlichen Sterne durch Drehen des Intensitätskreises gleich den beiden wirklichen, wobei die Winkel φ_1 und φ_2 abgelesen seien. Dann ist

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi_2} \quad \text{oder} \quad \log H_1 - \log H_2 = 2\,(\log\sin\varphi_1 - \log\sin\varphi_2).$$

Um nun nicht den Nullpunkt des Intensitätskreises bestimmen zu müssen, braucht man sich nur zu erinnern, dass es vier Stellungen der Nicol zueinander giebt, bei welchen ihre Hauptschnitte einen bestimmten Winkel φ einschliessen. Ist a_0 die Kreisablesung, wenn die Hauptschnitte der Nicol senkrecht aufeinander stehen, und a diejenige, bei welcher der künstliche Stern mit dem wirklichen gleiche Helligkeit hat, so ist $\varphi = a - a_0$. Für die vier Stellungen der Nicol, bei welchen ihre Hauptschnitte um den Winkel $90° - \varphi$ gegeneinander geneigt sind, findet man die vier Ablesungen: a, $2a_0 - a$, $180° + a$ und $180° + 2a_0 - a$. Subtrahirt man die zweite von der ersten und die vierte von der dritten, so hat jede der erhaltenen beiden Differenzen den Werth von 2φ. Bei den AUSFELD'schen Apparaten findet sich häufig die Einrichtung, dass der Kreis J nicht von 0° bis 360°, sondern von 0° nach beiden Seiten bis 180°

getheilt ist; dann liest man entweder φ oder seine Ergänzung zu 180° ab und hat aus den vier Ablesungen entsprechend den vier Nicolstellungen einfach das Mittel zu nehmen, nachdem man die zwei abgelesenen stumpfen Winkel durch ihre Ergänzungen zu 180° ersetzt hat.

Die Helligkeit des Himmelsgrundes wird bei dem Zöllner'schen Photometer dadurch unschädlich gemacht, dass das künstliche Sternpaar auf den nämlichen Himmelsgrund projicirt wird, auf welchem der wirkliche Stern erscheint. Ein grosser Vortheil des Instrumentes ist der, dass sich der photometrische Theil desselben an den Ocularauszug jedes grösseren Fernrohres anbringen lässt, sodass man dann alle Sterne, welche in dem Fernrohr überhaupt noch sichtbar sind, photometrisch verfolgen kann. In dieser Form ist es schon von Zöllner benutzt, während in neuerer Zeit die Mechaniker Wanschaff in Berlin und Töpfer in Potsdam nach den Plänen der Professoren H. C. Vogel und G. Müller solche in theilweise veränderter Form für verschiedene Sternwarten, sowie grössere selbständige Instrumente dieser Art für die Sternwarten in Potsdam und München ausgeführt haben. Die letzteren unterscheiden sich von der in Fig. 109 gegebenen Ausfeld'schen Construction besonders dadurch, dass das Fernrohr ein gebrochenes wie bei den kleineren Passageninstrumenten ist, wodurch nicht nur die Kopfhaltung des Beobachters eine ganz wesentlich bequemere, sondern auch die Festigkeit des ganzen Apparates eine ungleich höhere wird. Ein Nachtheil des Zöllner'schen Instrumentes besteht darin, dass die Helligkeit der künstlichen Sterne von dem Licht der Lampe abhängt, welches natürlich nicht constant ist. Indessen ist es gelungen, die Flammenhöhe auf wenige Stunden gleichmässig zu erhalten, doch muss man bei scharfen Untersuchungen die Beobachtungen so anordnen, dass etwaige Schwankungen der Lampenhelligkeit eliminirt werden.

Das folgende Instrument zur Vergleichung von Sternhelligkeiten scheint fast gleichzeitig, aber ganz unabhängig von Hirsch und Dawes erfunden zu sein; ersterer hat seine Erfindung ungefähr ein Jahr früher publicirt als letzterer, der hingegen angiebt, dass er dieselbe schon seit fünf Jahren benutze. Dasselbe besteht in einer Blende mit kreisförmiger Oeffnung, die vom Focus des Objectivs aus durch eine Mikrometerschraube mit getheiltem Kopf gegen dasselbe so hinbewegt werden kann, dass die Ebene desselben stets senkrecht zur optischen Axe des Objectivs bleibt. Die ganze Vorrichtung wird im Ocularstutzen angebracht. Je mehr man das Diaphragma dem Fernrohrobjectiv nähert, desto mehr wird der von letzterem erzeugte Lichtkegel abgeblendet, sodass man auf diese Weise die Bilder einzelner Sterne im Gesichtsfeld zum Verschwinden bringen kann. Aus den Abständen, die das Diaphragma dabei vom Focus des Objectivs hat, lassen sich die relativen Helligkeiten der zum Verlöschen gebrachten Sterne bestimmen. Um alle Sterne damit zum Verschwinden bringen zu können, wird man Diaphragmen verschiedener Oeffnungen anwenden müssen, ja Hirsch musste für Sterne erster Grösse noch Blendgläser zu Hilfe nehmen. Der Apparat leidet an dem Uebelstande, dass ausschliesslich die Randtheile des Objectivs abgeblendet werden, während die centralen Strahlen wirksam bleiben.

Eine Combination von Photometer und Colorimeter ist der folgende von Christie erfundene Apparat. In die Verlängerung der optischen Axe eines grösseren Fernrohrs wird vor das Ocular ein Fernröhrchen gebracht, dessen Ocular durch einen Spalt ersetzt ist. Jedoch nur die Hälfte des Gesichtsfeldes des letzteren empfängt Strahlen aus dem Hauptfernrohr, während die andere Hälfte durch einen Prismensatz Licht erhält. Dieses letztere geht von einer seitlich angebrachten Lampe mit drei Flammen aus, die ihr Licht durch drei Spalte senden, von denen jeder durch Eintreiben einer conischen Spitze geöffnet

werden kann, während er sich beim Zurückziehen derselben durch Federdruck von selbst schliesst. Durch diese drei Spalte und den Prismensatz werden drei Spectren so durch das Objectiv des kleinen Fernrohrs auf den im Focus desselben senkrecht zur Längsrichtung der Spectren angebrachten Spalt geworfen, dass von dem ersten nur die rothen, vom zweiten nur die grünen und vom dritten nur die blauen Strahlen durch den Spalt gelangen. Der Beobachter sieht nun ein rundes, helles Gesichtsfeld, dessen eine Hälfte Licht aus dem Hauptfernrohr, die andere dagegen aus dem Prismensatz erhält. Da sich durch geeignete Mischung von Roth, Grün und Blau alle Farbenabstufungen bis zum Weiss herstellen lassen, so kann man durch geeignete Moderirung der Spaltöffnungen stets erreichen, dass beide Hälften des Gesichtsfeldes gleich gefärbt und hell erscheinen. Um Helligkeit und Farbe ziffermässig ausdrücken zu können, muss man die Oeffnungsflächen der Spalte kennen, was nur durch ein jedesmaliges Ausmessen derselben mittelst Dynamometer nach Entfernen der Lampe möglich ist. Wie man sieht ist das Instrument sehr complicirt und die Beobachtung damit zeitraubend und schwierig. Dazu kommt, dass das Sternenlicht in Flächen ausgebreitet, also sehr geschwächt wird und dabei gar die Höhen von drei Flammen constant gehalten werden müssen, Nachtheile genug, um eine weitere Verbreitung und Anwendung des ganzen Apparates auszuschliessen.

Eine sehr einfache Vorrichtung hat Knobel zum Schwächen des Sternlichtes angegeben. Vor dem Objectiv eines beliebigen Fernrohrs werden zwei Blenden angebracht, von denen die eine dreieckig mit einem Winkel von 60° ausgeschnitten ist; dieselben werden durch eine bei verschiedenen Ganghöhen halb rechts und halb links geschnittene Schraube mit getheiltem Kopf so gegeneinander bewegt, dass sie stets ein mit dem Fernrohrobjectiv concentrisches gleichseitiges Dreieck freilassen, Man dämpft nun durch allmähliches Schliessen der Blendenöffnung das Licht eines Sternes so weit, bis es dem eines schwächeren, dessen Helligkeit man im Gedächtniss behalten hat, gleich ist. Aus der Grösse der Abblendung des Objectivs lässt sich der Unterschied in der Lichtstärke der beiden Sterne bestimmen. Dass auf diesem Wege keine genauen Resultate zu erreichen sind, ist einleuchtend; ausserdem darf man die Stärke der Abblendungen nicht den Helligkeitsdifferenzen proportional annehmen, weil die Rand- und Centraltheile des Objectivs nicht immer im gleichen Verhältniss zu einander abgeblendet werden, wie das z. B. bei dem früher besprochenen Apparat von Lamont der Fall ist.

Eine ganze Reihe von Photometern hat der Direktor der Sternwarte des Harvard College in Cambridge (Mass.), E. C. Pickering, anfertigen lassen, die jedoch im Allgemeinen vier Hauptformen angehören, von denen die einzelnen Apparate nur geringe Abweichungen zeigen. Dieselben sind alle so eingerichtet, dass sie sich an einem grösseren Fernrohr an Stelle des Ocularstutzens einschieben lassen; einige kann man auch bei der Lichtmessung von hellen Planeten direkt auf den Himmel anwenden. Bei der ersten Art passirt das vom Fernrohrobjectiv kommende Licht ein Doppelprisma aus Quarz, ehe es auf das Ocular fällt. Zwischen diesem und dem Auge ist ein Nicol'sches Prisma angebracht, das mit dem Ocular zugleich um die Axe des Instrumentes gedreht werden kann, welche Drehungen ein in ganze Grade getheilter Kreis mit zwei Nonien abzulesen gestattet. Betrachtet man mit diesem Instrument zwei Sterne, die gleichzeitig im Gesichtsfeld sind, so wird jeder in zwei Bilder zerlegt, von denen durch Drehung des Nicols je eines allmählich bis zum völligen Verlöschen geschwächt werden kann. Man dreht nun den Nicol so weit, bis das schwächere Bild des

helleren Sternes an Lichtstärke gleich ist mit dem helleren Bild des schwächeren Sterns, und liest den Theilkreis ab. Mittelst einer Schnur kann das Doppelbildprisma dem Ocular genähert oder von ihm entfernt werden, wodurch sich der Abstand der beiden Bilder eines Objects von völliger Deckung bis 21 *mm* verändern lässt.

Die zweite Form unterscheidet sich von der eben beschriebenen nur dadurch, dass noch ein Spectroskop mit dem Photometer in folgender Weise verbunden ist. Das Fernrohrobjectiv sendet seine Strahlen auf ein Prisma mit gerader Durchsicht, welches Spectren der Sterne auf einem Spalt von 0·2 *mm* Breite entwirft, der quer zur Längsrichtung der Spectren steht, also nur einen Lichtpunkt aus jedem Spectrum hindurchgehen lässt. Zwischen Spalt und Ocular befindet sich ein doppelbrechendes Kalkspathprisma, und zwischen Ocular und Auge ein NICOL'sches Prisma, dessen Drehungen gegen die Doppelplatte wiederum an den beiden Nonien eines Theilkreises abgelesen werden können. Auch mit diesem Apparat können nur die Helligkeiten von Sternen, die gleichzeitig im Gesichtsfeld sind, verglichen werden, und zwar in genau der gleichen Art wie bei dem vorher beschriebenen Instrument. Durch Drehen der ganzen Vorrichtung um die Axe des Fernrohres kann das Prisma mit gerader Durchsicht in eine solche Stellung zu den Sternen gebracht werden, dass die von denselben erzeugten Spectren so auf den Spalt fallen, dass Strahlen gleicher Wellenlänge, d. h. also gleicher Farbe, diesen passiren. Man sieht also dann im Ocular vier gleich gefärbte Lichtpunkte.

Die mit diesen beiden Instrumenten untersuchten Helligkeitsverhältnisse lassen sich auf folgende Weise ermitteln. Seien H_1 und H_2 die Lichtstärken zweier gleichzeitig im Gesichtsfeld befindlicher Sterne 1 und 2, und sei a_0 die Ablesung des Theilkreises, bei welcher ein Bild jedes Sterns verschwindet, während a die Ablesung bedeute, bei welcher Bild II von Stern 1 gleich hell ist mit Bild I von Stern 2. Dann sind, wenn der Theilkreis auf a zeigt, die Helligkeiten der vier Bilder im Gesichtsfeld: $H_1 \sin^2 (a - a_0)$, $H_1 \cos^2 (a - a_0)$, $H_2 \sin^2 (a - a_0)$, $H_2 \cos^2 (a - a_0)$. Nun sind aber die zweite und dritte dieser Helligkeiten einander gleich, also

$$H_1 \cos^2 (a - a_0) = H_2 \sin^2 (a - a_0),$$

daher

$$\log H_1 - \log H_2 = 2 \log \tan (a - a_0).$$

Wie beim ZÖLLNER'schen Photometer giebt es auch hier vier Ablesungen für a, d. h. vier Stellungen des Nicols, welche die für a geforderte Bedingung erfüllen. Mit Hilfe dieser vier Ablesungen kann man in der früher beschriebenen Weise a_0 eliminiren. Die beiden bisher besprochenen PICKERING'schen Photometer haben einmal den Nachtheil, dass man nur ganz nahe zusammenstehende Objecte mit einander vergleichen kann, und zweitens den viel grösseren, dass der durch sie erzeugte Lichtverlust ein ausserordentlich starker ist, denn es dringen unter günstigen Umständen nur 20—40$\frac{0}{0}$ des ursprünglichen Lichts in das Auge des Beobachters. Daher hat PICKERING noch zwei andere Arten von Photometern construirt, bei welchen diese Uebelstände fortfallen. Die erste ähnelt im Princip dem ZÖLLNER'schen Photometer. In den Ocularstutzen eines Fernrohrs ist seitlich im Winkel von 90° ein Rohr eingesetzt, welches zwei Nicol und zwischen diesen ein kleines Fernrohrobjectiv enthält. Vor der äusseren Oeffnung des Rohrs ist ein um zwei Axen drehbares totalreflektirendes Prisma angebracht, welches das Licht irgend eines beliebigen Sterns in das seitliche Rohr wirft, nach dessen Passirung es auf eine im Hauptfernrohr unter 45° zur

Axe geneigte planparallele Glasplatte fällt, welche es nach dem Ocular reflektirt. Das kleine Objectiv im seitlichen Rohr ist so gestellt, dass die durch dasselbe gehenden Strahlen sich nach der Reflexion in der Brennebene des Oculars vereinigen. Der innere Nicol kann gegen den äusseren gedreht, und der Winkel an einem Theilkreise abgelesen werden. Richtet man nun das Fernrohr auf einen zu untersuchenden Stern und dreht das Prisma so, dass es das Licht eines helleren Sternes in das seitliche Rohr reflektirt, so sieht man im Gesichtsfeld den zu messenden Stern direkt und zwei Bilder des durch das seitliche Prisma reflektirten Vergleichsternes, welche ihre Entstehung der Reflexion an der vorderen und hinteren Fläche der planparallelen Glasplatte verdanken. Durch Drehen des inneren Nicols schwächt man die beiden Bilder so weit, bis sie mit dem direkt gesehenen gleiche Helligkeit haben. Da man das ganze Photometer um die Axe des Hauptfernrohres drehen kann, so wird es immer möglich sein, einen passenden Vergleichstern zu finden. Am einfachsten und sichersten benutzt man das Instrument in der Weise, dass man zwei Objecte, deren Helligkeitsverhältniss man bestimmen will, unmittelbar nach einander mit demselben durch das seitliche Prisma reflektirten Stern vergleicht. Da auch hier der Theilkreis 90° zeigt, wenn die Hauptschnitte der Nicols parallel sind, so kann man ohne weiteres dieselben Formeln wie beim ZÖLLNER'schen Photometer anwenden. Will man jedoch die Helligkeitsdifferenz eines beliebigen, durch das Hauptfernrohr gesehenen Gestirnes mit der eines durch das seitliche Prisma reflektirten Sternes direkt vergleichen, so muss man vorher experimentell die Constante (C) des Instrumentes bestimmen, d. h. die Helligkeitsdifferenz, die die Bilder eines und desselben Objectes entworfen durch das grosse und das kleine Fernrohr erhalten. Ist diese in Winkelmaass ausgedrückt, so verhält sich die Helligkeit des Vergleichsternes (H_v) zu der des gemessenen Objectes (H_g), wie die Constante des Instrumentes zum Quadrat des Sinus des am Theilkreis abgelesenen Winkels φ, also

$$log\, H_v - log\, H_g = log\, C - 2\, log\, sin\, \varphi.$$

Da die genaue Ermittelung der Instrumentalconstante nicht gerade leicht ist, so wird man, um keine weitere Fehlerquelle einzuführen, besser thun, wenn man die erste Form der Beobachtungsanordnung wählt.

Dieser ganze Apparat hat den Nachtheil, dass die durch das kleine Fernrohr entworfenen Bilder schlecht sind, weil die den zweiten Nicol passirenden Lichtstrahlen nicht parallel, sondern convergent auffallen, wodurch Aberration hervorgerufen wird. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, wurde folgende Umänderung vorgenommen. Die beiden NICOL'schen Prismen mit dem Theilkreise wurden entfernt und das kleine Objectiv näher an das äussere Ende der Röhre verlegt. Dicht hinter demselben wurden zwei unter rechtem Winkel ausgeschnittene Blenden angebracht, die sich durch eine Schraube mit getheiltem Kopf gleichzeitig gegen einander bewegen lassen. Die Beobachtungen mit diesem Instrument geschehen in derselben Weise wie mit dem vorhergehenden, nur dass die Schwächung des Vergleichsternes hier durch das allmähliche Schliessen der Blenden erfolgt. Eine ganze Revolution der Schraube genügt, um die geschlossenen Blenden in voller Ausdehnung zu öffnen. Ist a_0 die Schraubenablesung, wenn die Blenden ganz geschlossen sind, und a die für eine bestimmte Helligkeit des Vergleichsternes, so ist, wenn die Ablesungen mit wachsender Oeffnung der Blenden zunehmen, $a - a_0$ an Stelle von $sin\, \varphi$ in die Formeln für den vorhergehenden Apparat einzusetzen, um dieselben auch für diesen gültig zu machen. Auch was oben über die verschiedenen Anordnungen der Beob-

achtungen und die Bestimmung der Instrumentalconstante gesagt worden ist, gilt hier ohne weiteres. Dass bei allen vier verschiedenen Formen der PICKERING'schen Photometer die Helligkeit des Himmelshintergrundes eliminirt ist, braucht wohl nicht besonders bewiesen zu werden.

Um eine systematische Bestimmung der Lichtstärken, der mit blossem Auge sichtbaren Sterne in bequemer Weise durchführen zu können, hat PICKERING noch ein weiteres Photometer construirt, das sich von den bereits besprochenen dadurch besonders unterscheidet, dass es nicht einem beliebigen Fernrohr angefügt werden kann, sondern ein selbständiges Instrument bildet. In das Westende eines am Meridianpfeiler in der Richtung Ost—West angebrachten Rohres sind zwei ganz gleiche Objective (4 *cm* Oeffnung, 80 *cm* Brennweite) so eingesetzt, dass ihre Brennpunkte in eine Ebene und dicht neben einander fallen. Vor jedem Objectiv ist ein totalreflektirendes Prisma angebracht, und zwar kann das eine, unmittelbar vor dem ihm zugehörigen Objectiv befindlich, einmal um die Axe desselben und zweitens noch um eine dazu senkrechte, durch Schlüssel vom Ocular aus gedreht und so gestellt werden, dass es das vom Polarstern (*α Ursae minoris)* kommende Licht in das Fernrohr wirft. Das zweite Prisma ist soweit von seinem Objectiv entfernt, dass es durch das erste in keiner Stellung auch nur theilweise verdeckt wird. Es ist in der Hauptsache um die optische Axe seines Objectivs drehbar, welche Drehung an einem in ganze Grade eingetheilten Kreise abgelesen werden kann. Mit Hilfe dieses Prismas kann das Bild jedes den Meridian passirenden Sternes in das Fernrohr geworfen werden; um es daselbst etwas länger festhalten zu können, vermag man das Prisma gegen die Ebene des Meridians mittelst einer Schraube soweit zu neigen, dass man den Stern eine Viertelstunde vor bezw. nach seinem Meridiandurchgange im Gesichtsfeld haben kann. Kurz ehe die Strahlen der beiden Objective sich in der gemeinsamen Brennebene vereinigen, passiren sie ein doppelbrechendes Kalkspathprisma compensirt durch Glas, wodurch das von jedem der Objective entworfene Sternbild im Gesichtsfeld des gemeinschaftlichen Oculars in zwei Bilder zerlegt wird. Durch geeignete Wahl der Winkel des Doppelbildprismas lässt sich erreichen, dass das nördliche Bild des südlichen Objectivs und das südliche Bild des nördlichen unmittelbar nebeneinanderstehen, während durch passend gewählte Weite des Augendeckels die beiden übrigen Bilder abgeblendet werden. Zwischen Ocular und Auge ist ein NICOL'sches Prisma angebracht, durch dessen Drehung die beiden im Gesichtsfeld erscheinenden Sternbilder gleich hell gemacht werden. Die Winkel, um welche der Nicol gedreht wird, liest man an einem in ganze Grade getheilten Kreise ab. Das Princip der Helligkeitsvergleichung entspricht also genau dem, bei den beiden ersten PICKERING'schen Photometern verwandten, daher erfolgt auch die Berechnung der Lichtverhältnisse nach den oben für dieselben angegebenen Formeln. Zur genauen Justirung des Instrumentes kann man beide Prismen auf den Polarstern richten und seine beiden Bilder im Gesichtsfeld gleich hell machen. Auch ist es sehr rathsam, eine solche Einstellung desselben zu Anfang, Mitte und Ende jeder Beobachtungsreihe vorzunehmen, um etwaige Aenderungen an der Justirung oder Durchsichtigkeit der beiden Prismen und Objective constatiren zu können. Die Nachtheile des Instrumentes bestehen darin, dass man einmal die beiden Sterne durch verschiedene dioptrische Systeme beobachtet, die nur in vereinzelten Fällen gegen die Sterne ausgetauscht werden können; im allgemeinen findet bei den Beobachtungen kein Auswechseln statt, so dass die durch verschieden starke Absorption erzeugten Fehler nicht eliminirt werden. Ferner ist durch

Reflexion, Absorption und Doppelbrechung der Lichtverlust ein sehr starker, sodass der Apparat, wenn seine Dimensionen nicht sehr grosse sind, nur für hellere Sterne verwendbar ist. Die verschiedene Helligkeit des Himmelsgrundes ist deshalb ohne Einfluss auf die Messungen, weil die Helligkeiten der Stellen, auf welche die beiden Prismen gerichtet sind, sich im Gesichtsfeld vollständig vermischen. Das Photometer erfuhr insofern später eine Abänderung, als die Prismen vor den Objectiven durch versilberte Glasspiegel ersetzt wurden.

In ganz anderer Weise als die bisher beschriebenen Instrumente sucht das Keilphotometer das Verhältniss von Sternhelligkeiten zu bestimmen. Die Erfindung desselben datirt aus dem Jahre 1833, ja vielleicht könnte man das von HORNER 1817 construirte Photometer mit hierher rechnen, denn wenn bei demselben auch kein Keil zur Verwendung kam, so war doch das Princip der allmählichen Auslöschung der Sterne durch Einschieben immer dichterer optischer Medien in das Gesichtsfeld (bei HORNER Lagen von Seidenpapier) zur Durchführung gelangt. Wirkliche Glaskeile verwendete zu diesem Zwecke 1833 der Graf XAVIER DE MAISTRE, und zwar benutzte er zwei gleichgeformte Keile, von denen der eine aus weissem, der andere aus blauem Glase bestand. Der letztere wurde im Gesichtsfeld allmählich über den festen weissen geschoben, welcher lediglich dazu diente, die Ablenkung der Lichtstrahlen durch den blauen aufzuheben. Fast gleichzeitig verwendete QUETELET zwei gleich geformte und gefärbte Glaskeile, die sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung über das Gesichtsfeld schoben. Die gleiche Beschaffenheit hat das von C. D. v. SCHUMACHER in Pulkowa und Stockholm im Jahre 1852 benutzte Instrument, während E. KAYSER in Danzig bei seinem 1862 in dieser Richtung gemachten Vorschlage auf die DE MAISTRE'sche Form wieder zurückgriff, mit dem einzigen Unterschied, dass bei ihm der weisse und gefärbte Keil fest verbunden bleiben sollten. 1865 endlich machte DAWES Mittheilung über einen gefärbten Glaskeil, den er seit fünf Jahren zu photometrischen Zwecken verwendete. In dieser Form ist das Instrument in grossem Maassstabe von CHARLES PRITCHARD in Oxford benutzt, der die sämmtlichen photometrischen Beobachtungen, die seiner »*Uranometria nova Oxoniensis*« zu Grunde liegen, damit anstellte. Die Einrichtung ist folgende: Ein Keil aus Rauchglas (sogen. Neutralglas) wird mittelst Schraube zwischen Auge und Ocular hin- und herbewegt, die jedesmalige Stellung desselben lässt sich an einer feinen Theilung ablesen. Die Messung geschieht in der Weise, dass man die Lage des Keils sucht, bei welcher der beobachtete Stern gerade verschwindet oder im völlig dunklen Gesichtsfeld eben wieder auftaucht. Die Scalaablesung giebt an, bei welcher Dicke des Keiles das Licht des beobachteten Sternes eben vollständig absorbirt wird. Aus den für verschiedene Sterne ermittelten Keildicken und den bekannten Absorptionsverhältnissen des Glases lässt sich das Helligkeitsverhältniss der beiden Sterne bestimmen. Einfacher geschieht dies durch Messung der Differenz zwischen den zur Auslöschung der beiden Sterne nöthigen Keilstellungen. Durch Multiplikation dieser Differenz mit der Constanten des Keils erhält man direkt den Grössenunterschied der beiden Sterne. Die Bestimmung dieser Constanten auf empirischem Wege muss sehr sorgfältig ausgeführt werden, da deren Fehler das Resultat um so stärker beeinflusst, je grösser der gemessene Helligkeitsunterschied der beiden Sterne ist. Die ganze Vorrichtung hat den Vortheil, dass sie sich an jedem Fernrohre leicht anbringen und handhaben lässt, hat aber dagegen auch verschiedene Nachtheile. Die Empfindlichkeit des Auges ist bei den allerschwächsten Lichteindrücken (und um das Uebergehen derselben in absolute Dunkelheit handelt

es sich hier) eine verhältnissmässig beschränkte, ähnlich wie das bei sehr grossen Lichtstärken der Fall ist; die Messungen werden also dadurch an Genauigkeit verlieren; auch werden die Farben der Sterne hier ihren störenden Einfluss geltend machen. Endlich ist es sehr die Frage, ob der Keil das Licht gleichmässig absorbirt. Untersuchungen von LANGLEY mit dem Bolometer haben dargethan, dass der Keil in allen Theilen selectiv absorbirt und zwar nicht nur in Bezug auf Wärme-, sondern auch auf Lichtstrahlen. Die Durchlässigkeit des Keiles wächst mit der Wellenlänge, also vom violetten zum rothen Ende des Spectrums. Indessen ist es fraglich, ob die von LANGLEY für ein Exemplar gefundenen Differenzen in der Absorption jedesmal auftreten und dann so stark sind, dass sie das Auge merklich beeinflussen; bei anderen Apparaten dieser Art hat sich die selective Absorption als nicht störend bei den Messungen erwiesen. Dagegen dürfte die Helligkeit des Himmelshintergrundes durchaus nicht ohne Einfluss auf die Beobachtungen sein. Ausserdem darf man nicht Sterne von zu grosser Helligkeitsdifferenz mit einander vergleichen, weil sonst durch die Unsicherheit in der Bestimmung der oben erwähnten Constanten des Keils zu grosse Fehler in das Resultat getragen werden.

Auf dem gleichen Princip der Auslöschung der Sterne beruht das von PARKHURST bei seinen Planetoidenbeobachtungen angewandte Photometer. Eine dünne Glasplatte, deren Oberflächen einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden, ist nahe der Focalebene eines grösseren Fernrohres so in den vom Objectiv erzeugten Strahlenkegel eingeschaltet, dass es denselben gerade zur Hälfte durchschneidet. Läuft nun ein Stern durch das Gesichtsfeld des ruhenden Fernrohres, so geht das Licht desselben anfangs an der Glasplatte vorbei. Sowie jedoch seine ersten Strahlen durch die Platte hindurchgehen, bildet sich ein zweites schwaches Bild des Sternes, das an Helligkeit ständig zunimmt, während das ursprüngliche bis zum Verlöschen abnimmt. Verschieden helle Sterne werden von ihrem Eintritt in das Gesichtsfeld an verschieden lange Wege bis zum Punkte ihres Auslöschens zu durchlaufen haben, und aus der Vergleichung dieser Weglängen lässt sich in Verbindung mit einer Constanten des Instrumentes das Helligkeitsverhältniss der beiden Sterne bestimmen. Diese Constante kann entweder auf theoretischem oder besser noch auf empirischem Wege ermittelt werden.

Das sind die hauptsächlichsten Instrumente, die man zur Bestimmung der Helligkeitsverhältnisse der Sterne unter einander construirt hat, aber schon zwei Jahrtausende vor der Erfindung derselben hat man die Lichtstärken der Sterne gegeneinander abgeschätzt, indem man sich ausschliesslich des Auges als Instrument bediente. Da nun ein heller Stern dem unbewaffneten Auge grösser erscheint, als ein schwacher, so bezeichnete man die Helligkeit eines Sternes als seine »Grösse« *(magnitudo)* und zwar unterschied man bei den mit blossem Auge sichtbaren Gestirnen sechs Grössenklassen, eine Eintheilung, die man noch heute beibehalten und auch auf die teleskopischen Sterne ausgedehnt hat, indem man einfach die Zahl der Grössenklassen erweiterte. Der Begriff einer Grössenklasse als Helligkeitsdifferenz ist also im Grunde ein willkürlicher, und es würde sich nun zunächst fragen, in welcher Beziehung steht derselbe zu den Helligkeitsverhältnissen, die man durch die Anwendung photometrischer Instrumente zwischen den Lichterscheinungen am Himmel ermittelt. Nun hat FECHNER es als psychophysisches Grundgesetz aufgestellt, dass, wenn man zwei Lichtintensitäten, die das Auge noch gerade unterscheiden kann, in gleichem Verhältniss

zu- oder abnehmen lässt, sie doch immer noch vom Auge in gleicher Weise unterschieden werden. Mehr in mathematischer Form ausgedrückt, würde das besagen: Für das Auge ist das Erkennungsvermögen eines sehr geringen Unterschiedes zwischen zwei Lichtintensitäten der Grösse des letzteren dividirt durch die Intensität proportional. Bezeichnet man also die nahezu gleichen Helligkeiten zweier Sterne mit h und $h + dh$, ihre Differenz nach Grössenklassen mit $-dg$, und eine willkürliche Constante mit k, so ist

$$-dg = k\frac{dh}{h},$$

woraus man durch Integration je nach den angenommenen Grenzen erhält:

$$g_{m+1} - g_m = k\,(log\,h_m - log\,h_{m+1})$$

und entsprechend

$$g_{m+n} - g_m = k\,(log\,h_m - log\,h_{m+n}).$$

Da nun

$$g_{m+1} - g_m = 1 \text{ und } g_{m+n} - g_m = n$$

zu setzen ist, so findet man bei Elimination von k die Gleichung

$$log\left(\frac{h_m}{h_{m+1}}\right) = \frac{1}{n}\,log\left(\frac{h_m}{h_{m+n}}\right),$$

mit Hilfe deren man berechnen kann, wie viel Mal eine beliebige Grössenklasse m heller ist als die nächstfolgende $m + 1$, wenn man das Intensitätsverhältniss der beiden beliebigen Grössenklassen m und $m + n$ gemessen hat. Zugleich lässt sich auf diese Weise ein Urtheil über die Gültigkeit des FECHNER'schen Gesetzes gewinnen. Nun hat bereits vor Aufstellung des letzteren STEINHEIL eine ähnliche Formel wie die obige abgeleitet und mit Hilfe seiner eigenen nicht eben sehr genauen Beobachtungen den Werth von $log\left(\frac{h_m}{h_{m+1}}\right)$ zu 0·45 bestimmt, während SEIDEL aus seinen Intensitätsmessungen an 208 Fixsternen in Vergleichung mit den Grössenklassenangaben der »*Uranometria nova*« von ARGELANDER dafür die Zahl 0·46, und WOLFF, indem er dieselben ARGELANDER-schen Einschätzungen mit seinen Messungen verband, für die ersten sechs Grössenklassen etwas variable Werthe fand, aus denen sich im Mittel 0·37 für den obigen Logarithmus ergab, womit die von JOHNSON und POGSON dafür ermittelte Zahl 0·38 gut übereinstimmt. Die Grössenschätzungen der »Bonner Durchmusterung« legten ROSÉN und LINDEMANN ihren diesbezüglichen Untersuchungen zu Grunde, und ersterer bestimmte auf diese Weise für die 5te bis 9te Grössenklasse den fraglichen Logarithmus zu 0·39, während letzterer keinen constanten Werth für denselben, sondern ihn

für die Grössenklassen	3—5	zu 0·29
„ „ „	5—6	„ 0·30
„ „ „	6—7	„ 0·39
„ „ „	7—8	„ 0·39
„ „ „	8—9	„ 0·44

fand. Bei der in Potsdam begonnenen »Photometrischen Durchmusterung des nördlichen Himmels« haben es sich die Beobachter G. MÜLLER und P. KEMPF angelegen sein lassen, ihr System von 144 Fundamentalsternen der »Bonner Durchmusterung« so anzupassen, dass im Mittel für die Grösse 6·0 beide Durchmusterungen streng mit einander übereinstimmen. Da ferner in Potsdam nach dem Vorschlage von POGSON der $log\left(\frac{h_m}{h_{m+1}}\right)$ zu 0·4 angenommen

wurde, so entspricht (nach den bisher erschienenen Helligkeitsbestimmungen zwischen 0° und + 20° Deklination) für die Grössenklassen 6·0—7·5 der »Bonner Durchmusterung« das logarithmische Helligkeitsverhältniss 0·4 dem Unterschiede von einer Grössenklasse, während sich für die Klassen 2·0 bis 6·0 dieser Logarithmus zu 0·329 ergiebt, welches Resultat zu dem von LINDEMANN gefundenen sehr gut passt. Aus alledem geht aber hervor, dass das FECHNER'sche Gesetz auf die Beziehungen zwischen den Lichtintensitäten und den gewöhnlichen Grössenklassen nicht vollständig passt, und dass das Helligkeitsverhältniss zweier aufeinanderfolgender Grössenklassen je nach der Helligkeit der Sterne und auch nach den Systemen, die in den verschiedenen Katalogen befolgt sind, etwas variabel ist. Man neigt sich jedoch in der Praxis jetzt immer mehr dem Gebrauche zu, die oben erwähnte POGSON'sche Zahl $0·4 = log\ 2·512$ für das logarithmische Helligkeitsverhältniss zweier aufeinander folgender Grössenklassen, die auf Schätzungen beruhen, anzunehmen.

Das Abschätzen der Sterngrössen mit blossem Auge ist natürlich ziemlich schwierig und zwar besonders noch deshalb, weil die Helligkeiten der Sterne keine schroffen Contraste, sondern alle Arten von Uebergängen zeigen, so dass man entweder Sterne verschiedener Helligkeiten in jede der Grössenklassen unterbringen oder Unterabtheilungen zwischen denselben einführen muss. Das letztere hat man nun gethan, und ARGELANDER hat im Anschluss daran eine Methode angegeben, welche die Bestimmung von Helligkeitsunterschieden der Sterne mit blossem Auge oder unter Benutzung eines schwach vergrössernden Fernrohres auf Grund sogen. »Stufenschätzungen« zu einer ziemlich genauen macht. Die Methode ist folgende: Um zwei benachbarte Sterne α und β, die höchstens eine Distanz von 10—12° und keinen starken Helligkeitsunterschied haben sollen, miteinander zu vergleichen, richtet man das Auge auf Stern α und dreht es so, dass derselbe am hellsten erscheint (was beim direkten Fixiren nicht der Fall ist), merkt sich die Helligkeit und wendet dann das Auge in der gleichen Weise auf Stern β und schätzt dessen Lichtstärke gegen die von α ab; gelingt das nicht gleich, so fasst man nochmals α ins Auge und dann, wenn nöthig, wieder β, bis man ganz sicher ist, welcher von beiden der hellere und um wieviel er heller ist. Das »Wieviel« wird so geschätzt: ARGELANDER theilt die Helligkeitsdifferenz zweier aufeinander folgender Grössenklassen in zehn »Stufen«. Erscheinen nun beim Vergleichen die Sterne α und β gleich hell oder bald der eine, bald der andere heller, so nennt man sie »gleich hell« und bezeichnet es durch: $\alpha\beta$ oder $\beta\alpha$. Erscheinen sie auf den ersten Blick gleich hell, aber findet man bei oftmaligem abwechselnden Fixiren, dass α doch eine Spur heller ist als β, so sagt man: α ist »eine Stufe« heller als β und schreibt dafür $\alpha 1 \beta$, also den helleren Stern voran. Stellt sich heraus, dass α stets und unzweifelhaft heller als β ist, so beträgt der Helligkeitsunterschied zwischen beiden zwei Stufen, was man durch $\alpha 2 \beta$ bezeichnet. Fällt die Lichtstärkendifferenz auf den ersten Blick ins Auge, so sind das drei Stufen, also $\alpha 3 \beta$. Ist der Grössenabstand noch auffälliger, so sagt man, der Unterschied betrage vier Stufen, $\alpha 4 \beta$. Weiter soll man nicht gehen; ist die Differenz zwischen α und β grösser, so muss man einen dritten Stern γ, der seiner Lichtstärke nach zwischen beiden steht, heranziehen und α mit γ und γ mit β vergleichen. Der Begriff einer »Stufe« wird auf diese Weise für geübte Beobachter ziemlich constant und sicher definirt, zwar schwankt derselbe nach den einzelnen Persönlichkeiten wohl etwas, doch ist er immer angenähert 0·1 Grössenklasse.

Mit dieser Methode lassen sich besonders die Helligkeitsschwankungen sogen. »veränderlicher Sterne« bequem und ziemlich sicher bestimmen und zwar auf zweierlei Weise. Entweder sucht man sich in der Nähe des zu bestimmenden Veränderlichen zwei unveränderliche Sterne auf, die eine solche Helligkeitsdifferenz haben, dass der eine etwa eine bis zwei Stufen heller als der Veränderliche im grössten Glanze, der andere ebenso viel schwächer als der Veränderliche bei geringster Helligkeit ist; die jedesmalige Lichtstärke des letzteren schätzt man zwischen die beiden unveränderlichen Helligkeiten ein. Oder wenn die Schwankungen des veränderlichen Sternes eine Grössenklasse oder mehr betragen, so sucht man vier unveränderliche Sterne in seiner Nähe auf, von denen zwei bei einer Differenz von 4—5 Stufen unter einander mit ihren Helligkeiten den Veränderlichen im grössten Glanze gerade einschliessen, während die beiden anderen bei etwa gleicher Differenz sich ebenso gegenüber der geringsten Lichtstärke des Veränderlichen verhalten; auch hier schätzt man letzteren entweder zwischen das eine oder andere Paar ein.

In neuester Zeit hat man versucht, die Helligkeiten ohne Zuhilfenahme des Auges zu bestimmen, indem man dasselbe durch die photographische Platte ersetzte. Auf der letzteren bilden sich die Sterne als Scheibchen von geringerem oder grösserem Durchmesser ab, welche umgekehrt proportional den Grössenklassen sind, d. h. der Durchmesser eines Sternes 9. Grösse ist auf der photographischen Platte nur $\frac{1}{9}$ von dem eines Sternes 1. Grösse. Ein Uebelstand dieser Methode liegt aber darin, dass nämlich die photographische Platte die Helligkeitsverhältnisse anders darstellt, als sie das Auge sieht. Das kommt daher, dass auf erstere besonders die blauen und violetten Strahlen wirken, während das Auge die Helligkeit hauptsächlich nach der Menge der gelben Strahlen schätzt; während also z. B. diesem ein gelber und ein blauer Stern gleich hell erscheinen, wird auf die Platte der Durchmesser des von letzterem erzeugten Scheibchens viel grösser sein, als derjenige des von ersterem herrührenden.

Alle die hier besprochenen Apparate und Methoden liefern nicht direkt das wirkliche Helligkeitsverhältniss zweier Sterne, sondern nur dasjenige, welches sich an der Erdoberfläche dem Auge darbietet. Alle Lichtstrahlen, welche von ausserhalb der Erde zu derselben gelangen, müssen die Atmosphäre durchdringen, und von dieser werden sie bald mehr bald weniger stark absorbirt, d. h. ein Teil des Lichtes wird in der die Erde umgebenden Lufthülle ausgelöscht. Diese

Extinction des Lichtes in der Atmosphäre

ist nun verschieden stark je nach der Länge des Weges, den ein Strahl in der letzteren zurücklegen muss; ausserdem werden auch Druck, Feuchtigkeitsgehalt und Temperatur der Luft Aenderungen in der Absorption derselben hervorrufen können. Das Licht, welches ein Stern nach einem bestimmten Erdort schickt, wird den kürzesten Weg in der Atmosphäre zu durchlaufen haben, wenn der Stern im Zenith des betreffenden Ortes steht; je mehr er sich dem Horizont nähert, eine desto längere Strecke hat sein Licht in der Lufthülle der Erde zu durcheilen, eine desto grössere Absorption wird dasselbe erfahren. In andern Worten: für einen bestimmten Erdort nimmt die scheinbare Helligkeit eines Sternes mit wachsender Zenithdistanz desselben ab. Jede Messung der Lichtstärke eines Gestirnes hat also erst Werth, wenn man zugleich die Zenithdistanz angiebt, bei welcher dieselbe gemacht ist. Um das nicht immer thun zu müssen, und um die bei verschiedenen Zenithdistanzen angestellten Beobachtungen des-

selben Sternes untereinander vergleichen zu können, berechnet man aus der bei beliebiger Höhe gemessenen Helligkeit diejenige, welche der Stern haben würde, wenn er im Zenith des Beobachtungsortes stände. Diese Reduction auf das Zenith kann man entweder auf theoretischem oder praktischem Wege ermitteln, welcher letztere im allgemeinen deshalb vorzuziehen sein wird, weil man die Zusammensetzung der Atmosphäre und die Art ihrer Absorption nicht mit der Genauigkeit kennt, wie es für eine strenge theoretische Untersuchung nöthig wäre. Es sollen hier erst kurz die wichtigsten theoretischen Formeln auf diesem Gebiete angegeben und dieselben dann auf ihre Uebereinstimmung mit den praktischen Resultaten hin untersucht werden.

Der erste, der einen Ausdruck für das Verhältniss der Helligkeiten eines Lichtstrahls, gemessen bei verschiedenen Zenithdistanzen, aufstellte, war LAMBERT. Ist H die Helligkeit eines Lichtstrahls beim Eintritt in die Erdatmosphäre und h die an der Erdoberfläche in der Zenithdistanz z gemessene Helligkeit desselben, ist ferner δ die Dichte einer mit der Erdoberfläche concentrischen kugelförmigen dünnen Luftschicht, deren Abstand vom Erdmittelpunkt r ist, so ergiebt sich nach LAMBERT

$$log\frac{H}{h} = sec\,z\int\delta\cdot dr - \frac{1}{2}sec\,z\cdot tang^2 z\int\frac{r^2-1}{r^2}\delta\cdot dr + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}sec\,z\cdot tang^4 z\int\frac{(r^2-1)^2}{r^4}\delta\cdot dr\,..$$

Beobachtet man denselben Lichtstrahl bei der Zenithdistanz z' und findet seine Helligkeit an der Erdoberfläche h', so erhält man für diese beiden Grössen eine ganz entsprechende Formel. Zieht man dieselbe von der obigen ab und beschränkt sich wegen der raschen Convergenz der Reihe auf die ersten beiden Glieder, so erhält man

$$log\,h' - log\,h = (sec\,z - sec\,z')\int\delta\cdot dr - \frac{1}{2}(sec\,z\cdot tang^2 z - sec\,z\cdot tang^2 z')\int\frac{r^2-1}{r^2}\delta\cdot dr\,..(3)$$

Um die Werthe der Integrale zu ermitteln, müsste man die Beziehungen der Dichten der verschiedenen Luftschichten zu ihren Abständen vom Erdmittelpunkt kennen, doch wird man auf empirische Weise aus längeren Beobachtungsreihen numerische Grössen für dieselben bestimmen können. G. MÜLLER in Potsdam hat das auf Grund seiner eigenen umfangreichen Beobachtungen gethan und gefunden

$$\int\delta\cdot dr = 0{\cdot}08044;\qquad \int\frac{r^2-1}{r^2}\delta\cdot dr = 0{\cdot}00009110.$$

Während der LAMBRRT'sche Ausdruck für die Extinction in der Atmosphäre nur eine Interpolationsformel darstellt, hat LAPLACE in seiner »Mécanique céleste« (Tome IV, livre X, chap. III.) unter der Annahme, dass die für die Refraction aufgestellten Hypothesen auch für die Extinction Gültigkeit haben, die Formel

$$log\,h_z = log\,h_o + \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_o}sec\,z - 1\right)log\,A \qquad (4)$$

abgeleitet, in welcher h_o und h_z die an der Erdoberfläche bei den Zenithdistanzen Null und z beobachteten Helligkeiten des ausserhalb der Atmosphäre die Lichtstärke H besitzenden Sternes sind; α_o und α_z sind die für die Zenithdistanzen Null und z geltenden BESSEL'schen Refractionswerthe, die man aus den gebräuchlichen Refractionstafeln erhält, während

$$A = \frac{h_o}{H}$$

der sogenannte Transmissionscoëfficient ist. Den Ausdruck für h_z kann man auch anders schreiben, wenn man, nach dem Vorgange von BOUGUER und

POUILLET, mit l die Weglänge bezeichnet, welche die Lichtstrahlen in der Erdatmosphäre zu durchlaufen haben, wenn sie von einem Punkte mit der Zenithdistanz z ausgehen, und wenn man sich die ganze Lufthülle in eine Schicht von gleicher Dichtigkeit zusammengepresst denkt, welche letztere gleich der an der Erdoberfläche sein soll. Die Wegstrecke, die in einer solchen Atmosphäre ein Lichtstrahl zurücklegt, der aus dem Zenith des Beobachtungsortes kommt, setzt man gleich der Einheit und drückt l in diesem Maasse aus. Dann ist nach der LAPLACE'schen Ableitung

$$\frac{\alpha_z}{\alpha_o} sec z = l,$$

also

$$log h_z = log h_o + (l - 1) log A \qquad (5)$$

und folglich

$$\frac{h_z}{h_o} = A^{l-1},$$

mithin

$$h_z = H \cdot A^l.$$

Die ganze Ableitung von LAPLACE ist unter der Annahme gemacht, dass zwischen dem Brechungsexponenten ν und der Dichte δ einer jeden einzelnen Luftschicht die Beziehung besteht

$$\nu^2 - 1 = q \cdot \delta$$

wo q das Brechungsvermögen der Atmosphäre ist. Führt man statt dieses Verhältnisses das einfachere

$$\nu - 1 = q \cdot \delta$$

ein, wie MAURER gethan hat, so findet man, wenn man die für die LAMBERT'sche und LAPLACE'sche Ableitung eingeführten Bezeichnungen beibehält und mit ν_0 den Brechungsexponenten der Luft an der Erdoberfläche, mit dR die Refraction bei der Zenithdistanz z bezeichnet und den Radius der Erde gleich 1 setzt

$$log h_z = log h_0 + \left[\frac{1}{r-1}\left(\frac{\nu_0 + 1}{2} sin z \cdot dR + \sqrt{r^2 - \nu_0^2 \cdot sin^2 z} - cos z\right) - 1\right] log A. \qquad (6)$$

Hierbei bedeutet also $r - 1$ die Höhe der Atmosphäre, für welche MAURER den Werth 0·01 (Erdradius = 1), also in Wirklichkeit etwa 64 *km*, annimmt, eine an sich willkürliche Zahl; doch muss bemerkt werden, dass der Klammerausdruck sich nicht wesentlich ändert, wenn man für $r - 1 = 0·0125$ also die wahre Atmosphärenhöhe rund 80 *km* setzt. Die Werthe für dR müssen aus einer Refractionstafel entnommen werden, welche unter der Annahme

$$\nu - 1 = q \cdot \delta$$

berechnet ist, wie das THOMAS YOUNG in seiner im Nautical Almanac für 1822 publicirten Refractionstabelle gethan hat.

Um die praktische Bestimmung der Extinction des Lichtes in der Atmosphäre haben sich besonders SEIDEL und G. MÜLLER verdient gemacht. Ersterer verglich mittelst eines STEINHEIL'schen Prismenphotometers in München die Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse paarweise mit einander. Ist H_1 die ursprüngliche Helligkeit eines Sternes und h_1 die an der Erdoberfläche in der Zenithdistanz z_1 beobachtete Helligkeit desselben; versieht man ferner die entsprechenden Grössen eines zweiten Sternes mit dem Index 2, so hat man die Gleichung:

$$log \frac{H_1}{H_2} = log \frac{h_1}{h_2} + \varphi z_1 - \varphi z_2,$$

wobei φz_1 und φz_2 die logarithmischen Correctionen bedeuten, die zu $log h_1$ bez. $log h_2$ zu addiren sind, um die Logarithmen der Helligkeiten zu erhalten,

welche man an den Sternen beobachten würde, wenn sie im Zenith ständen. Man beobachtet nun $log \frac{h_1}{h_2}$, alle anderen Grössen der Gleichung sind unbekannt. Sucht man eine Beobachtung heraus, bei welcher die beiden Sterne nahezu gleiche Zenithdistanzen hatten, so kann man für diese genähert $\varphi z_1 = \varphi z_2$ setzen und erhält dadurch einen vorläufigen Werth für $log \frac{H_1}{H_2}$. Diesen setzt man bei sämmtlichen übrigen Vergleichungen der beiden Sterne als bekannt voraus, hat also nur noch φz_1 und φz_2 als Unbekannte. Von diesen vernachlässigt man zunächst in jeder Gleichung den kleineren Werth und findet also eine ungefähre Angabe für den grösseren. Man hat also nun für eine Reihe von Zenithdistanzen angenäherte Zahlengrössen für die zugehörigen φz. Indem man letztere als Ordinaten, erstere als Abscissen aufträgt, construirt man eine Curve, welche erlaubt, für jedes z einen approximativen Werth von φz abzulesen, womit man nun die ganze bisherige Operation wiederholt und eine viel genauere Curve findet, aus der man eine Extinctionstabelle von Grad zu Grad der Zenithdistanz interpolirt. Für jedes häufig beobachtete Sternpaar erhält man eine solche Tafel; die Vereinigung aller derselben nach Gewichten liefert die schliessliche Extinctionstabelle, wie SEIDEL eine solche für München aufgestellt hat, die weiter unten mitgetheilt werden soll.

In ganz gleicher Weise ist G. MÜLLER bei Aufstellung einer Extinctionstabelle für Potsdam vorgegangen, mit dem einzigen Unterschiede, dass bei jedem der fünf Sternpaare, die er sehr oft beobachtete, ein Stern *α Ursae minoris* war; für diesen nahm er zunächst φz als unveränderlich an und vereinigte dasselbe mit $log \frac{H_1}{H_2}$ zu einer Constanten, um die erste genäherte Curve zu finden; das übrige Verfahren war das gleiche wie bei SEIDEL. Dieselbe Beobachtungsmethode aber eine andere Art der Reduction hat MÜLLER bei seiner zweiten Beobachtungsreihe zur Bestimmung der Extinction benutzt, die er in der Schweiz auf dem Säntis (Meereshöhe 2504 *m*) anstellte. Indem er für den Polarstern eine constante Lichtstärke annahm, konnte er die Helligkeit h_z, die jeder Vergleichstern bei der Zenithdistanz z hatte, aus den Beobachtungen finden. Aus der GYLDÉN'schen Refractionstafel nahm er ferner für einen mittleren Barometerstand und mittlere Temperatur des Beobachtungsortes mit dem Argument z für jede Beobachtung die Grösse $\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_o} sec\, z - 1\right)$. Auf diese Weise erhielt er für jeden Stern eine ganze Reihe von Gleichungen von der Art der Formel (4), in welchen nur h_0 und A unbekannt waren, die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurden. Waren hierbei alle in verschiedenen Nächten gewonnenen Beobachtungen eines Sternes vereinigt, so wurden nun auch die Beobachtungen verschiedener Sterne, die in einer Nacht gemacht waren, zur Ableitung der Werthe von A für einen Beobachtungsabend verwendet, indem die Grössen für die verschiedenen h_0 aus dem ersten Verfahren als bekannt herübergenommen wurden. Alle die so gefundenen Werthe für A wurden in geeigneter Weise zu einem Mittelwerth, welcher nun zur Berechnung der definitiven Extinctionsgrössen $log\, h_0 - log\, h_z$ diente, vereinigt.

Diese logarithmischen Ausdrücke für die Zunahme der Lichtstärke mit abnehmender Zenithdistanz beruhen auf den von SEIDEL und ZÖLLNER eingeführten Helligkeitslogarithmen als Intensitätsmaass. Da sich die letzteren jedoch den althergebrachten Grössenklassen gegenüber keiner sehr weiten Verbreitung zu er-

freuen haben, so sollen die folgenden Extinctionstabellen und alle späteren Angaben in Grössenklassen gemacht werden. Zur Umrechnung in diese letzteren muss man nur das Verhältniss der Helligkeiten zweier aufeinander folgender Grössenklassen kennen. Dass dieses für helle und schwache Sterne nicht das gleiche ist, wurde bereits oben nachgewiesen, doch ist die von POGSON angegebene Zahl 2·512 für ziemlich grosse Differenzen von Lichtstärken in der Praxis ausreichend und wird jetzt meist angewendet. Um also das gemessene Helligkeitsverhältniss in Grössenklassen auszudrücken, hat man dasselbe durch 2·512 zu dividiren, da eine Grössenklasse um diesen Betrag heller ist, als die folgende schwächere. Den Logarithmus eines Helligkeitsverhältnisses hat man durch $log\, 2{\cdot}512 = 0{\cdot}4000$ zu theilen. In der nachfolgenden Tafel erhält man die in Grössenklassen ausgedrückten Beträge sofort als logarithmischen Ausdruck (φz), wenn man sie mit 0·4 multiplicirt. Für Zenithdistanzen kleiner als 16° beträgt die Reduction 0·00 Grössenklassen (*mag*).

Extinctionstabelle.

Scheinbare Zenithdistanz	SEIDEL	MÜLLER		Scheinbare Zenithdistanz	SEIDEL	MÜLLER		Scheinbare Zenithdistanz	SEIDEL	MÜLLER	
	München	Potsdam	Säntis		München	Potsdam	Säntis		München	Potsdam	Säntis
15°	0·00	0·00	0·00	40°	0·04	0·06	0·04	65°	0·35	0·32	0·19
16	0·00	0·01	0·01	41	0·05	0·07	0·04	66	0·38	0·34	0·20
17	0·00	0·01	0·01	42	0·05	0·07	0·05	67	0·40	0·37	0·21
18	0·01	0·01	0·01	43	0·06	0·08	0·05	68	0·43	0·39	0·23
19	0·01	0·01	0·01	44	0·06	0·08	0·05	69	0·45	0·42	0·25
				45	0·07	0·09	0·06				
20	0·01	0·01	0·01	46	0·08	0·09	0·06	70	0·48	0·45	0·26
21	0·01	0·01	0·01	47	0·09	0·10	0·06	71	0·51	0·48	0·28
22	0·01	0·01	0·01	48	0·10	0·11	0·07	72	0·55	0·52	0·31
23	0·01	0·01	0·01	49	0·10	0·11	0·07	73	0·58	0·56	0·33
24	0·01	0·02	0·01					74	0·62	0·60	0·36
25	0·01	0·02	0·01	50	0·11	0·12	0·08	75	0·67	0·66	0·39
26	0·01	0·02	0·01	51	0·12	0·13	0·08	76	0·72	0·71	0·43
27	0·02	0·02	0·02	52	0·13	0·14	0·09	77	0·78	0·76	0·47
28	0·02	0·02	0·02	53	0·14	0·15	0·09	78	0·84	0·83	0·51
29	0·02	0·03	0·02	54	0·16	0·16	0·10	79	0·90	0·90	0·57
				55	0·17	0·17	0·10				
30	0·02	0·03	0·02	56	0·18	0·18	0·11	80	0·98	0·98	0·64
31	0·02	0·03	0·02	57	0·19	0·19	0·11	81	1·08	1·08	0·71
32	0·02	0·03	0·02	58	0·21	0·20	0·12	82	1·23	1·19	0·81
33	0·03	0·04	0·03	59	0·23	0·22	0·13	83	1·39	1·33	0·93
34	0·03	0·04	0·03					84	1·56	1·52	1·08
35	0·03	0·04	0·03	60	0·24	0·23	0·14	85	1·74	1·77	1·28
36	0·03	0·05	0·03	61	0·26	0·25	0·15	86	(1·92)	2·11	1·55
37	0·04	0·05	0·03	62	0·28	0·26	0·16	87		2·61	1·92
38	0·04	0·05	0·04	63	0·30	0·28	0·17	88		(3·41)	2·47
39	0·04	0·06	0·04	64	0·33	0·30	0·18				

Das Argument in der vorstehenden Tabelle ist die scheinbare Zenithdistanz, mit der man findet, um wie viel Grössenklassen ein Stern in der betreffenden Zenithdistanz schwächer erscheint als im Zenith, und zwar nach den verschiedenen Untersuchungen von SEIDEL und MÜLLER. Also z. B. ein Stern in 60° Zenithdistanz wird in München um 0·24, in Potsdam um 0·23 und auf dem Säntis um

0·14 Grössenklassen schwächer erscheinen, als wenn er im Zenith der betreffenden Orte stände. Unsichere Werthe sind in Klammern eingeschlossen. Die Uebereinstimmung zwischen den zu weit auseinander liegenden Zeiten und bei ganz verschiedenen Luftzuständen in München und in Potsdam gefundenen Auslöschungen in der Atmosphäre ist eine derartig gute, dass ein Einfluss der örtlichen und meteorologischen Beschaffenheiten nicht zu constatiren ist. Dagegen zeigt sich sofort, dass auf der 2500 *m* über dem Meere liegenden Säntisstation die absorbirende Kraft der Atmosphäre erheblich geringer ist, als bei den Orten in der Ebene.

Zur Vergleichung der praktischen Resultate mit den theoretischen Formeln sind besonders die Potsdamer Beobachtungen geeignet, weil sie einmal sehr zahlreich sind, und zweitens die aus denselben abgeleitete Extinctionstabelle auf ganz empirischem Wege gewonnen worden ist. Freilich müssen, um eine Gegenüberstellung der theoretischen und praktischen Werthe zu ermöglichen, aus den Beobachtungen erst gewisse Constanten für die einzelnen Formeln abgeleitet werden, so dass also dadurch die theoretischen Grössen den beobachteten in gewisser Weise angepasst sind. Die von MÜLLER aus seinen Potsdamer Messungen gefundenen Werthe für die beiden Integrale der LAMBERT'schen Formel (3) sind bereits oben angegeben; derselbe hat ferner in entsprechender Weise die für die LAPLACE'sche Gleichung (4) und den MAURER'schen Ausdruck (6) nothwendigen Grössen A aus seinen Beobachtungen bestimmt und gefunden

für die LAPLACE'sche Formel $A = 0{\cdot}835$
„ „ MAURER'sche „ $A = 0{\cdot}798$,

welche Werthe bei der Berechnung der folgenden Tabelle zu Grunde gelegt wurden. Das Argument ist wieder die scheinbare Zenithdistanz.

Scheinbare Zenith-distanz	Extinction in Grössenklassen nach:			
	Potsdamer Beobacht.	LAMBERT	LAPLACE	MAURER
0°	0·00	0·00	0·00	0·00
10	0·00	0·00	0·00	0·00
20	0·01	0·01	0·01	0·02
30	0·03	0·03	0·03	0·04
40	0·06	0·06	0·06	0·07
50	0·12	0·11	0·11	0·13
60	0·23	0·20	0·19	0·24
70	0·45	0·38	0·37	0·45
80	0·98	0·94	0·90	1·00
82	1·19	1·20	1·14	1·23
84	1·52	1·62	1·53	1·53
86	2·11	2·35	2·18	1·96
87	2·61	2·85	2·71	2·24
88	3·41	2.89	3·50	2·56

Alle diese theoretisch und praktisch ermittelten Extinctionstabellen geben nur Mittelwerthe für die Auslöschung. Die Beobachtungen von MÜLLER auf dem Säntis haben aber dargethan, dass die Extinction in der Atmosphäre von einem zum andern Tage sich nicht unbeträchtlich ändern kann, und zwar betragen die Unterschiede in der Nähe des Horizontes gelegentlich 0·4 Grössenklassen. Der Luftzustand macht sich dabei in der Weise geltend, dass bei

hohem Barometerstand und trockener Luft die Absorption der Lichtstrahlen in der Atmosphäre geringer ist, als bei niedrigem Barometerstand und grosser Feuchtigkeit.

Es sind oben die aus den Potsdamer Beobachtungen nach der LAPLACE'schen und MAURER'schen Formel hergeleiteten Werte für den Transmissionscoëfficienten A gegeben, d. h. man kann aus den verschiedenen Theorien ohne Weiteres berechnen, wie viel von der Lichtmenge 1 ausserhalb der Atmosphäre bei senkrechter Incidenz auf die Erdoberfläche gelangt. Die verschiedenen Mittelwerthe, welche die einzelnen Beobachter aus ihren Messungen abgeleitet haben, sind die folgenden

BOUGUER	0·812	PRITCHARD (in Oxford)	0·791
SEIDEL (in München)	0·794	WOLFF (in Bonn)	0·806
STAMPFER (in Wien)	0·824	MÜLLER (in Potsdam	0·825
LANGLEY (auf dem Aetna)	0·89	„ (auf dem Säntis)	0·879
PRITCHARD (in Cairo)	0·843		

Aus der guten Uebereinstimmung dieser Zahlen darf man jedoch nicht ohne weiteres schliessen, dass der betreffende Werth so genau bekannt sei, wie es danach den Anschein hat, denn es ist immer zu berücksichtigen, dass die Grössen unter Zugrundelegung gewisser Hypothesen über die Constitution der Atmosphäre ermittelt sind. Schon vor 50 Jahren hat FORBES nachzuweisen gesucht, dass die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre eine viel grössere als etwa 17% (wie im Mittel aus den obigen Zahlen folgen würde), ist. Das Gleiche hat CROVA 1876 behauptet, während in neuester Zeit (1884) LANGLEY an der Hand theoretischer und praktischer Untersuchungen zu einer ganz ähnlichen Ansicht gekommen ist. Es lässt sich nun durchaus nicht leugnen, dass die Einwände, die LANGLEY gegen die Extinctionstheorien erhebt, vielfach berechtigt sind, doch dürfen andererseits seine Beobachtungen nicht als ganz beweiskräftig angesehen werden, da sich dieselben ebenso wie die wenigen von FORBES nicht auf Licht-, sondern auf Wärmestrahlen der Sonne beziehen, und es doch noch zweifelhaft ist, ob die für diese gefundenen Verhältnisse ohne weiteres auch für jene gelten. Nach LANGLEY's Ansicht würde die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre bei senkrechter Incidenz etwa 30—40% betragen.

Aus den Beobachtungen von MÜLLER folgt ziemlich sicher, dass am Meeresniveau die Absorption des Lichtes 17%, also 0·20 Grössenklassen beträgt, während auf dem Säntis dieselbe nur noch 12%, also 0·14 Grössenklassen ausmacht, d. h. eine Luftschicht von 2500 *m* Höhe schwächt das Sternlicht um 0·06 Grössenklassen.

Bei einer Besprechung der

Helligkeitsverhältnisse der Körper im Sonnensystem

muss naturgemäss mit dem Centralkörper desselben, der allen übrigen erst Licht zusendet, der Anfang gemacht werden.

Die Sonne stellt sich dem Auge als glänzende Scheibe dar, deren Helligkeit jedoch, wie man bei sorgfältiger Prüfung sieht, keine gleichmässige ist, sondern von der Mitte nach den Rändern zu abnimmt. Die erste Zahlenangabe darüber ist von BOUGUER gemacht; wenn man den Sonnenradius sich in 100 Thle. zerlegt denkt und die Helligkeit der Sonne im Mittelpunkt gleich der Einheit setzt, so fand BOUGUER, dass die Helligkeit der Scheibe im Radius 75 nur noch 0·729 betrage. Auch SECCHI machte in dieser Beziehung einige wenig genaue Messungen,

während in neuester Zeit sehr ausführliche Beobachtungen von H. C. VOGEL angestellt wurden, deren Resultate in der folgenden Tafel zusammengestellt sind, unter Beibehaltung der für die BOUGUER'sche Messung angegebenen Zählweise für Sonnenradius und Lichtstärke.

Helligkeitsvertheilung auf der Sonnenscheibe nach H. C. VOGEL.

Abstand vom Centrum	Intensität der Strahlen im			Abstand vom Centrum	Intensität der Strahlen im		
	Roth	Grün	Violett		Roth	Grün	Violett
0	1·00	1·00	1·00	75·0	0·88	0·76	0·69
12·5	1·00	1·00	0·99	85·0	0·79	0·65	0·57
25·0	0·99	0·98	0·98	95·0	0·58	0·44	0·35
37·5	0·98	0·95	0·94	96·0	0·53	0·39	0·31
50·0	0·97	0·91	0·89	98·0	0·42	0·28	0·22
62·5	0·94	0·85	0·81	100·0	0·30	0·16	0·13

Was die Gesammthelligkeit der Sonnenscheibe anbetrifft, so ist es schwer, eine genaue Angabe darüber zu machen, da man keine künstliche Lichtquelle besitzt, die sich nur angenähert mit der Sonne an Intensität messen kann. Von verschiedenen Beobachtern ist versucht worden, das Verhältniss zwischen der Lichtstärke der Sonne und der des Vollmondes zu bestimmen. So fand SMITH, indem er die Intensität des Vollmondes der mittleren Helle des reinen Tageshimmels gleich setzte, dass die Sonne 300000 Mal heller sei als der Vollmond, ein Werth, der durch Vergleichung der betreffenden Lichtquellen mit Kerzenflammen, die BOUGUER vornahm, bestätigt wurde. WOLLASTON dagegen untersuchte die Schwärze der von beiden Himmelskörpern geworfenen Schatten und setzte danach die Helligkeit der Sonne 801072 Mal grösser als die des Vollmondes, während BOND aus seinen Vergleichungen von Sonne und Mond mit einer Bengolaflamme nur einen etwa halb so grossen Werth, nämlich 470980, ermittelte. Die genauesten Messungen rühren wohl von ZÖLLNER her, der mit zwei verschiedenen Instrumenten die Helligkeit der Mondphasen gegen die der Sonne bestimmte und, indem er aus ersteren die Lichtstärke des Vollmondes berechnete, diese 619600 Mal geringer fand als die der Sonne; aus einer einzigen direkten Vergleichung zwischen Vollmond und Sonne leitete er jedoch den kleineren Werth 542300 für das betreffende Verhältniss ab. Den auffälligen Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen glaubt er so erklären zu können, dass er für einen Theil der Mondoberfläche eine spiegelnde Reflexion annimmt. Doch dürfte sich der Widerspruch dadurch lösen, dass die Berechnung der Helligkeit des Vollmondes aus der der Phasen eine sehr unsichere ist.

Liefert schon die Vergleichung von Sonne und Vollmond sehr unsichere Werthe, so ist das in noch höherem Maasse bei der Messung von Helligkeitsdifferenzen zwischen Sonne und Planeten oder hellen Fixsternen der Fall. Die von den verschiedenen Beobachtern angegebenen Grössen finden sich in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Sonne ist

622·6	Millionen mal heller als Venus im grössten Glanz	nach BOND
3028·35	„ „ „ „ Jupiter in mittlerer Opposition	nach BOND
6994	„ „ „ „ Mars „ „ „	nach ZÖLLNER
5472	„ „ „ „ Jupiter „ „ „	nach ZÖLLNER
130980	„ „ „ „ Saturn „ „ „ ohne Ring	nach ZÖLLNER
8486000	„ „ „ „ Uranus „ „ „	nach ZÖLLNER
79620000	„ „ „ „ Neptun „ „ „	nach ZÖLLNER

20000	Millionen mal heller als Sirius (nach WOLLASTON)					
75000	„	„	„	„ Vega (nach SEIDEL)		
55760	„	„	„	„ Capella (nach ZÖLLNER)		
5970·5	„	„	„	„ Sirius		nach BOND.
24946·5	„	„	„	„ Vega		
52001	„	„	„	„ Spica		
74303·5	„	„	„	„ Fomalhaut		
18924	„	„	„	„ α Centauri		
25586	„	„	„	„ Regulus		

Gestützt auf die LANGLEY'schen Messungen der Wärmestrahlung der Sonne hat TUMLIRZ berechnet, dass die Sonne in Bezug auf Helligkeit durch 820 Quadrillionen deutscher Normalkerzen oder 1020 Quadrillionen HEFNER'sche Lichteinheiten ersetzt werden könne.' Alle die hier gegebenen Werthe sind nur als Versuche zur ungefähren Bestimmung der Helligkeit der Sonne zu betrachten, als zuverlässig ist keiner derselben anzusehen.

Die übrigen Körper des Sonnensystems erhalten alle ihr Licht von der Sonne, und indem sie dasselbe diffus reflektiren, erscheinen sie dem Beobachter auf der Erde als leuchtende Objecte, deren Helligkeit mit ihren Entfernungen von Sonne und Erde und ihren Stellungen zu den beiden wechselt, denn einmal nimmt ja die Erleuchtung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle ab, und ferner kehrt ein Planet nicht immer seine ganze, von der Sonne beleuchtete Hälfte der Erde zu, sondern nur ein in Grösse sich beständig änderndes Stück derselben. Um nun diese stets wechselnden Helligkeiten auf ein einheitliches Maass zurückzuführen, bedarf es einer auf alle im Sonnensystem vorkommenden Verhältnisse passenden Formel. Bis jetzt ist es noch nicht gelungen, einen derartigen, auf theoretischem Wege abgeleiteten Ausdruck zu finden, da das ganze Problem ein ziemlich verwickeltes ist. Es sollen hier kurz die wichtigsten der bisher aufgestellten Gleichungen angeführt werden, von denen indessen keine für alle einschlägigen praktischen Bedürfnisse ausreicht.

In der mittleren Opposition, d. h. wenn die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Planet in dieser Reihenfolge eine gerade Linie bilden und Erde und Planet ihre mittleren Abstände 1 und r_0 von der Sonne haben, setzt man den scheinbaren Radius des Planeten gleich der Einheit; dann ist der Flächeninhalt der scheinbaren Planetenscheibe gleich π. Ist nun die Entfernung des Planeten von der Erde bei anderer Constellation gleich Δ, so ist dann der scheinbare Radius der Planetenscheibe $\frac{r_0 - 1}{\Delta}$. Bezeichnet man noch den Phasenwinkel, d. h. den Winkel, den die vom Planeten nach der Sonne und der Erde gezogenen Richtungslinien mit einander einschliessen, mit α, so ist die scheinbare Fläche des von der Erde aus sichtbaren Theils der Planetenscheibe gleich $\frac{(r_0 - 1)^2}{\Delta^2} \pi \cdot cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Dieser Ausdruck gilt natürlich nicht für die beiden unteren Planeten Merkur und Venus, weil diese nicht in Opposition kommen. Für diese kann man passender Weise auf die mittlere obere Conjunction reduciren, was den obigen Ausdruck nur insofern ändern würde, als man statt $r_0 - 1$ dann $r_0 + 1$ zu setzen hätte. In den folgenden Betrachtungen soll diese Modifikation nicht weiter berücksichtigt werden. EULER hat nun den Satz aufgestellt, dass die Helligkeit eines Planeten proportional sei der scheinbaren Grösse des der Erde zugewendeten erleuchteten Theils der Planetenscheibe. Danach verhält sich die

Helligkeit bei der mittleren Opposition zu der bei den Entfernungen Δ und r des Planeten von Erde und Sonne wie

$$\frac{\pi}{r_0^2} : \frac{(r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \pi \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man nun die Helligkeit in der mittleren Opposition gleich 1, so ist die bei der zweiten Stellung des Planeten

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Diese Formel entspricht nun den thatsächlichen Verhältnissen durchaus nicht, wie durch verschiedene Beobachtungsreihen nachgewiesen ist. Es ist gar nicht darin berücksichtigt, welche Winkel die von der Sonne kommenden parallelen Lichtstrahlen und die ebenso nach der Erde reflektirten, mit dem Lothe auf einem Flächenelement des beleuchteten Planeten bilden. Diese beiden, Incidenzwinkel (i) und Emissionswinkel (ε) genannt, stehen natürlich mit dem Phasenwinkel α in Beziehung. LAMBERT hat diese beiden in die Betrachtung hineingezogen, indem er das vom Planeten auf ein Flächenelement der Erde senkrecht auffallende Licht proportional mit $\cos i \cdot \cos \varepsilon$ setzte und so zu der Formel

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \cdot \frac{\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha}{\pi} \tag{8}$$

gelangte, in welcher i und ε durch α ausgedrückt sind, und sonst alle Grössen die gleiche Bedeutung wie in Formel (7) haben. Nebenbei bemerkt hat der von LAMBERT mit v bezeichnete Phasenwinkel eine andere Bedeutung, als der hier als solcher unter der Bezeichnung α eingeführte, doch besteht zwischen beiden die einfache Beziehung $v = 180° - \alpha$. Vergleicht man hierzu die am Anfang dieses Artikels angegebene LAMBERT'sche Formel (1), welche für selbstleuchtende Körper gilt, so sieht man sofort, dass LAMBERT, indem er auch hier die Helligkeit proportional $\cos i \cdot \cos \varepsilon$ setzt, einfach ein beleuchtetes Flächenelement mit einem selbstleuchtenden vertauscht, was entschieden unrichtig ist und die obige Formel (8) ebenfalls in Widerspruch mit den Beobachtungen bringt. ZÖLLNER bleibt bei dem Irrthum LAMBERT's stehen und sucht das Unzulängliche des LAMBERT'schen Ausdrucks in der Praxis dadurch zu erklären, dass derselbe eine glatte Oberfläche des Planeten voraussetzte, was der Wirklichkeit durchaus nicht zu entsprechen brauche. Er leitet nun unter ziemlich gewagten Prämissen eine Formel ab, welche ausser den bereits erwähnten Grössen noch einen Winkel β enthält, der als Neigungswinkel der Abhänge aller Berge auf dem Himmelskörper zu definiren ist. In der ganzen Ableitung steckt noch ein mathematischer Fehler, wie SEELIGER und SEARLE nachgewiesen haben, nach dessen Correctur man die Formel

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha - 2\beta \sin \beta \sin (\alpha + \beta)] \tag{9a}$$

für Werthe von $(180° - \alpha) > 2\beta$ erhält, während, wenn $(180° - \alpha) < 2\beta$ ist, der Ausdruck

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \cdot 2 \cos \beta [\sin (\alpha + \beta) + (180° - \alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta)]. \tag{9b}$$

lautet. Für den Mond fand ZÖLLNER aus seinen Beobachtungen $\beta = 52°$ und erhielt damit eine gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. Wegen der unsicheren Grundlagen, auf denen sich die ZÖLLNER'sche Formel aufbaut, ist ihr Werth nur der einer Interpolationsformel.

Wenn man nun die in der Einleitung erwähnten LOMMEL'schen Anschauungen über die Helligkeit eines selbstleuchtenden Körpers überträgt auf einen beleuchteten Körper, wie das LOMMEL selbst gethan hat, so findet man, dass die von einem beleuchteten Flächenelement auf ein Flächenelement der Erde senkrecht auffallende Lichtmenge proportional ist dem Ausdruck

$$\frac{\cos i \cdot \cos \varepsilon}{\tau \cos i + \tau' \cos \varepsilon},$$

worin i und ε die oben definirten Incidenz- und Emissionswinkel und τ und τ' die Absorptionscoëfficienten des beleuchteten Elementes für die ausgesandten bezw. die einfallenden Lichtstrahlen sind. Bezeichnet man das Verhältniss von τ zu τ' mit $\varkappa$, so ist also

$$\frac{\cos i \cdot \cos \varepsilon}{\varkappa \cos i + \cos \varepsilon}$$

der durch α und $\varkappa$ auszudrückende Faktor der Helligkeit. Unter Beibehaltung aller früheren Bezeichnungen findet man

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \cdot \frac{1+\varkappa}{2} \left[\frac{2(1+\varkappa)}{m^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\varkappa}{m^3} \sin^2 \alpha \cdot \log nat \left(cotang \frac{\alpha - n}{2} \cdot cotang \frac{n}{2} \right) \right], \quad (10)$$

worin die beiden Hilfsgrössen m und n durch die Gleichungen

$$m \sin n = \varkappa \sin \alpha$$

$$m \cos n = 1 + \varkappa \cos \alpha$$

definirt sind. Setzt man hierin $\varkappa = 0$, so kommt man direkt auf den EULER'schen Ausdruck (7). Da in Wahrheit $\varkappa$ sehr nahe gleich der Einheit sein wird, so wird schon die Formel

$$H = \frac{r_0^2 (r_0 - 1)^2}{r^2 \Delta^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \log nat\, cotang \tfrac{1}{4}\alpha \right), \quad (11)$$

die aus (10) dadurch entstanden ist, dass $\varkappa = 1$ gesetzt wurde, vielfach statt des strengen Ausdrucks genügen.

Da nun ein Körper niemals alles Licht, welches er von aussen erhält, vollständig wieder von sich strahlen wird, so empfiehlt es sich, das Verhältniss des ausgesandten zum empfangenen Licht in die Betrachtung einzuführen. LAMBERT hat dasselbe die »Albedo« des betreffenden Körpers genannt und dieselbe definirt als das Verhältniss der von einem Flächenelement nach allen Seiten reflektirten Lichtmenge zu derjenigen, die dasselbe aus einer bestimmten Richtung empfangen hat. Hierbei ist also die Albedo von dem Incidenzwinkel abhängig, es erscheint angemessener, dafür lieber den Mittelwerth sämmtlicher vorkommender Albedos einzuführen und diesen mit dem Namen Albedo (μ) zu belegen, wie das SEELIGER gethan hat. Bezeichnet man mit γ eine von der ursprünglichen Lichtquelle abhängige Constante, so ist bei Annahme des LAMBERT'schen Grundgesetzes

$$\mu = \gamma \cdot \pi, \quad (12)$$

während nach der LOMMEL'schen Anschauung

$$\mu = \gamma \cdot \pi \left[1 + \varkappa \log \varkappa + \frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa} \log (1 + \varkappa) \right] \quad (13)$$

wird. Daraus folgt, dass für $\varkappa = 0$ sich $\mu = 2\pi\gamma$ ergiebt, während es für $\varkappa = 1$ den durch Formel (12) gegebenen Werth annimmt. Da man den Begriff der Albedo auf die Licht reflektirende Kraft des Stoffes, aus dem ein Himmelskörper besteht, bezieht, so ist klar, dass eine mit Erhebungen besetzte Oberfläche eines Planeten eine kleinere Albedo haben wird, als eine ganz glatte. Daher wird im allgemeinen die an einem Körper im Sonnensystem bestimmte »scheinbare«

Albedo kleiner sein als die »wahre« Albedo des Stoffes, aus welchem seine Oberfläche besteht. Letztere bildet den oberen Grenzwerth der ersteren. Es ist danach nicht wohl möglich, aus der beobachteten Albedo eines Gestirnes einen Rückschluss auf das Material seiner Oberfläche zu machen, so lange man die Beschaffenheit der letzteren nicht ganz genau kennt. Es empfiehlt sich daher, lieber die »relative« Albedo der Planeten zu bestimmen, d. h. die Zahl, welche angiebt, wieviel der eine Planet heller erscheinen würde, als der andere, wenn sich beide in voller Beleuchtung und der Entfernung 1 von der Sonne befänden, und ihre Abstände von der Erde so gross wären, dass beide den gleichen scheinbaren Durchmesser hätten.

Die Formeln (7) bis (13) sind für alle von der Sonne beleuchteten Körper gleichmässig gültig, doch reichen dieselben für einen nicht aus, dessen eigenthümliche Beschaffenheit eine besondere theoretische Behandlung nöthig macht, das ist der Saturn mit seinem Ringsystem. SEIDEL hat zuerst eine vollständige Theorie der Lichterscheinung des Saturn aufgestellt. Er wendet das LAMBERT'sche Gesetz auf Kugel und Ring an und denkt sich letzteren als undurchsichtige Scheibe, deren Dicke wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden kann. Der von ihm schliesslich gefundene Ausdruck ist so complicirt, dass seine Anwendung auf die Praxis äusserst umständlich wird. Ueberdies befindet sich derselbe mit den Beobachtungsergebnissen insofern im Widerspruch, als das aus denselben folgende Zunehmen der Helligkeit gegen die Opposition hin in der theoretischen Formel nicht ausgesprochen liegt. ZÖLLNER und nach ihm SEELIGER haben ferner hervorgehoben, dass die Anwendung des LAMBERT'schen Princips auf Ring und Kugel gleichmässig deshalb unzulässig sei, weil danach ein Flächenelement auf dem Ringe viel dunkler erscheinen müsste als ein solches im centralen Teile der Kugeloberfläche, was dem Augenscheine nach nicht der Fall ist, wenn auch exacte Messungen noch nicht darüber vorliegen. ZÖLLNER stellte eine andere Reductionsformel auf, die auf der Annahme beruht, dass die Helligkeit von Kugel und Ring zusammen proportional dem Flächeninhalt der ganzen von der Erde aus sichtbaren Figur ist. Wenn also H die beobachtete Helligkeit bei beliebiger Ringlage, H_0 die bei verschwundenem Ring ist, wenn ferner die scheinbare Fläche der Saturnscheibe gleich der Einheit gesetzt und der Flächeninhalt der Projection der über die Kugel hinausragenden Ringtheile mit p bezeichnet wird, so ist nach ZÖLLNER

$$H_0 : H = 1 : (1 + p), \quad \text{also} \quad H = H_0(1 + p) \tag{14}$$

Da diese Formel auf keinem photometrischen Grundprinzip beruht, und in derselben keine Rücksicht auf die Abplattung des Planeten und seinen Schattenwurf auf den Ring genommen ist, so stellt dieselbe natürlich keinen streng theoretischen Ausdruck, sondern eben nur eine Reductionsformel dar, welche mit den Beobachtungen im Grossen und Ganzen gut übereinstimmt, wenn sie auch die von der Phase abhängigen Helligkeitsschwankungen in keiner Weise darzustellen vermag. Die eingehendsten theoretischen Untersuchungen der Lichterscheinungen des Saturn und seiner Ringe rühren von SEELIGER her. Derselbe legt seinen Untersuchungen die MAXWELL-HIRN'sche Hypothese zu Grunde, nach welcher das Ringsystem aus lauter einzelnen Massentheilchen besteht. Diese kann man als kleine Kugeln ansehen, die bei der grossen Entfernung des Saturn keine merkliche Phase zeigen, sondern stets als vollbeleuchtet anzusehen sein werden; das bietet den Vortheil, dass man kein besonderes photometrisches Princip für diese Theilchen anzunehmen braucht, sondern ihre Helligkeit als constant ansehen kann. Von der Anzahl der Theilchen im Ringe und der Dicke desselben

wird dann im wesentlichen seine Helligkeit abhängen, d. h. von zwei Constanten, die willkürlich zu wählen sind. SEELIGER hat seine Theorie sowohl für die LAMBERT'schen als auch die LOMMEL'schen Grundanschauungen durchgeführt, doch sollen hier nur die auf ersteren basirten Formeln angeführt werden. Bezeichnet man mit A bez. A' die Höhe der Erde bez. Sonne über der Ebene des Ringes und mit α wieder den früher definirten Phasenwinkel, so berechnet man zunächst die Grössen

$$a = \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \frac{X_L}{M} \text{ und } b = Y_L \cos\alpha,$$

indem man die Hilfsgrössen X_L und Y_L mit dem Argument A und ferner M mit dem Argument α aus den der SEELIGER'schen Abhandlung beigegebenen Tafeln entnimmt. Dann ist, wenn man mit $y = Q_{L_{(o)}}$ die Helligkeit des Saturn bei verschwundenem Ring bezeichnet und $x = \Gamma_L' Q_{L_{(o)}}$ setzt, worin Γ_L' eine zu bestimmende Constante ist, die beobachtete Helligkeit des ganzen Systems

$$Q_B = ax + by \tag{15}$$

Die SEELIGER'sche Theorie berücksichtigt die Abplattung der Saturnskugel und den Schattenwurf auf den Ring mit aller Strenge, und da ihre Uebereinstimmung mit den Beobachtungen unter plausibeln Annahmen über die willkürlichen Constanten eine sehr gute ist, so kann damit das schwierige Problem als gelöst angesehen werden.

Ueber die Helligkeiten der Planeten und zwar sämmtlicher grosser wie einiger kleiner liegen mehr oder weniger ausgedehnte Beobachtungsreihen von SEIDEL, ZÖLLNER, PARKHURST, J. F. J. SCHMIDT und G. MÜLLER vor, von denen die des letzteren weitaus die sorgfältigsten und umfassendsten sind. Da nun die der Sonne näher stehenden grossen Planeten ziemlich beträchtliche Helligkeit erreichen, so kommt man mit der Angabe nach den gewöhnlichen Grössenklassen nicht mehr aus, man hat daher die Zählweise derselben durch Null hindurch in die negativen Werthe hinein fortgesetzt, sodass also zur 0. Grössenklasse Objecte gehören, die eine Klasse heller sind als die erster Grösse, entsprechend erhalten die Bezeichnung — 1ste — 2te etc. Grösse Gestirne, die um 2, 3 etc. Klassen heller sind als die erster Grösse.

Der Merkur ist seiner geringen Entfernung von der Sonne wegen sehr schwer zu beobachten, und die Messungen sind im allgemeinen ungenauer als bei den übrigen Planeten. Bezeichnet man mit $r_0 = 0{\cdot}38710$ die mittlere Entfernung des Merkur von der Sonne (mittlerer Abstand »Sonne — Erde« = 1), so berechnet sich die Helligkeit h desselben, die er beim Abstand r von der Sonne und Δ von der Erde hat, nach den MÜLLER'schen Beobachtungen aus der Formel

$$h = -0{\cdot}901 - 0{\cdot}02838\,(\alpha - 50) + 0{\cdot}0001023\,(\alpha - 50)^2 + \frac{1}{0{\cdot}4} \log \frac{r^2\Delta^2}{r_0^2}$$

worin die Zahlenwerthe sämmtlich in Grössenklassen ausgedrückt sind, und α denjenigen den Entfernungen r und Δ entsprechenden Phasenwinkel (nach der früheren Definition) bezeichnet, der sich aus der Formel

$$\cos\alpha = \frac{\Delta^2 + r^2 - R^2}{2r\Delta}$$

ergiebt, in der R die entsprechende Entfernung der Sonne von der Erde bedeutet. Der obige Ausdruck gilt streng genommen nur für Werthe von α, die zwischen 50° und 120° liegen. Es zeigt sich hierfür die auffällige Erscheinung, dass keine der theoretischen Formeln die Beobachtungen darstellt, sondern die

selben geben alle zu starke Helligkeiten. Aus den SCHMIDT'schen Merkur-Beobachtungen folgt, unter Beibehaltung aller Bezeichnungen, die Formel

$$h = -0{\cdot}969 + 0{\cdot}03548\,(\alpha - 50) + \frac{1}{0{\cdot}4}\,log\,\frac{r^2\,\Delta^2}{r_0^2}\,,$$

deren Uebereinstimmung in den Zahlencoëfficenten mit der obigen eine sehr gute ist, besonders wenn man berücksichtigt, dass die Beobachtungsmethode SCHMIDT's (die ARGELANDER'sche) eine total andere war als die MÜLLER's, der ein ZÖLLNER'sches Photometer verwendete.

Für den Planeten Venus ergiebt sich aus dem MÜLLER'schen Beobachtungsmaterial, wenn man die ganz gleichen Bezeichnungen wie beim Merkur benutzt und nur $r_0 = 0{\cdot}72333$ setzt, die Formel

$$h = -4{\cdot}707 + 0{\cdot}01322\,\alpha + 0{\cdot}0000004247\,\alpha^3 + \frac{1}{0{\cdot}4}\,log\,\frac{r^2\,\Delta^2}{r_0^2}\,.$$

Mit den verschiedenen theoretischen Formeln stimmt dieselbe nicht überein, denn bei den kleinen Phasenwinkeln geben jene durchschnittlich zu starke, bei den grossen Phasenwinkeln zu geringe Helligkeiten; am besten schliesst sich den Beobachtungen noch die SEELIGER'sche Theorie an. Die SEIDEL'schen und ZÖLLNER'schen Messungen werden durch die obige Formel auch in durchaus genügender Weise dargestellt. Eine besonders früher viel discutirte Frage ist die, wann die Venus in ihrem grössten Glanze erstrahlt. Die verschiedenen theoretischen Formeln geben ziemlich abweichende Werthe für die betreffende Zeitangabe. Nach der MÜLLER'schen Lichtgleichung für die Venus folgt, dass beim grössten Glanze der Phasenwinkel α zwischen 117° 4′ und 120° 8′ und die Elongation e zwischen 38° 59′ und 39° 50′ liegen kann. Danach würde der fragliche Zeitmoment 38·8 bis 32·5 Tage vor oder nach der unteren Conjunction des Planeten eintreten, und die Helligkeit der Venus dabei zwischen den Grössen — 4·16 und — 4·55 schwanken.

Beim Mars kann der Phasenwinkel α niemals den Werth von 50° überschreiten, es ist also die Ableitung einer Formel, welche die Abhängigkeit der Helligkeit von der Phase darstellt, mit grösserer Unsicherheit verknüpft als bei den inneren Planeten, da sich die Beobachtungen nur über ein viel kleineres Phasenintervall erstrecken. Bedeutet r_0 den mittleren Abstand des Mars von der Sonne zur Zeit der mittleren Opposition und behält man im übrigen die beim Merkur eingeführten Bezeichnungen bei, so ist

$$h = -1{\cdot}787 + 0{\cdot}01486\,\alpha + \frac{1}{0{\cdot}4}\,log\,\frac{r^2\,\Delta^2}{r_0^2\,(r_0 - 1)^2}\,.$$

Eine genügende Uebereinstimmung mit einer der Theorien ist hier auch nicht vorhanden, dagegen zeigt die Curve für den Mars einen ganz ähnlichen Verlauf wie die der Venus innerhalb des betreffenden Phasenintervalls. Die Beobachtungsreihen von SEIDEL und ZÖLLNER lassen sich durch die MÜLLER'sche Formel in genügender Weise darstellen. Die Helligkeit des Mars in mittlerer Opposition ist nach SEIDEL — 1·55, nach ZÖLLNER — 1·87, und nach MÜLLER — 1·79 Grössenklassen. Nach des letzteren Angaben wäre der Planet in seinem grössten Glanze — 2·7, in seinem geringsten dagegen nur 1·7 Grösse.

Der Jupiter zeigt nach den MÜLLER'schen Beobachtungen in Betreff seiner Lichtstärke keine Abhängigkeit von dem Phasenwinkel, dessen Maximalwerth 12° ist, so dass sich die Helligkeit einfach aus der Formel

$$h = -2{\cdot}233 + \frac{1}{0{\cdot}4}\,log\,\frac{r^2\,\Delta^2}{r_0^2\,(r_0 - 1)^2}$$

berechnet. Die wenigen Messungen von SEIDEL und ZÖLLNER ergeben für die Helligkeit in mittlerer Opposition die Grössen — 2·07 und — 2·33, also in guter Uebereinstimmung mit der MÜLLER'schen Zahl — 2·233. Fasst man die Beobachtungen des letzteren zu Jahresmitteln zusammen, so zeigt sich ein allmähliches Anwachsen der Helligkeit von 1878 bis Ende 1883 und dann eine Abnahme bis 1890. Es bleibt fraglich, ob diese Schwankungen — wenn überhaupt reell — durch Vorgänge in der Atmosphäre des Jupiter oder durch entsprechende Aenderungen in der Helligkeit der Sonne zu erklären sind. Für letztere Auffassung spricht der Umstand, dass bei Mars, Saturn und Uranus ähnliche Helligkeitsschwankungen, wenn auch nur schwach, angedeutet sind. Die wegen der Abplattung des Jupiter nöthige Correction der Helligkeit ist zu klein, um irgend welchen Einfluss auf die Messungen zu üben.

Saturn lässt auffälliger Weise wieder eine Abhängigkeit von dem Phasenwinkel erkennen, obgleich derselbe höchstens bis zu 7° anwächst. Daneben tritt natürlich eine Helligkeitsänderung mit der Höhe A der Erde über der Ebene des Ringes deutlich zu Tage, so dass MÜLLER aus seinen Beobachtungen die empirische Formel ableitete.

$$h = 0{\cdot}877 + 0{\cdot}0436\,\alpha - 2{\cdot}5965\,\sin A + 1{\cdot}2526\,\sin^2 A + \frac{1}{0{\cdot}4}\log\frac{r^2\Delta^2}{r_0^2(r_0-1)^2}\,.$$

Die kurzen Beobachtungsreihen von SEIDEL und ZÖLLNER liefern nach Reduction mittelst dieses Ausdrucks als Helligkeit des Saturn bei verschwindendem Ring und mittlerer Opposition die Werthe 1·04 und 0·95 Grössenklassen, also beide etwas geringer als die MÜLLER'sche Zahl 0·877. Die zahlreichen Helligkeitsschätzungen von SCHMIDT sind leider zu ungenau, um eine Abhängigkeit von der Phase erkennen zu lassen. Am besten werden dieselben durch die Formel

$$h = 1{\cdot}203 - 0{\cdot}0370 \cdot A + \frac{1}{0{\cdot}4}\log\frac{r^2\Delta^2}{r_0^2(r_0-1)^2}$$

dargestellt. Die daraus sich ergebende Reduction auf verschwundenen Ring befindet sich in ganz leidlicher Uebereinstimmung mit der aus der MÜLLER'schen Formel hergeleiteten, was insofern von besonderem Interesse ist, als die SCHMIDT-schen Beobachtungen sich auf die nördliche Seite des Ringes beziehen, die MÜLLER'schen dagegen auf die südliche; es bestände also zwischen den Reflexionsfähigkeiten der beiden Seiten kein wesentlicher Unterschied. Dass die theoretische Formel von SEELIGER mit den Beobachtungen gut übereinstimmt, ist bereits früher erwähnt.

Für den Uranus war es MÜLLER auch nicht möglich, eine Helligkeitsänderung mit der Phase nachzuweisen; nach seinen Messungen ist die Helligkeit h in Grössenklassen

$$h = 5{\cdot}863 + \frac{1}{0{\cdot}4}\log\frac{r^2\Delta^2}{r_0^2(r_0-1)^2}\,.$$

Mit den wechselnden Entfernungen von Sonne und Erde kann sich die Helligkeit des Uranus höchstens um 0·5 Grössenklassen ändern.

Beim Neptun beträgt diese eben erwähnte Helligkeitsschwankung im Maximum 0·2 Grössenklassen. Eine Einwirkung der Phase ist nicht zu constatiren. MÜLLER fand aus seinen 138 Beobachtungen

$$h = 7{\cdot}661 + \frac{1}{0{\cdot}4}\log\frac{r^2\Delta^2}{r_0^2(r_0-1)^2}\,,$$

während aus 25 PICKERING'schen Messungen

$$h = 7{\cdot}71 + \frac{1}{0{\cdot}4}\log\frac{r^2\Delta^2}{r_0^2(r_0-1)^2}$$

folgt. Eine seinerzeit von MAXWELL HALL behauptete periodische Aenderung der Helligkeit des Neptun haben die obigen Beobachtungsreihen nicht bestätigt.

MÜLLER hat aus seinen Beobachtungen noch den oben definirten Begriff der »relativen« Albedo für die grossen Planeten ausgerechnet, indem er für die Einheit des scheinbaren Halbmessers den Radius des Planeten Mars in der Entfernung 1 annahm, d. h. also die relative Albedo des Mars gleich der Einheit setzte. Rechnet man die »scheinbaren« Albedowerthe, die SEIDEL und ZÖLLNER bestimmt haben, so um, dass diejenigen des Mars gleich 1 werden, so erhält man folgende Uebersicht:

Planet	Relative Albedo nach MÜLLER	Scheinbare Albedo nach	
		SEIDEL	ZÖLLNER
Merkur . . .	0·64	—	0·43
Venus . . .	3·44	4·91	2·33
Mars . . .	1·00	1·00	1·00
Jupiter . . .	2·79	5·13	2·34
Saturn . . .	3·28	5·74	1·87
Uranus . . .	2·73	—	2·40
Neptun . .	2·36	—	1·74

Von den Planetoiden ist erst eine verhältnissmässig geringe Anzahl von PARKHURST und MÜLLER photometrisch untersucht. Bezeichnet man mit h_0 die Helligkeit eines Planetoiden in mittlerer Opposition, d. h. wenn er seinen mittleren Abstand r_0 von der Sonne hat, während die Erde sich in der Entfernung 1 von derselben befindet, so hat er bei dem Abstande r von der Sonne und Δ von der Erde, die Helligkeit

$$h = h_0 + p \cdot \alpha + \frac{1}{0{\cdot}4} \log \frac{r^2 \Delta^2}{r_0^2 (r_0 - 1)^2},$$

worin α, wie oben, den zu r und Δ gehörigen Phasenwinkel und p den sogen. Phasencoëfficienten bedeutet, d. h. die Zahl, welche in Grössenklassen angiebt, wieviel h_0 grösser wird bei der Aenderung des Phasenwinkels um 1°. Die Zusammenstellung der Planetoiden im Berliner astronomischen Jahrbuch nimmt $p = 0$ an. Die Messungen der beiden genannten Beobachter enthält die folgende Tafel, wobei nur zu bemerken ist, dass die Werthe für (56) Melete und (71) Niobe von MÜLLER aus Beobachtungen von F. TIETJEN aus dem Jahre 1861 berechnet sind.

Planetoiden		PARKHURST		MÜLLER		Berliner Jahrbuch
No.	Name	h_0	p	h_0	p	h_0
1	Ceres	7·20	0·043	6·91	0·0423	7·4
2	Pallas. . . .	7·96	0·033	7·56	0·0424	8·0
3	Juno	9·02	0·030	—	—	8·7
4	Vesta	6·02	0·019	6·01	0·0266	6·5
5	Astraea . . .	10·10	0·025	—	—	9·9
6	Hebe	9·02	0·023	8·53	0·0362	8·5
7	Iris	8·95	0·015	8·46	0·0186	8·4
8	Flora	8·80	0·029	8·93	0·0269	8·9
9	Metis . . .	—	—	8·70	0·0414	8·9
11	Parthenope . .	9·68	0·022	—	—	9·3
12	Victoria . . .	10·13	0·020	—	—	9·7
14	Irene	—	—	9·64	0·0343	9·7

Planetoiden		Parkhurst		Müller		Berliner Jahrbuch
No.	Name	h_0	p	h_0	p	h_0
15	Eunomia . .	—	—	8·86	0·0283	8·6
16	Psyche . . .	9·55	0·048	—	—	9·6
18	Melpomene . .	8·96	0·033	—	—	9·3
19	Fortuna . . .	9·96	0·100	—	—	9·8
20	Massalia . .	9·07	0·051	9·18	0·0262	9·2
21	Lutetia . . .	—	—	10·09	0·0357	10·1
23	Thalia . . .	9·81	0·080	—	—	10·5
25	Phocaea . . .	10·77	0·025	—	—	10·5
27	Euterpe . . .	9·38	0·067	—	—	9·7
28	Bellona . . .	10·87	0·010	—	—	10·1
29	Amphitrite . .	8·79	0·033	8·90	0·0246	9·0
30	Urania . . .	10·43	0·025	—	—	9·9
37	Fides . . .	9·89	(0·09)	10·41	0·0291	10·4
39	Laetitia . . .	—	—	9·67	0·0223	9·5
40	Harmonia . .	10·06	0·016	9·31	0·0182	9·2
41	Daphne . . .	—	—	11·04	0·0282	10·5
42	Isis	11·11	—	—	—	10·4
43	Ariadne . . .	10·39	0·020	—	—	10·0
44	Nysa	9·84	0·025	—	—	9·8
51	Nemausa . .	9·94	(0·06)	—	—	9·8
56	Melete . . .	—	—	10·90	0·0462	11·7
71	Niobe . . .	—	—	10·17	0·0422	10·7
75	Eurydike . .	12·61	0·030	—	—	11·6
105	Artemis . . .	10·65	0·100	—	—	11·1
110	Lydia . . .	12·28	0·000	—	—	10·5
114	Kassandra . .	10·41	(0·12)	—	—	11·1
122	Gerda . . .	10·39	0·010	—	—	11·5
127	Johanna . .	12·69	0·020	—	—	10·5
187	Lamberta . .	12·89	—	—	—	11·4
192	Nausikaa . .	10·01	0·020	9·63	0·0339	9·3
200	Dynamene . .	12·13	(0·000)	—	—	11·0
261	Prymno . . .	13·24	0·017	—	—	11.9

Die in Klammern eingeschlossenen Werthe beruhen nur auf Schätzungen. Im allgemeinen sind die vorstehenden Bestimmungen noch zu wenig zahlreich und zu unsicher, um entscheiden zu können, ob die Planetoiden in photometrischer Beziehung alle ein im wesentlichen gleiches Verhalten zeigen oder einen continuirlichen Uebergang vom Mars zum Merkur bilden.

Unter den Satelliten oder Trabanten nimmt die erste Stelle derjenige der Erde, der Mond, ein. Bei der Bestimmung der absoluten Helligkeit desselben stösst man auf ähnliche Schwierigkeiten wie bei dem gleichen Versuche an der Sonne. Ueber die Vergleiche, die zwischen der letzteren und dem Vollmonde angestellt sind, ist schon oben berichtet, sodass hier nur noch die Messungen der Helligkeitsdifferenz zwischen diesem und anderen Gestirnen nachzutragen sind. Steinheil fand den Vollmond 17510 mal heller als Arcturus, eine Zahl, die entschieden zu klein ist, da das Mondlicht bei der Beobachtung des Sternes auch wirksam war. John Herschel fand aus 11 Messungen den Mond 27408 mal heller als α Centauri, während nach Bond's Beobachtungen der Vollmond 6430 mal heller ist als der Jupiter in mittlerer Opposition. Ueber die Helligkeit der Mondphasen existiren Bestimmungen von J. Herschel, Bond und Zöllner, aus denen hervorgeht, dass

die theoretischen Formeln von EULER, LAMBERT und SEELIGER auf den Mond nicht anwendbar sind, dagegen zeigen die MÜLLER'schen Merkursbeobachtungen einen ganz ähnlichen Verlauf wie die besonders von BOND und ZÖLLNER am Monde angestellten, d. h. also die von MÜLLER für den Merkur abgeleitete empirische Formel würde auch zur Reduction der Helligkeit der Mondphasen auf die des Vollmondes dienen können, sobald man die Coëfficienten nicht als Sterngrössen, sondern als Relativzahlen auffasst. Was die scheinbare Albedo des Mondes betrifft, so liegen sichere Bestimmungen nicht vor. Aus den WOLLASTON'schen Vergleichungen zwischen Sonne und Vollmond lässt sich die scheinbare Albedo des letzteren zu 0·091 berechnen, während SEIDEL aus verschiedenen Beobachtungen 0·0303 und ZÖLLNER 0·1195 dafür fand. Die übrigen Trabanten im Sonnensystem sind auf ihre Helligkeit hin näher von PICKERING untersucht, der ihre Lichtstärken im Vergleich zu denen ihrer zugehörigen Hauptplaneten bestimmte. Setzt man für letztere die von MÜLLER bestimmten Helligkeiten in mittlerer Opposition ein, so erhält man die Lichtintensitäten der Trabanten in Grössenklassen für die mittlere Opposition des jeweiligen Hauptplaneten ausgedrückt. Danach ist von den Marssatelliten Deimos 13·07 ter und Phobos 12·77 ter Grösse. Für die vier äusseren Jupitermonde liegen ausser den PICKERING'schen noch Messungen von AUWERS und ENGELMANN vor, danach sind die Grössen derselben

Trabant	Messungen von		
	AUWERS	ENGELMANN	PICKERING
I	6·43	5·52	5·90
II	6·59	5·70	6·04
III	5·87	5·32	5·53
IV	6·76	6·28	6·66

Nimmt man die scheinbare Albedo des Jupiter zu 0·610 an, so ergiebt sich für

Trabant	Scheinbare Albedo nach	
	ENGELMANN	PICKERING
I	0·2203	0·3975
II	0·2665	0·4936
III	0·1376	0·2763
IV	0·0792	0·1404

Die Satelliten des Saturn haben nach PICKERING folgende Grössen:

Mimas	12·79	Rhea	10·76
Enceladus	12·28	Titan	9·38
Thetys	11·34	Hyperion	13·69
Dione	11·45	Japetus	11·68

Die stärksten Lichtschwankungen bei seinem Umlauf zeigt Japetus, westlich vom Saturn hat er seine Maximalgrösse, nämlich 11·32, und östlich das Minimum seiner Helligkeit, nämlich 12·68. Von den Monden des Uranus konnte PICKERING nur die beiden äusseren messen, und zwar fand er Titania 14·65 ter und Oberon 14·81 ter Grösse, während er den Neptunstrabant als 13·59 ter Grösse bestimmte. Alle die hier gegebenen Helligkeitsangaben sind nur Mittelwerthe, die einmal mit der Entfernung des Hauptplaneten von Sonne und Erde Aenderungen erfahren, dann aber auch während eines Umlaufs des Trabanten vielfach solche zeigen, wie das am stärksten bei Japetus zu Tage tritt, und auch besonders an den Jupiterstrabanten leicht zu sehen ist. Von diesen zeigt der IV. einen ziemlich regelmässigen, die drei anderen einen merkwürdig unregelmässigen Lichtwechsel.

Es ist bereits oben erwähnt, dass man seit Alters her für die Eintheilung der

Helligkeiten der Fixsterne,

soweit diese mit blossem Auge sichtbar sind, sechs Grössenklassen aufgestellt und diese Klassifizirung in der Neuzeit auch auf die teleskopischen Sterne ausgedehnt hat. Früher schenkte man jedoch den Helligkeiten der Sterne weit weniger Beachtung als jetzt, und so wurden dieselben nicht besonders aufgeführt, sondern nur gelegentlich der Katalogisirung der Fixsternörter mit angegeben. Der älteste auf uns gekommene derartige Sternkatalog ist der von PTOLEMÄUS im 7. Buche seines »Almagest« veröffentlichte. Derselbe umfasst die Oerter von 1028 Sternen für das Jahr 138 n. Chr. und unterscheidet in Bezug auf deren Helligkeit 6 Grössenklassen; Sterne, die nicht genau in eine solche passen, werden entweder als heller (μείζων) oder als schwächer (ἐλάσσων) als eine bestimmte Grösse bezeichnet. Der Perser ABD-AL-RAHMAN AL-SÛFI überarbeitete den PTOLEMÄI'schen Katalog, indem er die Oerter in demselben auf seine Epoche (964 n. Chr.) reducirte, einige neue hinzufügte und durch eigene Beobachtungen alle angeführten Helligkeiten revidirte. Auch er nimmt 6 Grössenklassen an und unterscheidet durch Beschreibung gelegentlich bis zu drei Zwischenstufen. Die späteren Kataloge nehmen auf die Lichtstärken der Sterne keine besondere Rücksicht. Erst WILHELM HERSCHEL fing systematische Helligkeitsschätzungen an und legte die gewonnenen Resultate in sechs Verzeichnissen nieder, von denen vier in den Philosophical Transactions der Jahre 1796—1799 veröffentlicht sind, während die beiden übrigen nur im Manuskript vorliegen. Sein Sohn setzte am Kap der guten Hoffnung diese Beobachtungen an Sternen des südlichen Himmels fort. Helligkeitsschätzungen nach ganzen und halben Grössenlassen und Beschreibungen der zwischenliegenden Werthe nahm WILHELM STRUVE gelegentlich seiner Doppelsternmessungen vor, deren Resultate er unter dem Titel »Mensurae micrometricae« 1837 publicirte; in dem von der Dunechter Sternwarte herausgegebenen Doppelsternkatalog sind die STRUVE'schen Helligkeitsangaben in ganze Grössenklassen und Zehntel derselben umgerechnet ARGELANDER veröffentlichte 1843 unter dem Namen »Uranometria nova« eine Karte des in nördlichen Breiten sichtbaren Theiles des Himmelsgewölbes, die 3256 Objecte umfasst, deren Helligkeit mit blossem Auge nach 6 Grössenklassen eingeschätzt sind. In ganz analoger Weise verfuhr HEIS bei seinem »Atlas coelestis novus« (1872), der im Wesentlichen eine Wiederholung der ARGELANDER-schen Arbeit ist, nur sah HEIS etwas mehr Sterne mit blossem Auge, sodass seine Karten 5354 Objecte umfassen. Was diese beiden Arbeiten für die nördliche, das leistet der 1874 erschienene »Atlas des südlichen gestirnten Himmels« von BEHRMANN für die südliche Hemisphäre. Weit umfassender als die bisher aufgeführten Kataloge ist die sogen. »Bonner Durchmusterung des nördlichen Himmels«, welche die Helligkeiten und Oerter von 324189 Sternen bis zur 10. Grösse aufführt, die hauptsächlich von ARGELANDER und SCHÖNFELD beobachtet wurden. Gleichsam eine Vereinigung der oben erwähnten Arbeiten von ARGELANDER, HEIS und BEHRMANN bildet die von HOUZEAU im Jahre 1878 erschienene »Uranométrie générale«, welche alle am ganzen Himmel mit blossem Auge sichtbaren Sterne enthält, deren Lichtstärken vom Beobachter nach einer halbgradigen Scala eingeschätzt wurden. Nur die auf der südlichen Hemisphäre mit blossem Auge sichtbaren Sterne enthält die von GOULD 1879 veröffentlichte »Uranometria Argentina«. Bei der grossen Klarheit des südlichen Himmels war es ihm möglich, noch Sterne siebenter Grösse mit blossem Auge wahrzunehmen, sodass er im Ganzen 6694 Objective in seine Karten eintragen konnte.

Damit ist die Zahl der Kataloge, die selbständige Schätzungen von Sternhelligkeiten enthalten, aber nicht ausschliesslich dafür aufgestellt sind, erschöpft, und es folgen nun diejenigen, welche auf genaue photometrische Messungen beruhende Angaben über Lichtstärken von Fixsternen aufführen. Hier sind zuerst die SEIDEL'schen Messungen an 208 Fixsternen zu erwähnen, die derselbe mit dem STEINHEIL'schen Prismenphotometer anstellte und in den Denkschriften der Königlich bayrischen Akademie der Wissenschaft 1861 veröffentlichte. Dann folgen zwei Arbeiten von WOLFF (»Photometrische Beobachtungen an Fixsternen«), welcher die Lichtstärken von 1130 Sternen mit einem ZÖLLNER'schen Photometer bestimmte. Mit einem Instrumente gleicher Art maass PEIRCE in den Jahren 1872 bis 1875 die Helligkeiten von 494 Sternen, während PICKERING mit seinem früher beschriebenen Meridianphotometer 4260 Sterne untersuchte und deren Lichtstärken unter dem Titel »Harvard Photometry« 1884 veröffentlichte, welchem Katalog er 1890 einen zweiten folgen liess, der eine grosse, aber beliebige Anzahl von Sternen aller Helligkeiten enthält, die möglichst gleichmässig über den ganzen nördlichen Himmel vertheilt sind zum Zwecke einer »Photometric revision of the Durchmusterung«. Im Jahre 1885 publicirte PRITCHARD in seiner »Uranometria nova Oxoniensis« die Lichtstärken von 2784 Sternen, die er mit dem oben besprochenen Keilphotometer untersucht hatte. Kleinere Arbeiten von CERASKI, ROSÉN, LINDEMANN und G. MÜLLER, welche alle sich ZÖLLNER'scher Photometer bedienten, seien hier nur kurz aufgeführt. Das neueste und umfassendste Unternehmen auf diesem Gebiete ist leider zur Zeit noch nicht vollendet. Es ist die bereits oben flüchtig erwähnte »Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels, enthaltend alle Sterne der B. D. bis zur Grösse 7·5«, die in Potsdam von G. MÜLLER und P. KEMPF begonnen und bisher für die Zone von 0° bis + 20° Deklination durchgeführt ist.

Um sich ein Urtheil über die Zuverlässigkeit der zuletzt erwähnten Kataloge bilden zu können, mögen hier folgende Angaben Platz finden. Die beiden PICKERING'schen Arbeiten sind mit dem früher beschriebenen Meridianphotometer ausgeführt, während PRITCHARD sein Keilphotometer benutzte, und in Potsdam zwei ZÖLLNER'sche Photometer WANSCHAFF'scher Construction zur Verwendung kamen. In der »Harvard Photometry« ist jeder Stern mindestens an drei Abenden beobachtet worden, mancher jedoch viel häufiger. Bei Sternen, die nur dreimal gemessen waren, wurden Unterschiede bis zu 0·9 Grössenklassen zwischen den einzelnen Beobachtungen für zulässig erachtet und nur bei grösseren Abweichungen Revisionsmessungen gemacht; danach stellt sich im Durchschnitt der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung auf ± 0·15 Grössenklassen, derjenige einer im Katalog angegebenen Sternhelligkeit auf ± 0·075 Grössenklassen. Bei der »Photometric Revision« ist jeder Stern durchschnittlich nur zweimal beobachtet, dabei sind aber nur Unterschiede bis 0·6 Grössenklassen als erlaubt angesehen, sodass der wahrscheinliche Fehler einer Kataloghelligkeit bis zu ± 0·20 Grössenklassen anwachsen kann. In der »Uranometria nova Oxoniensis« scheinen die einzelnen Beobachtungen erheblich genauer zu sein als bei PICKERING, aber dafür sind weitaus die meisten Sterne nur einmal beobachtet, sodass sich kein strenges Urtheil gewinnen lässt. Dazu kommt, dass die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre nicht genau genug beobachtet ist, ja dass die deshalb nothwendige Correction vielfach gar nicht angebracht wurde, angeblich weil ihr Einfluss zu gering war, selbst wenn er wie in einzelnen Fällen 0·05 bis 0·06 Grössenklassen betrug. Die durchschnittliche Zuverlässigkeit dieses Katalogs dürfte daher geringer sein, als die der PICKERING'schen Beobachtungen. In

Potsdam endlich ist jeder Stern im Allgemeinen nur an zwei Abenden beobachtet, und nur wenn die beiden Messungen um mehr als 0·3 Grössenklassen von einander abwichen, wurden Revisionsbeobachtungen angestellt, was nur bei 126 unter den 3522 Sternen der bisher publicirten Zone nöthig war. Die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre wurde mit aller Strenge berücksichtigt, und der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung stellt sich auf ± 0·057, der einer Kataloghelligkeit auf ± 0·040 Grössenklassen. Somit ist der Potsdamer Katalog den vorher besprochenen an Genauigkeit weit überlegen; am nächsten kommt ihm noch die »Harvard Photometry«, während die »Photometric revision« hinter dieser wiederum etwas zurücksteht; am ungenauesten endlich dürften die PRITCHARD'schen Angaben sein.

Um diese neuesten Kataloge mit den Helligkeitsschätzungen der »Bonner Durchmusterung« und untereinander in Bezug darauf zu vergleichen, welche systematischen Unterschiede zwischen den Helligkeitsangaben der einzelnen bestehen, sollen hier die Potsdamer Messungen als die genauesten zu Grunde gelegt werden, wenn auch in Folge der erst theilweisen Fertigstellung der letzteren die Zahl der in den einzelnen Katalogen vorkommenden Sterne, die auch in Potsdam beobachtet sind, verhältnissmässig noch gering ist. In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne die Helligkeitsgrenzen, auf welche sich die Vergleichungen in der betreffenden Horizontalreihe beziehen. Die vier folgenden Columnen tragen die Bezeichnungen der vier mit den Potsdamer Messungen verglichenen Kataloge; jede dieser Columnen zerfällt in zwei Unterabtheilungen, von denen die erste unter der Ueberschrift »Zahl« die Anzahl der verglichenen Sterne, die zweite mit der Bezeichnung »Differenz« den Helligkeitsunterschied zwischen den Grössenangaben des betreffenden Kataloges und den Potsdamer Resultaten enthält, und zwar mit dem Vorzeichen, welches man durch Subtraction der Kataloghelligkeit von dem in Potsdam gefundenen Werthe bekommt. Ein positives Vorzeichen deutet also an, dass der Stern in Potsdam schwächer gefunden wurde als nach dem anderen Katalog. In der letzten Reihe stehen die Summen der verglichenen Sterne und die arithmetischen Mittel aus den gefundenen Differenzen.

Helligkeit der Sterne	BONNER Durchmusterung		HARVARD Photometry		Photometric revision		Uranometria Oxoniensis	
	Zahl	Differenz	Zahl	Differenz	Zahl	Differenz	Zahl	Differenz
Heller als 1·50	} 9	} +0·55	5	+0·24	1	—0·35	5	+0·19
1·50—1·99			1	+0·20			1	+0·27
2·00—2·49			4	+0·36			7	+0·50
2·50—2·99			6	+0·27			4	+0·24
3·00—3·49	21	+0·42	11	+0·16	1	+0·33	12	+0·22
3·50—3·99	26	+0·36	41	+0·16	3	+0·13	38	+0·24
4·00—4·49	42	+0·19	54	+0·16	4	+0·04	47	+0·14
4·50—4·99	45	+0·08	75	+0·13	4	+0·08	55	+0·08
5·00—5·49	108	+0·04	162	+0·20	14	+0·27	157	+0·12
5·50—5·99	167	− 0·06	253	+0·19	72	+0·21	195	+0·11
6·00—6·49	327	+0·01	150	+0·13	145	+0·16	149	+0·11
6·50—6·99	658	+0·06			262	+0·13		
6·50—7·02			29	+0·13				
6·50—7·13							21	+0·15
7·00—7·49	1252	+0·02			205	+0·10		
7·50—7·99	680	—0·03			77	+0·06		
8·00—8·50					13	—0·08		
Zusammen	3335	+0·02	791	+0·17	801	+0·13	691	+0·13

Man ersieht daraus, dass das Potsdamer System sich am meisten den Helligkeiten der »Bonner Durchmusterung« anschliesst, was auch in der Absicht der Beobachter lag, wie bereits früher angegeben ist. Bis zur 4·4ten Grösse zeigt sich zwischen diesen beiden Katalogen eine etwas grössere Differenz, doch ist diese bei der geringen Anzahl der hier möglichen Vergleichungen wohl wenig verbürgt. Zwischen den Potsdamer und den anderen Helligkeitsmessungen besteht eine ziemlich constante Differenz, deren angedeutete Veränderlichkeit mit der Grössenklasse bei der kleinen Zahl der hellen Sterne nicht sehr zuverlässig erscheint. Ganz instruktiv ist auch eine Vergleichung der verschiedenen Kataloge, wenn man die Sterne nach den Farben gruppirt, wie sie die folgende Tabelle zeigt. Dabei sind die beiden PICKERING'schen Kataloge nicht getrennt, und die Differenzen im gleichen Sinne wie in der obigen Tafel gebildet.

Farbe	Bonner Durchmustg. Differenz	PICKERING Differenz	PRITCHARD Differenz
Weiss . . .	+0·09	+0·29	+0·24
Gelbweiss . .	+0·08	+0·23	+0·20
Weissgelb . .	−0·02	+0·07	+0·06
Gelb . . .	−0·09	−0·03	−0·05
Rothgelb-Roth.	−0·16	−0·13	−0·15

Daraus ergiebt sich, dass PICKERING und PRITCHARD die rothgelben bis rothen Sterne um etwa 0·14 Grössenklassen schwächer gemessen haben, als dies in Potsdam geschah, die weissen dagegen um etwa 0·27 heller, während diese letztere Differenz zwischen Potsdam und Bonn viel geringer ist. Im Allgemeinen ändert sich also der Unterschied zwischen den Messungen von PICKERING und PRITCHARD einerseits und Potsdam andererseits mit den Farben der Sterne um rund 0·40 Grössenklassen; die entsprechende Aenderung zwischen Bonn und Potsdam beträgt nur 0·25 Sterngrössen.

Der Potsdamer Katalog würde sich seiner grossen Zuverlässigkeit wegen besonders als Vergleichsmaassstab für die übrigen Bestimmungen von Sternhelligkeiten eignen, da er aber bisher nur einen Gürtel von 20 Grad Breite am Himmel umfasst, so dürften sich in ihm nicht genug Vergleichsobjekte finden für diejenigen Kataloge, die eine ganze Hemisphäre umfassen. Nun ist aber von den übrigen eben besprochenen Katalogen die »Harvard Photometry« noch die genaueste und umfassendste, und so eignet sie sich besonders dazu, um einmal zu ermitteln, welchen Grössenklassen und Zehnteln derselben die Helligkeits*schätzungen* der verschiedenen Beobachter entsprechen, und um zweitens die an verschiedenen Instrumenten erlangten Helligkeits*messungen* untereinander zu vergleichen. In der folgenden Tabelle sind in den mit den Namen der Beobachter überschriebenen sechs Columnen diejenigen Sterngrössen angegeben, welche nach PICKERING's Messungen den in derselben Horizontalreihe unter der Bezeichnung »Grösse« in der ersten Columne stehenden Angaben der einzelnen Autoren entsprechen. Es bezeichnet also z. B. als 4ter Grösse PTOLEMÄUS Sterne, die in Wahrheit 4·4ter Grösse sind, AL-SÛFI solche, die in Wirklichkeit die Helligkeit 4·2 haben u. s. w. Die Zwischenstufen zwischen den einzelnen Grössenklassen sind in der ersten Columne durch die beiden Ziffern der einschliessenden gekennzeichnet, und zwar ist diejenige Klasse vorausgestellt, der sich die Helligkeit am meisten annähert. So bedeuten z. B. die Angaben 2—3 und 3—2 Hellig-

keitsstufen, die beide zwischen der 2ten und 3ten Grössenklasse liegen, von denen aber die erstere heller ist als die letztere.

Grösse	Ptolemäus	Al-Sûfi	Argelander	Heis	Behrmann	Houzeau
1	0·5	0·6	0·3	0·3	—	0·5
1—2	1·2	1·1	1·2	1·2	—	1·4
2—1	1·2	1·3	1·5	1·5	—	
2	2·1	2·0	2·2	2·2	1·8	2·0
2—3	2·6	2·5	2·5	2·5	2·2	2·5
3—2	2·7	2·6	2·7	2·8	2·6	
3	3·3	3·2	3·2	3·2	3·0	3·0
3—4	3·8	3·6	3·4	3·5	3·2	3·5
4—3	3·8	3·8	3·7	3·7	3·6	
4	4·4	4·2	4·1	4·1	3·9	4·0
4—5	4·6	4·5	4·4	4·4	4·1	4·4
5—4	4·7	4·6	4·6	4·6	4·4	
5	5·0	4·9	5·0	5·0	4·7	4·9
5—6	—	5·0	5·2	5·2	5·0	5·3
6—5	—	5·1	5·4	5·6	5·5	
6	5·4	5·3	5·8	5·8	6·0	5·7
6—7	—	5·6	—	6·1	—	6·1
7	—	—	—	—	—	6·4

Die nächste Tafel enthält eine ganz ebensolche Vergleichung von drei weiteren Katalogen mit den Pickering'schen Messungen, nur dass hierbei die in den Katalogen gewählten Bezeichnungen nach Zehnteln von Grössenklassen fortschreiten und so in der ersten Columne unter »Grösse« angegeben sind. Dabei ist für Struve die Dunechter Bearbeitung der *Mensurae micrometricae* genommen.

Grösse	Struve	Bonner Durchmusterung	Gould	Grösse	Struve	Bonner Durchmusterung	Gould	Grösse	Struve	Bonner Durchmusterung	Gould
1·0	0·6	0·3	0·7	3·1	3·5	3·3	3·2	5·2	5·4	5·2	4·9
1·1	—	1·0	0·8	3·2	3·6	3·4	3·3	5·3	5·4	5·2	5·0
1·2	—	1·1	0·9	3·3	3·7	3·5	3·4	5·4	5·5	5·3	5·1
1·3	—	1·3	—	3·4	3·8	3·6	3·5	5·5	5·6	5·4	5·2
1·4	—	—	1·2	3·5	3·9	3·7	3·6	5·6	5·7	5·5	5·3
1·5	1·4	1·5	1·3	3·6	4·0	3·8	3·7	5·7	5·8	5·6	5·4
1·6	1·5	—	—	3·7	4·1	3·9	3·8	5·8	5·8	5·6	5·6
1·7	—	1·7	1·6	3·8	4·2	3·9	3·9	5·9	5·9	5·7	5·7
1·8	—	—	1·7	3·9	4·3	4·0	4·0	6·0	6·0	5·8	5·8
1·9	—	—	—	4·0	4·4	4·1	4·1	6·1	6·1	5·9	5·9
2·0	2·1	2·1	2·0	4·1	4·5	4·2	4·2	6·2	6·2	6·0	6·0
2·1	2·2	2·2	2·1	4·2	4·6	4·3	4·2	6·3	6·3	6·1	6·1
2·2	2·4	2·3	2·2	4·3	4·6	4·3	4·3	6·4	6·4	6·2	6·2
2·3	2·5	2·5	2·3	4·4	4·7	4·4	4·4	6·5	6·5	6·3	6·3
2·4	2·7	2·6	2·5	4·5	4·8	4·5	4·4	6·6	6·6	6·4	6·4
2·5	2·8	2·7	2·6	4·6	4·9	4·6	4·5	6·7	6·7	6·5	6·5
2·6	2·9	2·8	2·7	4·7	5·0	4·7	4·6	6·8	6·8	6·6	6·6
2·7	3·0	2·9	2·8	4·8	5·0	4·8	4·7	6·9	6·9	6·7	6·7
2·8	3·2	3·0	2·9	4·9	5·1	4·9	4·7	7·0	7·0	6·8	6·8
2·9	3·3	3·1	3·0	5·0	5·2	5·0	4·8	7·1	7·1	6·9	6·9
3·0	3·4	3·2	3·1	5·1	5·3	5·1	4·9	7·2	7·2	7·0	—

Die folgende kleine Tabelle giebt eine Vergleichung der photometrischen Messungen verschiedener Beobachter mit denen von PICKERING. In der ersten Columne sind die Grenzen angegeben, innerhalb deren sich die Lichtstärken derjenigen Sterne halten, welche zur Ableitung der auf derselben Horizontalreihe stehenden Differenzen gedient haben. Diese letzteren wurden so gewonnen, dass die Messungen eines Beobachters von denen PICKERING's abgezogen wurden, sodass also ein $\left(\begin{array}{c}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{array}\right)$ Vorzeichen bedeutet, dass PICKERING innerhalb der betreffenden Grenzen die Sterne $\left(\begin{array}{c}\text{schwächer}\\ \text{heller}\end{array}\right)$ maass, als der in der Ueberschrift der betreffenden Columnen angegebene Beobachter. Alle Angaben der Tafel sind wie bei den obigen in Grössenklassen gemacht, nur die in Klammern hinter einige Werthe gesetzten Zahlen bedeuten die Anzahl der verglichenen Beobachtungen, welche angeführt wird, sobald sie besonders gering und damit die abgeleitete Differenz unsicher ist.

Grenzen	SEIDEL	WOLFF	PEIRCE
—1·4 bis 0·9	+ 0·06	+ 0·10	— 0·20 (1)
1·0 „ 1·9	+ 0·09	+ 0·29	+ 0·10 (2)
2·0 „ 2·9	— 0·10	+ 0·46	— 0·07
3·0 „ 3·9	— 0·12	+ 0·56	+ 0·05
4·0 „ 4·9	— 0·07	+ 0·72	+ 0·11
5·0 „ 5·9	— 0·73 (3)	+ 0·90	+ 0·12
6·0 „ 6·9	—	+ 1·50 (1)	+ 0·07
7·0 „ 7·9	—	—	— 0·38 (5)

Bei den Einschätzungen der teleskopischen Sterne nach Grössenklassen ist man durchaus nicht consequent vorgegangen, sodass jetzt nach den Annahmen von JOHN HERSCHEL, WILHELM STRUVE und ARGELANDER drei verschiedene Scalen vorhanden sind, von denen die der beiden letzten Beobachter sich nur wenig voneinander unterscheiden und besonders in Russland, Deutschland und Nordamerika im Gebrauch sind, während die sehr abweichenden Annahmen von J. HERSCHEL hauptsächlich in England benutzt werden. Im Folgenden ist eine angenäherte Vergleichung der drei Scalen von Sterngrössen gegeben.

HERSCHEL	STRUVE	ARGELANDER	HERSCHEL	STRUVE	ARGELANDER
7	6·3	6·4	13	10·6	11·0
8	7·2	7·4	14	10·8	(11·6)
9	8·1	8·4	15	11·0	(12·2)
10	8·8	9·2	16	11·2	(12·6)
11	9·6	9·8	⋮	⋮	⋮
12	10·2	10·4	20	12·0	(13—14)

Einen Ueberblick über die Anzahl der Sterne in den verschiedenen Grössenklassen kann man sich durch Auszählung der verschiedenen Sternkataloge verschaffen. Eine solche Auszählung der Bonner Durchmusterung sei hier mitgetheilt; sie giebt die Anzahl der Sterne bis zur 9·5 ten Grössenklasse nördlich Aequator, wobei allerdings die Angabe bei der Grösse 9·5 ziemlich ungenau ist, da vom ARGELANDER auch vielfach schwächere Sterne mit beobachtet hat.

Grösse	Anzahl	Grösse	Anzahl
1·0 bis 1·5	8	5·6 bis 6·5	3002
1·6 „ 2·5	35	6·6 „ 7·5	9955
2·6 „ 3·5	99	7·6 „ 8·5	34169
3·6 „ 4·5	230	8·6 „ 9·4	120451
4·6 „ 5·5	748	9·5	111276

Es ist nun bereits oben bei Besprechung der Extinction des Lichtes in der Atmosphäre erwähnt, dass das Verhältniss der Helligkeiten zweier aufeinanderfolgender Grössenklassen 2·512 ist, und wenn diese Zahl auch sicherlich noch der Bestätigung oder Verbesserung bedarf, so ist sie doch für viele praktische Fälle ausreichend. Setzt man die Lichtstärke eines Sternes erster Grösse gleich der Einheit, so wäre also die Helligkeit eines Sternes

1. Grösse = 1·0000		6. Grösse = 0·0100
2. „ = 0·3981		7. „ = 0·0040
3. „ = 0 1585		8. „ = 0·0016
4. „ = 0·0631		9. „ = 0·0006
5. „ = 0·0251		10. „ = 0·0003

Es mag hier mit angeführt werden, dass Tumlirz auf ähnlichem theoretischen Wege wie früher das Aequivalent für das Sonnenlicht, auch das für das Sternlicht bestimmt und gefunden hat, dass ein Stern 6. Grösse so hell erscheint, wie eine deutsche Normalkerze in einer Entfernung von 12 Kilometern. Man kann nun auch die Anzahl Sterne einer beliebigen Grössenklasse (m) bestimmen, die nothwendig wären, um zusammen die Helligkeit eines Sternes erster Grösse zu erreichen, dieser Werth ergiebt sich nämlich aus dem Ausdruck $(2·512)^{m-1}$. Setzt man z. B. für m die Zahl 10 ein, so findet man, dass erst 3983 Sterne 10. Grösse im Stande sind, die Lichstärke eines Sternes 1. Grösse zu ersetzen. Gestützt auf diese Werthe und die Zahl der Sterne in den verschiedenen Grössenklassen findet man, dass die Gesammthelligkeit aller Sterne einer Hemisphäre, d. h. die Lichtmenge, die ein Ort auf der Erde von allen über seinem Horizont befindlichen Gestirnen (Planeten ausgenommen) in einer mondlosen Nacht empfängt, etwa der hundertste Theil der Helligkeit ist, die er durch den Vollmond erhalten würde.

Alle die hier gemachten Angaben über die Anzahl der Sterne verschiedener Grösse und die von ihnen ausgestrahlte Lichtmenge sind natürlich nur so lange gültig, als die Helligkeit der einzelnen Sterne keinen Schwankungen unterworfen ist. Nun darf man aber die Lichtstärke derselben keineswegs als unveränderlich annehmen, und wenn auch die Ansicht Gould's, dass die meisten Sterne ihre Helligkeit wechselten, und dass nur die photometrischen Messungsmethoden vielfach nicht fein genug seien, um dies zu constatiren, eben nur eine Vermuthung ist, so kennt man doch bis jetzt etwa 250 Sterne, deren Lichtstärke periodischen Schwankungen unterworfen ist und die man daher als

Veränderliche Sterne

bezeichnet. Die Auffindung der meisten derselben und die systematische Verfolgung ihrer wechselnden Lichterscheinungen gehört erst dem 19. Jahrhundert an, wenn auch einige besonders auffällige schon früher entdeckt und beobachtet wurden. Die Mannigfaltigkeit des Lichtwechsels ist nun sowohl in Bezug auf die Dauer der periodischen Wiederkehr wie auch auf die Stärke desselben bei den verschiedenen Veränderlichen eine so ausserordentlich grosse, dass es

schwierig ist, eine Eintheilung auf diesem Gebiete behufs Erlangung einer besseren Uebersicht vorzunehmen. Die einigermaassen sicher bestimmten Perioden schwanken zwischen acht Stunden und zwei Jahren, und die Stärke des Lichtwechsels zwischen 0·4 und 8·0 Grössenklassen. Eine strenge Sichtung ist nur durch Aufstellung eines Katalogs zu erlangen, eine Arbeit, der sich zuerst SCHÖNFELD (1866) unterzog, die aber mehrfach in Folge von Neuentdeckungen wiederholt werden musste, und zwar zunächst von diesem selbst noch zweimal. Dann stellte GORE nacheinander drei Kataloge auf, die alle in den »Proceedings of the Royal Irish Academy« (Ser. II, Vol. IV., und Ser III, Vol. I.) abgedruckt sind. Endlich sind noch die ausführlichen Kataloge von CHANDLER zu erwähnen, die 1888 und 1893 im »Astronomical Journal« erschienen sind und die bei den folgenden Angaben zu Grunde gelegt wurden. Die Zeiten, an denen die wichtigsten Veränderlichen die Maxima und Minima ihrer Helligkeit erreichen, werden — soweit sie sich im Voraus bestimmen lassen — alljährlich in der »Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft« für das folgende Jahr angegeben. Was die Nomenclatur der Veränderlichen betrifft, so werden alle diejenigen, welche nicht schon anderweitige Bezeichnungen von früher her besitzen, nach dem Sternbild genannt, in welchem sie stehen, unter Vorsetzung eines der neun grossen lateinischen Buchstaben R bis Z. Werden in einem Sternbild mehr als neun bisher unbenannte Sterne als veränderlich erkannt, so erhält der zehnte die Buchstaben RR, der elfte RS u. s. w., dann der neunzehnte SS, der zwanzigste ST etc.

Bei der Ableitung der Perioden des Lichtwechsels aus den Beobachtungen ist für diejenigen Veränderlichen, bei welchen die Helligkeitsschwankungen schnell vor sich gehen, zu berücksichtigen, dass die Erde bei ihrem Laufe um die Sonne dem betreffenden Sterne bald näher, bald ferner steht, dass also das Licht bald kürzere, bald längere Zeit braucht, um auf die Erde zu gelangen. Dadurch wird z. B. das Eintreten des Minimums der Helligkeit bald früher, bald später beobachtet, als wenn die Erde sich in Ruhe befände. Ehe man daher bei solchen Veränderlichen mit schnellem Lichtwechsel an die Ableitung der Periode geht, reducirt man die Beobachtungszeiten so, dass sie denjenigen entsprechen, welche man notiren würde, wenn man vom Mittelpunkt der Sonne aus beobachtete. Ebenso giebt man dann auch bei Vorausberechnungen der Minima dieser variabeln Sterne die heliocentrischen Werthe an. Die Reduction der Zeiten auf den Sonnenmittelpunkt kann übrigens höchstens $8^m\,20^s$ betragen.

Um nun eine gewisse Planmässigkeit bei der nachfolgenden Besprechung der Veränderlichkeit einzuhalten, seien hier die vier von PICKERING aufgestellten Klassen zu Grunde gelegt, obgleich dieselben keineswegs scharf untereinander abgegrenzt sind, noch alle Veränderlichen zu umfassen vermögen. Die Klassen sind nach ihren wichtigsten Vertretern genannt, die für dieselben im grossen und ganzen typisch sind, und man hat danach den Algol-, Lyra-, Mira- und Orion-Typus zu unterscheiden.

Im Jahre 1669 bemerkte MONTANARI, dass ein für gewöhnlich der zweiten Grössenklasse angehörender Stern im Bilde des Perseus — Algol oder β Persei genannt — gelegentlich nur so hell wie ein Stern 3ter bis 4ter Grösse sei. Aehnliche Wahrnehmungen machten nach ihm MARALDI, KIRCH und PALITZSCH, doch erst 1782 stellte GOODRICKE die Lichtveränderungen von Algol näher fest. Während längerer Zeit ist der Stern unverändert 2·3ter Grösse; plötzlich fängt er an schwächer zu werden und sinkt innerhalb $4^h\,37^m{\cdot}5$ auf die 3·5te Grösse, steigt dann in der gleichen Zeit wieder bis zu 2·3ter Grösse auf, und behält diese während $2^t\,11^h\,33^m$ bei;

dann beginnt der gleiche Wechsel der Helligkeit wieder. Da Algol eine so kurze Periode hat und verhältnissmässig schon lange als veränderlich bekannt und beobachtet ist, so kann man die Zeit von Minimum zu Minimum, also die Dauer der Periode recht genau angeben. Nach den neuesten Beobachtungen ist sie für die Jetztzeit $2^t\,20^h\,48^m\,55^s{\cdot}425$ anzunehmen, da sie im Allgemeinen nicht ganz constant, sondern kleinen Schwankungen unterworfen ist. Seit 1782 hat sie sich erst langsam, dann von 1840 ab schneller von $2^t\,20^h\,48^m\,59^s{\cdot}5$ auf $2^t\,20^h\,48^m\,53^s{\cdot}5$ verkürzt, kam etwa 1856 zum Stillstand und wuchs wieder bis 1865, dann trat abermaliger Stillstand und darauf wieder Abnahme ein, der jetzt wieder ein Anwachsen folgt.

Zum Berechnen der Minima kann man sich der Formel

$$2^t\,20^h\,48^m\,55^s{\cdot}425 \times E + 173^m{\cdot}3\,\sin\left(\tfrac{1}{50}{}^\circ E + 202^\circ\,30'\right) + 18^m{\cdot}0\,\sin\left(\tfrac{3}{40}{}^\circ E + 203^\circ\,15'\right) + 3^m{\cdot}5\,\sin\left(\tfrac{1}{6}{}^\circ E + 90^\circ\,20'\right)$$

bedienen, worin E die Anzahl der Perioden bedeutet, die seit dem am 3. Januar 1888 $7^h\,21^m\,29^s{\cdot}23$ mittlere Zeit Greenwich eingetretenen Minimum verflossen sind. Von so regelmässigem Verlauf wie bei β Persei sind nun die Veränderungen in der Helligkeit bei den übrigen Sternen dieses Typus nicht, sondern es treten da vielfach Schwankungen und Ungleichmässigkeiten auf. Bei mehreren derselben findet auch die Lichtabnahme in kürzerer Zeit statt, als die Zunahme. Die folgende kleine Tabelle giebt von den 11 Sternen des Algoltypus zunächst Namen und Ort [Rectascension (R. A.) und Deklination (Dekl.) für 1900·0], dann Maximal- und Minimalhelligkeit in Grössenklassen, Periode und endlich Datum des Minimums, von welchem die oben erläuterte Grösse E aus zu rechnen ist.

Name	1900·0		Helligkeit		Periode	Minimum Greenwich Mittl. Zeit
	A. R.	Dekl.	Max.	Min.		
U Cephei .	$0^h\,53^m{\cdot}4$	+81° 20′	7·1	9·2	$2^t\,11^h\,49^m\,38^s{\cdot}25\,E$	80 Juni 23 $9^h\,28^m{\cdot}0$
β Persei . .	3 1 ·6	+40 34	2·3	3·5	2 20 48 55 ·42 *E*	88 Jan. 3 7 21 ·5
λ Tauri . .	3 55 ·1	+12 12	3·4	4·2	3 22 52 12 ·0 *E*	87 Dec. 6 11 57 ·0
R Can. maj. .	7 14 ·9	−16 12	5·9	6·7	1 3 15 46 ·0 *E*	87 März 26 15 18
S Cancri . .	8 38 ·2	+19 24	8·2	9·8	9 11 37 45 *E*	67 Aug. 31 14 2 ·9
S Antliae .	9 27 ·9	−28 11	6·7	7·3	0 7 46 48 ·0 *E*	88 April 13 12 38 ·0
δ Librae . .	14 55 ·6	− 8 7	5·0	6·2	2 7 51 22 ·8 *E*	67 Oct. 25 9 17 ·5
U Coronae .	15 14 ·1	+32 1	7·5	8·9	3 10 51 12 ·4 *E*	70 März 25 10 38 ·5
U Ophiuchi .	17 11 ·5	+ 1 19	6·0	6·7	0 20 7 42 ·56 *E*	81 Juli 17 14 45 ·0
Z Herculis .	17 53 ·6	+15 8	6·7	8	1 23 54 46 *E*	95 Jan. 0 4 21
Y Cygni . .	20 48 ·0	+34 17	7·1	7·9	1 11 57 22 *E*	86 Dec. 9 12 20 ·2

Der Lyra-Typus hat seinen Namen nach dem veränderlichen β Lyrae erhalten, dessen Lichtschwankungen zuerst von GOODRICKE 1784 bemerkt wurden, während jedoch erst ARGELANDER die Periode des Sternes genauer bestimmte. In dem Minimum seiner Helligkeit ist β Lyrae 4·5 ter Grösse und steigt von da innerhalb $3^t\,3^h{\cdot}3$ auf 3·4 te Grösse; nach weiteren $3^t\,5^h{\cdot}8$ beträgt die Helligkeit, nur noch 3·9, um jedoch innerhalb der folgenden $3^t\,2^h{\cdot}9$ wieder auf 3·4 anzuwachsen; $3^t\,3^h{\cdot}8$ später ist der Stern wieder auf seine geringste Helligkeit nämlich auf die 4·5 te Grösse zurückgegangen. Die Eigenthümlichkeit im Lichtwechsel von β Lyrae besteht also darin, dass der Stern zwei gleich helle Maxima (3·4 te Grösse) getrennt durch ein Haupt- und ein Nebenminimum (4·5 te und 3·9 te Grösse) besitzt. Die Zeiten zwischen den einzelnen Wendepunkten im Lichtwechsel zeigen eine auffallende Uebereinstimmung, sie sind alle nahezu drei Tage und vier Stunden. Zur genaueren Berechnung des Eintretens des Hauptminimums von β Lyrae dient die Formel:

$$12^t\,21^h\,46^m\,58^s{\cdot}3 \times E + 0^s{\cdot}4217 \times E^2 - 0^s{\cdot}00007 \times E^3,$$

worin wieder E die Anzahl der seit dem Minimum vom 6. Januar 1855 $14^h\,28^m\,42^s$ mittlere Zeit Greenwich verflossenen Perioden bedeutet. Bei den übrigen Veränderlichen des Lyra-Typus ist nun ein so regelmässiger Verlauf der Helligkeitsschwankungen wie bei β Lyrae nicht zu constatiren, besonders das zweite Maximum ist entweder ganz gering ausgebildet oder nur durch eine verlangsamte Abnahme der Lichtstärke angedeutet. So steigt z. B. das Licht von η Aquilae, der zu diesem Typus gehört, von seiner Minimalgrösse 4·7 in $2^t\,9^h{\cdot}5$ zum Maximalwerth, nämlich 3·5 te Grösse, an, sinkt dann während $1^t\,10^h{\cdot}5$ auf 3·9 te Grösse herab, bleibt dann eine Weile fast constant, sodass 16^h später die Grösse erst 4·0 ist, dann sinkt dieselbe innerhalb $2^t\,16^h$ wieder zum Minimum herab. Ueberhaupt ist diese Gruppe von Veränderlichen viel weniger einheitlich und abgeschlossen als die des Algol-Typus, und es sollen in der folgenden Zusammenstellung nur diejenigen Sterne aufgeführt werden, die man mit einiger Berechtigung zu derselben zählen kann. Dabei haben die Columnen die ganz gleichen Bedeutungen wie oben, nur dass hier noch eine weitere hinzugefügt werden musste, die für einige Sterne die Zeiten der Maxima enthält, von welchen die Grössen E gezählt werden, oder an welche die Periode anzubringen ist, um auf das Datum eines späteren Maximums zu kommen.

Name	1900·0		Helligkeit		Periode	Mittl. Zeit Greenwich	
	A. R.	Dekl.	Max.	Min.		Minimum	Maximum
T Monocerotis	$6^h\,19^m{\cdot}8$	+ 7° 8′	5·8—6·4	7·4—8·2	$27^t{\cdot}0037\,E$	85 März 24·88	85 April 1·81
ζ Geminorum	6 58 ·2	+20 43	3·7	4·5	$10^t\,3^h\,41^m{\cdot}5\,E$	87 Dec. 29 $14^h\,5^m{\cdot}7$	88 Jan. 3 $14^h\,27^m{\cdot}7$
W Virginis . .	13 20 ·9	— 2 52	8·7—9·2	9·8—10·4	$17^t{\cdot}27263\,E$	69 April 17·466	69 April 25·666
Y Sagittarii .	18 15 ·5	—18 54	5·8	6·6	$5{\cdot}7690\,E$	86 Sept. 23·51	86 Sept. 25·31
U Sagittarii .	18 26 ·0	—19 12	7·0	8·3	$6{\cdot}74493\,E$	83 Aug. 14·658	83 Aug. 17·624
β Lyrae . .	18 46 ·4	+33 15	3·4	4·5	$12^t\,21^h\,46^m\,58^s{\cdot}3\,E$	55 Jan. 6 $14^h\,28^m{\cdot}7$	
U Aquilae . .	19 24 ·0	— 7 15	6·4	7·1	$7^t{\cdot}02645\,E$	86 Sept. 17·5	86 Sept. 20·146
η Aquilae . .	19 47 ·4	+ 0 45	3·5	4·7	$7^t\,4^h\,14^m\,0^s{\cdot}0\,E$	88 Jan. 4 $3^h\,32^m$	88 Jan. 6 $12^h\,32^m$
S Sagittae . .	19 51 ·4	+16 22	5·6	6·4	8 9 11 48 ·5 E	85 Dec. 1 $9^h\,36^m$	85 Dec. 4 $9^h\,36^m$
X Cygni . .	20 39 ·5	+35 13	6·4	7·2—7·7	$16^t\,9^h\,20^m{\cdot}1\,E$		86 Oct. 10 $13^h\,12^m$
T Vulpeculae .	20 47 ·2	+27 52	5·5	6·5	4 10 29 ·0 E	85 Nov. 1 $19^h\,8^m{\cdot}6$	85 Nov. 2 $20^h\,35^m{\cdot}0$
δ Cephei . .	22 25 ·4	+57 54	3·7	4·9	$5^t\,8^h\,47^m\,39^s{\cdot}974\,E$	88 Jan. 0 $15^h\,57^m{\cdot}0$	88 Jan. 2 $6^h\,32^m{\cdot}5$

Diese beiden zuerst besprochenen Klassen umfassen im wesentlichen alle diejenigen veränderlichen Sterne, welche in ihrem Lichtwechsel eine gewisse Regelmässigkeit sowohl in Bezug auf die erreichten Helligkeiten als auch die Periode zeigen, und bei denen letztere im allgemeinen kurz genannt werden kann; den beiden folgenden Typen nun gehören Veränderliche mit wesentlich

längeren Perioden an, die in Bezug auf diese und die Grenzen ihrer Lichtstärke einige Gleichmässigkeit nur zu häufig vermissen lassen. Die nächste Klasse, der Mira-Typus, führt seinen Namen nach dem am längsten bekannten veränderlichen Stern o Ceti, den Hevelius wegen seines eigenthümlichen Lichtwechsels den »Wunderbaren« »Mira« genannt hat. Derselbe wurde zuerst von FABRICIUS im August 1596 als Stern zweiter Grösse bemerkt und verschwand für das freie Auge im October desselben Jahres. Erst im Februar 1609 fand derselbe Beobachter ihn wieder, konnte ihn aber nur bis zum März verfolgen, wo er in den Sonnenstrahlen verschwand; dann wurde er erst als Stern 3. Grösse im December 1638 von HOLWARDA wiedergesehen, der auch im folgenden Jahre seine Veränderlichkeit constatirte. Von da ab sind die Schwankungen der Lichtstärke von Mira Ceti regelmässiger beobachtet worden, sodass jetzt feststeht, dass er in seinem geringsten Glanze etwa 9. Grösse ist, während seine Maximalhelligkeit sehr verschieden sein kann. Am hellsten war er — soweit bis jetzt bekannt — im November 1779, wo er die 2. Grössenklasse noch etwas überschritt; andererseits ist er 1868 im Maximum nur als Stern 5. Grösse erschienen. Seine Periode ist nach den Angaben von ARGELANDER mit Hilfe der Formel:

$$331^{t}\cdot3363 \times E + 18^{t}\cdot16 \sin\left(\frac{45^\circ}{11} E + 31^\circ 15'\right) + 33^{t}\cdot90 \sin\left(\frac{45^\circ}{22} E + 70^\circ 5'\right) + 65^{t}\cdot31 \sin\left(\frac{15^\circ}{11} E + 179^\circ 48'\right)$$

zu berechnen, worin wieder E die Anzahl der Perioden ist, welche entweder seit dem am 8. August 1866 eingetretenen Minimum oder seit dem am 25. November 1866 $11^h\ 17^m$ mittlere Zeit Greenwich beobachteten Maximum verflossen sind. Dass diese letzteren sehr unregelmässig sein können, geht aus der Formel direkt hervor. Lange ungleichmässige Perioden sowie starke Unterschiede zwischen den Maximal- und Minimalhelligkeiten sind als Hauptkennzeichen des Mira-Typus anzusehen. Hierher ist auch der nur in südlichen Breiten sichtbare Stern η Argus (1900·0 A. R.: $10^h\ 41\cdot2^m$, Dekl.: — 59 10′) zu rechnen, der wegen seines auffallenden Lichtwechsels auch den Beinamen des Wunderbaren verdiente. HALLEY sah ihn im Jahre 1677 als Stern 4. Grösse, 1687 fand ihn NOËL und 1751 LACAILLE als 2. Grösse, während er von 1811—1815 nach BURCHELL nur 4. Grösse war; derselbe constatirte ihn 1827 als veränderlich, als er die 1. Grössenklasse erreichte. Ein Jahr später war er wieder 2. Grösse, während ihn HERSCHEL 1837 heller als 1. Grösse, also etwa von der Helligkeit des Sirius fand. Dann nahm er bis März 1843 an Lichtstärke langsam ab, ohne jedoch schwächer als 1. Grösse zu werden; in den darauf folgenden Monaten leuchtete er noch einmal in fast gleicher Helligkeit wie Sirius und hat seitdem langsam abgenommen, bis er seit einiger Zeit ziemlich gleichmässig 7·4ter Grösse ist. Irgend eine Gesetzmässigkeit in Bezug auf Stärke und Dauer der Schwankungen lässt sich in diesen Angaben nicht entdecken. In der folgenden Uebersicht einer Anzahl Veränderlicher, die man zu dieser Klasse rechnen kann, sind die gleichen Bezeichnungen beibehalten wie beim Lyra-Typus. Das Zeichen $<$, welches gelegentlich in der Columne der Minimalhelligkeiten auftritt, bedeutet, dass der Stern noch unter die hinter dem Zeichen stehende Grössenangabe heruntersinkt; ein Fragezeichen deutet die Unsicherheit der betreffenden Eintragungen an. Von den Jahreszahlen in den beiden letzten Columnen sind immer nur die Zehner und Einer angegeben, wenn, wie in der Tabelle auf pag. 352, das Jahr im 19. Jahrhundert liegt, sonst ist die ganze Jahreszahl ausgeschrieben.

Name	1900·0		Helligkeit		Periode	Mittlere Zeit Greenwich	
	A. R.	Dekl.	Maximum	Minimum		Minimum	Maximum
T Cassiopeae	0^h 17^m·8	+55° 14′	7·0—8·0	11·0—11·2	$445^t{\cdot}0\,E$	83 Dec. 8	84 Aug. 10
R Andromedae	0 18 ·8	+38 1	5·6—8·6	< 12·8	$410{\cdot}7\,E + 25^t \sin(12°\,E + 90°)$		59 März 27
S Ceti	0 19 ·0	— 9 53	7·0—8·0	12	$321{\cdot}0\,E$		72 Dec. 27
S Cassiopeae	1 12 ·3	+72 5	6·7—8·6	< 13·5	$610{\cdot}5\,E + 50^t \sin(10°\,E + 50°)$		88 April 27·5
S Piscium	1 12 ·3	+ 8 24	8·2—9·3	< 14·7	$406{\cdot}0\,E$		88 März 31·7
R Piscium	1 25 ·5	+ 2 22	7 —8·8	< 12·5	$344{\cdot}05\,E + 13^t \sin(12°\,E + 180°)$		81 Dec. 24·0
S Arietis	1 59 ·2	+12 3	9·1—9·8	14?	$292{\cdot}2\,E$		72 März 22
R Arietis	2 10 ·4	+24 35	7·6—9·0	11·7—13·0	$186{\cdot}60\,E + 7^t \sin(5°\,E + 235°)$	81 Sept. 27·6	82 Jan. 6·5
o Ceti	2 14 ·3	— 3 26	1·7—5·0	8—9·5	$331{\cdot}3363\,E$ + etc.	66 Aug. 8	66 Nov. 25·47
U Geminorum	7 49 ·2	+22 16	8·9—9·7	13·1	$86{\cdot}3\,E$		92 Dec. 15
R Cancri	8 11 ·0	+12 2	6·0—8·3	< 11·7	$352{\cdot}81\,E + 0^t{\cdot}207\,E^2$		52 April 21·1
R Leon. min.	9 39 ·6	+34 58	6·1—7·8	< 12·5	$370{\cdot}5\,E + 20^t \sin(10°\,E + 300°)$		65 März 12·0
R Ursae maj.	10 37 ·6	+69 18	6·0—8·2	13·2	$302{\cdot}1\,E + 15^t \sin(10°\,E + 190°)$	52 Oct. 23	53 April 7·2
S Leonis	11 5 ·7	+ 6 0	9·0—10·0	< 13·0	$190{\cdot}0\,E + 25^t \sin(10°\,E - 60°)$		60 Dec. 1·0
S Ursae maj.	12 39 ·6	+61 39	6·7—8·2	10·2—11·5	$226{\cdot}1\,E + 43^t \sin(5°{\cdot}76\,E - 181°{\cdot}5)$	60 Febr. 4·0	60 Juni 24·0
R Hydrae	13 24 ·2	—22 46	3·5—5·5	9·7	$425{\cdot}15\,E - 0^t{\cdot}36\,E^2 + 15^t \sin(7°{\cdot}5\,E + 202°)$		91 Juli 17·0
S Serpentis	15 17 ·0	+14 40	7·6—8·7	12·5?	$365{\cdot}1\,E + 59^t \sin(6°\,E + 8°)$		28 April 16
S Coronae	15 17 ·3	+31 44	6·1—7·8	11·9—12·5	$360{\cdot}8\,E$	82 Jan. 16	82 Mai 16·8
T Herculis	18 5 ·3	+31 0	6·9—8·5	9·8—12·7	$164{\cdot}85\,E + 8^t \sin(7°\,E + 59°)$	67 Dec. 22·3	68 März 9·0
R Aquilae	19 1 ·5	+ 8 5	5·9—7·4	10·9—11·5	$351{\cdot}0\,E - 0^t{\cdot}34\,E^2$	56 März 23	56 Aug. 5
χ Cygni	19 46 ·7	+32 40	4·0—6·5	13·5	$406{\cdot}02\,E + 0{\cdot}0075\,E^2 + 25^t \sin(5°\,E + 272°)$		1763 Juni 3·5
S Cygni	20 3 ·4	+57 42	8·8—11·3	< 14·5	$322{\cdot}8\,E + 15^t \sin(15°\,E + 45°)$		65 Juni 29
R Pegasi	23 1 ·6	+10 0	6·9—7·9	< 13	$380{\cdot}0\,E + 30^t \sin(10°\,E + 200°)$		50 Dec. 26
R Aquarii	23 38 ·6	—15 50	5·8—8·5	11?	$387{\cdot}16\,E + 35^t \sin(10°\,E + 235°)$		11 Nov. 30·6
R Cassiopeae	23 53 ·3	+50 50	4·8—7·0	9·7—12	$429{\cdot}0\,E + 23^t \sin(16°\,E + 346°)$	54 Febr. 10?	54 Juli 14·0

Zeigt die eben besprochene Klasse der Veränderlichen doch noch einige Regelmässigkeit in den Perioden und im Lichtwechsel, so ist das bei der folgenden nicht mehr der Fall. Da derselben zwei helle Sterne aus dem Sternbilde des Orion angehören, hat man sie als Orion-Typus bezeichnet. Eigentliche charakteristische Merkmale existiren für dieselben nicht, wenn man nicht den Umstand, dass die Helligkeitsschwankungen in derselben im allgemeinen geringe sind, als solches gelten lassen will. Man pflegt vielfach Sterne hierher zu rechnen,

die sich keiner der anderen Klassen einfügen lassen wollen. In der folgenden Tabelle, deren Einrichtung mit den bisherigen identisch ist, sind nur einige wenige Sterne aufgenommen, die wenigstens noch das obige Merkmal einigermassen festhalten.

Name	1900·0		Helligkeit		Periode	Mittlere Zeit Greenwich	
	A. R.	Dekl.	Max.	Min.		Minimum	Maximum
α Cassiopeae .	0^h 34^m·8	+ 55° 59′	2·2	2·8			
ε Aurigae . .	4 54 ·8	+ 43 41	3·0	4·5			
δ Orionis . .	5 26 ·9	+ 0 22	2·2?	2·7	16^t?		
α Orionis . .	5 49 ·7	+ 7 23	1	1·4	196^t?		
η Geminorum .	6 8 ·8	+ 22 32	3·2	3·7—4·2	231^t·4 *E*	65 Nov. 5	
g Herculis . .	16 25 ·4	+ 42 6	4·7—5·5	5·4—6·0			
α Herculis . .	17 10 ·1	+ 14 30	3·1	3·9	60^t — 90^t?		
R Lyrae . .	18 52 ·3	+ 43 49	4·0	4·7	46^t·0 *E*	87 Oct. 1	87 Oct. 16
W Cygni . .	21 32 ·2	+ 44 56	5·0—6·3	6·7	130^t·8 *E*	84 Oct. 12	84 Nov. 30·3
β Pegasi . .	22 58 ·9	+ 27 32	2·2	2·7	30^t — 60^t?		

Das Lückenhafte dieser Zusammenstellung kennzeichnet genügend die unsicheren Grenzen, welche die Klasse umfassen. Ueberhaupt sei nochmals hervorgehoben, dass diese vier Typen hier nur beibehalten sind, weil sie für eine derartige Vorführung gewisse Vortheile bieten. Eine vollständige Klassificirung der Veränderlichen wird durch dieselben keineswegs erreicht; eine solche würde sich vielleicht besser auf den Spectren der Veränderlichen aufbauen lassen, doch ist auch hierfür das Material noch nicht vollständig genug. Auch reicht dasselbe nicht aus, um über die Vertheilung jener im Raume etwas auszusagen und Schlüsse daraus zu ziehen. Von den jetzt sicher als veränderlich bekannten Sternen stehen etwa $\frac{5}{8}$ nördlich, die übrigen südlich vom Himmelsäquator, und bei 27 der letzteren liegt die Deklination zwischen — 30° und — 90°. Eine Gliederung der Veränderlichen in Bezug auf die Dauer ihrer Perioden giebt die folgende Zusammenstellung. Danach kommen Perioden von

8 Stunden bis 20 Tagen bei 29 Sternen
20 Tagen „ 100 „ „ 11 „
100 „ „ 200 „ „ 22 „
200 „ „ 300 „ „ 51 „
300 „ „ 400 „ „ 59 „
über 400 „ „ 19 „

vor, wobei zu berücksichtigen ist, dass man von einer Anzahl Veränderlicher überhaupt nichts weiter weiss, als dass ihre Lichtstärke thatsächlich wechselt.

In enger Beziehung zu den Veränderlichen stehen jene Sterne, die plötzlich am Himmel im hellen Licht aufflammen und nach einiger Zeit wieder dem Blick entschwinden. Dass dieses Auslöschen in den meisten Fällen kein völliges ist, sondern nur ein sehr starkes Abnehmen der Helligkeit, haben die mächtigen Fernröhre der Jetztzeit gelehrt, aber vor der Erfindung derselben glaubte man es bei dem Aufleuchten eines solchen Sterns mit einem neuen Object zu thun zu haben, woher sich die Bezeichnung

Neue Sterne

bis auf den heutigen Tag erhalten hat. Man versteht darunter also jetzt veränderliche Sterne von ganz unregelmässiger Periode oder solche, die überhaupt nur eine einmalige starke Schwankung ihrer Lichtstärke durchmachen und vor und nach derselben constante Helligkeit haben. Wenn man von den mancherlei

Berichten aus dem Alterthum über das plötzliche Erscheinen heller Objecte am Himmel absieht, weil dieselben viel zu ungenau sind, um irgend welche sicheren Schlussfolgerungen daraus ziehen zu können, so sind vor der Erfindung des Fernrohres von nur wenigen neuen Sternen sicher verbürgte Nachrichten und Beobachtungen vorhanden. Einer der merkwürdigsten ist der sogen. Tychonische Stern oder *B* Cassiopeae, der im Jahre 1572 am 7. November zuerst von LINDAUER in Winterthur und vier Tage später ganz unabhängig davon durch TYCHO BRAHE entdeckt und von letzterem vielfach beobachtet und eingehend untersucht wurde, weshalb man ihn eben auch nach diesem Astronomen benannt hat. Die etwas nordwestlich von $\varkappa$ Cassiopeae stehende Nova leuchtete bei ihrer Entdeckung stärker als die hellsten Fixsterne und glich Ende November 1572 der Venus im hellsten Glanz; dann nahm ihre Lichtstärke ab, doch war sie im December desselben Jahres noch dem Jupiter an Helligkeit gleich. Im Januar 1573 stand sie mit dem Sirius auf gleicher Stufe und erschien im April und Mai als Stern 2. Grösse, erreichte im September die 4. Grösse, im Januar 1574 die 5. und entzog sich im März dieses Jahres der Beobachtung mit freiem Auge. Mit diesen Helligkeitsschwankungen Hand in Hand gingen auch beträchtliche Farbenänderungen, denn während die Nova zuerst in rein weissem Lichte strahlte, wurde dasselbe später gelblich, dann röthlich, um im Mai 1573 in mattweiss überzugehen, welche Färbung sich bis zum völligen Verschwinden erhielt. Soweit die immerhin noch ziemlich rohen Messungen TYCHO's eine Ortsbestimmung der Nova für die Jetztzeit ermöglichen, steht genau an der Stelle derselben kein Stern mehr, wohl aber 49″ südlich davon ein solcher 10·5ter Grösse, der möglicher Weise wirklich *B* Cassiopeae ist. Nach den Angaben des CYPRIANUS LEOVITIUS, eines Zeitgenossen TYCHO's, seien schon in den Jahren 945 und 1264 ungefähr in der Gegend von *B* Cassiopeae neue Sterne beobachtet worden, doch fehlt leider sonst jegliche Stütze für diese Mittheilungen. Beruhen dieselben auf Wahrheit, so würde man in der Nova Tychonis einen Veränderlichen von ungefähr 314jähriger Periode vor sich haben; dann würde auch der Stern, der bei Christi Geburt geleuchtet haben soll, eine Erscheinung dieses Veränderlichen sein können. Ferner müsste derselbe 1886 oder in den folgenden Jahren wieder aufgeleuchtet haben, was bis jetzt nicht eingetreten ist. Die ganze Schlussfolgerung steht auf etwas sehr schwachen Füssen.

Im Jahre 1600 sah JANSON zum ersten Male einen Stern, der heut zu Tage als *P* Cygni bezeichnet wird. 1602 beobachtete ihn KEPPLER als Stern 3. Grösse, 1621 verschwand er, wurde aber 1655 wieder in 3. Grösse leuchtend gesehen und nach nochmaligem Unsichtbarwerden 1665 von HEVEL in etwas schwächerem Lichte wieder gefunden. Seit 1677 leuchtet er unverändert in 5. Grösse. Ob er nicht schon vor 1600 in dieser Helligkeit etwa sichtbar gewesen ist, lässt sich nicht mehr nachweisen.

Nur vier Jahre nach diesem, nämlich am 10. October 1604, wurde eine Nova im Schlangenträger entdeckt und zwar von JOHANN BRUNOWSKI, die dann besonders von FABRICIUS und KEPPLER fleissig verfolgt wurde, ja letzterer veröffentlichte 1606 eine Schrift unter dem Titel: »De stella nova in pede Serpentarii«. In seiner grössten Lichtstärke war der Stern nicht ganz so hell wie der Tychonische in der seinen, wohl aber überstrahlte er alle Sterne erster Grösse. Im Anfange des Jahres 1605 glich er α Orionis an Helligkeit, Ende März sank er auf die 3. Grössenklasse herab, und im October war er nur noch 6. Grösse; im März 1606 entschwand er dem freien Auge. Besondere Farben an ihm werden nicht erwähnt, wohl aber sein lebhaftes Funkeln.

1612 soll von BYRGIUS eine Nova entdeckt worden sein, doch sind die Nachrichten darüber sehr unsicher. Gut verbürgt sind dagegen die Beobachtungen eines neuen Sterns, 11 Vulpeculae, den der Karthäusermönch ANTHELME am 20. Juni 1670 zuerst in 3. Grösse sah. Am 10. August war er noch 5. Grösse und verschwand bald darauf ganz. Schon im März des folgenden Jahres wurde er wieder sichtbar, nach CASSINI's Angaben schwankte seine Lichtstärke dabei etwas, war aber durchschnittlich der 4. Grössenklasse gleich. Wiederum ein Jahr später konnte man ihn nochmals als Stern 6. Grösse sehen, worauf er für immer verschwand, wenn man nicht einen Stern 11. Grösse in der Nähe des etwas unsicheren Ortes der Nova für diese halten will.

Es tritt nun eine lange Pause in der Entdeckung neuer Sterne ein, denn erst am 27. April 1848 sah HIND wieder einen solchen 6. Grösse im Sternbilde des Ophiuchus. Derselbe wuchs noch bis 5·5 ter Grösse an und nahm dann ziemlich stetig und rasch zunächst ab, sodass er 1850 die 10., 1856 die 11. Grösse erreichte, während er seit 1867 constant als Sternchen der 12·5 ten Grössenklasse sichtbar gewesen ist.

Am 21. Mai 1860 gewahrte AUWERS im Sternhaufen Messier 80 einen Stern 7. Grösse, der bestimmt drei Tage vorher noch nicht zu sehen war und die Bezeichnung *T* Scorpii erhielt. Seine Lichtstärke verminderte sich so schnell, dass er schon am 16. Juni von der ihn umgebenden Nebelmasse nicht mehr zu unterscheiden, also jedenfalls schwächer als 12. Grösse war.

Die rapideste Lichtzunahme wurde an dem seit längerer Zeit als der 9·5 ten Grössenklasse angehörig bekannten Stern *T* Coronae beobachtet, denn am 12. Mai 1866 war er um $9^h\ 30^m$ mittlere Zeit Paris sicherlich noch schwächer als 5. Grösse, während ihn in derselben Nacht um 12^h mittlere Zeit Paris BIRMINGHAM in Tuam in Irland als Stern 2. Grösse erblickte. Auch in Washington und noch sonst an einigen Orten wurde er in der betreffenden Nacht in 2. Grösse gesehen. Nicht ganz so schnell, wie er aufgeflammt war, nahm er auch ab, sodass er am 14. Mai 3., am 16. 4. Grösse war und am 12. Juni der 9. Grössenklasse angehörte. Seine Lichtstärke wuchs jedoch noch zu wiederholten Malen darüber hinaus; so war er am 16. October 1866 7·8 ter Grösse, am 2. Juni 1867 und am 25. März 1868 8·6 ter Grösse, dazwischen immer wieder auf die 9·0 ter, ja 9·5 ter Grösse herabsinkend, welche letztere er am 13. October 1871 nochmals überschritt, indem er sich wenn auch nur bis zur 9·0 ten Grösse erhob.

Ebenfalls ziemlich schnell aufgeleuchtet ist die am 24. November 1876 von SCHMIDT in Athen in 3. Grösse gesehene Nova im Schwan, an deren Stelle die Bonner Sternkarten keinen Stern enthalten, sodass die Nova entweder wirklich eine solche ist, oder früher schwächer als 9·5 ter Grösse war. Sie nahm nach ihrem Helligkeitsmaximum ziemlich schnell ab, war im Anfang des Jahres 1877 etwa 8., 1878 ungefähr 10 ter bis 11 ter Grösse und ist jetzt noch unter die 13. Grösse herabgesunken.

Endlich wurde noch am 30. August 1885 vom Freiherrn von SPIESSEN in dem längst bekannten Nebel der Andromeda ein Stern 7. Grösse nahe der Mitte des Nebels gefunden, doch fällt sein Ort weder genau mit dieser noch mit einem schon bekannten Sternchen 11. Grösse in der Nähe derselben zusammen. Bis Mitte September nahm die Nova etwas über eine Grössenklasse ab, doch waren die Beobachtungen derselben wegen des hellen umgebenden Nebellichtes schwierig und unsicher. Einige sonst noch als neue Sterne beobachtete Objecte haben sich als schon früher gesehene Veränderliche herausgestellt.

Bei den drei zuletzt aufgeführten neuen Sternen sind ausser den Helligkeitsschwankungen auch das jeweilige Spectrum und die in demselben vorgehenden

Veränderungen beobachtet worden. Bei *T* Coronae bestand dasselbe aus hellen und dunkeln Linien auf continuirlichem Untergrund. Die 1876 entdeckte Nova im Schwan zeigte im Anfang helle und dunkle Linien im continuirlichen Spectrum. Unter den ersteren waren besonders die Wasserstofflinien, eine helle Linie im Grün (bei 500 $\mu\mu$) und die D^3-Linie sehr gut zu sehen. Mit der Abnahme der Lichtstärke des Sternes erfolgte auch nach VOGEL's Beobachtungen eine solche der Helligkeit des continuirlichen Untergrundes im Spectrum, sodass durch Contrastwirkung die hellen Linien mehr hervortraten. Allmählich blassten auch diese ab und nur die Linie im Grün blieb gut sichtbar, bis schliesslich, als der Stern die 11. Grösse erreicht hatte, das Spectrum nur noch aus dieser grünen Linie bestand. Im vollkommenen Gegensatze hierzu konnten im vollständig continuirlichen Spectrum der Nova im Adromedanebel helle oder dunkle Linien nicht aufgefunden werden.

Die folgende Tabelle enthält eine Uebersicht über die wichtigsten »neuen« Sterne. Dieselbe entspricht den bei den Veränderlichen gegebenen, und die einzelnen Columnen bedürfen keiner weiteren Erklärung. Das Zeichen > bedeutet »heller als« dagegen < »schwächer als« die dahinter als Zahl angegebene Grössenklasse.

Name	1900·0		Entdecker		Helligkeit	
	A. R.	Dekl.	Jahr	Name	Max.	Min.
B Cassiopeae .	0^h 19^m ·2	+ 63° 35′	1572	TYCHO BRAHE	> 1	?
Nova Androm .	0 37 ·2	+ 40 43	1885	SPIESSEN	7	?
T Aurigae . .	5 25 ·6	+ 30 22	1892	ANDERSON	4·5	< 15
T Coronae . .	15 55 ·3	+ 26 12	1866	BIRMINGHAM	2·0	9·5
T Scorpii . .	16 11 ·1	+ 22 44	1860	AUWERS	7·0	< 12
Nova Ophiuchi .	16 53 ·9	+ 12 45	1848	HIND	5·5	12·5
Nova Serpentarii	17 24 ·6	+ 21 24	1604	BRUNOWSKY	> 1	?
11 Vulpeculae .	19 43 ·5	+ 27 4	1670	ANTHELME	3	?
P Cygni . . .	20 14 ·1	+ 37 43	1600	JANSON	3—5	< 6
Q Cygni . . .	21 37 ·8	+ 42 23	1876	SCHMIDT	3	13·5

Dass die Bezeichnung »neue Sterne« eigentlich nicht mehr zutreffend ist, wurde bereits früher erwähnt, denn durch scharfe Ortsbestimmungen bei den in diesem Jahrhundert erschienenen Objecten ist nachgewiesen, dass sie entweder schon vor dem Aufflammen als schwache Sterne sichtbar waren und es nach dem scheinbaren Erlöschen auch blieben, oder dass sie wenigstens für starke Fernrohre nicht wieder völlig verschwunden sind. Man darf wohl mit Sicherheit annehmen, dass auch die früher gesehenen »neuen Sterne« nicht etwa wirkliche Neubildungen waren, die sich wieder auflösten, sondern dass man es nur mit dem mehr oder minder schnellen kräftigen Aufleuchten sehr lichtschwacher oder wirklich dunkler Objecte zu thun hat, dass also die »neuen Sterne« nur eine besondere Art der »veränderlichen« sind, nämlich solche mit ganz willkürlichem Lichtwechsel. Die Erklärungen für die Helligkeitsänderungen werden indessen bei den »neuen« Sternen doch in etwas anderen Vorgängen zu suchen sein, wie bei den regelmässig Veränderlichen, und sollen dieselben hier kurz nacheinander besprochen werden.

Dass bei der grossen Mannigfaltigkeit, welche der Lichtwechsel bei den verschiedenen Sternen zeigt, nicht nur eine Ursache für denselben existirt, sondern deren mehrere, liegt auf der Hand, doch nur eine derselben hat sich bisher durch Beobachtungen thatsächlich feststellen lassen, die übrigen befinden sich

noch im Stadium mehr oder weniger wahrscheinlicher Hypothesen. Bei Ergründung der Anlässe für die Schwankungen der Helligkeit darf man nun nicht allein die Grösse und Dauer derselben in Betracht ziehen, sondern man muss vor allen Dingen sich mit auf die spectroskopischen Untersuchungen stützen. Die ausführliche Besprechung und Erläuterung derselben ist in dem Artikel über die Astrospectroskopie enthalten, hier sollen nur die Resultate, soweit sie nothwendig sind, angeführt werden.

Die Sterne des Algol-Typus zeichnen sich vor den übrigen Veränderlichen nicht nur durch einen sehr regelmässigen Verlauf des Lichtwechsels aus, sondern auch dadurch, dass ihre Spectren alle der ersten Spectralklasse angehören, damit sind aber schnelle Veränderungen auf der Oberfläche dieser Körper wahrscheinlich gänzlich ausgeschlossen. Daher musste die Ursache der Helligkeitsschwankungen ausserhalb des Sternes gesucht, also an eine theilweise Verdeckung durch dunkle Körper (Trabanten oder Meteorschwärme) gedacht werden. Noch vor der spectralanalytischen Untersuchung hat man nur aus den Lichtverhältnissen des Algol eine Bahn desselben berechnet unter der Annahme, dass man es nicht mit einem einfachen, sondern mit einem Doppelstern zu thun habe, dessen helle und dunkle Componente um den gemeinsamen Schwerpunkt rotiren. Ob diese Annahme die richtige war, darüber konnte, wie H. C. Vogel sehr richtig bemerkte, nur die Spectralanalyse mit Hilfe des Doppler'schen Princips Aufschluss geben. Hatte man es im Algol wirklich mit einem engen Doppelstern zu thun, so musste der helle Stern sich 1 Tag und 10 Stunden lang vor einem Minimum von der Erde fort, während der gleichen Zeitdauer nach demselben sich auf diese zu bewegen, also während der ersten Hälfte der Periode mussten nach dem Doppler'schen Princip die Linien im Spectrum des Algol eine Verschiebung nach Roth, während der zweiten Hälfte nach Violett zeigen. Während einer ganzen Periode musste also eine zweimalige Umkehr der Verschiebungsrichtung der Spectrallinien eintreten. Nach vielen vergeblichen Versuchen ist es H. C. Vogel und Scheiner in Potsdam im Jahre 1889 wirklich gelungen, die Verschiebungen der Linien im Spectrum des Algol thatsächlich nachzuweisen und die Grösse derselben zu messen. Danach ergaben sich denn mit Hilfe der genau bekannten Dauer der Helligkeitsperiode folgende Bahnelemente:

Durchmesser des Hauptsternes	=	2510000	Kilometer	
„ „ dunkeln Begleiters . . .	=	1960000	„	
Abstand der Mittelpunkte von einander . .	=	5190000	„	
Geschwindigkeit des Hauptsternes in der Bahn	=	42	„	in einer
„ „ Begleiters „ „ „	=	89	„	Secunde.
Masse des Hauptsternes	=	$\frac{4}{9}$	der Sonnenmasse.	
„ „ Begleiters	=	$\frac{2}{9}$	„ „	

Den »dunkeln« Begleiter braucht man sich übrigens durchaus nicht als absolut dunkeln Körper zu denken, sondern derselbe kann sich sehr wohl noch in Rothgluth befinden. Dass ein so enges Doppelsternsystem bestehen kann, ist gegenüber den früher vielfach geäusserten Zweifeln hier durch die Beobachtung festgestellt; dass dies sogar noch bei viel engeren Doppelsternen nach den Principien der Mechanik möglich ist, hat Wilsing nachgewiesen. Da von den übrigen Sternen des Algol-Typus keiner so hell wie β Persei in allen Teilen seiner Bahn ist, so reichten die optischen Mittel in Potsdam nicht aus, um an jenen die entsprechenden Beobachtungen wie an Algol zu machen. Andere Sternwarten besitzen schon jetzt Fernröhre von genügender Lichtstärke, um wenigstens die

Spectren von λ Tauri und δ Librae in entsprechender Weise zu untersuchen, und es wird daher wohl nur eine Frage der Zeit sein, dass man auch für sämmtliche übrigen Sterne des Algol-Typus die Elemente ihrer Bahnen kennt. Nach der Untersuchung an β Persei steht es wohl ausser allem Zweifel, dass der Lichtwechsel der übrigen hierhergehörenden Veränderlichen ebenfalls durch einen oder mehrere dunkle Begleiter, die sie zeitweise zum grossen Theile verdecken, hervorgerufen wird. Uebrigens kann diese Erklärungsform auch für Veränderliche, die nicht dem Algol-Typus angehören, aber eine kurze Periode haben, gültig sein, ja dieselbe ist von Pickering für β Lyrae als wahrscheinlich hingestellt und neuerdings durch Beobachtungen dieses Veränderlichen von Belopolsky in Pulkowa als zutreffend erwiesen worden.

Ganz andere Verhältnisse scheinen nun bei den übrigen bekannten veränderlichen Sternen zu herrschen. Die meisten derselben von längerer Periode haben Spectren der dritten Klasse, und einige gehören zum zweiten Spectraltypus oder stehen zwischen beiden. Da ist es denn (besonders bei denen der III. Klasse) höchst wahrscheinlich, dass es Vorgänge auf der Oberfläche oder in der Licht aussendenden Schicht dieser Körper sind, welche den Lichtwechsel hervorrufen. Die Spectren der III. Klasse haben in gewissen Beziehungen eine sehr starke Verwandtschaft zu denen der Sonnenflecken, und da nun die Sonne höchst wahrscheinlich in Bezug auf Dimension und Beschaffenheit mit sehr vielen — wenn nicht mit den meisten — Fixsternen in Beziehung gesetzt werden kann, so liegt der Schluss nahe, dass der Lichtwechsel derjenigen Veränderlichen, die Spectren der III. Klasse zeigen, durch Gebilde und Vorgänge auf denselben, die den Flecken auf der Sonne entsprechen, hervorgerufen wird. Dabei braucht über die wahre Natur der Sonnenflecke und die Constitution der Sonne selbst gar keine bindende Annahme gemacht zu werden. Würde die Sonne in einen Abstand von der Erde gebracht, der dem der nächsten Fixsterne etwa entspricht, so würde man an derselben durch ganz genaue photometrische Messungen höchst wahrscheinlich Lichtschwankungen von 11 jähriger Periode feststellen können entsprechend der Periode der Häufigkeit der Sonnenflecken, und zwar würde ein Fleckenmaximum mit einem Helligkeitsminimum zusammenfallen. Dass diese 11 jährige Periode sich nicht streng regelmässig wiederholen würde, ist im Hinblick auf die Abweichungen der Sonnenfleckenperioden von der Mittelzahl wohl selbstverständlich. Warum kann man nun nicht annehmen, dass die Fleckenbildung auf anderen Gestirnen lebhafter ist und sich in kürzeren Perioden wiederholt als auf der Sonne, womit ein stärkerer Lichtwechsel und eine kürzere Dauer desselben erklärt wäre? In der That hat diese Annahme soviel für sich, dass man sie als der Wahrheit sehr nahekommend ansehen kann. Bewiesen würde dieselbe sein, wenn es gelänge bei den Veränderlichen auch die durch die Häufigkeit der Flecken nothwendig eintretenden Aenderungen im Spectrum nachzuweisen, doch sind spectroskopische Beobachtungen im Minimum ihrer Helligkeit meist äusserst schwierig. Nach dieser Fleckenhypothese würde es auch richtig sein, alle der Sonne ähnlichen Sterne als veränderlich anzusehen, nur dass bei einer sehr geringen Fleckenbildung die Helligkeitsschwankungen nicht messbar sich nachweisen liessen.

Gelegentlich hat man die »Flecken-Hypothese« auch in der Weise ausgesprochen, dass man nicht ein Bilden und Vergehen der Flecke annimmt, sondern sich die verschiedenen Theile der Oberfläche eines solchen Körpers mit mehr oder weniger grossen, dunkeln Flecken (Schlackenfeldern) besetzt denkt, die durch die Axendrehung des Gestirnes nach einander in die Gesichtslinie

zur Erde kämen. Die Annahme ständiger fester Schlackenfelder neben Weissgluth begegnet manchem physikalischen Bedenken, ausserdem dürfte man diese Hypothese nur auf die Veränderlichen kurzer Periode (etwa gleich der Sonnenrotation) anwenden, oder man müsste zur Annahme sehr langsamer Rotationen greifen, für welche man bis jetzt durch direkte Beobachtung ebenso wenig einen Anhalt besitzt, wie für das Vorkommen fester Schlackenfelder.

Ganz anders sucht sich eine Hypothese mit dem Problem abzufinden, welche annimmt, dass der betreffende Stern kein regelmässiger Körper sei, also keine Kugel oder Rotationsellipsoïd, sondern ein dreiaxiges Ellipsoïd, welches um eine der kleinen Axen rotire. Dann würde das Gestirn gegen die Erde bald eine grössere, bald eine kleinere Fläche kehren und so bald mehr, bald weniger Licht derselben zusenden. Es würden hauptsächlich die Veränderlichen mit kurzen und sehr regelmässigen Perioden, deren Spectra der I. Klasse angehören, sein, auf welche diese Hypothese Anwendung finden könnte, doch hat nach dem oben Mitgetheilten die Doppelsternhypothese für die Sterne des Algoltypus eine so grosse innere Wahrscheinlichkeit, dass man fast von Gewissheit reden kann und daher einer weiteren Erklärungsform für dieselben nicht mehr bedarf.

Nach dem, was oben über die Spectra der sogen. »neuen« Sterne gesagt ist, scheint es zunächst nicht, als ob sich dieselben alle einer Erklärungsform fügen würden; dass dies doch möglich ist, lehrt die von WILSING aufgestellte Hypothese. Derselbe denkt sich eine Nova als einen von einem dunkeln Begleiter in sehr excentrischer Bahn umkreisten, nur noch schwach leuchtenden Stern mit starker Atmosphäre. Wenn der ziemlich gross zu denkende Begleiter in seiner Bahn dem Hauptstern so nahe als möglich gekommen ist, so übt er auf die Atmosphäre desselben eine solche Anziehungskraft aus, dass einige Oberflächentheile fast völlig von dieser entblösst werden, wodurch das continuirliche Spectrum des Sternes beträchtlich heller, aber immer noch von dunkeln Absorptionsstreifen durchzogen sein würde, welche die ja immer noch vorhandene Atmosphäre hervorruft. Der Begleiter bewirkt durch seine grosse Annäherung aber nicht nur eine Fluthwelle in der Atmosphäre, sondern auch im glühenden Innern des Hauptsternes, dadurch werden Gaseruptionen hervorgerufen und diese erzeugen die hellen Linien im Spectrum. Entfernt sich nun der Begleiter wieder allmählich, so bedeckt die Atmosphäre wieder nach und nach gleichmässig den Hauptstern und damit nimmt das continuirliche Spectrum an Helligkeit ab, während die glühenden Gase sich vermöge ihrer Leichtigkeit über die Atmosphäre erhoben haben und hier sich erst ganz allmählich auskühlen, sodass also die hellen Linien ebenfalls langsam an Intensität verlieren. Ist die Flutwelle im Innern des Sternes nicht mächtig genug, um Gasausbrüche zu erzeugen, so tritt durch die Annäherung des Begleiters nur eine Aufhellung des continuirlichen Spectrums ein, wie sie bei der Nova im Andromedanebel beobachtet wurde. Dass eine zufällige Annäherung zweier Sterne dieselben Erscheinungen hervorrufen kann, wie hier der Begleiter es thut, ist wohl selbstverständlich. Bei Annahme einer solchen würde eben das ganze Phänomen nur einmal bei einem Sterne auftreten.

Aelter als die eben angeführte Hypothese ist die von ZÖLLNER bereits 1865 ausgesprochene, welche auch die spectroskopischen Beobachtungen zu erklären vermag, obwohl sie vor deren Bekanntwerden aufgestellt wurde. ZÖLLNER stellt sich unter einer Nova einen an seiner ganzen Oberfläche erkalteten Stern vor, dessen feste Schale aus irgend welcher Ursache an einer oder mehreren Stellen

von der glühend flüssigen Masse des Innern plötzlich durchbrochen wird. Die austretende Glutmasse überströmt einen mehr oder weniger grossen Theil der festen Oberfläche und zersetzt dabei die dort vorhandenen chemischen Verbindungen, wodurch aufs Neue Licht und Wärme erzeugt wird. Die ausgebrochenen Massen und der Verbrennungsprocess erzeugen das continuirliche Spectrum und die Atmosphäre des Sternes, sowie auch zum Theil die bei den chemischen Zersetzungen entwickelten Gase rufen die dunkeln Absorptionslinien in demselben hervor. Glühende Gasmassen, die bei der Eruption aus dem Innern mit ausgetreten sind, oder solche, die sich bei dem Verbrennungsprocess gebildet haben, liefern die hellen Linien im Spectrum. Je nach der Grösse des Ausbruchs wird die Abkühlung der ausgeflossenen Massen mehr oder weniger schnell erfolgen, damit der Verbrennungsprocess aufhören und so eine allmähliche Helligkeitsabnahme des continuirlichen Spectrums eintreten, während sich die verhältnissmässig in viel beträchtlicherer Menge ausgeströmten glühenden Gasmassen, die sich über die Atmosphäre des Sternes erhoben haben, hier langsam auskühlen, und so auch schliesslich die hellen Linien im Spectrum verblassen. Durch welche Ursachen kann denn aber ein solcher Durchbruch der schon erkalteten Oberfläche erfolgen? Die Annahme, dass derselbe durch den nahezu centralen Zusammenstoss zweier Sterne hervorgerufen werde, ist nicht wohl haltbar, wenn man bedenkt, welche ungeheure Zerstörung, welche kolossale Temperatursteigerung dadurch bewirkt würde. Der eine oder auch beide Körper würden durch und durch Glühhitze erreichen und es wäre nicht abzusehen, wie danach eine so schnelle Auskühlung möglich sein sollte, die schon nach wenigen Monaten — den photometrischen und spectroskopischen Beobachtungen zu Folge — bei einzelnen neuen Sternen eingetreten sein muss. Eher könnte der Einsturz eines Meteors von entsprechender Grösse einen solchen lokalen Ausbruch bedingen, wie ihn die ZÖLLNER'sche Hypothese annimmt, oder die Ursachen desselben wären auf eine zu starke Spannung der Dämpfe und Gase im Innern des Körpers zurückzuführen. Endlich könnte auch, wie bei der WILSING'schen Hypothese, eine einmalige oder periodische sehr grosse Annäherung zweier Sterne einen oder wiederholte Ausbrüche aus dem Innern des einen oder anderen hervorbringen.

Diese beiden Hypothesen haben das eine Gemeinschaftliche, dass sie unter den sogen. »neuen« Sternen sich solche vorstellen, deren Entwickelung schon soweit vorgeschritten ist, dass sie eine feste, erkaltete Oberfläche haben, also eigentlich schon recht alte Sterne sind. Zugleich aber zeigen sie auch, dass man die »neuen« Sterne eben nur als eine besondere Art der »Veränderlichen« aufzufassen hat. Die Entdeckung und Verfolgung der letzteren ist freilich weniger alt als die der neuen Sterne, und die Beachtung dieser wiederum bedeutete den ersten weiteren Ausbau der ursprünglich auf die gegenseitige Abschätzung der Helligkeiten der mit blossem Auge sichtbaren Sterne beschränkten Astrophotometrie.

Literaturnachweis.

EULER, Réflexion sur les divers degrés de lumière du soleil et des autres corps célestes; Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, année 1750, pag. 280.

SMITH, Optik, übersetzt von KAESTNER, Altenburg 1755.

BOUGUER, Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouv. posth. publ. de M. l'abbé DE LA CAILLE. Paris 1760.

LAMBERT, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, Augsburg 1760.

STEINHEIL, Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel; Abhandlungen der mathem. physik. Klasse der kgl. Societät der Wissensch. zu Göttingen; Bd. II. 1835.

Forbes, On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the Solar rays in passing through it; Philosoph. Transactions for 1842, part I, pag. 225.

Argelander, Aufforderung an Freunde der Astronomie; Schumacher's Jahrbuch für 1844.

John Herschel, Results of astronomical Observations made during the years 1834, 5, 6, 7, 8, at the cape of good hope. London 1847.

Lamont, Jahresbericht der königlichen Sternwarte bei München für 1852.

Secchi, Sopra un nuovo fotometro destinato specialmente a misurare l'intensita relativa della luce delle stelle; Atti dell' accademia pontificia de' nuovi lincei, tomo IV, anno IV. (1850 - 51), Roma 1852, pag. 10.

Argelander, Ueber ein neues von Prof. Schwerd erfundenes und ausgeführtes Photometer; Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn XVI, 1859, pag. 64.

Seidel, Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. — Resultate photometrischer Messungen an 208 der vorzüglichsten Fixsterne, und Leonhard, Helligkeitsmessungen an 208 Fixsternen. Alle drei Arbeiten sind erschienen in den Abhandlungen der II. Cl. d. k. Akad. d. Wissensch. zu München, und zwar VI. Bd., III. Abth. (1852), IX. Bd., III. Abth. (1862), X. Bd., I. Abth. (1863).

Seidel, Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn, verglichen mit Sternen und über die relative Weisse ihrer Oberflächen. Monumenta saecularia d. k. Akad. d. Wissensch. II. Cl. München 1859.

Hornstein, Ueber Helligkeitsmessungen bei kleinen Fixsternen. Sitzungsber. d. math.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. XLI, pag. 261. Wien 1860.

Bond, On the results of photometric experiments upon the light of the Moon and of the planet Jupiter. — On the relative brightness of the Sun and Moon. Beide Abhandlungen erschienen in den »Memoirs of the American Academie«, new series, vol. VIII, Cambridge 1861.

Zöllner, Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels. Berlin 1861.

Zöllner, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

Hirsch, Description d'un photomètre; Bulletin de la société des sciences naturelles de Neuchatel 1861 à 1864, tome VI, Neuchâtel 1864, pag. 94.

Dawes, Description of an aperture-diminishing eye-piece and of a photometer of neutral-tint glass; Monthly Notices of the R. Astr. Society, Vol. XXV, 1865, pag. 229.

Schönfeld, Zwei Cataloge von veränderlichen Sternen erschienen in dem 32. u. 40. Jahres bericht des »Mannheimer Vereins für Naturkunde«; 1866 und 1875.

Schönfeld und Winnecke, Verzeichniss von veränderlichen Sternen zur Feststellung ihrer Nomenclatur; Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, III. Jahrg., pag. 66. Leipzig 1868.

Engelmann, Helligkeitsverhältnisse der Jupitertrabanten; Leipzig 1871.

Christie, On the colour and brightness of stars as measured with a new photometer; Monthly Notices, Vol. XXXIV, pag. 111. London 1874.

Knobel, On a new astrometer; Monthly Notices, Vol. XXXV, pag. 100. London 1875.

Crova, Mesure de l'intensité calorifique des radiations solaires et de leur absorption par l'atmosphère terrestre; Mémoires de l'académie des sciences et lettres de Montpellier. 1876.

Wolff, Photometrische Beobachtungen an Fixsternen, 1. Bd. Leipzig 1877; 2. Bd. Berlin 1884.

Annals of the astronomical observatory of Harvard College, Vol. XI. 1879; XIV, 1884; XVIII, XXIII, 1. 1890; XXIV, 1890; XXIX, 1893. Cambridge (Mass.).

Lommel, Ueber Fluorescenz, Annalen der Physik und Chemie, herausg. von G. Wiedemann, neue Folge, Bd. X, pag. 449. Leipzig 1880.

Maurer, Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraction. Inaug.-Diss. Zürich 1882.

Müller, Photometrische Untersuchungen. — Photometrische und spectroskopische Beobachtungen angestellt auf dem Gipfel des Säntis. — Helligkeitsbestimmungen der grossen Planeten und einiger Asteroiden. Alle drei Arbeiten sind erschienen als: Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, No. 12, 1883; No. 27, 1891; No. 30, 1893.

Langley, On the amount of the atmospheric absorption; American. Journal of science, third series, vol. 28, pag. 163. 1884.

GORE, A catalogue of known variable stars. — A catalogue of suspected variable stars. — A revised catalogue of variable stars. Alle drei Arbeiten sind erschienen in den Proceedings of the Royal Irish Academy, Ser. II, Vol. IV, No. 2 und No. 3; Ser. III, Vol. I, No. 1. 1884—1888.

PRITCHARD, C., Uranometria nova Oxoniensis; Astronomical Observations made at the University Observatory Oxford, No. II, Oxford 1885.

Investigations on Light and Heat published with appropriation from the Rumford Fund 1886.

SEELIGER, Bemerkungen zu ZÖLLNER's »Photometrischen Untersuchungen«; Vierteljahrsschrift der astron. Gesellschaft 21. Jahrg. 1886, pag. 216.

SEELIGER, Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten insbesondere des Saturn; Abh. d. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl., XVI. Bd. II, Abth. 1887.

CHANDLER, Catalogue of variable stars; Astronomical Journal No. 179—180. 1888.

TUMLIRZ, Das mechanische Aequivalent des Lichtes; Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1889.

CHANDLER, Second Catalogue of variable stars; Astronomical Journal No. 300. 1893.

MÜLLER und KEMPF, Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels, enthaltend alle Sterne der B. D. bis zur Grösse 7·5. Theil I, Zone 0° bis 20° Deklination. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, No. 31. 1894.

WALTER F. WISLICENUS.

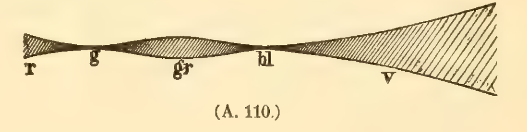
Astrospectroskopie. Unter »Astrospectroskopie« versteht man die Anwendung der Spectralanalyse auf die Gestirne des Himmels, aber es würde falsch sein, wenn man aus dieser Definition schliessen wollte, dass die erstere ein Kind der letzteren sei. Die beiden Disciplinen sind von ihren ersten Anfängen an Hand in Hand neben einander hergegangen, sich gegenseitig fördernd und stützend. Dabei ist aber die Astrospectroskopie insofern zurückgesetzt worden, als sie in den Lehrbüchern nur als ein Anhängsel der Spectralanalyse behandelt ist. Erst in neuester Zeit hat sie sich durch ihren gewaltigen Aufschwung, den sie genommen hat, den Platz unter den Wissenschaftszweigen zu erringen gewusst, der ihr zu Recht gebührt. So findet sie auch in diesem Buche ihre gesonderte Behandlung, welche allerdings die Kenntniss der spectralanalytischen Grundprincipien und Beobachtungsmethoden voraussetzt. Denn es kann besonders bei dem beschränkten Raum, der im vorliegenden Falle zur Verfügung steht, hier nicht alles wiederholt werden, was in jedem Lehrbuche der Physik über Spectralanalyse zu finden ist. Dahin gehören besonders die Gesetze über die Zerstreuung des Lichtes, die verschiedenen Mittel zur Erzeugung derselben, und die mathematische Behandlung über den Gang der Lichtstrahlen in Prismen etc., sowie auch die theoretischen Betrachtungen der spectralanalytischen Phänomene. Alle diese und damit verwandte Stoffe konnten hier nicht berücksichtigt werden und muss der Leser zur Information über dieselben auf die einschlägigen Kapitel aus dem »Handbuch der Physik«, welches fünf Bände der vorliegenden Encyclopädie bildet, verwiesen werden.

Der Plan, nach welchem in diesem Artikel über Astrospectroskopie der Stoff angeordnet wurde, ist der nämliche, der auch bei Behandlung der Astrophotometrie innegehalten wurde und der sich aus der Natur der Sache von selbst ergiebt. Es sind im ersten Theile die Instrumente und Apparate, welche zu spectroskopischen Untersuchungen am Himmel dienen, besprochen, während in der zweiten Hälfte die damit gewonnenen Resultate nebst den daran geknüpften Folgerungen und Schlüssen dargelegt werden. Bei jedem Spectroskop zur Untersuchung irdischer Lichtquellen kann man im wesentlichen drei Hauptheile unterscheiden, nämlich erstens den Collimator, der an seinem einen Ende den Spalt trägt, welcher aus der zu untersuchenden Lichtquelle einen ganz schmalen Streifen herausschneidet, während das am anderen Ende sitzende Collimatorobjectiv die vom Spalt kommenden Lichtstrahlen parallel macht; zweitens die

Vorrichtung (Prisma oder Gitter), welche das aus dem Collimator austretende Licht in seine Bestandtheile zerlegt; drittens das Fernrohr, durch welches man das zerlegte Licht beobachtet. Wenn es auf Messungen abgesehen ist, so muss das Beobachtungsrohr messbar gegen das Collimatorrohr drehbar sein oder an seinem Ocular eine Messvorrichtung tragen beziehentlich beide Vorkehrungen vereinigt besitzen, dann bezeichnet man den ganzen Apparat als Spectrometer. Ist endlich das Auge des Beobachters durch eine photographische Platte ersetzt, so spricht man wohl von einem Spectrographen; ein solcher bildet also nicht einen besonderen Instrumententypus, sondern principiell lässt sich jedes Spectroscop oder Spectrometer in einen Spectrographen umwandeln.

Sobald es sich um die Untersuchung von Lichtquellen ausserhalb der Erde handelt, wird man die Spectroskope meistens nicht ohne weiteres in der für irdische Lichtquellen gebräuchlichen Form verwenden können, sondern häufig Aenderungen vornehmen müssen, von denen die wichtigste die Verbindung des Spectroskopes mit dem astronomischen Fernrohr ist. Diese kann in mannigfacher Art geschehen, immer aber wird sie eine Erschwerung der Beobachtung durch die mangelhafte Achromasie von Objectiv und Ocular des Fernrohres bedingen. Verbindet man ein Spectroskop mit einem Spiegelteleskop, so ist, da ein Spiegel die Strahlen verschiedener Wellenlänge alle in einem Punkt vereinigt, nur noch die Achromasie des Oculares von störendem Einfluss, sodass man ein Spiegelteleskop zu spectroskopischen Beobachtungen überall da verwenden wird, wo es sich um eine Untersuchung des ganzen Spectrums handelt. Dass die mangelhafte Achromasie des menschlichen Auges hier auch von störendem Einfluss ist, ist selbstverständlich; derselbe würde sich nur dadurch beseitigen lassen, dass man ein Ocular construirte, welches die achromatische Abweichung eines bestimmten Auges corrigirte. Ein so construirtes Ocular würde in Verbindung mit einem Reflector den betreffenden Beobachter in den Stand setzen, das ganze Spectrum in allen Teilen möglichst scharf zu sehen.

Durch einen Refractor würde sich etwas Derartiges nie erreichen lassen, denn das Objectiv eines solchen hat für die Strahlen verschiedener Wellenlänge auch ganz verschiedene Brennweiten, und dieser Fehler wächst im allgemeinen mit der Grösse des Objectivs. Bei dem Refractor der Potsdamer Sternwarte z. B., der eine freie Oeffnung von 29·8 *cm* und eine mittlere Brennweite von 540 *cm* hat, unterscheiden sich die Brennweiten von Strahlen mit den Wellenlängen 520 $\mu\mu$ und 410 $\mu\mu$ um 1·82 *cm*.



(A. 110.)

Entwirft man daher durch ein solches Objectiv das continuirliche Spectrum einer punktförmigen Lichtquelle, so wird man kein fadenförmiges Spectrum im Brennpunkt des Objectivs erblicken, sondern dasselbe wird, wenn das Objectiv z. B. so construirt ist, dass es die gelben und blauen Strahlen in einem Punkte vereinigt, etwa den Anblick der nebenstehenden Fig. 110 zeigen, d. h. im gelben und blauen Theile wird das Spectrum scharf, im rothen, grünen und violetten verwaschen erscheinen. Wollte man die grünen Partieen desselben scharf erhalten, so müsste man nicht auf den Brennpunkt des Objectivs, sondern ausserhalb desselben auf denjenigen Punkt einstellen, in welchem die grünen Strahlen vom Objectiv vereinigt werden. Dieses Verstellen, um die verschiedenen Theile des Spectrums nach einander scharf zu sehen, ist nun nicht so störend, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag, besonders wenn es nur auf einen bestimmten Theil des Spectrums ankommt, was z. B. bei allen photographischen

Aufnahmen von Spectren der Fall ist, da ja nur ein verhältnissmässig kleiner Theil von Strahlen auf die photographische Platte überhaupt wirkt.

Bei der Anwendung des Spectroskopes auf den Himmel kann man im Wesentlichen vier verschiedene Arten von Instrumenten unterscheiden, von denen die drei ersten eine Verbindung des Spectroskopes mit dem Fernrohr, die vierte eine Benutzung ohne ein solches darstellen.

Da die Sterne als punktförmige Gebilde und die von ihnen auf die Erde gelangenden Strahlen als parallel angesehen werden können, so kann man einen Stern als Spalt auffassen, und da sein Licht aus parallelen Strahlen besteht, dann das Collimator-Objectiv, also auch den ganzen Collimator entbehren; dann wird das astronomische Fernrohr zum Beobachtungsrohr des gewöhnlichen Spectroskopes, vor dessen Objectiv man das Prisma befestigt. Diese ganze Anordnung bezeichnet man als Objectivprisma. Betrachtet man nicht den Stern selbst, sondern das von ihm durch das Fernrohrobjectiv entworfene Bild als Spalt und verlegt damit die spectroskopische Einrichtung in den Brennpunkt und das Ocular des Fernrohres, so hat man die zweite Klasse von hierher gehörigen Instrumenten, die sogenannten Ocularspectroskope. Handelt es sich um die spectroskopische Untersuchung von nicht punktförmigen Gebilden am Himmel, oder um die Erreichung der höchsten Genauigkeit, so lässt man das Brennpunktbild des Fernrohrobjectivs auf den Spalt eines gewöhnlichen Spectroskopes oder Spectrometers fallen, welches sich höchstens einige unwesentliche mechanische Umänderungen gefallen lassen muss. Diese Anordnung bildet die dritte Klasse, nämlich die zusammengesetzten Spectroskope oder Spectrometer. Als eine vierte und letzte Klasse kann man endlich diejenigen Spectralapparate ansehen, die ohne Zuhilfenahme eines Fernrohres direkt auf den Himmel angewendet werden.

An der Hand dieser Klassificirung wollen wir jetzt verschiedene Instrumente etwas näher besprechen, doch muss hier gleich erwähnt werden, dass bei der Fülle verschiedener Constructionen sowie bei der hier gebotenen Raumbeschränkung es ganz unmöglich ist, alle Apparate zu berücksichtigen. Verfasser muss sich damit begnügen, besonders häufig verwendete oder besonders eigenartige Instrumente oder Theile von solchen in das Bereich seiner Betrachtungen zu ziehen.

Das Objectivprisma

verdient aus zwei Gründen hier an erster Stelle genannt zu werden, denn es ist einmal die ursprüngliche Form der auf den Himmel angewandten Spectralapparate, und ferner die einfachste derselben, soweit sie mit dem Fernrohr in Verbindung gebracht werden. Wie bereits oben angedeutet, stellt der Stern den Spalt oder vielmehr einen Punkt desselben dar und, da die von demselben ausgehenden Strahlen als parallel anzusehen sind, so kommt das Collimatorobjectiv des gewöhnlichen Spectroskops in Wegfall, wodurch ein erheblicher Gewinn an Licht zu verzeichnen ist. Das Sternlicht wird nun durch das Objectivprisma zerlegt und von dem Fernrohr zu einem Spectrum vereinigt, welches wegen der mangelhaften Achromasie des Objectivs nicht in allen seinen Theilen in der Brennebene desselben, sondern auf einer mehrfach gekrümmten Fläche liegen wird. Dieses Spectrum betrachtet man nun durch das vergrössernde Ocular des Fernrohres. Da nun das letztere im Allgemeinen viel grösser sein wird als das Beobachtungsrohr eines gewöhnlichen Spectralapparates, so kann man auch eine sehr erheblich stärkere Ocularvergrösserung anwenden als bei letzterem, und diesem Umstande ist es zu danken, dass die Dispersion eines Objectivprismas nicht sehr gross zu sein braucht. Man hat daher die Objectivprismen im All-

gemeinen mit kleinem brechenden Winkel, also ziemlich dünn hergestellt, um einmal das durch die Grösse derselben an sich schon erhebliche Gewicht thunlichst herabzumindern, und andererseits folgenden Uebelstand möglichst gering zu machen. Da ja nämlich die vom Stern kommenden Strahlen beim Passiren des Prismas erheblich von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, so muss man das ganze Fernrohr auf einen anderen Punkt des Himmels richten, als wo der Stern steht. Befindet sich das Prisma vor dem Objecte in der Stellung des Minimums der Ablenkung, so ist bei kleinem brechenden Winkel die mittlere Ablenkung der Strahlen mehr als die Hälfte und etwas weniger als zwei Drittel des brechenden Winkels, um welchen Betrag also das Fernrohr von der Richtung nach dem Stern abweichen muss. Um die Einstellung des Sternes zu erleichtern, hat man gelegentlich einen zweiten Sucher am Hauptfernrohr angebracht, der so justirt ist, dass das Spectrum des Sternes in der Mitte des Gesichtsfeldes des Hauptrohres erscheint, wenn der Stern mitten im Gesichtsfeld des Suchers steht. Diese Einrichtung hat den Uebelstand, dass schwache Sterne (und um deren Beobachtung handelt es sich beim Objectivprisma hauptsächlich) im Sucher nicht mehr sichtbar sind. Praktischer ist es, das Objectivprisma so zu justiren, dass seine brechende Kante der täglichen Bewegung parallel steht, dann braucht man am Deklinationskreis nur die um den Betrag der Ablenkung der Lichtstrahlen corrigirte Deklination des Sternes einzustellen, um dessen Spectrum im Gesichtsfeld zu haben. Je kleiner also der brechende Winkel des Objectivprismas ist, je geringer ist auch diese Ablenkung, doch so klein man diese auch macht, störend ist die veränderte Fernrohrrichtung immer, und man wird besonders bei Beobachtungen in der Nähe des ersten Verticals häufig Schwierigkeiten haben, die richtige Stellung für den Spalt des Beobachtungsthurmes zu finden.

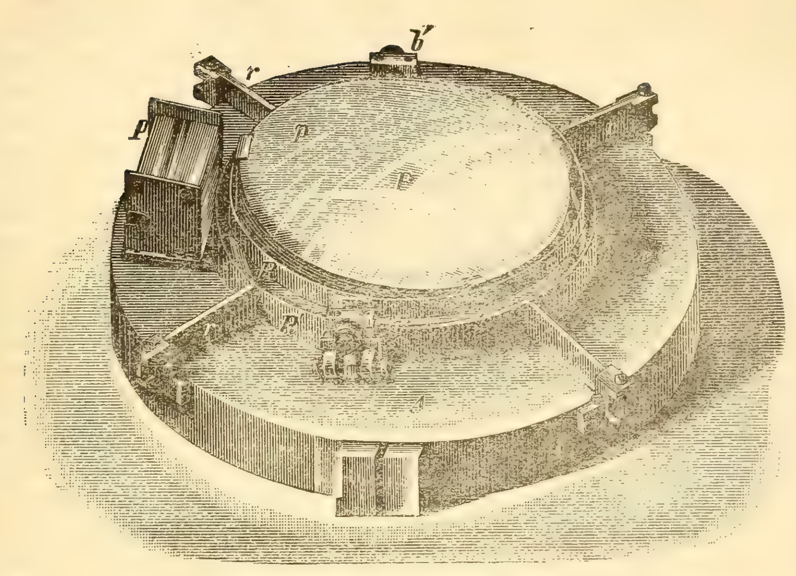
Aber diese Schwierigkeit ist nicht die einzige, welche die Verwendung eines Objectivprismas mit sich bringt. Da es schwieriger ist, eine ebene Glasfläche zu schleifen als eine sphärisch gekrümmte von gleichem Durchmesser, so ist die Herstellung eines grossen Objectivprismas nicht nur sehr theuer, sondern vielfach sind auch die Flächen eines solchen nicht vollkommen eben. Dadurch wird nicht nur die Brennweite des Fernrohrobjectivs geändert, sodass man das Ocular neu einstellen muss, sondern, was viel schlimmer ist, die Bilder im Fernrohr werden dadurch gelegentlich erheblich verschlechtert. Man hat diese Uebelstände wohl dadurch zu beseitigen gesucht, dass man ein kleineres Objectivprisma vor ein grösseres Objectiv setzte und die Randtheile des letzteren dabei abblendete. Durch diese Einrichtung geht aber der Hauptvortheil des Objectivprismas, nämlich die grosse Lichtstärke, fast ganz verloren, und ausserdem werden beim Schleifen eines Objectivs die unvermeidlichen Fehler meistens auf die mittleren Partien desselben verlegt, weil diese verhältnissmässig wenig zur Lichtstärke beitragen, sodass ein Abblenden der Randtheile eines Objectivs dessen Bilder manchmal nicht unbeträchtlich verschlechtert. Auch sei hier gleich mit erwähnt, dass die Unruhe der Luft beim Beobachten mit einem Objectivprisma sich im Allgemeinen störender bemerkbar macht, als bei der Verwendung anderer Spectralapparate.

Von den Vortheilen, die die Benutzung eines Objectivprismas bietet, ist die grosse Lichtstärke bereits erwähnt; man ist dadurch im Stande, die Spectren auch schwächerer Sterne zu untersuchen. Dazu kommt der weitere Vorzug, dass man die Abstände der Linien im Spectrum von einander durch Messungen mit dem Fadenmikrometer direkt bestimmen kann, sodass man also, wenn man die Wellenlängen einiger Hauptlinien kennt, durch Anschluss von Nebenlinien an

diese auch die Wellenlängen dieser letzteren ermitteln kann. Man könnte solche Messungen allerdings nur auf kleinere Strecken des Spectrums ausdehnen, denn man müsste beim Uebergang auf entferntere Theile desselben neu focusiren, immerhin rechtfertigt diese geringe Schwierigkeit nicht die auffallende Erscheinung, dass dieser Vortheil des Objectivprismas nie ausgiebiger benutzt ist, wenn man von der etwas rohen SECCHI'schen Methode, bei ruhendem Fernrohr die Durchgänge der Spectrallinien durch einen festen Faden zu beobachten, absieht. Freilich muss bei solchen Messungen das fadenförmige Spectrum durch Einschieben einer Cylinderlinse verbreitert werden. Theoretisch ist es gleichgültig, an welcher Stelle man dieselbe in den Gang der Lichtstrahlen einschaltet, doch die Einschiebung derselben zwischen Objectiv und Brennpunkt ist deshalb nicht rathsam, weil durch etwaige Schleiffehler der Linse sowie die Aberration der Lichtstrahlen, die nicht durch die Mitte derselben gehen, das Brennpunktbild verschlechtert wird, und diese Verschlechterung wird durch das Ocular mit vergrössert. Diesen Uebelstand vermeidet man, wenn man die Cylinderlinse zwischen Ocular und Auge anbringt und erzielt dabei den weiteren Vortheil, dass man sehr leicht die passendste Linse ausprobiren kann. Denn da die Lichtstärke eines Spectrums zu seiner Verbreiterung im umgekehrten Verhältniss steht, so soll man diese letztere nur so stark wählen, dass man die Linien im Spectrum eben mit Sicherheit erkennen kann. Stellt man die Cylinderlinse vor dem Ocular so, dass ihre Hauptaxe zum Spectrum parallel verläuft, so braucht man das Ocular, vorausgesetzt, dass die Linse genau cylindrisch ist, nicht neu einzustellen, wenn dasselbe vorher genau focusirt war. Dass das letztere der Fall ist, erkennt man daran, dass der zu beobachtende Theil des Spectrums am schmalsten erscheint. Schliesslich sei noch erwähnt, dass bei solchen Messungen an Spectren das Objectivprisma im Minimum der Ablenkung sich befinden soll; ja wenn dasselbe eine erhebliche Zerstreuung erzeugt, ist es angezeigt, beim Ausmessen der einzelnen Theile des Spectrums das Prisma für jeden derselben in das Minimum der Ablenkung zu bringen, wozu natürlich besondere constructive Vorkehrungen nöthig sind.

Was die praktische Anwendung solcher Objectivprismen betrifft, so ist schon erwähnt, dass FRAUNHOFER seine Beobachtungen mit solchen anstellte und zwar Anfangs mit einem von 3 *cm* Oeffnung und 60° brechendem Winkel, und später mit einem, bei welchem die entsprechenden Maasse 12 *cm* und 37°40′ betrugen. Durch SECCHI's zahlreiche Spectralbeobachtungen ist ein viel von ihm benutztes MERZsches Objectivprisma zu einer gewissen Berühmtheit gelangt. Dasselbe war bei einem brechenden Winkel von 12° und einer freien Oeffnung von 16 *cm* ursprünglich für ein Objectiv von gleichem Durchmesser bestimmt und gab mit diesem schöne, helle Spectren, später benutzte es SECCHI in der Fassung, die die nachstehende Figur zeigt, vor einem Objectiv von 24 *cm* Oeffnung, klagt dabei jedoch über starken Lichtverlust.

Die Messingkappe A (Fig. 111) wird auf die Objectivfassung gesetzt und trägt an vier Rippen r einen starken Ring R'. Das eigentliche Prisma P ist in einen starken Ring R gefasst, und dieser ruht mit den Zapfen a' und b' auf R' auf und kann um diese beiben Zapfen durch die Vorrichtung bei a etwas gedreht werden, um das Prisma in die Minimumstellung bringen zu können. Neben dem grossen Prisma befindet sich ein dieselbe Ablenkung besitzendes achromatisches Prisma p, durch welches im Focus des Objectivs neben dem Spectrum ein richtiges Bild des Sternes hervorgerufen wird. Ausserdem ist bei c eine kreisrunde Oeffnung angebracht, welche einen direkten Ausblick auf den Himmel gestattet.



(A. 111.)

Eine sehr ausgiebige Anwendung hat das Objectivprisma durch E. C. PICKERING in Amerika erfahren, der die photographischen Aufnahmen zu seinem grossen Katalog von 10351 Sternspectren mittelst eines Flintglasprismas von 13° brechendem Winkel und 20 *cm* Oeffnung machte, das vor eine VOIGTLÄNDER'sche Porträtlinse von gleicher Oeffnung und 115 *cm* Brennweite gesetzt war. In Bezug auf die übrigen Versuche PICKERING's mit verschiedenen Objectivprismen sowie über sonstige derartige Instrumente sei hier auf den in diesem Buche befindlichen Artikel über »Astrophotographie« verwiesen, wo man nähere Angaben auch über Objectivprismen mit gerader Durchsicht findet.

Das Ocularspectroskop

giebt im Allgemeinen nicht so helle Spectren wie das Objectivprisma, auch kann man nicht, wie bei diesem, genaue Wellenlängenbestimmungen mit demselben vornehmen, und dennoch wird es besonders dann viel gebraucht, wenn es sich darum handelt, den allgemeinen Habitus von Sternspectren zu bestimmen, und zwar weil es zweifellos die handlichste Form für ein Sternspectroskop und dabei immer noch viel lichtstärker ist, als die später zu besprechenden Spectrometer.

Da bei den Ocularspectroskopen in Folge ihrer Anbringung in dem Fernrohr auf den lichtzerstreuenden Theil des Apparates mehr oder weniger stark convergente oder divergente Strahlenbündel von merklicher Dicke fallen, so würden bei Anwendung eines einfachen Prismas die Strahlen nach dem Durchgang durch dasselbe von einer Linse nicht wieder zu einem Punkte vereinigt werden. Deshalb kommt man hier nicht mit einem einfachen Prisma zum Ziele, sondern muss sich eines solchen mit gerader Durchsicht bedienen, denn nur nach dem Durchgang durch ein solches kann ein beträchtlich convergentes oder divergentes Strahlenbündel noch für die Praxis als homocentrisch angesehen werden, d. h. die Strahlen können nach dem Durchgange durch das geradsichtige Prisma durch eine geeignete Linse wieder zu einem Punkte vereinigt werden. Dass die Verwendung eines Prismas *à vision directe* die Benutzung der Ocularspectroskope noch bequemer macht, als das bei einem einfachen

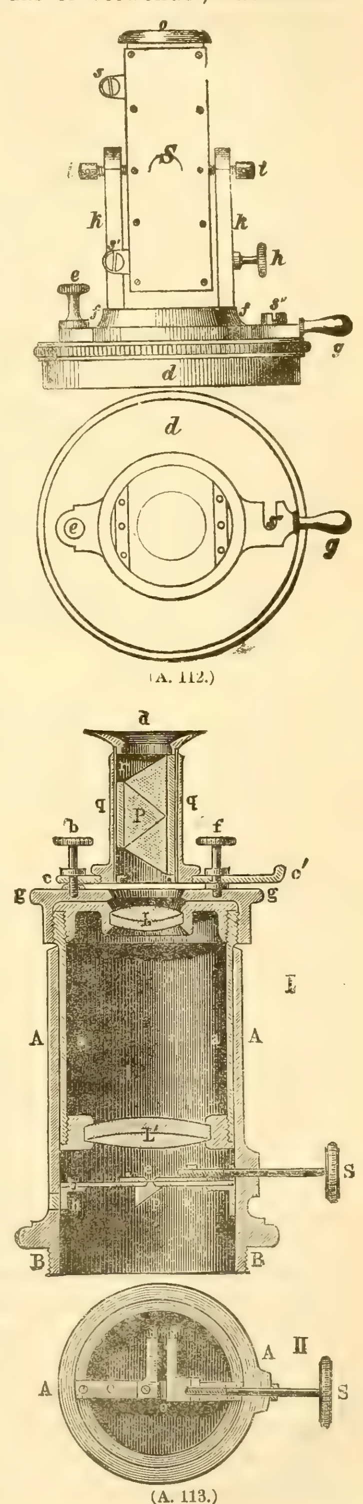
Prisma der Fall sein würde, ist ein weiterer Vortheil bei jener Construction, dem freilich der Nachtheil eines stärkeren Lichtverlustes gegenübersteht.

Theoretisch ist es gleichgültig, wo man das Prisma mit gerader Durchsicht und die auch hier zur Verbreiterung des fadenförmigen Spectrums nöthige Cylinderlinse in den Gang der Lichtstrahlen im Fernrohr einschaltet, ob vor oder hinter das Ocular, aber für die Praxis ist die eine Form entschieden vorzuziehen. SECCHI gab seinem »einfachen Sternspectroskop« folgende Einrichtung. Die vom Fernrohrobjectiv kommenden Lichtstrahlen treffen vor ihrer Vereinigung im Brennpunkt auf ein geradsichtiges Prisma und nach diesem auf eine Cylinderlinse, die so gestellt ist, dass ihre Nebenbrennlinse zur Verbreiterung des Spectrums dient. Durch Einschiebung des Prismas wird die Brennweite des Objectivs vergrössert, sodass man das gewöhnliche Ocular, mit welchem man das Spectrum betrachtet, in eine andere Focalstellung bringen muss. Der Nachtheil dieser ganzen Anordnung liegt darin, dass das Ocular alle die Verschlechterungen des Brennpunktbildes, welche durch Schleiffehler im Prisma und in der Cylinderlinse hervorgerufen werden, mit vergrössert, welcher Uebelstand bei der folgenden von CAMPHAUSEN vorgeschlagenen Construction vermieden ist. Hinter dem Brennpunkt des Objectivs ist eine kleine sphärische Linse so angebracht, dass sie von dem Brennpunkt ein virtuelles Bild erzeugt, welches durch ein geradsichtiges Prisma in ein Spectrum zerlegt wird, während man dieses durch eine dahinter angebrachte Cylinderlinse verbreitert. Bei Benutzung dieses Apparates stellt man sphärische Linse und Prisma zunächst so ein, dass das Spectrum möglichst schmal, d. h. also wirklich fadenförmig erscheint. Schiebt man darauf die Cylinderlinse so zwischen Prisma und Auge, dass die Hauptaxe derselben zur Längsausdehnung des Spectrums parallel läuft, d. h. also, benutzt man ihre Nebenbrennlinie zur Verbreiterung des Spectrums, so erscheint das letztere verbreitert und scharf, wie gross auch die Brennweite der Cylinderlinse sei. Dann kann man also nacheinander verschiedene Cylinderlinsen einschieben, um auszuprobiren, welche Verbreiterung die geeignetste ist.

Da bei dieser letzteren Art der Anordnung die hinter dem Brennpunkt des Objectivs eingeschobene sphärische Linse nicht viel anders wirkt als ein Ocular, so kann man sie direkt durch ein solches ersetzen. Diese Construction, bei welcher also Prisma *à vision directe* und Cylinderlinse in gemeinsamer Fassung direkt vor das Ocular eines beliebigen Fernrohres gesteckt werden, rührt von ZÖLLNER her und ist das Ocularspectroskop im eigentlichen Sinne. Die Vortheile desselben, was bequeme Handhabung betrifft, liegen auf der Hand, und da überdies bei einem guten Ocular die austretenden Strahlen nur wenig divergent sind, so ist bei der Kleinheit des zur Verwendung kommenden Prismas die Verschiebung des Oculars zur Erzielung eines scharfen Spectrums fast ganz zu vernachlässigen. Man stellt also den zu untersuchenden Stern in die Mitte des Gesichtsfeldes ein und macht dann das in geeigneter Fassung befindliche Prisma mit Cylinderlinse auf dem Oculardeckel fest, um sofort das Spectrum des betreffenden Sternes zu erhalten, wobei man durch die vorherige direkte Einstellung sicher ist, dass keine Verwechslung vorkommt, was sonst bei anderen Spectroskopen in Bezug auf schwache Sterne leicht geschieht. Noch bequemer ist es, wenn man gleich mehrere solche Ocularspectroskope mit verschieden starker Zerstreuung zur Hand hat, dann kann man für jeden Stern gleich ein möglichst günstiges Zerstreuungsverhältniss anwenden.

Dieser letztere Gedanke hat VON KONKOLY veranlasst, ein Ocularspectroskop zu construiren, durch welches man mit einem Prismensatz auf sehr bequeme

Weise zwei verschieden starke Zerstreuungen des Lichtes erhält. Die beiden Endflächen des geradsichtigen Prismas von MERZ, das er verwendet, haben nämlich gegen die Richtung der Lichtstrahlen Neigungen von 45° beziehentlich 80°, sodass also die durch das Prisma hervorgerufene Dispersion sich ändert, je nachdem man die eine oder die andere dieser Endflächen dem einfallenden Lichte zuwendet. Den ganzen Apparat stellt Fig. 112 dar. Auf dem Oculardeckel *d* ist eine Platte *f* mit gleich grossem Ausschnitt wie der Ocularkreis durch die Schraube *e* drehbar befestigt. Soll das Spectroskop benutzt werden, so schlägt man es an dem Griffe *g* vor den Augendeckel, bis es gegen den Anschlag *s''* stösst, und klemmt es mittelst *e* fest. Auf *f* erheben sich die Stützen *k*, zwischen denen sich der Kasten *S*, der das oben erwähnte Prisma enthält, um die Schräubchen *t* drehen lässt. Dieser Kasten hat zwei regulirbare Anschläge *s* und *s'*, welche so justirt sind, dass das Prisma sich in der Richtung der aus dem Ocular austretenden Lichtstrahlen befindet, wenn entweder *s* oder *s'* an eine der Stützen *k* fest anschlägt, in welcher Richtung dann *S* mittelst der Schraube *h* festgeklemmt werden kann. Endlich ist *o* ein leicht herausziehbarer und in beide Enden von *S* passender Augendeckel, der eine Cylinderlinse enthält.



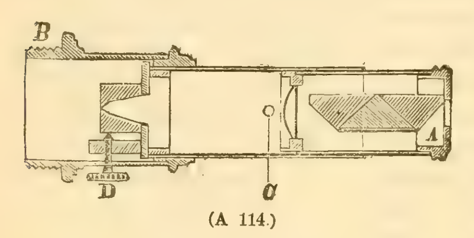
(A. 112.)

(A. 113.)

Eine ähnliche Einrichtung wie das eben beschriebene Instrument hat das von H. C. VOGEL construirte, mit dem einen wesentlichen Unterschied, dass das letztere einen verstellbaren Spalt enthält, also damit kein reines Ocularspectroskop mehr ist, sondern schon den Uebergang bildet zu den zusammengesetzten Spectroskopen. Die ganze Anordnung zeigt Fig. 113.

Die Linsensysteme *L* und *L'* bilden ein gewöhnliches Ocular und sind mit ihrer Fassung *a* im Rohre *A* verschiebbar, welches letztere bei *B* in das Fernrohr geschraubt wird. Auf dem Augendeckel *g* ist die Platte *c* mittelst *b* drehbar befestigt, sodass man sie bei Seite schlagen und frei durch das Ocular blicken kann. Zur Benutzung des Spectroskops dreht man Platte *c* an dem Handgriff *c'* vor das Ocular, bis sie an die Schraube *f* anschlägt und mittelst dieser festgeklemmt wird. Dann befindet sich die in *c* eingeschraubte Röhre *q* in der optischen Axe des Oculars, und damit auch das in dieser verschiebbare geradsichtige Prisma *P*; *d* ist der Augendeckel bei der spectroskopischen Beobachtung.

Soweit ist das Instrument ein reines Ocularspectroskop; nun kommt aber eine Spalteinrichtung dazu, die sich zwischen Ocular und Objectiv des Fernrohres befindet und leicht herausgenommen werden kann. Die Fig. II zeigt den Spalt im Querschnitt. Derselbe besteht aus einem festen, an der Lamelle *e* befestigten (linken) Spaltbacken *s* und einem von aussen her durch die Schraube *S* beweglichen (rechten) Spaltbacken *s*. Zwischen beiden Spaltbacken befindet sich in der Lamelle *e* eine Oeffnung o, vor welcher das kleine, rechtwinklige Prisma *p* sitzt. Dieses reflektirt seitlich durch die Oeffnung *h* eingetretenes Licht auf den unteren Theil des Spaltes und erzeugt so ein Vergleichsspectrum. Die Lamelle *e* mit den Spaltbacken *s* ist so klein gehalten, dass dadurch das Gesichtsfeld des Oculars soweit frei bleibt, dass man Objecte am Himmel bequem aufsuchen und hinter den Spalt bringen kann; andererseits ist die ganze Einrichtung doch so breit, dass sie bei vorgeschlagenem Spectroskop alles fremde Licht von dem Prisma *P* abhält. Man stellt also flächenartige Objecte am Himmel (Kometen, Nebelflecke) unter den Spalt und dreht dann das geradsichtige Prisma vor das Ocular, um sofort das Spectrum des betreffenden Objectes zu haben, ein Beobachtungsmodus, der bei der spectroskopischen Untersuchung sehr lichtschwacher Kometen oder Nebel zuweilen der einzig mögliche ist.



(A 114.)

Etwas weiter als der eben besprochene VOGEL'sche Apparat entfernt sich von dem Ocularspectroskop jener Typus von derartigen Instrumenten, die besonders in England viel gebaut und benutzt werden, die aber doch noch nicht zu den zusammengesetzten Spectroskopen gehören, wenn sie sich auch nicht mehr auf dem gewöhnlichen Fernrohrocular aufbauen. Als Beispiel soll hier eine von MC. CLEAN verfertigte kleine Vorrichtung besprochen werden, die in Fig. 114 dargestellt ist.

Mit dem Gewinde *B* wird der Apparat statt eines Oculars an das Fernrohr geschraubt. In das Rohr, welches *B* trägt, ist ein zweites Rohr geschraubt, das an seinem, dem Fernrohrobjectiv zugewandten Ende einen durch die Schraube *D* regulirbaren Spalt trägt, während in das entgegengesetzte offene Ende ein drittes Röhrchen eingeschoben ist, welches dem Spalt eine sphärische (convex-plane) Linse zukehrt, und ausserdem das geradsichtige Prisma *A* enthält, welches direkt unter dem Augendeckel liegt. Aber wenn auch dieses Instrument mit einem Spalt versehen ist und kein eigentliches Ocular mehr darstellt, so ist es doch noch zur Klasse der Ocularspectroskope zu rechnen, denn es fehlen ihm mehrere Theile, die

Das zusammengesetzte Spectroskop

charakterisiren. Dieses ist — wie bereits erwähnt — im Wesentlichen das gewöhnliche, im Laboratorium gebrauchte Spectroskop oder Spectrometer, nur mit den zur Anbringung am Fernrohr nöthigen Abänderungen. Schematisch stellt sich der Apparat danach folgendermaassen dar:

In den Brennpunkt des Objectivs des Hauptrohres wird der Spalt gebracht und die Lichtstrahlen werden nach Passirung desselben durch die Collimatorlinse parallel gemacht und fallen danach auf die Zerstreuungsvorrichtung (Prisma oder Gitter); das von dieser erzeugte Spectrum wird durch das Beobachtungsfernrohr betrachtet. Hat man es mit punktartigen Objecten am Himmel zu thun,

so ist auch hier die Einschaltung einer Cylinderlinse in den Gang der Lichtstrahlen nöthig, und wenn es auch theoretisch gleichgültig ist, an welcher Stelle das geschieht, so bietet doch die Einschaltung zwischen Fernrohrobjectiv und Spalt die meisten Vortheile; die Brennweite des ersteren wird hierbei nicht geändert, wenn man die Nebenbrennlinie der Cylinderlinse zur Verbreiterung benutzt.

Da man es nun bei der Beobachtung am Himmel meistens mit recht lichtschwachen Objecten zu thun hat, so ist es sehr wesentlich, bei der Construction solcher Apparate Lichtverluste soviel als möglich zu vermeiden. Dazu ist aber vor allen Dingen erforderlich, dass das Verhältniss der freien Oeffnung des Collimatorobjectivs zu seiner Brennweite nicht kleiner ist, als das entsprechende Verhältniss beim Objectiv des Hauptfernrohres, denn wenn bei letzterem dieses Verhältniss grösser wäre als bei dem Collimatorobjectiv, so würde die Oeffnung des von dem Spalt ausgehenden Lichtkegels grösser sein als das Collimatorobjectiv, aus letzterem könnte also nicht das gesammte Licht austreten, sondern das von den Randtheilen des Fernrohrobjectivs herrührende würde gegen die Wände des Collimatorrohres fallen. Es soll also stets, um Lichtverlust zu vermeiden, das Verhältniss von freier Oeffnung zur Brennweite bei den Objectiven von Hauptfernrohr und Collimator das Gleiche sein, denn dasselbe bei letzterem grösser zu machen als bei ersterem hat keinen Zweck, weil es den Apparat unnöthig vertheuern würde, ohne irgend welche Vortheile zu bringen, ja es hätte sogar im Gegentheil gewisse Nachtheile im Gefolge, wie wir später sehen werden.

Ferner ist es zur Ausnützung der optischen Kraft von Hauptrohr und Collimator nöthig, dass die Oeffnungen des lichtzerstreuenden Mittels (Prisma oder Gitter) und des Objectivs des Beobachtungsrohres nicht kleiner sind als die des Collimatorobjectivs; sie grösser als diese zu machen, wäre, weil es keinen Gewinn brächte, zwecklos. Gewöhnlich macht man Collimator und Beobachtungsrohr in seinen Dimensionen ganz gleich.

Sorgfältig hat man ferner darauf zu achten, dass der Spalt genau im Brennpunkt des Hauptfernrohres sich befindet, denn hier ist die grösste Helligkeit des vom grossen Objectiv erzeugten Lichtkegels. Bei der Beobachtung punktartiger Objecte ist aber noch ein anderer Grund hierfür maassgebend. Der Spalt muss als selbständige Lichtquelle angesehen werden können, was stets der Fall ist, wenn diffuses oder eine Fläche überdeckendes Licht darauf fällt. Wird jedoch das Bild eines Sternes auf einen Spalt projicirt, so kann es gelegentlich zwischen die Spaltbacken fallen und wirkt dann statt des Spaltes als Lichtquelle. Liegt es dann nicht genau in der Ebene des letzteren, so werden die Strahlen aus dem Collimatorobjectiv nicht parallel austreten. Um dies zu vermeiden, muss man den Spalt sehr genau auf das Hauptobjectiv focusiren und ihn dabei so eng halten, dass das Sternbild noch auf beide Backen übergreift; nebenbei erhält man durch einen engen Spalt auch viel schärfere Linien im Spectrum.

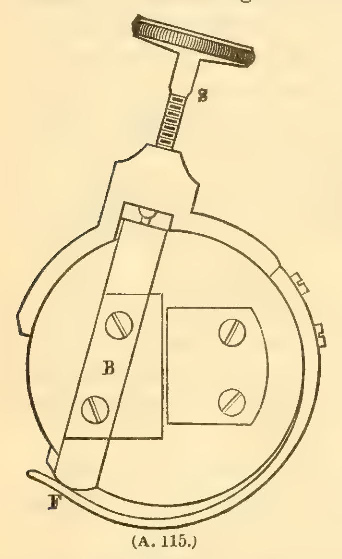
Wie schon früher besprochen, vereinigt ein Fernrohrobjectiv die Strahlen verschiedener Wellenlänge auch in verschiedenen Punkten, deshalb muss man das ganze Spectroskop jedesmal neu auf das Hauptfernrohr focusiren, wenn man zur Beobachtung einer anderen Farbe im Spectrum übergeht. Aber auch die Focalstellungen für die einzelnen Farben bleiben nicht stets die gleichen, sondern ändern sich mit der Temperatur, sodass man im Winter und Sommer mit verschiedenen Brennweiten des Objectivs zu rechnen hat. Genau gleichartige Aenderungen treten bei den Objectiven von Collimator und Beobachtungsrohr ein,

doch sind diese bei der Kleinheit dieser Linsen, wenigstens was die verschiedenfarbigen Brennpunkte anbetrifft, so geringfügig, dass man sie nicht zu berücksichtigen braucht, jedoch können die durch starke Temperaturunterschiede hervorgerufenen Verschiebungen zuweilen merklich werden, sodass man dann auch hierbei die Focusirungen erneuern muss.

Bei der grossen Fülle verschiedener Constructionen von zusammengesetzten Spectroskopen können hier auch nicht angenähert alle derartigen Apparate besprochen werden, es genügt aber auch vollständig, einzelne Theile, die besonders merkwürdig und wichtig sind, einer näheren Betrachtung zu unterziehen und ferner einzelne Instrumente gleichsam als Typus hier anzuführen. Zunächst wollen wir verschiedene Constructionen, die

Der Spalt

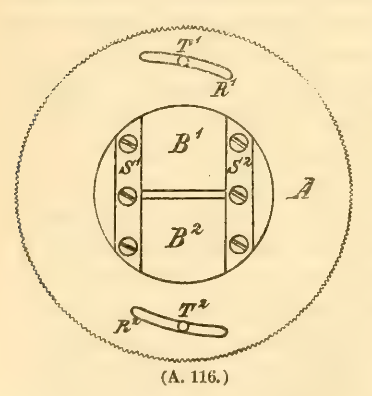
erfahren hat, hier durchnehmen. Ein guter Spalt soll immer aus zwei parallelen Schneiden von möglichst hartem Material (Stahl, Platiniridium etc.) bestehen.



(A. 115.)

Diese beiden Schneiden müssen in einer zur optischen Axe des Collimators senkrechten Ebene liegen, weil sonst gelegentlich Interferenzerscheinungen auftreten können, welche sich auch sofort zeigen, wenn man den Spalt aus zwei parallelen Ebenen statt aus zwei Schneiden herstellt. Um die Spaltweite beliebig ändern zu können, muss mindestens die eine Spaltbacke durch eine Schraube beweglich sein, und zwar ist es rathsam, die Einrichtung zu treffen, dass durch Anziehung der Schraube der Spalt geöffnet wird, während er sich beim Zurückziehen der Schraube durch einen Federdruck schliesst. Sehr einfach ist dieses Problem von Töpfer bei der Spaltvorrichtung des Spectroskops zum grossen Refractor der Wiener Universitätssternwarte gelöst, wie Fig. 115 zeigt.

Durch die Schraube S wird der Schieber B mit der einen Spaltbacke vorwärts bewegt und dadurch der Spalt geöffnet, während bei einem Zurückziehen der Schraube die Feder F den Schieber zurückdrückt und damit den Spalt schliesst.

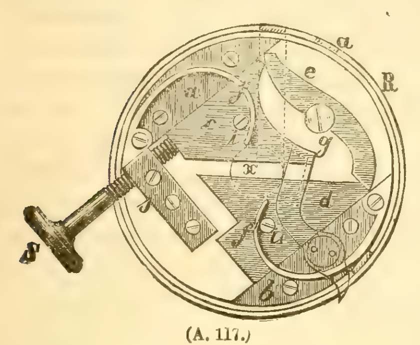


(A. 116.)

Da nun die Linien im Spectrum bei genauer Justirung des ganzen Spectroskopes getreue Abbilder des Spaltes sind, so werden sie sich auch mit diesem verstellen. Wenn man die Spaltweite durch Bewegung der einen Spaltbacke ändert, so werden sich damit auch sämmtliche Linien im Spectrum, sowie bei Messvorrichtungen auch der Nullpunkt der letzteren um die Hälfte der Aenderung der Spaltweite verschieben. Wenn nun auch dieser Betrag immer sehr gering sein wird, so ist er bei feinen Messungen doch nicht zu vernachlässigen, weshalb man, um davon frei zu werden, bei guten Spectrometern den Spalt vielfach so construirt, dass nicht nur eine, sondern beide Backen gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung um gleich grosse Beträge bewegt werden, sodass

die Mittellinie des Spaltes ihre Lage unverändert beibehält. Eine solche Construction zeigt z. B. der BROWNING'sche Spalt, wie ihn Fig. 116 darstellt.

Auf der Verschlussplatte des Collimatorrohres sind die Spaltbacken B_1 und B_2 zwischen den Schienen S_1 und S_2 verschiebbar, und jede der ersteren trägt einen senkrechten Stift T_1 und T_2. Ueber diese ganze Vorrichtung ist eine Platte A, die einen gezähnten Rand und einen mit diesem concentrischen kreisrunden Ausschnitt hat, gelegt, die zwei Schlitze R_1 und R_2 enthält, in welche die Stifte T_1 und T_2 einfassen. Durch Drehen der Platte A im Sinne der Uhrzeiger öffnet sich der Spalt, durch Drehen in entgegengesetzter Richtung wird er geschlossen. Eine feine Einstellung desselben ist allerdings bei dieser Anordnung mit Schwierigkeiten verknüpft, doch liessen sich diese wohl wesentlich herabmindern, wenn man die Platte A durch eine tangential darangelegte Mikrometerschraube drehte. Immerhin bleibt ein Nachtheil dieser Construction, dass das Schliessen des Spaltes nicht durch Federkraft bewirkt wird.

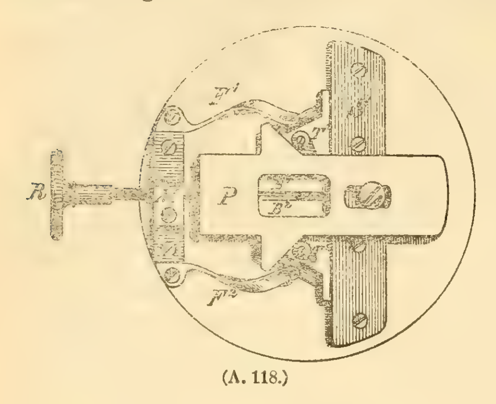


(A. 117.)

Dieser Fehler ist bei den zwei folgenden Constructionen vermieden. Fig. 117 stellt eine Spaltvorrichtung dar, wie sie von der Firma MERZ vielfach an ihren Spectroskopen angebracht und von SECCHI zuerst benutzt worden ist.

An den Führungsleisten a und b gleiten die beiden Spaltbacken c und d hin, deren Schneiden einen Winkel von 45° gegen die Bewegungsrichtung der Backen bilden. Die Backe c wird durch Hineindrehen der Schraube S in das Muttergewinde s vorwärts geschoben und drückt dabei gegen den gleicharmigen Hebel e, der seinen Drehungspunkt in g hat. Dieser Hebel e drückt nun wieder auf den anderen Spaltbacken d und bewegt diesen in entgegengesetzter Richtung wie c, sodass sich beide Backen von einander entfernen und damit der Spalt geöffnet wird. Zieht man die Schraube S zurück, so werden die Spaltbacken durch den Druck der Federn f und f' auf die Stifte i und i_1 in entgegengesetzter Richtung zurückbewegt, sodass sich der Spalt über dem (theilweise punktirten) Kreise um x, welcher die Oeffnung in dem Collimatorrohr darstellt, schliesst. Durch schwächere und punktirte Linien ist in der Fig. 117 noch die Einrichtung zur Erzeugung eines Vergleichsspectrums angedeutet. Ein ungleicharmiger Hebel, dessen kürzerer Arm in einem Haken ausläuft, der rechts unten über den äusseren Begrenzungskreis des Ringes R hinausragt, wird durch Drehen des Ringes R in einer der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung so verstellt, dass ein total reflektirendes kleines Prisma, welches auf dem Ende des längeren Hebelarmes befestigt und in Figur 117 durch ein punktirtes Rechteck angedeutet ist, den Kreis um x zur Hälfte verdeckt. Gleichzeitig bewirkt die erwähnte Drehung des Ringes R, dass die in demselben befindliche Oeffnung a über eine entsprechende in dem inneren Ringe gebracht wird (in der Fig. 117 ist diese letztere irrthümlich durch Schraffen im äusseren statt im inneren Ring angedeutet), sodass das Licht einer künstlichen Lichtquelle durch die beiden sich deckenden Oeffnungen zwischen den punktirten parallelen Linien hin auf das oben erwähnte kleine Prisma fallen kann, welche es auf die eine Hälfte des Spaltes reflektirt.

Aehnliche Vorzüge wie die eben beschriebene besitzt die in Fig. 118 abgebildete Spalteinrichtung, die ebenfalls von der Firma Merz an ihren Instrumenten vielfach angebracht worden ist. Auf der Schlussplatte des Collimatorrohres, deren kreisrunde centrale Oeffnung, welche dem Licht den Eintritt in das Rohr gestattet, zwischen den Spaltbacken B_1 und B_2 theilweise sichtbar ist, ist die Schiene S befestigt; die Spaltbacken B_1 und B_2 werden gegen diese und gegen einander durch die Federn F_1 und F_2 gepresst. Durch Hineindrehen der Schraube R in das Gewinde M wird die Platte P, die durch die Schraube A geführt wird, vorwärts geschoben, und ihre beiderseitigen nasenartigen Ansätze drücken gegen die in B_1 und B_2 eingeschraubten conischen Stifte T_1 und T_2 und entfernen diese von einander, wodurch der Spalt geöffnet wird. Da die Schraube R in P drehbar befestigt ist, so wird bei einem Zurückdrehen von R auch P rückwärts bewegt, sodass der Druck gegen T_1 und T_2 aufhört und nunmehr durch den Druck der Federn F_1 und F_2 der Spalt geschlossen wird. Die Erzeugung eines Vergleichsspectrums wird in genau derselben Weise bewirkt, wie das bei Fig. 117 beschrieben ist.



(A. 118.)

Es ist einleuchtend, dass die hier besprochenen Spalteinrichtungen sofort mit einer messbaren Verstellung des Spaltes versehen werden können, wenn man die Regulirungsschraube jedesmal mit einem getheilten Kopf und Index versieht; der Werth eines Trommeltheils ausgedrückt in Millimetern der Spaltweite ist am besten auf empirischem Wege zu bestimmen. Auf die Ablesung der Schraubentrommel darf man sich zur Ableitung der Spaltweite übrigens bei Erzielung der grössten Genauigkeit nicht auf längere Zeit verlassen, denn einmal ändert sich der Nullpunkt der Theilung allmählich, dann aber erhält man auch verschiedene Spaltweiten, je nachdem man bei sich öffnendem oder sich schliessendem Spalt eine bestimmte Trommelablesung einstellt. In der Praxis wird man sich bei häufigen Beobachtungen bald ein Urtheil über die richtige Spaltweite unabhängig von der Trommelablesung bilden. Bei den beiden zuletzt beschriebenen Spalteinrichtungen ist schon einer Vorkehrung Erwähnung gethan, bestehend in einem kleinen, total reflektirenden Prisma, welches so justirt ist, dass es seitlich einfallendes Licht einer irdischen Lichtquelle auf die eine Hälfte des Spaltes wirft, während auf die andere das zu untersuchende Licht vom Himmel fällt. Man erblickt dann im Gesichtsfelde des Beobachtungsrohres die Spectren des Objects am Himmel und der irdischen Lichtquelle neben einander gelagert und kann dieselben also direkt mit einander vergleichen. Das Resultat einer solchen Vergleichung wird noch genauer ausfallen, wenn man zwei Vergleichsspectren erzeugt, die das zu untersuchende Spectrum einschliessen, was man auf sehr einfache Weise dadurch erreicht, dass man statt eines kleinen Prismas vor der einen Hälfte des Spaltes einen versilberten Glasspiegel unter 45° Neigung vor den ganzen Spalt setzt und die Mitte des Spiegels durchbohrt. Dann fällt das Licht vom Himmel auf den mittleren Theil des Spaltes, das der irdischen Lichtquelle auf den oberen und unteren Theil desselben. Alle diese Methoden zur Erzeugung eines Vergleichsspectrums sind jedoch, sobald es sich um Erlangung

der äussersten Genauigkeit handelt, nicht mehr ausreichend, denn bei den bisher erörterten Verfahren passieren die vom Himmel und von der Erde kommenden Lichtstrahlen verschiedene Theile der Objective von Collimator und Beobachtungsrohr, sowie des lichtzerstreuenden Theiles des Apparates, weil die beiden Strahlengattungen nebeneinander auf den Spalt fallen. Besonders stark werden die dadurch auftretenden Ungenauigkeiten dann werden können, wenn das Verhältniss von freier Oeffnung zur Brennweite beim Collimatorobjectiv grösser ist, als beim Objectiv des Hauptfernrohres, denn dann werden die vom Himmel kommenden Strahlen — wie schon früher gezeigt — nur die mittleren Partien der Collimatorlinse sowie der übrigen optischen Theile des Apparates treffen, während die der irdischen Lichtquelle hauptsächlich die Randtheile durchsetzen werden. Das ist der schon oben angedeutete Grund, weshalb man das erwähnte Verhältniss beim Collimator nicht grösser machen soll als beim Hauptfernrohr. Bei den genauesten Spectralbeobachtungen wird es immer wünschenswerth sein, beide Spectren aufeinander zu projiciren, was man dadurch erreicht, dass man eine GEISSLER'sche Röhre in grösserer Entfernung vom Spalt symmetrisch in den Lichtkegel des Hauptfernrohres so einschaltet, dass ihre Längsrichtung senkrecht zu der des Spaltes steht. Dass andere Anordnungen, die dasselbe erreichen, möglich sind, ist selbstverständlich, doch sei hier nur diese eine verhältnissmässig einfache und bequeme Construction erwähnt.

Sobald man nun aber die Linien in irgend einem Spectrum ihrer gegenseitigen Lage und schliesslich ihrer Wellenlänge nach bestimmen will, muss man am zusammengesetzten Spectroskop Messungsapparate anbringen und bezeichnet die damit versehenen Instrumente dann als

Spectrometer.

Die Einrichtungen derselben zeigen eine ausserordentlich grosse Mannigfaltigkeit, doch lassen sie sich in folgende vier Hauptgruppen sondern. Man verwendet zur Wellenlängenbestimmung entweder Scalen oder Schraubenmikrometer oder misst die Winkel, um welche man das Beobachtungsrohr drehen muss; dazu kommen noch als vierte Klasse die Vorkehrungen zur Messung der Verschiebung von Spectrallinien in Folge der Bewegung der Lichtquelle im Visionsradius.

Die einfachste, aber auch ungenaueste Messung erhält man durch die Scala. Diese besteht meist in einer geschwärzten Glasscheibe, in welche die Theilstriche eingeritzt sind, sodass sie, wenn man die Scheibe von der Rückseite beleuchtet, hell auf dunklem Grunde erscheinen. Um das Bild dieser Scala im Focus des Beobachtungsrohres entstehen zu lassen, bringt man dieselbe in den Focus eines kleinen Fernrohres, das Scalenrohr genannt, welches man an dem Spectrometer so befestigt, dass die von der Scala kommenden und aus dem Objectiv des Scalenrohres parallel austretenden Lichtstrahlen an der dem Beobachtungsrohr zugewandten Prismenfläche in das letztere hinein reflektirt werden. Das Scalenrohr wird so justirt, dass die Scala entweder über oder unter dem Spectrum im Gesichtsfelde erscheint und zwar derartig, dass die Theilstriche den Spectrallinien parallel sind. Man kann solche Scalen übrigens auch an Ocularspectroskopen anbringen, wobei es dann überflüssig ist, die von der Scala ausgehenden Strahlen vor dem Auffallen auf die Prismenfläche parallel zu machen; das Scalenrohr wird einfach so weit ausgezogen, dass der Beobachter die Scala deutlich sieht.

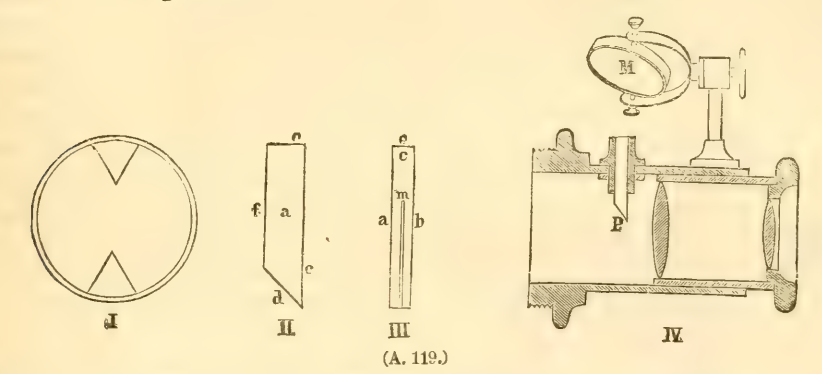
In ganz anderer Weise bringt ROOD in England die Scala an. Derselbe setzt in den Focus des Beobachtungsrohres eine fast die Hälfte des Gesichtsfeldes einnehmende, blank polirte Silberplatte ein, deren scharf geschliffene Kante der Längsrichtung der Spectren parallel gestellt wird. Diese Platte wird geschwärzt und darauf die Theilung längs der scharfen Kante eingerissen, so dass, wenn man dieselbe entweder durch eine seitliche Oeffnung im Ocular direkt beleuchtet oder das Licht von der Seite her durch eine unter 45° vor das Ocular gesetzte planparallele Glasplatte darauf wirft, das durchscheinende Silber die Theilstriche weiss auf schwarzem Grunde erscheinen lässt. HOFFMANN in Paris setzt bei seinen Instrumenten gelegentlich eine planparallele Glasplatte in die Focalebene des Beobachtungsrohres, auf welcher eine geschwärzte Theilung eingetragen ist, doch lässt sich diese Einrichtung mit Vortheil nur bei ziemlich hellen Spectren verwenden.

Will man dieselbe auch für schwache Spectren verwenden, so muss man die Theilung nach H. C. VOGEL's Vorschlag aus Leuchtfarbe herstellen und vor Beginn der Beobachtung intensiv beleuchten. Da die Leuchtfarbe undurchsichtig ist, so erscheint die Theilung auf hellen Spectren dunkel, auf schwachen dagegen leuchtend.

Bei allen Scalen ist es von Vortheil, wenn man dieselben in der Längsausdehnung messbar verschieben kann. Hat man nämlich die Lagen einer Reihe von Spectrallinien an der Scala abgelesen, so verlegt man deren Nullpunkt und wiederholt die Ablesungen. Verstellt man die Scala nicht, so geschieht es leicht, dass man durch die erste Messungsreihe präoccupirt ist und bei einer Wiederholung wieder genau die gleichen Einschätzungen macht.

Das Schraubenmikrometer, wie es an jedem besseren Fernrohr zu Positionsbestimmungen gebraucht wird, haben wir schon bei Besprechung des Objectivprismas als Apparat zur Ausmessung von Spectren erwähnt. Dasselbe wird bei den zusammengesetzten Spectroskopen am Ocular des Beobachtungsrohres in der bekannten Form angebracht und bedarf hier keiner besonderen Erläuterung, denn das einzige, was es von den gewöhnlichen sogenannten Fadenmikrometern unterscheidet, ist die Art der im Gesichtsfeld angebrachten Einstellungsmarke. Als solche kann nämlich der einfache Spinnfaden der gewöhnlichen Mikrometer bei den Spectralmessungen deshalb nicht dienen, weil er die feinen Spectrallinien verdeckt und damit die Einstellung sehr unsicher macht. Besser ist schon ein Doppelfaden, zwischen den man die Linie bringt, aber auch diesem vorzuziehen ist die Verwendung zweier unter 60° gekreuzter Fäden (Andreaskreuz), die man so auf die Spectrallinie stellt, dass dieselbe durch den Kreuzungspunkt geht und den Winkel von 60° halbirt. Bei hellen Spectren erkennt man die Fäden deutlich auf dem hellen Untergrunde, den das continuirliche Spectrum gewährt. Bei schwächeren Spectren kann man die Fäden künstlich erleuchten; aber bei ganz schwachen Objecten würde das zu sehr blenden, man muss daher dann zu Marken greifen, die auch im Dunkeln noch erkennbar sind. Dazu verwendet MERZ eine feine Stahlspitze, welche man so einstellt, dass die schwachen Spectrallinien als Verlängerung derselben erscheinen. Statt einer Spitze hat H. C. VOGEL zwei diametral gegenüberstehende, an ihrer Basis breite, im Uebrigen scharfkantige und nach dem Ocular zu ebene Spitzen verwendet, wie sie Fig. 119 I zeigt; diese sind auch neben ganz schwachen Spectren noch erkennbar und man stellt die Linien in die Verbindungslinie der beiden Spitzen, was sich genauer bewerkstelligen lässt, als die Einstellung auf nur eine Spitze. VOGEL hat auch diese Spitzen aus Glas herstellen lassen und

sie auf der Rückseite mit Leuchtfarbe bestrichen. Sie wirken dann ähnlich wie die oben besprochene Scala aus Leuchtfarbe, d. h. sie erscheinen in dem Maasse heller, als das Spectrum an Intensität abnimmt. Eine andere, von demselben zuerst vorgeschlagene und von A. HILGER in London ausgeführte Marke ist in Fig. 119 II—IV abgebildet.



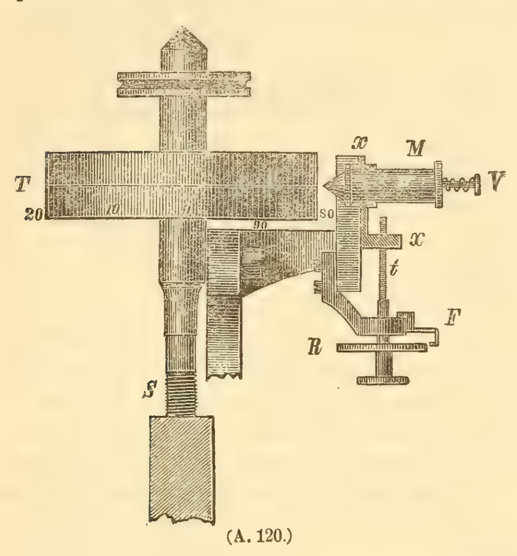
(A. 119.)

Ein kleines Glasprisma, welches Fig. 119 II und III in Seiten- und Vorderansicht darstellt, ist auf den Flächen *a*, *b* und *f* matt geschliffen, während die Vorderfläche *c* versilbert ist. In diese Silberschicht ist eine feine Linie *m* eingeritzt. Wird nun durch Fläche *e* Licht in das Prisma geworfen, so wird dieses an Fläche *d* total reflektirt und auf Fläche *c* geworfen, wodurch die Linie *m* erleuchtet wird. In der Fig. 119 IV ist die Einfügung des ganzen Prismas *P* in ein Ocular und seine Beleuchtung durch Spiegel *M* dargestellt; man sieht also im Gesichtsfelde nichts als die feine Lichtlinie *m*, auf welche die Spectrallinien eingestellt werden. SECCHI suchte die hier bestehenden Schwierigkeiten dadurch zu besiegen, dass er das Mikrometer — ganz ebenso wie die früher besprochene Scala — an das Ende eines besonderen Mikrometerrohres legte, dessen parallel austretende Lichtstrahlen ebenfalls von der dem Beobachtungsrohr zugewandten Prismenfläche in das letzte hineinreflektirt wurden. Als Mikrometermarke verwandte er dabei einen engen Spalt, den er von hinten beleuchtete, sodass er im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohres als feine Lichtlinie erschien. Diese Idee ist von BROWNING in seinem »Ghost-Micrometer« wieder aufgenommen, nur dass er statt des Spaltes eine feine, in eine versilberte Glasplatte geritzte Linie benutzt und die Reflexion in das Beobachtungsrohr nicht durch die letzte Prismenfläche, sondern durch ein kleines, totalreflektirendes Prisma besorgen lässt. Die beiden zuletzt beschriebenen Mikrometer leiden an dem Uebelstand, dass sich die Parallaxe nie ganz beseitigen lässt. Bei allen solchen Marken, die aus einer hellen Linie bestehen, wird es aber bei nur etwas genaueren Messungen immer anzurathen sein, durch farbige Gläser denselben angenähert die Farbe der eben zu messenden Spectralgegend zu geben, weil dadurch einige aus der mangelhaften Achromasie der Objective von Collimator und Beobachtungsrohr entspringende Fehler gemildert und ausserdem das beständige Wechseln in der Accommodation des Auges vermieden wird.

Geradezu sehr bedenklich ist die von HILGER in London ausgeführte Mikrometereinrichtung, die darin besteht, den Spalt des Collimatorrohres messbar zu verschieben. Hat man im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohres eine feste Marke, so kann man in der That auf diese Weise Abstände von Spectrallinien messen. Aber die Centrirung des Collimators wird dabei nicht nur zerstört, sondern man kommt auch bald mit dem Spalt aus der Brennfläche des Colli-

matorobjectivs. Ferner passiren beim Verschieben des Spaltes die von ihm kommenden Lichtstrahlen das Prisma an immer anderen Stellen und fallen unter immer anderen Winkeln auf dasselbe, kurz die Spectrallinien nehmen bei Benutzung dieses Mikrometers bald ein verwaschenes Aussehen an, und die Messungen enthalten principielle Fehler.

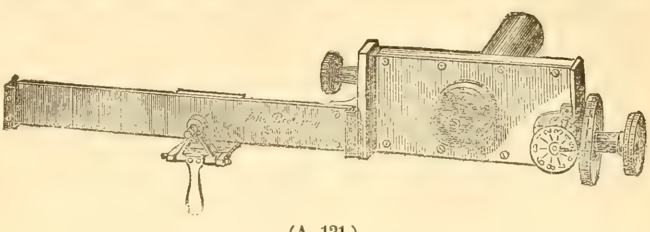
Da man es bei Beobachtungen am Himmel vielfach mit recht schwachen Spectren zu thun hat, so ist bei den Messungen das Ablesen der beleuchteten Mikrometertrommel und das Aufschreiben der gewonnenen Zahlen auf eine helle Papierfläche wegen der dabei unvermeidlichen, wenn auch sehr schwachen Blendung des Auges lästig. Man hat daher Vorrichtungen ersonnen, welche gestatten wenigstens eine Reihe von Messungen hintereinander zu machen, ohne jedesmal die Theilung ablesen zu müssen. Einen solchen, nach Angaben von H. C. VOGEL von HILGER ausgeführten Apparat stellt Fig. 120 dar. Die 12 *mm* breite Trommel *T* der Mikrometerschraube *S* trägt in ihrer Mitte die Theilung, von der die Ziffern 0, 10, 20, 80 und 90 in der Figur angegeben sind. Dicht an die versilberte Trommel reicht die durchbohrte Spitze der mit flüssiger Farbe gefüllten Büchse *M*, in welcher sich ausserdem eine Nadel befindet, die durch einen Druck auf den Knopf *V* aus der Spitze hervortritt und auf der Trommel einen farbigen Punkt macht. Um nun mehrere Einstellungen der Schraube auf diese Weise markiren zu können, ohne ein Aufeinanderfallen der Punkte befürchten zu müssen, kann man die Fassung *x* der Büchse *M* durch die Schraube *t* verschieben, und damit diese Verschiebungen nur so gross werden, wie unbedingt nothwendig ist, fasst die Feder *F* in Einschnitte am Rande der Scheibe *R*. So kann man 15 Einstellungen der Mikrometerschraube nacheinander markiren. Dann liest man die Punkte, über deren Reihenfolge man durch die verschiedenen Abstände von der Theilung nicht in Zweifel sein kann, in ihrer Lage zu den Trommeltheilen ab und entfernt die noch feuchten Marken, um sofort eine neue Beobachtungsreihe beginnen zu können.



(A. 120.)

Weniger zur Begistrirung der Mikrometereinstellungen, als vielmehr zur Aufzeichnung der Spectrallinien in ihrer gegenseitigen Lage dient das folgende in der Werkstätte von BROWNING nach dem Plane von CAMPBELL angefertigte Instrument, welches in Fig. 121 abgebildet ist. An dem Ocularkopf des Beobachtungsrohres ist ein Mikrometer mit getheiltem Kopf und Zählvorrichtung für die ganzen Schraubenumdrehungen angebracht. Die Schraube reicht aber über den Ocularkasten nach links weit hinaus und trägt hier ein Gewinde von viermal so grosser Steigung als im Innern des Kastens. Vor diesem freien Theil der Schraube ist eine Messingschiene befestigt, auf deren Vorderseite ein berusster Glasstreifen festgeklemmt werden kann. Auf der Rückseite der Messingschiene gleitet ein Schlitten entlang, der auf die Vorderseite übergreift, und der einen in der Figur sichtbaren feinen Reisser trägt, mit welchem man auf dem berussten

Glasstreifen Striche senkrecht zur Längsausdehnung desselben ziehen kann. Man stellt nun mittelst der Mikrometerschraube die Marke im Ocular nacheinander auf die verschiedenen Linien im Spectrum ein und zieht nach jeder Einstellung mit dem Reisser einen Strich auf der berussten Platte. Man kann auf diese Weise sehr einfach ein genaues Abbild der Linien in einem Spectrum bekommen, doch erheischt der Apparat eine vorsichtige Behandlung.



(A. 121.)

Im Allgemeinen wird bei den Spectroskopen die Dispersion viel zu gross sein, als dass es möglich wäre, das ganze Spectrum auf einmal zu überblicken und mit einem der oben besprochenen Mikrometer direkt gleich in seiner ganzen Länge ausmessen zu können. Häufiger wird vielmehr der Fall eintreten, dass man im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohres immer nur einen Teil des Spectrums erblickt und das Rohr drehen muss, um nach und nach das ganze Spectrum überblicken zu können. Diese Drehung kann man direkt zur Ausmessung der Spectren verwenden, wenn man Vorrichtungen zur

Messung der Drehungswinkel an dem Apparate anbringt. Da für gewöhnlich die Winkel, um welche man das Beobachtungsrohr drehen muss, um die einzelnen Linien auf die im Gesichtsfeld desselben angebrachte Marke einzustellen, klein sind, so genügt es, in vielen Fällen nur einen getheilten Kreissector zu verwenden, an dem ein Nonius hingleitet. Sehr beliebt ist auch die Einrichtung, dass man die Drehung des Beobachtungsrohres mittelst einer Mikrometerschraube mit getheiltem Kopf ausführt und dieselbe an einem getheilten Sector angreifen lässt, an dem man dann die ganzen Umdrehungen der Schraube ablesen kann. Kommt es auf die Erreichung der äussersten Genauigkeit und auf die Bestimmung absoluter Wellenlängen an, so bringt man das Beobachtungsrohr derartig an, dass es auch um grössere Winkel gedreht werden kann, die man dann an einem fein getheilten Vollkreise mittelst diametral gegenüberstehender Nonien oder Mikroskope abliest. Dabei pflegt man überdies auch noch die automatische Einstellung des Prismensatzes auf das Minimum der Ablenkung anzubringen und hat damit dann das Laboratorium-Spectrometer den Untersuchungen am Himmel angepasst. Vielfach werden allein derartige Apparate in der Astrospectroskopie mit der Bezeichnung »Spectrometer« belegt, doch verdienen schliesslich alle mit irgend welcher Messeinrichtung versehenen Spectroskope dieselbe in gleichem Maasse. Dass bei so feinen Instrumenten wie den zuletzt beschriebenen, fast ausnahmslos auch ein Mikrometer am Ocular des Beobachtungsrohres angebracht ist, bedarf wohl kaum einer besonderen Erwähnung, denn es liegt doch wohl auf der Hand, dass bei den erheblichen Kosten eines solchen Apparates die kleine Preiserhöung, die ein Mikrometer verursacht, nicht in Betracht kommt gegenüber dem Vortheil, ein für alle Arten von Messungen taugliches Instrument zu besitzen.

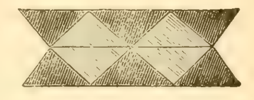
Ausser diesen vollkommensten Spectrometern, die eine direkte Einstellung des Beobachtungsrohres auf den Spalt und damit die Bestimmung absoluter Wellenlängen gestatten, sind die sämmtlichen anderen oben besprochenen Messapparate in erster Linie für Anschlussbeobachtungen bestimmt, d. h. man bestimmt die Lage von Spectrallinien mit unbekannter Wellenlänge gegen die-

jenigen Linien in demselben oder in einem Vergleichsspectrum, deren Wellenlänge man kennt. Will man solche Apparate zu absoluten Wellenlängenbestimmungen benutzen, so muss man vorher den Werth ihrer Theilungen, welcher Art diese auch seien, wie auch deren Nullpunkt an einem Spectrum von bekannten Wellenlängen ermitteln. Diese Auswerthungen der Messinstrumente muss man von Zeit zu Zeit wiederholen, weil man sich auf deren Unveränderlichkeit nicht verlassen kann. Besonders ist zu berücksichtigen, dass es sich gezeigt hat, dass die Einwirkung der Schwere auf solche Aichungen der Instrumente von Einfluss ist, d. h. dass die Werthe vom Nullpunkt und Theilung in Wellenlängen etwas andere sind, je nach der Lage, die das Spectrometer bei der Beobachtung gerade einnimmt. Zeigen sich solche Einflüsse, so können sie nur durch peinliche Untersuchungen in verschiedenen Lagen des Instrumentes unschädlich gemacht werden. Ferner ist dabei zu berücksichtigen, dass in den seltensten Fällen das scharfe Einstellen des Beobachtungsrohres auf eine Farbe im Spectrum mit der Stellung desselben auf unendlich zusammenfällt, daher wird man dann auch beim Uebergang auf eine andere Farbe bei der Beobachtung die Marke im Gesichtsfeld genau in die Ebene dieser Spectralgegend bringen müssen, damit sie im Ocular mit den Linien im Spectrum zugleich scharf erscheint; eine Verschiebung dieser Marke wird aber nur zu leicht auch eine solche des Nullpunktes mit sich bringen, wodurch also die Bestimmung absoluter Wellenlängen durch geaichte Mikrometer als eine immer schwierigere sich darstellt.

Aus diesem Grunde hat man in Fällen, wo es auf sehr genaue Messungen von Wellenlängen ankommt, zu besonderen Vorkehrungen seine Zuflucht genommen. Solche besonders exakte Wellenlängenbestimmungen sind hauptsächlich dann nöthig, wenn es sich um Ermittelung der Bewegung der Lichtquelle im Visionsradius mit Hilfe des DOPPLER'schen Princips handelt. Um hier von der Bestimmung absoluter Wellenlängen frei zu werden, bemüht man sich, direkt nur die Verschiebungen der Spectrallinien, wie sie durch die Bewegung der Lichtquelle hervorgerufen werden, zu messen. Da nun diese Beträge immer sehr klein sind und eine ausserordentliche Feinheit der Messung erfordern, wenn die Resultate einigermaassen genau werden sollen, so ist ZÖLLNER auf den Gedanken gekommen, diese Beträge künstlich zu vergrössern, und hat zu diesem Zwecke sein Reversionsspectroskop gebaut, dessen Princip darauf beruht, dass von der zu untersuchenden Lichtquelle zwei Spectren erzeugt werden, die der Länge nach neben einander gelagert sind, aber in umgekehrter Richtung, sodass das rothe Ende des einen neben dem violetten des andern liegt. Stellt man nun den Apparat mit Hilfe einer ruhenden Lichtquelle so ein, dass eine bestimmte Linie in dem einen Spectrum als die genaue Fortsetzung der gleichen Linie im anderen Spectrum erscheint, und richtet ihn dann auf die zu untersuchende bewegliche Lichtquelle, so wird die Linie jetzt verschoben sein, und man wird die beiden Bilder derselben in den zwei Spectren nicht mehr in genauer Fortsetzung, sondern um den doppelten Betrag der einfachen Verschiebung der Linie von einander getrennt sehen. ZÖLLNER hat nun die Vorrichtung zur Erzeugung der zwei entgegengesetzten Spectren und deren messbare Verschiebung gegen einander entweder in das Prisma oder das Objectiv oder das Ocular des Beobachtungsfernrohres gelegt, sodass man danach drei Klassen von Reversionsapparaten zu unterscheiden hat.

Bei dem Reversionsprisma fällt das aus dem Collimatorrohr austretende Licht auf zwei Prismensätze *à vision directe*, deren brechende Kanten gegeneinander gekehrt sind, wie das Fig. 122 zeigt. Die Verschiebung der dadurch erzeugten

beiden Spectren in ihrer Längsrichtung und die Regulirung des Abstandes derselben von einander wird entweder durch geeignete Drehungen und Verschiebungen der Prismensätze mittelst verschiedener Mikrometerschrauben mit getheilten Köpfen oder dadurch erzeugt, dass man für das Beobachtungsfernrohr ein diametral zerschnittenes Objectiv anwendet, dessen eine Hälfte die Strahlen des einen, die andere Hälfte die des anderen Prismensatzes erhält. Jede Objectivhälfte kann sowohl parallel als senkrecht zur Schnittlinie messbar bewegt werden, wodurch man die nothwendigen Verschiebungen der Spectren im Ocular erhält.



(A. 122.)

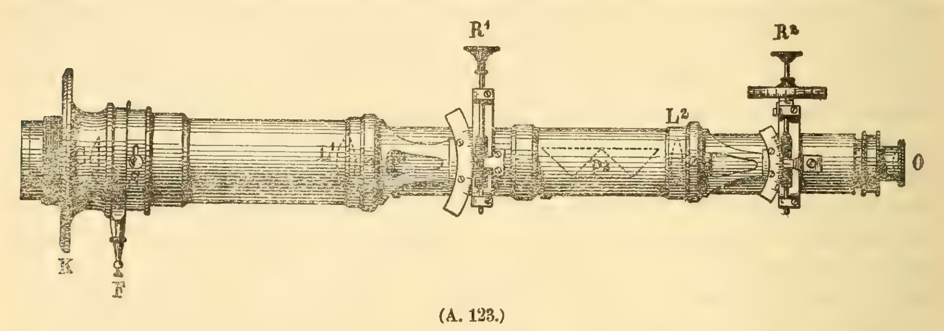
Diese letzte Art der Spectrenbewegung leitet direkt zum Reversionsobjectiv über. Dieses ist ebenfalls durch einen diametralen Schnitt in Hälften zerlegt, welche durch eine Schraube in zur Schnittlinie und zur optischen Axe senkrechter Richtung bewegt werden können. Vor der einen Hälfte befindet sich ein rechtwinkliges Reflexionsprisma, das mittelst Feinbewegung um die eine Kante der Hypotenusenfläche so gedreht werden kann, dass diese Fläche stets senkrecht zu einer durch die Schnittlinie des Objectivs und die optische Axe des Fernrohres gehenden Ebene bleibt. Auf diese ganze Vorrichtung fällt nun das aus dem Collimatorrohr austretende und durch ein Prisma zerlegte Licht. Die beiden Objectivhälften erzeugen zwei Bilder, von denen das eine durch das Reflexionsprisma umgekehrt ist. Durch Verschieben der beiden Objectivhälften lassen sich die beiden Spectren seitlich dicht nebeneinander lagern, während eine Bewegung des einen Spectrums seiner Längsrichtung nach durch eine Drehung des Reflexionsprismas erzeugt wird. Dieser ganze Apparat lässt sich an jedem gewöhnlichen Spectroskop anbringen, da die Zerstreuungsvorrichtung keine besondere ist.

Um jedoch in noch einfacherer Weise jeden Spectralapparat zu einem Reversionsinstrument umzugestalten, hat ZÖLLNER das Reversionsocular construirt. Am Augendeckel des Beobachtungsfernrohres werden zwei kleine rechtwinklige Prismen so angebracht, dass jedes eine Hälfte des Gesichtsfeldes verdeckt und dass bei normaler Stellung derselben die Hypotenusenfläche des einen das Gesichtsfeld diametral durchschneidet, die des anderen senkrecht dazu steht. Durch letzteres wird das eine der beiden Spectren, in welche durch die beiden Prismen das ursprünglich einfache Spectrum zerlegt ist, seiner Längsrichtung nach umgekehrt und kann durch Drehen dieses Prismas auch in dieser Richtung verschoben werden, während durch Drehung des ersten Prismas beide Spectren nebeneinander gelagert werden können. Gelegentlich fehlt dieses letzte Prisma, da aber auf das andere die Umkehrung des Spectrums besorgende Prisma keine parallelen Strahlen auffallen, folglich eine Aenderung der Divergenz eintritt, so muss vor die vom Prisma nicht bedeckte Hälfte des Augendeckels die verstellbare Hälfte einer Concavlinse gesetzt werden, um eine entsprechende Correction der Brennweite zu erzielen.

So sinnreich die Reversionsapparate sind, so sind sie doch ausser 1871 von H. C. VOGEL zur Constatirung der Sonnenrotation nicht weiter zu wissenschaftlichen Forschungen angewendet worden, und besonders das Reversionsocular hat sich bei verschiedenen Versuchen als nahezu ganz unbrauchbar erwiesen.

Nachdem die verschiedenen Messapparate besprochen sind, sollen in der Kürze noch einige zusammengesetzte Spectroskope etwas näher betrachtet werden.

In Fig. 123 ist ein von der Firma MERZ in München ausgeführtes Spectroskop dargestellt. Der Positionskreis K wird mittelst eines daran sitzenden Schraubengewindes an dem Hauptfernrohr befestigt und lässt sich dann das ganze Spectroskop gegen den Positionskreis drehen und diese Drehung mittelst Index ablesen. Der Spalt hat die in Fig. 118 dargestellte Einrichtung, und der Kopf seiner Regulirungsschraube ist bei S sichtbar; auch ist hier ein Ring um das Rohr gelegt, der frei drehbar ist und einen schlitzförmigen Ausschnitt hat, um die Schraube S frei hindurch zu lassen. Eine Drehung dieses Ringes bewirkt, dass hinter der Klemme F eine Oeffnung im Rohr freigelegt und ein total reflektirendes kleines Prisma vor die eine Hälfte des Spaltes geschoben wird; schaltet man nun bei F eine Funkenstrecke ein, so fällt deren Licht durch die Oeffnung auf



(A. 123.)

das Prisma und erzeugt also im Apparat ein Vergleichsspectrum. Die vom Spalt kommenden Lichtstrahlen werden durch das Collimatorobjectiv L_1 parallel gemacht und passiren dann zwei hintereinander geschaltete gleiche Prismensätze *à vision directe* P_1 und P_2, von denen der erstere in die Figur nicht eingezeichnet ist, um sie nicht undeutlich zu machen. Das Rohr, welches P_1 und P_2 enthält, lässt sich mittelst der Schraube R_1 und eines mit dem Collimatorrohr fest verbundenen getheilten Sectors messbar gegen L_1 drehen. Nach dem Durchgang durch die beiden Prismensätze fällt das Licht auf das Objectiv L_2 des Beobachtungsfernrohres, in dessen Ocular O man nun das Spectrum erblickt. Das Beobachtungsrohr ist mittelst der Mikrometerschraube R_2, deren Trommel in 100 Theile getheilt ist, und einem mit dem Prismenrohr fest verbundenen getheilten Sector gegen die Prismen drehbar, wodurch also die Ausmessung der Spectren ermöglicht ist. Der ganze Apparat soll für die verschiedensten Spectralbeobachtungen am Himmel dienen. Bei Sternbeobachtungen schaltet man vor dem Spalt bei C eine Cylinderlinse ein, während die Einstellung des Spectroskops in Positionswinkel hauptsächlich bei Beobachtungen des Sonnenrandes Verwendung finden wird.

Für letzteren Zweck pflegt man für gewöhnlich meist besondere Apparate zu construiren, die man als Protuberanzen- oder Sonnen-Spectroskop bezeichnet.

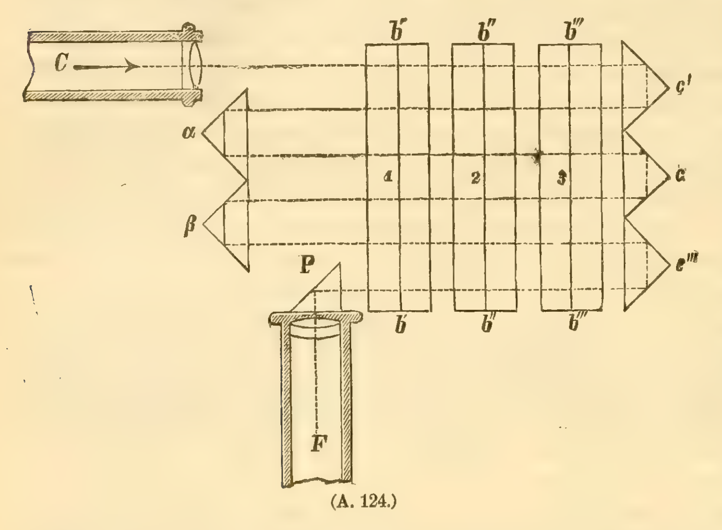
Man hat die Protuberanzen, jene am Sonnenrande nur zu beobachtenden Ausströmungen von glühendem Wasserstoffgas zuerst bei totalen Sonnenfinsternissen wahrgenommen, weil in diesem Falle der Mond eine starke Erhellung der Erdatmosphäre besonders in der Nachbarschaft des Sonnenrandes verhindert, und weil gerade diese für gewöhnlich das Licht der Protuberanzen überstrahlt. Das Spectrum der Protuberanzen besteht in der Hauptsache aus den drei hellen Wasserstofflinien C, F und $H\gamma$, und zwar ist die Intensität der letzteren viel geringer als die der beiden ersteren. Gestützt hierauf kamen bei der Sonnen-

finsterniss von 1868 Janssen und Lockyer zur Beobachtung von Protuberanzen ohne Finsterniss, ersterer ist praktischer Weise auf der Station, letzterer lediglich durch Ueberlegung unabhängig von der Finsterniss. Schon Monate vorher hatte Zöllner diese Methode theoretisch entwickelt und begründet, und die beiden genannten Gelehrten waren die ersten, die sie praktisch ausführten. Sie beruht auf folgendem: Stellt man den Spalt eines Spectroskopes tangential zum Sonnenrand, so erhält man das als lichtschwaches Sonnenspectrum sich darstellende Spectrum der erleuchteten Erdatmosphäre; auf diesem als Untergrund erscheinen nun, wenn sich an der betreffenden Stelle des Sonnenrandes eine Protuberanz befindet, die hellen Wasserstofflinien des Protuberanzenspectrums, und zwar so lang, als an der betreffenden Stelle die Protuberanz breit ist. Entfernt man nun den Spalt parallel zu sich selbst etwas vom Sonnenrande, so bleibt im wesentlichen der Anblick im Gesichtsfeld derselbe, nur haben die Wasserstofflinien jetzt eine Länge, die dem gerade unter dem Spalt befindlichen Durchmesser der Protuberanz entspricht; man kann also die Form der Letzteren durch ein successives Zeichnen ihrer Durchmesser festlegen. Das gleiche Verfahren lässt sich auch anwenden, wenn man den Spalt radial zum Sonnenrande stellt und ihn bis zu diesem abblendet. Da man nun aber eine monochromatische Lichtquelle im wesentlichen in ihrer richtigen Gestalt sieht, wenn man dieselbe durch ein Prisma betrachtet, und da man die Strahlen einer der Wasserstofflinien einer Protuberanz als solche von einer monochromatischen Lichtquelle ausgehende ansehen kann, so muss man auch bei weit geöffnetem Spalt in jeder der einzelnen Wasserstofilinien ein Bild der Protuberanz sehen. Oeffnet man jedoch den Spalt weit, so werden die Protuberanzenlinien breiter, aber nicht heller, während das continuirliche Spectrum schnell an Helligkeit zunimmt und die Wasserstofflinien schliesslich überstrahlt. Wählt man jedoch für diesen Fall eine erheblich stärkere Dispersion, so schwächt man damit die Helligkeit des continuirlichen Spectrums beträchtlich, und die Protuberanzenlinien treten wieder hervor, und in jeder derselben ein Bild der Protuberanz selbst. Man muss also den Contrast zwischen continuirlichem und Protuberanzen-Spectrum möglichst erhöhen, und das geschieht einmal durch Anwendung einer so starken Dispersion, wie sie das nicht sehr helle Licht der Protuberanz irgend verträgt, und zweitens durch Wahl eines kleinen Beobachtungsrohres.

Wenn nämlich die Oeffnung des letzteren unter strenger Festhaltung des Verhältnisses von Objectivöffnung zur Brennweite etwa auf die Hälfte herabgemindert wird, so wird auch das Protuberanzenbild nur halb so gross, man braucht also den Spalt nur halb so weit zu öffnen, um es ganz zu überblicken. Dann wird aber das continuirliche Spectrum nur halb so hell sein als bisher, während die Protuberanzenlinien ihre Intensität beibehalten haben, also ist der Contrast auf das Doppelte erhöht. Freilich erscheint die Protuberanz im Gesichtsfelde auch nur halb so gross als bisher, man muss also entweder die Ocularvergrösserung oder die Brennweite der Collimatorlinse verdoppeln, um die frühere Grösse des Protuberanzenbildes zu erhalten. Hierdurch tritt eine Herabsetzung der Gesammtintensität des Gesichtsfeldes, aber nicht des oben erwähnten Contrastes ein. Die Helligkeit der Protuberanzen geben überall die Grenzen, wie weit man in diesen Verhältnissen gehen kann. Bei diesen Betrachtungen ist der Lichtverlust im Spectroskop selbst ausser Acht gelassen.

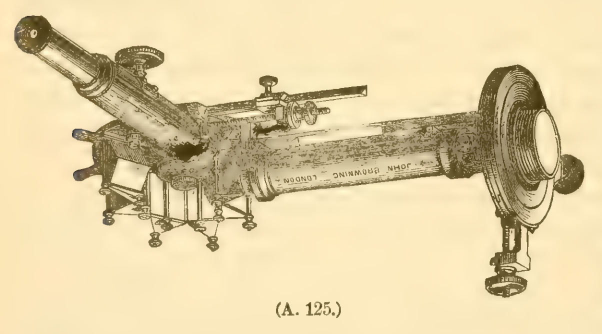
Um eine stärkere Dispersion bei Spectroskopen für diese Art von Beobachtungen zu erzielen, wendet man entweder eine grössere Anzahl von Prismen oder einen mehrmaligen Durchgang des Lichtes durch dieselben Prismen an.

So hat z. B. Grubb bei seinem Sonnenspectroskop drei lange Prismen angebracht, durch welche er das Licht sechsmal hindurchschickt. Den Gang der Strahlen in einem solchen Apparate erläutert Fig. 124. Die drei langen Prismen 1, 2 und 3, deren brechende Kanten $b' \, b'$, $b'' \, b''$ und $b''' \, b'''$ sind, liegen mit ihren Rückseiten nicht, wie hier gezeichnet werden musste, in einer Ebene, sondern sind natürlich entsprechend der durch sie erzeugten Ablenkung gegeneinander gedreht. Der aus dem Collimator C austretende Lichtstrahl passirt zunächst die drei grossen Prismen und läuft nach zweimaliger Reflexion in dem Prisma c' durch die ersteren wieder zurück, erleidet dann im Prisma α abermals eine doppelte Reflexion, worauf er zum dritten Male die Hauptprismen passirt, die er nach je zweimaliger Reflexion in den Prismen c'', β und c''' noch dreimal durchläuft, um dann durch das Prisma P in das Beobachtungsrohr F geworfen zu werden.



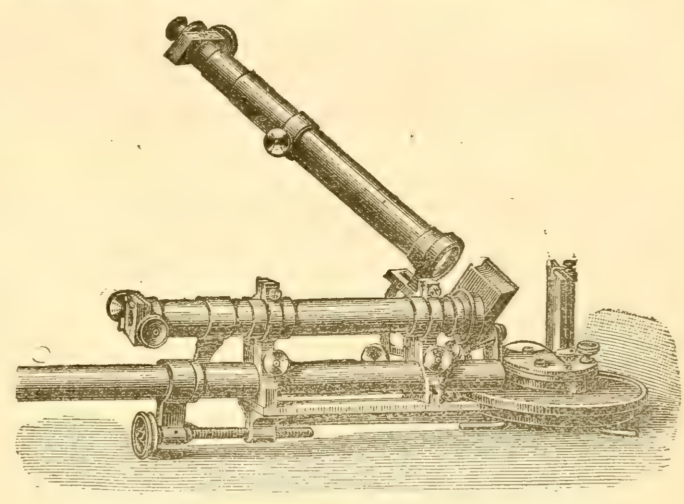
(A. 124.)

Einen ähnlichen Gang nehmen die Strahlen in dem von Browning construirten Sonnenspectroskop, welches in Fig. 125 abgebildet ist. Die Zerstreuung des Lichtes wird hierbei durch sechs Prismen besorgt, von denen die vier mittleren einen brechenden Winkel von 60°, die beiden äusseren von nur 30° haben. Auf das eine dieser letzteren ist ein halb so grosses total reflektirendes Prisma mit seiner Kathetenfläche aufgekittet, während seine andere dem Objectiv des Collimators zugewendet ist. Auf das andere Prisma von 30° Winkel ist ein total reflektirendes Prisma mit der Hypothenusenfläche aufgekittet, wodurch der vom Collimatorrohr kommende und durch die sechs Prismen gelaufene Lichtstrahl durch zweimalige Reflexion zur Rückkehr durch die Prismen gezwungen wird. Beim abermaligen Austritt aus denselben gelangt er direkt in das Beobachtungsrohr. Der ganze Prismensatz kann durch automatische Bewegung stets auf der Minimumstellung erhalten werden. Links erblickt man in der Figur das Schraubengewinde, mit welchem der ganze Apparat am Refractor befestigt wird, während man hinter dem sich daran schliessenden Positionskreis die beiden Schrauben hervorragen sieht, durch welche der Spalt mit dem ganzen Spectroskop excentrisch zum Gesichtsfelde des Hauptrefractors gestellt werden kann, also z. B. so, dass der Spalt den Sonnenrand tangirt und durch ein einfaches Drehen um


(A. 125.)

die Axe am ganzen Rande hin gleitet. O. LOHSE hat für diesen letzteren Zweck einen ganz besonderen rotirenden Spectralapparat construirt, bei welchem jedoch der Spalt radial zum Sonnenrande steht und die dadurch successive erhaltenen Bilder auf einer photographischen Platte aufgenommen werden.

Als Beispiel eines Spectroskopes, bei welchem zur Zerstreuung des Lichtes statt der Prismen ein Gitter benutzt wird, diene das in Fig. 126 abgebildete Diffractionsspectroskop, welches Professor YOUNG bei seinen Sonnenbeobachtungen benutzt. Dasselbe ist an einer Stahlstange verschiebbar angebracht, welche an dem Refractor, der zur Beobachtung dient, befestigt ist. Dieser Stange parallel verläuft das Collimatorrohr, dem gegenüber sich das ebene Reflexgitter befindet, welches das auffallende Licht zerstreut in das drehbare Beobachtungsrohr wirft. Um die sich theilweise überdeckenden Spectren höherer Ordnung noch beobachten zu können, ist, nach FRAUNHOFER's Vorgang, ein Prisma vor dem Objectiv des Beobachtungsrohres so befestigt, dass seine Zerstreuungsebene auf der des Gitters senkrecht steht.

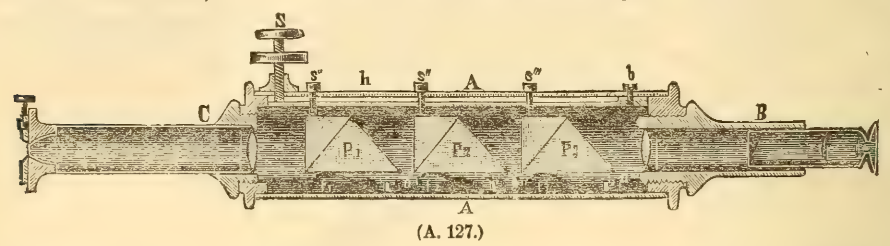


(A. 126.)

Alle die zuletzt besprochenen Apparate können principiell ebenso gut zur spectroskopischen Beobachtung anderer Lichtquellen am Himmel als gerade der Sonne verwendet werden. Für die Untersuchungen an der letzteren eignen sie sich nur besonders deshalb, weil sie eine sehr starke Dispersion und damit einen so grossen Lichtverlust besitzen, dass ausser der Sonne nur wenige Objecte am Himmel hell genug sind, um trotz desselben noch genügend helle Spectren zu geben.

Von besonderen Spectroskopconstructionen seien hier zwei erwähnt, und zwar zunächst das von dem jetzigen Direktor der Greenwicher Sternwarte CHRISTIE erfundene sogen. »Half Prism Spectroskop«. Durch Zerschneiden eines AMICI'schen Prismas erhält man zwei Halbprismen; lässt man senkrecht auf die Schnittfläche ein Lichtbündel fallen, so tritt dasselbe als ziemlich dünnes Bündel wieder aus, wodurch eine Vergrösserung des Spectrums erzeugt wird, welche jedoch keine Erhöhung der Dispersion bedeutet, da das Spaltbild selbst mit vergrössert wird. Ein Halbprisma giebt eine Dispersion, die etwas geringer ist als die Hälfte der von einem entsprechenden AMICI'schen Prisma erzeugten, während man beim Durchgang des Lichts durch zwei Halbprismen eine Zerstreuung erhält, welche diejenige eines AMICI'schen Prismas etwas übersteigt. Fig. 127 stellt den CHRISTIE-schen Apparat dar, wie er von der Firma A. HILGER in London ausgeführt ist. Das Collimatorrohr C mit dem Spalt a ist ebenso wie das Beobachtungsrohr B mit dem Prismenkasten A fest verschraubt. In letzterem befinden sich drei Halbprismen P_1, P_2 und P_3, welche auf den Federn f_1, f_2 und f_3 ruhen, die ihre Stützpunkte in Q', Q'' und Q''' haben. Von oben her drücken die

Schrauben s', s'' und s''' auf die Prismen, welche in ihren Stellungen dadurch einzeln regulirt werden können. Ihre Muttergewinde haben diese drei Schräubchen in der federnden Lamelle h, die in b befestigt ist und durch die Schraube S mit getheiltem Kopf gehoben oder gesenkt werden kann, wodurch der von den Schrauben s', s'' und s''' auf die Prismen ausgeübte Druck vermindert oder vermehrt werden kann, und zwar sind diese Druckänderungen, welche eine Drehung



(A. 127.)

der Prismen um die Kante an dem spitzen Winkel bewirken, für P_1 am stärksten und für P_3 am schwächsten. Durch die Drehung von S wird also eine Verstellung der Prismen und damit eine Verschiebung des Spectrums im Gesichtsfelde des Beobachtungsrohres hervorgerufen. Die Dispersion bei diesem Apparat ist etwas mehr als das Einundeinhalbfache eines Amici'schen Prismas, aber, obgleich die Strahlen stets nahezu senkrecht auf die ersten Prismenflächen fallen, wobei der Verlust durch Reflexion herabgemindert wird, so ist doch die Lichtstärke bei der vorliegenden Construction geringer, als bei einem einfachen, geradsichtigen Prisma, weil nämlich der Austritt der Strahlen aus den Prismen ein ausserordentlich schräger ist. Dieser letztere Umstand bewirkt auch, dass die Schleiffehler dieser Austrittsflächen störend merkbar werden; man erhält also bei dieser Anordnung ein sehr ausgedehntes, aber auch recht unreines und ziemlich lichtschwaches Spectrum. Dem letzteren Uebelstand liesse sich wohl dadurch etwas abhelfen, dass man das Beobachtungsrohr etwas excentrisch anbrächte, um so dem bei obiger Construction stattfindenden Durchgang der Lichtstrahlen durch die äussersten Randtheile des Objectivs durch einen Durchgang durch die mittleren Parthieen der Linse zu ersetzen. Um die Unreinheit der Spectren wenigstens abzuschwächen, wenn auch nicht ganz zu beseitigen, ohne zu einem zu engen Spalt seine Zuflucht nehmen zu müssen, lässt Christie im Collimatorrohr eine Concavlinse einschieben, wodurch dann freilich kein paralleles Licht mehr aus dem Collimator austritt, man also des Vortheils, den dieses gewährt, verlustig geht. Man sieht daher, dass das Halbprismenspectroskop wenigstens in dieser Form ein Instrument von fragwürdiger Güte ist. Erwähnt sei übrigens noch der Vorschlag des Erfinders, bei der Beobachtung von Sternspectren Collimator und Beobachtungsrohr gegeneinander auszutauschen, also die Lichtstrahlen den umgekehrten Weg durch die Prismen nehmen zu lassen; dann erhält man allerdings ein sehr reines, aber auch sehr kurzes Spectrum, das auch ziemlich lichtschwach ist, da bei dem Auffallen der Lichtstrahlen auf die schrägen Prismenflächen ein erheblicher Lichtverlust eintritt, der noch dadurch verstärkt wird, dass man eine sehr starke Ocularvergrösserung anwenden muss, um ein genügend langes Spectrum zu bekommen. Also auch in dieser Form bietet das Instrument, welches hier nur seiner ganz besonderen Construction wegen Erwähnung findet, keine besonderen Vortheile vor anderen Spectroskopen, wohl aber manche Nachtheile.

Secchi hat einmal vor sein mit einem zusammengesetzten Spectroskop versehenes Aequatoreal ein Objectivprisma gesetzt und erhielt, wenn die

brechende Kante des Objectivprismas mit denen der Prismen im Spectroskop und dem Spalt parallel stand, ausser dem gewöhnlichen Spectrum ein ovales Sonnenbild. CAMPHAUSEN hat eine Erklärung hierfür gegeben und gezeigt, dass man durch geeignete Wahl der Prismen statt des allgemeinen Falles eines ovalen Sonnenbildes als Specialfall ein rundes erhalten kann. Er hat ferner dargethan, dass man denselben Effekt durch ein vor den Spalt gesetztes Prisma *à vision directe* erreichen kann, wenn man auch hier die Parallelität der brechenden Prismenkanten und des Spaltes aufrecht erhält; thut man das nicht, so treten bei beiden verschiedenen Anordnungen mehr oder minder erhebliche Verzerrungen am Sonnenbilde auf. Bringt man eine der Wasserstofflinien in die Nähe des Randes des Sonnenbildes ins Gesichtsfeld und öffnet den Spalt des Spectroskopes weit, so sieht man etwaige an dieser Randstelle befindliche Protuberanzen deutlich in der Farbe der betreffenden Wasserstofflinie.

Es ist bereits eingangs erwähnt, dass man theoretisch jedes Spectroskop durch Ersetzen des Oculars des Beobachtungsrohres durch eine photographische Platte in einen

Spectrographen

verwandeln kann, in Wahrheit wird man dies aber nur bei feinen und guten Spectroskopen thun und es sollen hier nur kurz die durch die photographische Aufnahme erlangten Vortheile, ferner die dabei nothwendig werdenden instrumentellen Aenderungen und endlich die zur Ausmessung der photographisch fixirten Spectra erforderlichen Apparate und Vorkehrungen im Allgemeinen besprochen werden, während wegen aller mit der photographischen Technik als solcher zusammenhängender Einzelheiten sowie wegen genauer Beschreibung einzelner Spectrographen und Comparatoren, d. h. Ausmessinstrumente auf den Artikel über »Astrophotographie« verwiesen werden muss.

Die Vortheile, welche die photographische Aufnahme der Spectra gewährt, sind nach der Art der Lichtquelle am Himmel verschieden. Beim Sonnenspectrum erhält man nicht mehr Linien auf der Platte, als die Ocularbeobachtung erkennen lässt, auch gewährt die Ausmessung des photographirten Spectrums keine grössere Genauigkeit als die des direkt beobachteten, dagegen wird die Breite und der Charakter der einzelnen Linien von der photographischen Platte so zuverlässig wiedergegeben, wie es durch Zeichnung oder Beschreibung niemals möglich ist. Dem Vorzuge der photographischen Aufnahme, dass sie die violetten und ultravioletten Theile des Spectrums, die das menschliche Auge nicht mehr wahrzunehmen vermag, noch fixirt, steht der Nachtheil gegenüber, dass es trotz verschiedener Versuche noch nicht gelungen ist, befriedigende Aufnahmen der gelben und rothen Strahlen zu erlangen. Dieser letztere Umstand tritt besonders bemerklich bei der Aufnahme von Sternspectren hervor, weil sich bei diesen die Methode, um die gelben und rothen Theile des Spectrums zu photographiren, nämlich das sogen. Sensibilisiren der Platten, wegen des damit verbundenen Verlustes an Empfindlichkeit nicht so gut anwenden lässt, wie das beim hellen Sonnenspectrum noch möglich ist. Im Uebrigen aber gewähren gerade bei den Sternspectren die photographischen Aufnahmen sehr grosse Vortheile im Vergleich zur direkten Beobachtung am Himmel. Bei dieser letzteren wirkt es sehr störend, dass das menschliche Auge Lichteindrücke, die unter einer gewissen Helligkeitsgrenze liegen, nicht mehr aufzunehmen vermag, und dass ein längeres Fixiren das Auge nur ermüdet und daher die Receptivkraft desselben nicht erhöht, sondern schwächt. Bei der photographischen Platte addiren sich die Lichteindrücke, die nacheinander auf dieselbe Stelle fallen, und wenn daher der

einzelne zu schwach ist, um eine chemische Wirkung hervorzurufen, so kann ein fortgesetztes Einwirken desselben auf die gleichen Partikelchen schliesslich doch eine Reaction zu Stande bringen. Mit anderen Worten: Durch Dauerexpositionen lassen sich photographisch noch so schwache Lichtintensitäten fixiren, wie sie das Auge nicht mehr wahrnehmen kann. Dann darf man aber auch für die photographische Aufnahme bis zu 10mal stärkere Dispersionen verwenden, denn die dadurch bewirkte Verminderung der Helligkeit vermag eine gesteigerte Expositionsdauer auszugleichen; man erhält also ein viel linienreicheres Spectrum, viel genauer als es die Ocularbeobachtung jemals liefern kann. Auch schadet es nichts, wenn ein Sternspectrum auf der Platte fadenförmig erscheint, denn da man sich bei der Ausmessung doch eines Mikroskopes bedienen muss, so bedarf man einer künstlichen Verbreiterung durch eine Cylinderlinse nicht; die dadurch gewonnene Helligkeit kann man entweder zur Vermehrung der Dispersion oder zur Verminderung der Expositionsdauer verwenden. Hat man es jedoch bei der Aufnahme mit hellen Sternen zu thun, so wird man gern auf eine Verkürzung der ohnehin nicht langen Expositionszeit verzichten und lieber das Spectrum etwas verbreitert auf die Platte bringen, was jedoch besser als durch Einschalten einer Cylinderlinse in der Weise erreicht wird, dass man während der Exposition das Sternbildchen nicht genau auf einem Punkte des Spaltes festhält, sondern es auf diesem eine kleine Strecke langsam oder wiederholt durchlaufen lässt, dann erhält man auf der Platte ein Spectrum, dessen Breite der Länge dieser Strecke entspricht. Ein weiterer sehr grosser Vortheil, den die photographischen Aufnahmen gerade bei Sternspectren bieten, besteht darin, dass die Unruhe der Luft nur von sehr geringem störenden Einfluss ist. Während bei direkter Beobachtung mit dem Auge das durch schlechten Luftzustand hervorgerufene Zittern und Wallen sowie der einem zeitweiligen Aufflackern vergleichbare Helligkeitswechsel in den Spectren sehr störend wirkt, ja die Beobachtung gänzlich verhindern kann, bringen alle diese Uebelstände keinen erheblichen Nachtheil bei der photographischen Aufnahme hervor. Die Luftunruhe lässt das Bild auf der Platte um eine gewisse Mittel- oder Gleichgewichtslage herumpendeln; in der Mittellage bildet sich, weil hier die grösste Helligkeit wirkte, das Bild einer Spectrallinie z. B. aus, aber dasselbe erscheint nicht, wie es bei ruhiger Luft der Fall ist, scharf und deutlich, sondern die Schwankungen der Lichteindrücke erzeugen ein etwas verwaschenes Aussehen der Linie, die aber trotzdem noch sehr gut messbar ist. Bei grosser Luftunruhe wird das Spectrum auf der Platte nicht nur verwaschener, sondern auch schwächer erscheinen, wenn man die gleiche Expositionsdauer wie bei ruhiger Luft angewendet hat; eine entsprechende Erhöhung derselben wird diesem Uebelstande leicht abhelfen. Dagegen wirkt bei photographischen Daueraufnahmen die fortwährende, wenn auch nur geringe Aenderung der Brennweite des Objectivs, die ein Breiterwerden der Linien erzeugt, störend, weil sich dadurch eine Verwaschenheit in der Aufnahme unangenehm bemerkbar macht. Auch die achromatischen Fehler des Objectivs machen sich hier störend geltend, denn da man das Spectroskop immer nur auf eine bestimmte Farbe einstellen kann, so erscheint auch nur diese ganz scharf und deutlich auf der Platte, während die benachbarten Partien, und zwar je weiter sie abliegen in desto höherem Grade, schwächer und undeutlicher werden. Beim Beobachten mit dem Auge kann man beim Uebergehen auf eine andere Farbe das Spectroskop gleich neu einstellen, hier muss man eine zweite selbstständige Aufnahme machen, was natürlich zeitraubender ist. Man kann diesem Uebelstande etwas dadurch abhelfen, dass man ein Fernrohrobjectiv für die

spectrographischen Aufnahmen verwendet, welches für die chemisch besonders wirksamen Strahlen corrigirt ist. Ebenfalls zu zwei verschiedenen Aufnahmen muss man bei einem solchen Spectrum seine Zuflucht nehmen, das sehr kräftige und ganz feine dunkle Linien aufweist, denn wenn man erstere schön ausgeprägt auf der Platte erhält, haben die hellen Partien des Spectrums die zarten Linien längst überstrahlt, man muss daher eine zweite sogen. unterexponirte Aufnahme machen, die dann die feinen Linien zur Geltung kommen lässt. Aber diese Nachtheile sind gering gegenüber den sehr grossen Vorzügen, die die photographische Aufnahme der Sternspectren gewährt, ist ja durch dieselbe manche Untersuchung, welche die äusserste Genauigkeit erfordert, erst wirklich durchführbar geworden.

Was nun die instrumentellen Aenderungen betrifft, die sich bei einem Spectrographen gegenüber einem gewöhnlichen Spectroskop als nothwendig erweisen, so ist hier vor allen Dingen die grössere Festigkeit zu erwähnen, die der Spectrograph haben muss. Derselbe kommt bei den langen Expositionszeiten während einer einzigen Aufnahme in recht verschiedene Lagen, wobei Durchbiegungen eintreten können, welche die ganze Aufnahme zu gefährden vermögen. Das einzige Schutzmittel gegen diese Gefahr ist eine sehr solide Ausführung des Apparates, den man, wenn er etwas grössere Dimensionen hat, durch Verbindungsstangen zwischen den einzelnen entfernteren Theilen desselben so zu versteifen sucht, dass er ein möglichst starres System bildet. Dabei muss man auch thunlichste Rücksicht darauf nehmen, dass Temperaturschwankungen keinen zu grossen Einfluss gewinnen und damit durch veränderte Zerstreuung und Brechung der Lichtstrahlen störend wirken können. Diese Forderungen werden um so genauere Berücksichtigung finden müssen, je feiner der ganze Apparat ist, und je höhere Anforderungen man an seine Leistungsfähigkeit stellt. Ferner muss bei den Spectrographen eine Vorkehrung vorhanden sein, mittelst deren man das Sternbildchen während der oft stundenlangen Exposition genau auf dem Spalt des Spectroskopes festhalten kann, denn die Triebwerke der Fernröhre lassen sich nicht so fein construiren, dass durch sie allein diese Bedingung erfüllt würde. Zudem bringt der Wechsel in der Refraction langsame Ortsänderungen des Sternes hervor, die der Beobachter durch kleine Bewegungen des ganzen Instrumentes compensiren muss. Um nun die Stellung des Sternbildes auf dem Spalt beständig controlliren zu können, bediente sich HUGGINS, dessen Spectrograph ganz innerhalb seines 18zölligen Spiegelteleskopes angebracht war, eines kleinen GALILEI'schen Fernrohres, das in der Mitte des Reflectors eingesetzt war, und durch welches er den mit chemisch nicht wirksamen, seitlich einfallendem Licht beleuchteten Spalt und auf diesem den Stern sehen konnte. HENRY DRAPER liess hinter der photographischen Platte ein Ocular anbringen, durch welches er die gelben und rothen Parthien des Spectrums direkt während der ganzen Expositionszeit beobachten uud danach deren unveränderliche Lage zur Platte bewirken konnte. An dem grossen Potsdamer Spectrographen hat H. C. VOGEL für den gedachten Zweck folgende Einrichtung treffen lassen. Von der ersten Prismenfläche wird ja ein Theil des aus dem Collimator austretenden Lichtes reflektirt, und diesen Theil fängt man in einem kleinen, auf unendlich eingestellten Fernrohr auf, in dessen Gesichtsfeld man also den durch die künstliche Lichtquelle zur Erzeugung eines Vergleichsspectrums beleuchteten Spalt und auf diesem das Sternbildchen erblickt, das man nun mittelst der Feinbewegungen am Instrument leicht auf seiner ursprünglichen Stelle halten kann. Dass man gelentlich bei helleren Sternen zur Erzeugung eines etwas verbreiterten Spectrums das Sternbild auf dem Spalt eine kleine Strecke durchlaufen lässt, ist bereits oben erwähnt.

Was nun das Ausmessen solcher photographisch fixirter Spectren betrifft, so bedient man sich dazu eines Mikroskopes und einer Messvorrichtung, bestehend in einer feinen Mikrometerschraube mit getheiltem Kopf und Zählwerk für die ganzen Umdrehungen, welche entweder das Mikroskop über die photographische Platte oder letztere unter dem ersteren hindurchführt, wozu gelegentlich noch ein weiteres, am Ocular des Mikroskopes angebrachtes Mikrometer zur Ausmessung kurzer Strecken tritt.

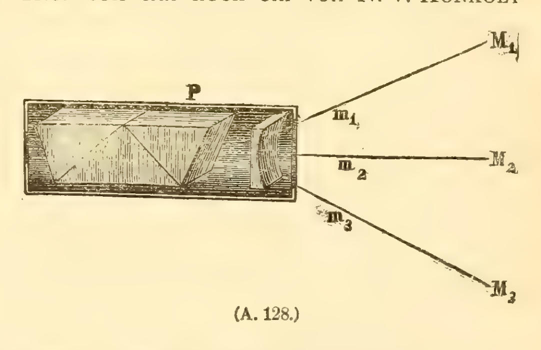
Die Vergrösserung des Mikroskopes darf man nicht zu stark wählen, weil sich sonst das Silberkorn der photographischen Platte zu störend bemerkbar macht; eine 12- oder 15fache Vergrösserung wird im Allgemeinen die vortheilhafteste sein, wenn man auch gelegentlich zu einer stärkeren greifen muss, wobei eine 25fache etwa als obere Grenze angesehen werden kann; für die Wahl der Vergrösserung wird auch die jeweilige Schärfe der auszumessenden Aufnahme mitbestimmend sein. Die Mikrometerschraube des Messapparates muss man gerade so untersuchen und den Werth derselben in Wellenlängen ermitteln, wie man es bei gewöhnlichen Mikrometern thut, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass der Schraubenwerth in den verschiedenen Theilen des Spectrums ein verschiedener sein wird. Sehr erschwerend wirkt ferner dabei der Umstand, dass durch die Temperatur die Dispersion des Spectrographen geändert wird, dass man also die Auswerthung der Mikrometerschraube in Wellenlängen nur für eine bestimmte Temperatur des Spectrographen ausführen kann. Man verfährt dabei am besten so, dass man eine photographische Aufnahme des Sonnenspectrums macht und diese mit aller Sorgfalt mittelst des Mikrometers ausmisst und die Werthe der einzelnen Ablesungen desselben aus den genau bekannten Wellenlängen der ausgemessenen Linien des Sonnenspectrums ableitet und diese zur Aufstellung einer graphischen Tafel oder einer Zahlentabelle benutzt, aus welcher man dann den Wert einer beliebigen Mikrometerablesung in Wellenlängen, gültig für die Temperatur, bei welcher das Sonnenspectrum aufgenommen wurde, erhält. Auf diese muss man jede bei anderer Temperatur gemachte Spectralaufnahme reduciren, was man mit Hilfe der an Scalen abgelesenen Veränderungen der Focalstellungen von Collimator und Camera und der berechneten Diffractionsänderung bewirkt, aber diese Methode ist umständlich und für die feinsten Messungen nicht genau genug. Bei diesen thut man besser, das zur Ableitung des Schraubenwerthes benutzte Sonnenspectrum so auf die auszumessende Spectralaufnahme, eines Sternes z. B., zu legen, dass die Schichtseiten der Platten sich berühren und die Linien des Sonnenspectrums die möglichst genaue Fortsetzung der entsprechenden Linien des Sternspectrums bilden. Dann misst man die Linien des letzteren aus und an zwei bis drei verschiedenen Stellen im Spectrum die Lagendifferenzen einiger derselben gegen die entsprechenden Sonnenlinien, womit man die Zahl erhält, die man wegen ihrer Kleinheit meistens zu den Schraubenablesungen nur zu addiren hat, um diese nun mittelst der Tabelle der Schraubenwerthe in Wellenlängen umrechnen zu können. Dieses Verfahren ist bei allen denjenigen Gestirnspectren nicht mehr anwendbar, die einen ganz anderen Habitus als das Sonnenspectrum zeigen. Hier muss man entweder die Hγ-Linie des Wasserstoffs oder beim Anstreben grösster Genauigkeit ein linienreiches Metallspectrum mit dem Gestirnspectrum zugleich photographiren, um dadurch eine Grundlage für die Ausmessung des letzteren zu bekommen. Bei den dem Sonnenspectrum ähnlichen Spectraltypen kann man in mondhellen Nächten auch vor oder nach der Sternaufnahme das Spectrum des Mondes auf derselben Platte mit aufnehmen, während eine Aufnahme des Sonnenspectrums auf derselben Platte am nächsten Tage wegen der unvermeidlichen Temperatur-

differenzen nicht anzurathen ist. Im Allgemeinen wird die Ausmessung einer Spectralphotographie eine viel grössere Genauigkeit bieten, als die Messungen am Fernrohr direkt, denn einmal ist der Anblick der Photographie im Gesichtsfelde ein unverändert ruhiger, was eine viel grössere Ruhe für den Beobachter bewirkt, wozu in den meisten Fällen noch eine viel bequemere Körperhaltung als am Fernrohr hinzukommt; dann aber trägt auch der Umstand, dass man keine leuchtenden und farbigen oder schwer erkennbaren Einstellungsmarken braucht, wie sie oben beschrieben wurden, sondern mit einem einfachen oder doppelten feinen Faden auskommt, viel zur Erlangung einer grösseren Sicherheit bei. Immerhin erfordert das Ausmessen solcher Photographien grosse Sorgfalt und viel Erfahrung, denn häufig erscheinen engstehende feine Linien auf der Platte als eine breite, verwaschene Linie, und man muss dann aus der Helligkeit und dem ganzen Aussehen der Linie abnehmen, ob man eine einfache Linie oder eine ganze Gruppe vor sich hat.

Wir haben in der Einleitung als vierte und letzte Klasse der Spectralapparate diejenigen bezeichnet, die ohne Zuhilfenahme eines Fernrohres direkt auf den Himmel angewendet werden. Als ein solches

Spectroskop ohne Fernrohr

kann man schliesslich jedes leicht in der Hand zu haltende Spectroskop ansehen, und in der That wendet man zur Beobachtung der Spectren von Zodiakal- und Nordlicht sowie der sogen. Regenbanden Handspectroskope verschiedener Construction mit und ohne Spalt an, wie solche oben unter der Ueberschrift »Ocularspectroskope« beschrieben wurden. Hier soll nur noch ein von N. v. Konkoly construirtes Spectroskop besprochen werden, welches zur Beobachtung schnell aufblitzender und wieder verschwindender sowie einen schnellen Ortswechsel aufweisender Lichterscheinungen am Himmel, wie sie die Meteore darstellen, dient. Fig. 128 zeigt den in eine Messinghülse eingeschlossenen einfachen Apparat, der nur aus dem geradsichtigen Prisma P und der planconcaven Cylinderlinse L besteht. Die Strahlen $M_1 m_1$, $M_2 m_2$, $M_3 m_3$ gelangen alle noch in das Spectroskop und durch dieses in die links befindliche Oeffnung für das Auge. Der Vortheil des Apparates liegt in seinem grossen Gesichtsfeld, welches 25° umfasst, und darin, dass die Geschwindigkeit eines Meteors sehr beträchtlich verkleinert wird. Uebrigens kann auch ein einfaches Prisma *à vision directe* zur Beobachtung von Meteorspectren dienen, was man dabei an Grösse des Gesichtsfeldes durch Weglassen der Cylinderlinse einbüsst, gewinnt man an Lichtstärke der Spectren.



(A. 128.)

Bei einer Betrachtung der Untersuchungen, die man mit den hier besprochenen Instrumenten am Himmel angestellt, und der Resultate, die man dadurch gewonnen hat, liegt es in der Natur der Sache, zunächst diejenigen Ergebnisse näher ins Auge zu fassen, welche die spectroskopischen Beobachtungen der

Sonne

geliefert haben, denn einmal bilden diese überhaupt die älteste Anwendung des Spectroskopes auf den Himmel, und dann wird das genau untersuchte Spectrum der Sonne als Maasstab und Vergleichsobject bei den verschiedensten spectro-

skopischen Untersuchungen gebraucht. Es ist das das sogen. mittlere Sonnenspectrum, welches man bekommt, wenn man — z. B. durch einen Heliostaten — Sonnenlicht auf den Spalt eines Spectroskopes wirft; es trifft dann Licht von allen Theilen der Sonne auf denselben. Von diesem mittleren Sonnenspectrum unterscheiden sich sehr wesentlich die Spectren, welche man erhält, wenn man speciell nur das Licht ganz bestimmter Theile der scheinbaren Sonnenoberfläche (z. B. des Randes) auf den Spalt fallen lässt. Bei der Lagenbestimmung von Linien im Spectrum benutzte man ursprünglich ganz beliebige Scalen, bis Ångström vorschlug, zur Fixirung einer Spectrallinie ihre Wellenlänge anzugeben, welchen Vorschlag er in seinem »Spectre normal du Soleil« praktisch durchführte und welchem er auch, weil seine Arbeit die erste wirklich ganz exakte Darstellung des sichtbaren Sonnenspectrums war, zum Siege verhalf. Als Maasseinheit für Wellenlängen pflegt man jetzt den millionsten Theil eines Millimeter anzusehen und mit $\mu\mu$ zu bezeichnen; also 0·000001 *mm* = 1 $\mu\mu$.

Auf das Ångström'sche System bezog H. C. Vogel seine 1879 publicirten Wellenlängenbestimmungen von 2614 Linien zwischen 389·5 $\mu\mu$ und 540·6 $\mu\mu$. Durch Anwendung einer ausserordentlich starken Dispersion gelang es Fievez in Brüssel, eine Darstellung des Sonnenspectrums herzustellen, die mehr als doppelt soviel Linien wie der Ångström'sche Atlas umfasst, aber keine Neubestimmung derselben giebt, vielmehr sind die Ångrström'schen Angaben einfach beibehalten und die neu hinzukommenden Linien nur nach dem Augenmaass dazwischen eingetragen, was natürlich der Fievez'schen Zeichnung nur den Werth eines oberflächlichen Orientirungsmittels verleiht. Eine sehr schöne Darstellung von 3200 Linien zwischen *A* und *b* im Sonnenspectrum hat 1881—85 Thollon in Nizza unter Anwendung grosser Schwefelkohlenstoffprismen ausgeführt. Seine Messungen sind sehr genau, beziehen sich aber leider auf ein willkürliches Maass, doch konnte der Verfasser seinen Beobachtungen nicht das Ångström'sche System zu Grunde legen, da dasselbe an Genauigkeit seinen Einstellungen erheblich nachsteht. Sehr verdienstlich ist es, dass Thollon Darstellungen des Sonnenspectrums bei mittlerer und geringer Sonnenhöhe, wie auch bei feuchter und trockener Luft giebt, wodurch die sogen. atmosphärischen Linien erkennbar sind; es wäre nur zu wünschen gewesen, dass in den Zeichnungen nicht das prismatische Spectrum zur Darstellung gekommen wäre. Dieser Arbeit folgte 1886 die von G. Müller und P. Kempf in Potsdam ausgeführte Neubestimmung der absoluten Wellenlängen von 300 Linien im Sonnenspectrum, wobei der Werth einer Wellenlängenangabe in diesem Katalog in der Mitte des Spectrums einen wahrscheinlichen Fehler von etwa ± 0·003 $\mu\mu$, an den Enden von ± 0·005 $\mu\mu$ hat. Da die Verfasser auch die H. C. Vogel'schen Messungen auf das Potsdamer System umrechneten, so war dadurch ein Katalog der Wellenlängen von 2614 Linien im Sonnenspectrum gewonnen. Dazu kamen noch die von G. Müller im Anschluss an dasselbe System im Sommer 1889 auf dem Gipfel des Säntis vorgenommenen Bestimmungen von 1406 Wellenlängen zwischen 540·6 $\mu\mu$ bis 692·4 $\mu\mu$, deren Positionen auch einen durchschnittlichen wahrscheinlichen Fehler von ± 0·003 bis ± 0·005 $\mu\mu$ haben, sodass jetzt ein auf den 300 in Potsdam bestimmten absoluten Wellenlängen beruhender Katalog von 4020 zwischen 389·5 $\mu\mu$ und 692·4 $\mu\mu$ befindlichen Linien im Sonnenspectrum vorliegt.

Schliesslich sei noch der vorzüglichen photographischen Aufnahmen des Sonnenspectrums von H. A. Rowland gedacht, deren erste Ausgabe 1886, die zweite weitaus schönere und feinere 1889 erschien. Rowland hat einen Normalmaassstab auf den Platten selbst mit photographisch fixirt, an welchem man die

Wellenlängen der einzelnen Linien ablesen kann, einen Katalog hat er nicht aufgestellt. ROWLAND selbst giebt den mittleren wahrscheinlichen Fehler der Wellenlänge einer seiner Grundlinien zu höchstens ± 0·003 μμ an, doch ist es fraglich, ob das Fixiren der Maassstäbe auf den Platten auch immer in dieser Schärfe gelungen ist, und dann ist das Ablesen der Wellenlängen an den Scalen sicherlich nicht immer so genau zu bewerkstelligen, sodass man den Fehler einer daraus entnommenen Angabe auf ± 0·010 μμ wird ansetzen dürfen, ja dieser Betrag wird bei feinen oder verwaschenen Linien, oder wenn die Photographie nicht vollkommen scharf ausgefallen ist, was gelegentlich im rothen Theile des Spectrums vorkommt, zuweilen noch überschritten werden. Der hohe Werth der ROWLAND'schen Darstellungen beruht hauptsächlich in der absolut treuen Wiedergabe des Aussehens der einzelnen Linien, deren Zahl bei der ausserordentlich starken angewandten Dispersion eine sehr grosse ist. Der Potsdamer Katalog hat aber den Vortheil für sich, dass er die Wellenlängen direkt enthält, und desshalb soll er hier zur Vergleichung der einzelnen Systeme und Wellenlängenmessungen zu Grunde gelegt werden. Allerdings hat in neuester Zeit ROWLAND eine Ausmessung seiner photographischen Aufnahmen des Sonnenspectrums begonnen und auch einige vorläufige Resultate derselben veröffentlicht, die ganze Durchführung wird voraussichtlich noch längere Zeit in Anspruch nehmen. Als Einheit der Wellenlänge nimmt ROWLAND ein zehnmillionstel Millimeter, und er hat in diesem Maassstabe bis jetzt zwischen 372·2071 μμ und 591·3930 μμ die Wellenlängen von 11372 Linien publicirt, sodass der Katalog, wenn er vollendet sein wird, am Linienreichthum alle bisherigen derartigen Arbeiten weit übertreffen wird. Zur Vergleichung dieser beiden zuletzt besprochenen Arbeiten hat MÜLLER die Wellenlänge von 127 sowohl in Potsdam als auch von ROWLAND als Normallinien verwendeten Linien verglichen und gefunden, dass sich, wenn λ eine beliebige Wellenlänge bezeichnet, die Differenz Potsdam-ROWLAND aus der Formel $0\cdot0110\ \mu\mu\ \frac{\lambda}{560}$ ergiebt, wonach man folgende Uebersicht erhält:

λ	Potsd.-ROWL.	λ	Potsd.-ROWL.
400 μμ	+ 0·0079 μμ	600 μμ	+ 0·0118 μμ
440 „	+ 0·0087 „	640 „	+ 0·0126 „
480 „	+ 0·0094 „	680 „	+ 0·0134 „
520 „	+ 0·0102 „	720 „	+ 0·0142 „
560 „	+ 0·0110 „		

Man sieht also, dass der Unterschied zwischen beiden Systemen ein sehr geringer ist, dass also beide der Wahrheit sehr nahe kommen werden. Erheblich grössere Werthe erhält man für die Differenz Potsdam-ÅNGSTRÖM, wie die folgende kleine Tafel zeigt.

Wellenlänge	Potsd.-ÅNG.	Wellenlänge	Potsd.-ÅNG.
686·9—656·3	+ 0·127 μμ	527·0—516·8	+ 0·099 μμ
656·3—640·0	122 „	516·8—504·1	096 „
640·0—626·5	120 „	504·1—495·8	094 „
626·5—613·7	117 „	495·8—486·2	093 „
613·7—602·4	115 „	486·2—470·3	090 „
602·4—589·0	113 „	470·3—455·0	087 „
589·0—576·3	110 „	455·0—441·5	085 „
576·3—565·9	108 „	441·5—432·6	083 „
565·9—552·9	106 „	432·6—422·7	081 „
552·9—540·6	103 „	422·7—410·2	079 „
540·6—527·0	+ 0·101 „	410·2—389·6	+ 0·076 „

Um die früheren und die weniger umfassenden Arbeiten, die hier bisher nicht erwähnt sind, auch mit den Potsdamer Messungen vergleichen zu können, sind in der folgenden Tabelle die von den einzelnen Beobachtern gefundenen Wellenlängen für bestimmte Linien (nach der FRAUNHOFER'scher Bezeichnung) in $\mu\mu$ ausgedrückt aufgeführt, wobei noch zu bemerken ist, dass ESSELBACH seine Messungen auf die ersten noch ungenauen Werthe, die FRAUNHOFER für die C- und H-Linie gefunden hatte, bezog, während BERNARD und MASCART die FRAUNHOFER'sche Zahl für die D-Linie zu Grunde legten.

Bezeichnung der Linien	FRAUNHOFER	ESSELBACH	STEFAN	BERNARD	MASCART	MENDENHALL	DITSCHEINER	V. D. WILLIGEN	Potsdam
B		687·4	687·2	686·5	686·66	686·682	687·41	687·132	686·853
C	655·6	656·4	655·8	655·7	656·07	656·162	656·23	656·557	656·314
D_1	588·8	588·6	589·4	588·8	589·43	589·478	589·74	589·844	589·625
D_2					588·8	588·868	589·10	589·230	589·030
E	526·5	526·0	525·3	526·6	526·79	526·913	527·13	527·203	527·017
F	485·6	484·5	484·3	485·8	485·98	486·016	486·22	486·400	486·160
G	429·6	428·7	430·2	430·5	430·76	430·719	431·12	431·137	430·828
H_1	396·3	392·9		396·7	396·72		396·89	397·146	396·875
H_2							393·53	393·872	393·379

Wie weit sich nun das Sonnenspectrum in das Ultraviolett und das Ultraroth hineinerstreckt, ist schwer zu sagen. Die Beobachtung des ultravioletten Theiles des Spectrums bietet keine Schwierigkeit, wenn man statt des für ultraviolette Strahlen sehr undurchlässigen Glases Bergkrystall oder Kalkspath oder nur die Reflexion an Metallspiegeln und -Gittern verwendet, da man dann die ultravioletten Strahlen sehr gut und scharf photographiren kann. Aber trotzdem lässt sich das Sonnenspectrum nicht beliebig weit ins Ultraviolett hinein verfolgen, da hier die Durchlässigkeit der Erdatmosphäre eine Grenze setzt. Nach den Untersuchungen von CORNU kann man bei günstigstem Sonnenstande nur noch Strahlen von der Wellenlänge 293 $\mu\mu$ erhalten, während HUGGINS durch Beobachtungen an α Lyrae diese Grenze bei 297 $\mu\mu$ fand. Da nun α Lyrae muthmaasslich eine höhere Temperatur wie die Sonne hat, und ausserdem die Grenze eines Spectrums desto weiter ins Ultraviolett hineinrückt, je heisser der lichtausstrahlende Körper ist, so lehrt die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, dass an dem plötzlichen Aufhören des ultravioletten Spectrums an dieser Stelle die Absorption in der Erdatmosphäre schuld ist. Auch dass es die eigentlichen Bestandtheile der Luft und nicht etwa die in ihr suspendirten Wasser- und Staubtheilchen sind, welche diese Absorption bewirken, hat CORNU dadurch gezeigt, dass er die Uebereinstimmung der barometrischen Formel mit der Vertheilung der absorbirenden Masse nachwies. Die Absorption in der Erdatmosphäre macht es unmöglich, aus der Beobachtung des ultravioletten Sonnenspectrums einen Schluss auf die obere Grenze der Sonnentemperatur zu ziehen. Von den zahlreichen Untersuchungen des ultravioletten Theiles des Sonnenspectrums seien hier die Zeichnungen von H. DRAPER und RUTHERFURD wegen ihrer sehr zahlreichen Linien und der Schärfe der Darstellung, sowie die Arbeit von CORNU als die beste genannt; letzterer hat 36 Normallinien im ultravioletten Theil nach dem ÅNGSTRÖM'schen System bestimmt und dazwischen die übrigen Linien eingetragen, leider ohne ein Verzeichniss ihrer Wellenlängen zu geben.

Für die ultrarothen Strahlen zeigt sich eine so störende Absorption in der Erdatmosphäre nicht, dagegen bietet hier die Beobachtung an sich erhebliche Schwierigkeiten. Man kann sich entweder darauf beschränken, die ultrarothen Strahlen in ihren Wärmewirkungen zu verfolgen, oder man muss zu besonderen Vorkehrungen greifen, um dieselben sichtbar zu machen. Auf dem ersteren Wege hat sich schon HERSCHEL eines feinen Differentialthermometers mit Erfolg bedient, während z. B. H. DRAPER, sowie auch LAMANSKY durch Verwendung von Thermosäulen das Vorhandensein einzelner Absorptionsbanden nachweisen konnten. Die feinsten Untersuchungen dieser Art hat jedoch LANGLEY angestellt, indem er sich seines Bolometers bediente, d. h. eines Instrumentes, welches die geringste Temperaturänderung (nämlich noch 0·000001° C.) eines feinen Metallstreifens durch dessen Widerstandsänderung anzeigt. Unter Zuhilfenahme von feinen Concavgittern oder von Steinsalzprismen konnte er noch folgende Wellenlängen von Absorptionstreifen bestimmen:

815 μμ	1130 μμ	1580 μμ
850 „	1270 „	1810 „
890 „	1360 „	1870 „
910 „	1370 „	1980 „
940 „	1540 „	2030 „

Sein Instrument war zwar auch noch für Strahlen grösserer Wellenlänge empfindlich, doch gelangen ihm keine Messungen von Wellenlängen einzelner Bänder mehr, wenn er auch noch den Brechungsexponenten des Steinsalzes bei 530·11 μμ ermitteln konnte. Dabei ergiebt sich, dass sich in den äussersten ultrarothen Theilen des Spectrums Gitter- und Prismenspectrum nicht unterscheiden, da die Ausdehnung des Spectrums proportional der Wellenlänge zunimmt. Die von LANGLEY untersuchte Strecke des Spectrums ist über 8 mal so lang als der sichtbare Theil desselben.

Um die ultrarothen Strahlen sichtbar zu machen, kann man sich nach BECQUEREL's Vorgang phosphorescirender Substanzen bedienen. Lässt man auf eine solche eine Zeit lang den ultrarothen Theil des Sonnenspectrums fallen und blendet dieses dann plötzlich ab, so leuchtet das ultrarothe Spectrum deutlich in dem Phosphorescenzlichte auf; Wellenlängenbestimmungen nimmt man am besten mit Hilfe von Interferenzstreifen vor, die man durch Auflegen einer dünnen Platte auf den Heliostatenspiegel erzeugt. Diese Bestimmung fällt jedoch immer sehr unsicher aus, weil das Phosphoresciren schnell aufhört. Man kann jedoch letzteres vermeiden, wenn man auf das ultrarothe Spectrum ein ultraviolettes fallen lässt, in welchem man durch weite Spaltöffnung alle Linien zum Verschwinden gebracht hat, es zeigen sich dann, wenn auch zur Zeit immer nur auf einer kleinen Strecke, die Linien des ultrarothen Spectrums hell auf dunklem Untergrund. Auf diese Weise hat BECQUEREL Bänder und Linien bis 1880 μμ bestimmt.

ABNEY ist es endlich gelungen, photographische Platten herzustellen, mit denen er wenigstens einen Theil des ultrarothen Spectrums photographiren konnte, sodass er zwischen 714 μμ und 987 μμ die Wellenlängen von 590 Linien in Bezug auf das ÅNGSTRÖM'sche System bestimmte. Diese Methode ist zweifellos die zuverlässigste und beste, wenn sie auch leider nicht so weit ausdehnbar ist, wie die anderen.

Unter den Bemühungen im Sonnenspectrum einen sicheren Maassstab bei Spectralbeobachtungen zu besitzen und deshalb die Wellenlängen seiner Linien aufs Genaueste zu bestimmen, ist der ursprüngliche Zweck, nämlich aus der

Coincidenz von Sonnenlinien mit solchen von irdischen Stoffen das Vorhandensein der letzteren auf der Sonne nachzuweisen, fast ganz vernachlässigt worden, sodass man die Wellenlängen der Sonnenlinien jetzt etwa 10 mal genauer kennt als die der meisten irdischen Stoffe. Nur für das Eisen hat sich THALÉN der Mühe unterzogen, das Spectrum genau zu untersuchen, wobei er zwischen 399·7 μμ und 540·1 μμ die Wellenlängen von 759 Eisenlinien bezogen auf den VOGEL'schen Atlas, von da ab bis 759·3 μμ noch 445 Linien bezogen auf FIEVEZ und ÅNGSTRÖM bestimmte; da die Genauigkeit dieser letzteren geringer ist, als die des VOGEL-schen Katalogs, so ist dieser zweite Theil der THALÉN'schen Arbeit nicht so zuverlässig wie der erste. Die Hauptschwierigkeit bei der Untersuchung von Spectren der einzelnen Elemente, speciell der Metalle beruht darauf, vollkommen chemisch reines Material zu erhalten. So dürfte z. B. eine Ausmessung des Eisenspectrums von KAYSER und RUNGE trotz sehr genauer Positionsangaben für den vorliegenden Zweck nicht zu verwenden sein, für den die Untersuchung auch nicht speciell angestellt ist. Aber wenn auch die Genauigkeit der zahlreichen Untersuchungen von Metallspectren im Allgemeinen nicht ausreicht, um eine absolut sichere Identificirung mit den Sonnenlinien durchzuführen, so kann man doch aus einer nahen Coincidenz mehrerer Linien eines Elementes mit Sonnenlinien ziemlich sicher auf das Vorhandensein dieses Stoffes auf der Sonne schliessen. Umfassende Untersuchungen der Spectra der Elemente und deren Vergleichung mit dem Sonnenspectrum hat in jüngster Zeit ROWLAND unternommen, doch sind die abschliessenden Resultate noch nicht abgeleitet, sondern es liegen erst einige vorläufige Mittheilungen vor, die bei der folgenden kleinen Uebersicht mit berücksichtigt sind. Dieselbe enthält diejenigen Substanzen, deren Vorkommen auf der Sonne zwar nicht überall vollkommen sicher, aber doch sehr wahrscheinlich ist; hinter jedem Element stehen die Anzahl der coincidirenden Linien, wobei das Zeichen $>$ vor einer Zahl bedeutet, dass höchstwahrscheinlich noch mehr Coincidenzen, als die betreffende Ziffer angiebt, für diesen Stoff vorhanden sind.

Eisen	$>$1150	Natrium	$>$9
Kohlenstoff	574	Silicium	9
Chrom	408	Strontium	8
Titan	394	Palladium	5
Nickel	225	Wasserstoff	5
Mangan	214	Molybdän	4
Kobalt	178	Blei	3
Vanadium	118	Uran	3
Zirkon	94	Zink	3
Calcium	75	Aluminium	2
Lanthan	50	Cadmium	2
Cer	32	Indium	2
Yttrium	19	Kalium	2
Neodymium	14	Silber	1
Scandium	14	Thallium	1
Barium	11	Wolfram	1
Magnesium	11		

Ausserdem ist die Coincidenz einiger Sauerstofflinien vielfach behauptet worden, ebenso sollen Kohlenwasserstoff und Cyan vorkommen, doch ist ein sicheres Anzeichen dafür bisher nicht zu erlangen gewesen. Uebrigens können

noch weitere Metalloide oder deren Verbindungen sehr wohl auf der Sonne vorhanden sein, auch ohne ihre Anwesenheit im Spectrum anzuzeigen, denn wenn man in einem glühenden Gasgemenge neben Metalldämpfen auch solche anderer Stoffe hat, so überdecken meistens die Metallspectren die der anderen Körper vollständig.

Es ist oben gelegentlich der Besprechung der THOLLON'schen Darstellung des Sonnenspectrums bereits der sogen. atmosphärischen Linien Erwähnung geschehen, d. h. derjenigen Linien im Sonnenspectrum, die dem Durchgang der Sonnenstrahlen durch die Erdatmosphäre ihr Dasein verdanken; dieselben sind also mehr oder weniger dunkle Absorptionslinien und -streifen. Da dieselben um so intensiver auftreten werden, je länger der vom Licht in der Erdatmosphäre durchlaufene Weg ist, so hat man ein sehr bequemes Mittel, diese atmosphärischen Linien von denen der Sonne eigenthümlichen zu unterscheiden, durch die Beobachtung des Sonnenspectrums bei hohem und tiefem Sonnenstand, denn in ersterem Falle werden die atmosphärischen Linien sehr blass, ja theilweise unsichtbar sein, in letzterem deutlich hervortreten, während die Metalllinien der Sonne ihre Intensität nicht ändern. Ein anderes sehr sinnreiches Verfahren zur Erkennung dieser Linien hat CORNU angewendet, indem er nämlich die das Sonnenbild auf den Spalt werfende Concentrationslinse ziemlich rasch parallel zur Spaltebene aber in einer zur Längsausdehnung des Spaltes senkrechten Richtung hin und her bewegt, sodass bald der östliche bald der westliche Sonnenrand auf den Spalt fällt. Da sich die lichtaussendenden Theile des einen Randes durch die Sonnenrotation auf den Beobachter zu bewegen, die des anderen sich gerade so schnell von ihm entfernen, so folgt nach dem später zu besprechenden DOPPLER'schen Princip, dass dadurch die der Sonne eigenthümlichen Linien sich bald nach rechts, bald nach links bewegen werden, während die atmosphärischen Linien ihre Lage unveränderlich beibehalten. Freilich bietet dieses sinnreiche Unterscheidungsmittel in der Praxis insofern Schwierigkeiten, als die Linienverschiebungen ausserordentlich gering und daher schwierig wahrzunehmen sind.

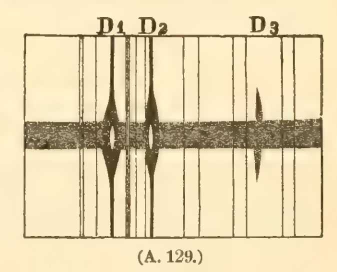
Was nun die durch die Erdatmosphäre hervorgerufene Absorption betrifft, so ist bereits oben erwähnt, dass durch dieselbe ungefähr bei 290 $\mu\mu$ das Spectrum plötzlich abbricht, aber diese allgemeine Absorption beginnt schon im Blau und nimmt bis zu jener Grenze stetig zu. Im übrigen Theil des Spectrums äussert sie sich durch das Auftreten einzelner feiner Linien, grösserer Liniengruppen und breiterer mehr oder weniger verwaschener Streifen und Banden. Um die Untersuchung dieser Einzelheiten haben sich besonders ÅNGSTRÖM, H. C. VOGEL, MC CLEAN, THOLLON, JANSSEN, EGOROFF, CORNU und G. MÜLLER verdient gemacht. Am meisten haben drei Gruppen α, A und B das Interesse in Anspruch genommen, da sie unter einander eine sehr ähnliche Structur zeigen, indem jede derselben aus einer breiten aus vielen Linien gebildeten Bande und einer Anzahl fast gleich weiter Doppellinien besteht. CORNU hat nachgewiesen, dass die Abstände dieser letzteren von α nach B zu A hin fast genau im Verhältniss der entsprechenden Wellenlängen abnehmen. Dass diese drei Gruppen ihr Dasein dem Sauerstoff in der Luft verdanken, dürfte heute kaum noch zu bezweifeln sein. Dagegen erscheint die Intensität einer Gruppe atmosphärischer Linien bei D von der Menge des Wasserdampfes in der Luft bedingt, und CORNU hat gezeigt, dass die Quantität desselben, sobald eine dieser tellurischen Linien zu verschiedenen Zeiten gleich dunkel erscheint, dem Cosinus der Zenithdistanz der Sonne proportional ist. Auf diese Weise könnte man aus der In-

tensität dieser Linien die relative Feuchtigkeit der Luft jeder Zeit, wenn die Sonne scheint, bestimmen, ja sogar durch gleichzeitige Beobachtungen in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche und an dieser selbst eine Ansicht von dem jeweiligen absoluten Wasserdampfgehalt der Luft erlangen. Der Kohlensäuregehalt der Luft scheint sich hauptsächlich durch starke Absorptionsbanden im Ultraroth zu äussern, wo übrigens auch der Wasserdampf eine ziemlich starke allgemeine Absorption bewirkt, während die reine Luft hier wohl keinerlei absorbirenden Einfluss mehr üben dürfte. Die Intensität der durch den Wasserdampf hervorgerufenen Linien nimmt im Allgemeinen proportional der Länge des vom Licht in der Erdatmosphäre durchlaufenen Weges zu, während z. B. die dem Sauerstoff zugehörende α-Gruppe auch bei hohem Sonnenstande noch im Wesentlichen gut sichtbar ist, was darauf hindeuten würde, dass in den höheren Luftschichten der Sauerstoffgehalt verhältnissmässig weniger stark abnimmt als die Menge des Wasserdampfes.

Indem wir damit die Besprechung des Sonnenspectrums im Allgemeinen abschliessen, müssen wir noch einen Blick auf die von einzelnen Theilen der Sonne ausgesendeten Spectren werfen. Als solche Theile haben wir zu unterscheiden den eigentlichen Licht- und Wärmespender, die sogen. Photosphäre der Sonne, welche diese gleichmässig überdeckt und deren scheinbare Begrenzung bildet. Sie sendet das continuirliche Spectrum aus, welches entweder festen oder flüssigen glühenden kleinsten Theilchen, die man sich in der gasförmigen Photosphäre, etwa so wie in jeder Flamme enthalten denken muss, oder aber den in dieser Schicht unter hohem Druck stehenden Gasen seinen Ursprung verdankt, denn es ist experimentell nachgewiesen, dass ein aus hellen Linien bestehendes Gasspectrum bei genügend hohem Druck in ein continuirliches übergeht. Will man die letztere Entstehungsform für das continuirliche Sonnenspectrum gelten lassen, so ist nicht recht ersichtlich, wie man sich die über der Photosphäre liegende Gasschicht zu erklären hat, die man nach dem Sonnenspectrum anzunehmen gezwungen ist. Diese Gasschicht würde gleichsam in continuirlichem Uebergange aus der Photosphäre heraus sich entwickeln, so zu sagen deren oberste etwas abgekühlte Decke bilden, die in ihr enthaltenen kühleren Gase bewirken die als FRAUNHOFER'sche Linien auftretende Absorption. Diese letzteren dürften aber kaum so scharf sein, wie sie wirklich sind, wenn das continuirliche Spectrum wirklich nur durch hohen Druck der Gase in der Photosphäre erzeugt wäre. Dieser Einwand lässt sich jedoch dadurch wieder beseitigen, dass man annimmt, dass das Licht aus viel tieferen Schichten der Sonne kommt, und dass eine allmähliche Abnahme des Druckes und der Dichte nach aussen zu erfolgt, sodass also eine eigentliche Photosphäre nicht anzunehmen wäre. Es lässt sich nachweisen, dass auch dann noch ein scheinbarer Sonnenrand zu stande kommt, ausserhalb dessen man jene umkehrende oder absorbirende Schicht von Gasen annehmen muss. Ueber dieser erhebt sich eine solche von im Wesentlichen reinem Wasserstoff, welche durch ihre bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbare röthliche Farbe die Bezeichnung Chromosphäre erhalten hat; in dieser tritt stellenweise ein explosionsartiges Emporschiessen des Wasserstoffes ein, welches die sogen. Protuberanzen erzeugt. Ausserhalb der Chromosphäre erstreckt sich weit in den Weltenraum hinein die eigentliche Atmosphäre der Sonne die nur bei totalen Sonnenfinsternissen wahrnehmbare Corona der Sonne. Ausserdem zeigen sich auf der Sonne dunkle Flecke und helle wulstartige Erhebungen, die man Fackeln nennt; in welcher Schicht diese enthalten sind und wie sie zu Stande kommen, ist bisher noch nicht völlig erklärt, doch dürfte

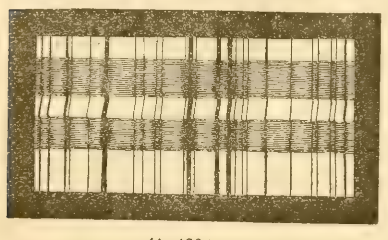
man wohl am wenigsten fehlgehen, wenn man sie als Vorgänge in der Photosphäre und der sie unmittelbar umgebenden Gasschicht ansieht.

Da wir im allgemeinen Sonnenspectrum im Wesentlichen das Spectrum dieser beiden Schichten eben kennen gelernt haben, so wird sich hier logischer Weise die Besprechung des Spectrum der Sonnenflecke zunächst anzuschliessen haben. Dieses letztere ist im Allgemeinen viel lichtschwächer als das Sonnenspectrum, vor dem es sich dadurch auszeichnet, dass eine grosse Anzahl der diesem angehörigen Linien auf dem Fleck verbreitert und dunkler erscheint. Da die Zahl der verbreitert auftretenden Linien und vielfach auch die dabei unter den Sonnenlinien getroffene Auswahl von Fleck zu Fleck wechselt, so lässt sich eine allgemein gültige Uebersicht für das Spectrum der Sonnenflecken nicht aufstellen. Es scheinen vorwiegend die Eisen-Linien eine Umbildung in dem Fleckenspectrum zu erfahren, doch kann sich das auch einfach daraus erklären, dass weitaus die meisten Linien im Sonnenspectrum Eisenlinien sind. Dagegen ist es wohl als etwas sicherer verbürgt anzusehen, dass die Erscheinung des einseitig Verwaschenseins solcher verbreiterter Linien hauptsächlich an den Eisenlinien auftritt. Dabei löst sich dieselbe bei Anwendung einer stärkeren Dispersion durchaus nicht etwa in eine Schaar feiner enger Linien auf, wie sich das beim Kohlenwasserstoffspectrum z. B. zeigt, sondern man hat es hier wohl mit einem allmählichen Hellerwerden ohne scharfe Begrenzung zu thun, was auf das Vorhandensein von Eisenverbindungen besonders schliessen liesse, deren Vorkommen auf eine kühlere Temperatur im Fleck deutet. Auf eine solche haben wir aber wohl nach dem ganzen Habitus des Fleckenspectrums zu schliessen, denn dasselbe weist doch auf eine erheblich vermehrte Absorption hin, und diese würde sich wieder am einfachsten durch eine Verdichtung von Gasen und Dämpfen in Folge von Abkühlung erklären lassen. Das unter den atmosphärischen Linien erwähnte Band α tritt in Fleckenspectren zuweilen viel dunkler auf, was also auf die Anwesenheit von Sauerstoff im Fleck schliessen liesse. Diesem eben beschriebenen Aussehen der dunkeln Linien im Fleckenspectrum steht zuweilen die entgegengesetzte Erscheinung gegenüber, dass die dunkeln Sonnenlinien auf dem Fleck hell erscheinen oder wenigstens schmäler als im Sonnenspectrum. Besonders an Wasserstofflinien hat man diese sogen. Umkehr beobachtet und zwar hauptsächlich, wenn sich eine Lichtbrücke oder jene feinen rosa Schleier im Kernfleck zeigen, doch sind diese keineswegs eine *conditio sine qua non* für das Vorkommen der hellen Linien. Man kann diese letzteren wohl nur so erklären, dass glühende Wasserstoffmassen über dem Fleck emporgeschossen sind, d. h. dass sich eine Protuberanz über demselben erhebt, und thatsächlich hat auch Professor TACCHINI einmal eine solche bei weit geöffnetem Spalt auf einem Fleck gesehen. Dass übrigens solche theilweise Aufhellungen der dunkeln Linien auch in anderen als den Wasserstofflinien auftreten können, zeigt Fig. 129, welche das Spectrum eines Sonnenflecks darstellt, in dem die beiden Natriumlinien D_1 und D_2 einmal stark verbreitert und dann wieder in der Mitte aufgehellt erscheinen, was auf das Vorhandensein einer Natriumdampfschicht niedriger Temperatur und eine solche sehr hoher hindeutet, die übereinander gelagert sind, wobei die kühlere als die specifisch schwerere zu unterst gelagert sein dürfte. Zuweilen deuten Linienverzerrungen auf eine auf- oder ab-



(A. 129.)

steigende Bewegung im Fleck hin, unter der man sich wohl meistens eine Art Wirbelbewegung zu denken haben wird. Fig. 130 giebt das Spectrum eines Sonnenflecks in der Nähe der *b*-Linie wieder, der von einer Lichtbrücke in zwei Theile getrennt war, deren Spectren sich durch die Zeichnung als dunkle Streifen hinziehen, auf denen die verticalen Spectrallinien theilweise verbreitert erscheinen. Zwischen beiden liegt das helle Spectrum der Brücke, dessen Linien gegen die der Kernflecke geknickt erscheinen und zwar steigen die glühenden Gase da, wo die Brücke an den grösseren Fleck grenzt, mit einer Geschwindigkeit von 30 bis 40 *km* pro Secunde empor.



(A. 130.)

Die Spectren der Fackeln scheinen nie genauer untersucht zu sein, wohl weil an ihnen nichts besonders Merkwürdiges zu sehen ist, denn es zeigt sich — soweit bekannt — nur eine Aufhellung des continuirlichen Sonnenspectrums, was entweder auf ein höheres Niveau als die Photosphäre deutet, wodurch die Absorption der Gasschicht verringert würde, oder auf eine höhere Temperatur.

Die umkehrende oder absorbirende Schicht kann nur bei totalen Sonnenfinsternissen beobachtet werden. Nach den übereinstimmenden Angaben verschiedener Beobachter blitzen im Moment, wo der Mondrand den inneren Sonnenrand berührt, die dunkeln Linien des Sonnenspectrums hell auf. Diese Erscheinung dauert nur ganz kurze Zeit, sodass es nicht möglich ist, zu konstatiren, welche Linien hell erscheinen, doch haben die Beobachter stets den Eindruck gehabt, dass es alle Linien seien. Jedenfalls ist die Schicht nur sehr dünn, und zwar nach einer schätzungsweisen Angabe PULSIFER's etwas über eine Bogensecunde, also etwa 890 *km* dick.

Viel bequemer lässt sich das Spectrum der Chromosphäre beobachten, denn dasselbe kann im radial oder tangential zum Sonnenrande gestellten Spalt wahrgenommen werden, wie das bei der Besprechung des Sonnenspectroskopes im ersten Theile dieses Artikels näher erläutert ist. Oeffnet man den Spalt weit, so sieht man die Chromosphäre selbst, welche sich als eine Schicht von ungleicher Mächtigkeit mit nach aussen gefranstem Rande, etwa wie ein im Durchschnitt betrachtetes Stück Pelz darstellt. Was das Spectrum der Chromosphäre anbelangt, so besteht es für gewöhnlich aus wenigen hellen Linien, nämlich denjenigen des Wasserstoffs, dann einer Linie von 587·6 $\mu\mu$, die man meistens, weil sie den Natriumlinien D_1 und D_2 benachbart ist, mit D_3 bezeichnet, und einer Linie von 531·7 $\mu\mu$. Die Lage der D_3-Linie ist in Fig. 129 angedeutet. YOUNG hat jedoch gezeigt, dass zuweilen, wenn die heissen Dämpfe des Sonneninnern über die Chromosphäre hinaus emporgeschleudert werden, d. h. wenn eine Protuberanz emporschiesst, auch im Spectrum der Chromosphäre sehr viele Metalllinien hell erscheinen. Er hat deren 273 bestimmt, von denen die meisten dem Eisen angehören, doch ist auch das Vorkommen von Dämpfen des Barium, Calcium, Chrom, Magnesium, Mangan, Natrium und Titan sicher nachgewiesen. Bei radial zum Sonnenrande gestelltem Spalte erscheinen die Chromosphärenlinien so lang als die Schicht an der beobachteten Stelle dick ist; dabei schliessen sich die hellen Wasserstofflinien und die sonstigen hell auftretenden Linien mit Ausnahme der D_3-Linie an die entsprechenden dunkeln Linien in

der vollen diesen eigenthümlichen Breite an, verlaufen aber nach aussen hin spitz. Die D_3-Linie dagegen verhält sich gerade umgekehrt, ihr entspricht keine dunkle Linie im Sonnenspectrum, so kann sie sich auch einer solchen nicht anschliessen, sondern scheint dasselbe in scharfer Spitze kaum zu berühren, dagegen verläuft sie breit nach aussen hin, was darauf deuten würde, dass der Stoff, dem diese Linie ihr Dasein verdankt und den man, weil man ihn zuerst in der Sonne fand, das Helium genannt hat, mit der Entfernung vom Sonnencentrum an Dichte zunimmt. Die Heliumlinie tritt übrigens auch in den meisten Sternspectren auf, welche die Wasserstofflinien hell zeigen, während sie in den Sternspectren mit dunkeln Linien fehlt. Wie dieses eigenthümliche Verhalten zu erklären ist, ob aus besonderen Eigenschaften dieser Substanz oder aus eigenthümlichen Druck- und Temperaturverhältnissen, lässt sich bis jetzt nicht entscheiden. PALMIERI will die D_3-Linie im Spectrum eines weichen Auswurfproduktes des Vesuv gefunden haben, doch ist erst eine Bestätigung abzuwarten sonst ist diese Linie bei irdischen Stoffen nie beobachtet.

Mit dem Spectrum der Chromosphäre stimmt das Protuberanzenspectrum vollkommen überein, nur dass die hellen Linien jeweils die Form desjenigen Durchmessers der Protuberanz annehmen, der sich unter dem Spalte befindet, wobei es vorkommen kann, dass eine Linie aus mehreren getrennten Stücken besteht, wie das z. B. Fig. 131 zeigt, welche die F-Linie über einer Protuberanz nach einer Beobachtung von H. C. VOGEL darstellt. Dabei bemerkt man auch deutlich eine Verzerrung der hellen Linientheile, welche durch die rasche Bewegung der Gase in der Protuberanz nach dem DOPPLER'schen Princip bewirkt ist. Vielleicht noch markanter zeigt sich eine wirbelartige Bewegung in einer von VOGEL am 3. Juni 1871 beobachteten Protuberanz durch eine doppelte Verkrümmung der F-Linie, wie in Fig. 132 abgebildet ist.



(A. 131.)


(A. 132.)

Wie man eine Protuberanz auf einmal überblicken kann, ist bei Besprechung der Protuberanzenspectroskope auseinander gesetzt worden. Hier mag nur noch die Bemerkung Platz finden, dass ein und dieselbe Protuberanz in den verschiedenen Wasserstofflinien ein verschiedenes Aussehen hat, was sich einfach daraus erklärt, dass die nach dem Violett zu gelegenen Wasserstofflinien durch eine höhere Temperatur bedingt sind. Die Natriumlinien zeigen bisweilen eine doppelte Umkehr, d. h. sie erscheinen hell und sehr breit, zeigen dabei aber in ihrer Mitte ein schmales, schwarzes Streifchen, also etwa gerade umgekehrt wie sie in Fig. 129 abgebildet sind. Die Länge der Linien im Protuberanzenspectrum ist wesentlich verschieden; am längsten erscheinen die Linien des Wasserstoffs, dann folgen die des Heliums, Natriums, Magnesiums etc. Auch die Auswahl der Metalllinien, welche hell erscheinen können, ist scheinbar willkürlich, doch dürften da Temperaturverhältnisse in der Hauptsache bestimmend einwirken, wenigstens sind es vorwiegend die sogen. langen Linien, welche man im Metallspectrum entworfen durch den elektrischen Flammenbogen beobachtet, die in den Protuberanzenspectren hell erscheinen. Je nachdem in einer Protuberanz die gewöhnlichen Linien des Chromosphärenspectrums vorkommen oder noch eine mehr oder minder grosse Anzahl von Metalllinien auftreten, wird man Wasserstoff- und metallische Protuberanzen unterscheiden können; erstere

pflegen sich auch meistens durch eine leichtere wolkenartige Form vor letzteren auszuzeichnen.

Was endlich das Spectrum der Sonnencorona betrifft, so ist dasselbe nur bei totalen Sonnenfinsternissen zu beobachten, da ausserhalb derselben die Erleuchtung der Erdatmosphäre zu stark ist. Es besteht im Wesentlichen aus einem ziemlich hellen, continuirlichen Spectrum, auf welchem die Wasserstofflinien hell hervortreten, und ausserdem eine schon im Chromosphärenspectrum erwähnte helle grüne Linie bei 531·70 μμ, welche man als Coronalinie bezeichnet und, da sie mit keiner Linie einer irdischen Substanz identisch ist, einem besonderen Stoff, dem Coronium, zuschreibt. Im Sonnenspectrum tritt dieselbe mit einer Eisenlinie bei 531·72 μμ als feine Doppellinie auf. Ausserdem haben einige Beobachter auch die dunkelsten Absorptionslinien des Sonnenspectrums — wenn auch schwach — im Coronaspectrum wahrgenommen, was darauf hindeuten würde, dass ein kleiner Theil des von der Corona ausgesandten Lichtes reflektirtes Sonnenlicht ist, wie das auch Polarisationsbeobachtungen bestätigten. Der weitaus grösste Theil des Coronalichtes gehört aber dieser selbst an und muss, wie das continuirliche Spectrum andeutet, von glühenden festen oder flüssigen Partikelchen herrühren, denn dass die hier befindlichen Gase unter einem so hohen Druck ständen, dass sie ein continuirliches Spectrum aussenden könnten, ist vollständig ausgeschlossen.

Soweit die thatsächlichen Ergebnisse bei der spectroskopischen Beobachtung der Sonne. Hier auf die verschiedenen sowohl darauf als auch auf den sonstigen Wahrnehmungen an der Sonne basirten Theorien über die Constitution derselben näher einzugehen, als oben gelegentlich schon geschehen ist, dürfte bei der gebotenen Raumbeschränkung um so weniger angezeigt sein, als ja keine der bestehenden Theorien alle Erscheinungen zu erklären vermag und ausserdem in dem Specialartikel über die Sonne darauf näher eingegangen werden wird. Auch in den folgenden Abschnitten soll auf die theoretischen Betrachtungen der einzelnen Gebiete aus den gleichen Gründen keine Rücksicht genommen werden, dagegen wäre es vielleicht hier am Platze, die von H. C. Vogel vorgeschlagene Bezeichnung der neuerlich aufgefundenen Linien des Wasserstoffs zu erwähnen. Bei Entdeckung dieser in das Ultraviolett hinein sich erstreckenden Linien hatte Huggins eine ziemlich willkürliche Bezeichnung derselben vorgeschlagen, dieselbe aber zu Gunsten der viel rationelleren Vogel'schen Vorschläge nicht aufrecht erhalten. Danach haben wir für

Linie	Bezeichnung nach Vogel	Huggins und Anderen
6 56·3 μμ	H_α	H_α oder C
486·1 „	H_β	H_β oder F
434·1 „	H_γ	H_γ, fälschlich oft mit G bezeichnet
410·2 „	H_δ	H_δ oder h
396·9 „	H_ε	H oder H_1
388·9 „	H_ζ	α
383·6 „	H_η	β
379·8 „	H_ϑ	γ
377·1 „	H_ι	δ
375·0 „	$H_\varkappa$	ε
373·4 „	H_λ	ζ
372·2 „	H_μ	η
371·2 „	H_ν	ϑ
370·4 „	H_ξ	ι

Das Nordlicht

ist ebenso wie das gleich zu besprechende Zodiakallicht seiner Natur nach noch keineswegs aufgeklärt, doch dürften vielleicht beide Erscheinungen in der Atmosphäre der Erde ihren Sitz haben. Das Spectrum des ersteren besteht aus einigen hellen Linien, Streifen und Banden, die je nach der untersuchten Stelle in einem Nordlicht verschieden an Zahl und Intensität sind. Die letztere ist überhaupt gering mit Ausnahme der hellen sogen. »Nordlichtlinie« im Grün, deren Wellenlänge sich im Mittel aus den verschiedensten Bestimmungen zu 557·1 $\mu\mu$ ergiebt. Für die rothen Partien der Nordlichter scheint eine Linie im Roth (629·8 $\mu\mu$) charakteristisch zu sein, die sich bei Einstellung anderer Partien nicht zeigt und mit deren Auftreten ein Verblassen der Nordlichtlinie verbunden ist. Möglicher Weise gehört diese rothe Linie dem Stickstoffspectrum an, wenigstens fällt sie mit dem hellsten Theile der ersten Liniengruppe dieses Elementes zusammen. Auch die Nordlichtlinie ist sehr schwach im Spectrum des Stickstoffs zu erkennen, während VOGEL auch noch die Identität anderer Linien aus dem Nordlichtspectrum mit solchen von atmosphärischen Gasen sehr wahrscheinlich gemacht hat. Danach sieht er das letztere lediglich als eine Umbildung des Luftspectrums an, eine Anschauung, die durch Versuche von ÅNGSTRÖM und HASSELBERG gestützt wird, welche durch elektrische Entladungen in verdünnter Luft bei möglichst niedriger Temperatur eine Anzahl der Linien des Nordlichtspectrums künstlich erzeugen konnten, wobei jedoch niemals die eigentliche Nordlichtlinie beobachtet wurde. Danach dürfte ein Spectrum mit nur dieser hellen Linie aufgelagert einem modificirten Luftspectrum als Erklärung für das Nordlichtspectrum anzusehen sein. Welcher Ursache jenes nur aus der hellen Nordlichtlinie bestehende Spectrum seine Entstehung verdankt, wissen wir nicht, doch sei hier noch die auffällige Erscheinung erwähnt, dass sich die Nordlichtlinie am ganzen Himmel spectroskopisch nachweisen lässt, wenn auch nur ein schwaches Nordlicht an einem Theil desselben sichtbar ist. Dieser letztere Umstand mag vielleicht zur Aufklärung des Widerspruchs dienen, dass manche Beobachter, wie RESPIGHI, VOGEL und WRIGHT im

Spectrum des Zodiakallichtes

die grüne Nordlichtlinie gesehen haben, während andere wie PIAZZI-SMYTH, TACCHINI, CACCIATORE und RICCA sie nicht wahrnehmen konnten. Darin stimmen die verschiedenen Beobachter aber überein, dass dieses Spectrum in der Hauptsache ein continuirliches ist, das sich etwa von Linie D bis G erstreckt und nach den Enden zu an Helligkeit erheblich abnimmt. Unter sehr günstigen Umständen hat WRIGHT eine verhältnissmässig geringe Spaltöffnung anwenden können und dann den Absorptionsstreifen δ in der Nähe von D gesehen, sodass wohl der Schluss nicht unberechtigt ist, dass durch den wegen der geringen Intensität des Zodiakallichtes nothwendigen weiten Spalt die FRAUNHOFER'schen Linien nicht mehr mit genügender Schärfe hervortreten, dass aber sonst das Spectrum des Zodiakallichtes nichts weiter als ein reflektirtes Sonnenspectrum ist. Als ein solches stellen sich auch naturgemäss die Spectren des Mondes und der Planeten dar, höchstens können die Atmosphären der letzteren weitere Absorptionserscheinungen hervorrufen, denn selbst in dem Falle, dass noch einer der Planeten sich in glühendem Zustande befinden sollte, so würde doch dadurch nur ein stärkeres Aufleuchten des continuirlichen Spectrums, nie aber ein solches von hellen Linien hervorgerufen werden.

Das Spectrum des Mondes und der Planeten.

Das Spectrum des Mondes stimmt, soweit es untersucht ist, mit dem der Sonne völlig überein, ein weiterer Beweis für das Fehlen einer Atmosphäre von nennenswerther Dichte auf dem Monde. Die besonders gefärbten Stellen seiner Oberfläche üben entweder keine Absorption, oder diese dehnt sich über grössere Theile des Spectrums aus und ist deshalb bisher noch nicht constatirt.

Das Spectrum des Merkur zeigt eine Verstärkung der bedeutendsten erdatmosphärischen Linien wie auch eine ziemliche Lichtarmuth im Blau und Violett. Ob diese Beobachtungen von VOGEL wirklich reell sind oder nur der sehr geringen Höhe, in welcher der Planet Morgens und Abends beobachtet werden musste, ihre Entstehung verdanken, konnte bis jetzt nicht entschieden werden. Hat die Absorption auf dem Merkur ihren Ursprung, so würde das heissen, dass die Atmosphäre desselben von der der Erde nicht sehr verschieden ist. Bei einer in Potsdam gemachten photographischen Aufnahme konnten zwischen 487 $\mu\mu$ und 380 $\mu\mu$ 28 Linien mit dem Tageslichtspectrum identificirt und überhaupt auf dieser Strecke eine völlige Uebereinstimmung beider Spectra constatirt werden.

Weit bequemer lässt sich das Spectrum der Venus beobachten, und es ist von SECCHI, HUGGINS und VOGEL genauer untersucht, wobei sich zunächst eine völlige Uebereinstimmung mit dem Sonnenspectrum gezeigt hat (zwischen 460 $\mu\mu$ und 406 $\mu\mu$ fanden sich bei einer photographischen Aufnahme 500 Linien, die nach Lage und Intensität völlig mit den Sonnenlinien übereinstimmten); ferner wurde eine Verstärkung der tellurischen Linien gegen das rothe Ende des Spectrums hin, sowie das Auftreten einzelner neuer, sehr feiner Absorptionslinien beobachtet. Danach wäre die Venusatmosphäre der unsrigen ähnlich, enthielte jedenfalls Wasserdampf, aber entweder muss man annehmen, dass sie ziemlich dünn ist oder im Gegentheil sehr dunstreich, sodass die Sonnenstrahlen nicht tief eindringen können; letztere Conjectur hat nach dem Aussehen der Venusoberfläche die grössere Wahrscheinlichkeit für sich.

Das Spectrum des Mars haben hauptsächlich HUGGINS, VOGEL, MAUNDER und CAMPBELL untersucht, wobei sich ein Widerspruch insofern ergeben hat, als die drei erst genannten ein deutliches Hervortreten der tellurischen Linien besonders im Gelb und Roth (ja HUGGINS glaubt sogar ein neues Absorptionsband zwischen 586 und 584 $\mu\mu$ constatirt zu haben) sowie eine allgemeine Absorption der blauen und violetten Theile des Spectrums wahrnahmen, während CAMPBELL keinen Unterschied zwischen dem Mars- und dem Mondspectrum fand. MAUNDER beschreibt im Spectrum der dunkeln Marsflecke eine merkliche Schwächung des Roth und Gelb, im Gegensatz zu HUGGINS, der nur ein allgemeines Dunklerwerden des Spectrums beobachtete. Im Spectrum des südlichen Polarflecks ist nach MAUNDER das Roth besonders schwach, dagegen Gelb und Grün hell, während er im Spectrum des Marsmondes gerade das Umgekehrte wahrzunehmen glaubte.

Die Spectren der Planetoiden sind noch wenig untersucht, und für viele der jetzt üblichen Spectralapparate ist eine spectroskopische Beobachtung der meisten kleinen Planeten wegen deren geringer Helligkeit undurchführbar. VOGEL konnte im Spectrum der Vesta das Vorhandensein der *F*-Linie und der Liniengruppe *b* sicher nachweisen, das des atmosphärischen Bandes δ blieb ihm zweifelhaft; war das letztere aber zu sehen, so konnte es bei dem hohen Stande des Planeten nicht in der Erdatmosphäre entstanden sein. Bei Flora war in dem sehr schwachen continuirlichen Spectrum keine Linie zu constatiren.

Das Spectrum des Jupiter zeigt zunächst wiederum das Auftreten tellurischer Linien, dann aber eine Absorptionsbande von 617·8 μμ Wellenlänge, von der VOGEL constatirt hat, dass sie im Spectrum der Erdatmosphäre nicht vorkommt. Man braucht indessen daraus noch nicht auf das Vorhandensein eines besonderen Stoffes in der Jupiteratmosphäre zu schliessen, sondern der erwähnte Streifen kann sehr wohl nur durch besondere Vertheilung des Druckes und der Temperatur hervorgerufen sein. Im Uebrigen zeigt das Jupiterspectrum völlige Uebereinstimmung mit dem der Sonne, und es konnten auf einem Photogramm zwischen 446 und 405 μμ 100 Linien des Sonnenspectrums aufgefunden werden. LE SUEUR wies zuerst nach, dass das Spectrum der in der Aequatorgegend des Jupiters auftretenden dunkeln Streifen von dem der hellen Partien des Planeten sich dadurch unterscheide, dass zwar keine neueren Absorptionslinien und -bänder hinzukommen, die vorhandenen, aber dunkler und breiter erscheinen, und dass im Allgemeinen Blau und Violett in höherem Grade geschwächt sind als die anderen Theile des Spectrums. Ganz das Gleiche konnte VOGEL im Spectrum des in den Jahren 1880—83 besonders gut sichtbaren rothen Flecks constatiren. Alle diese Beobachtungen würden darauf hindeuten, dass das Licht dieser dunkeln Stellen einen weiteren Weg in dem absorbirenden Mittel zurückzulegen hat als das der helleren Partien, d. h., dass die dunkeln Streifen tiefere Einschnitte in der Atmosphäre andeuten. Da nun die Zahl und Vertheilung dieser dunkeln Stellen keineswegs eine constante, sondern vielmehr mit der Zeit wechselnde ist, so wird damit auch das ganze Spectrum des Jupiter gewissen Schwankungen in Bezug auf die Stärke der Absorption unterworfen sein. Dass ein etwaiges Selbstleuchten des Jupiter nicht aus dem Spectrum erkannt werden kann, ist oben schon angedeutet, denn da bei seiner geringen Helligkeit Jupiter höchstens in Rothglut sich befinden kann, so würde dadurch ein helleres Leuchten der rothen und gelben Partien des Spectrums hervorgerufen werden, was von einer vermehrten Absorption im Blau und Violett nicht zu unterscheiden wäre. VOGEL hat auch die Spectren der Jupitertrabanten untersucht, aber nur constatiren können, dass ausser dem oben erwähnten charakteristischen dunkeln Band noch ein weiterer atmosphärischer Streifen im Spectrum auftritt, wonach also die Atmosphäre dieser Trabanten der des Jupiter selbst sehr ähnlich wäre. Ausserdem konnten auf photographischem Wege bei den vier hellsten Satelliten FRAUNHOFER'sche Linien nachgewiesen werden, bei dem dritten derselben bis zu 40 zwischen 487 und 370 μμ.

Das Spectrum des Saturn ist dem des Jupiter ausserordentlich ähnlich, nur erheblich viel lichtschwächer. Auch das Absorptionsband bei 618 μμ ist im Spectrum der Saturnkugel deutlich vorhanden, fehlt jedoch in dem des Ringes, sodass man bei diesem entweder gar keine oder nur eine sehr dünne Atmosphäre annehmen muss. Im Uebrigen haben photographische Aufnahmen des Saturnspectrums von VOGEL und HUGGINS dargethan, dass sowohl in diesem wie in dem Spectrum der Ringe FRAUNHOFER'sche Linien auftreten, und dass beide Spectren (bis auf den oben erwähnten Punkt) völlig übereinstimmen.

Das Spectrum des Uranus lässt wegen seiner geringen Helligkeit bei direkter Beobachtung nur eine Anzahl dunkler Absorptionsstreifen, aber kaum irgend welche FRAUNHOFER'sche Linien erkennen, doch hat HUGGINS wenigstens das Vorhandensein der dunkleren derselben auf photographischem Wege nachgewiesen, ja letzterer hat sogar einige derselben messen können, wobei sich ferner gezeigt hat, dass in dem brechbareren Theil des Uranusspectrums weder Absorptionsbänder noch helle Linien auftreten, welche letzteren LOCKYER gesehen haben

wollte. Die direkten Beobachtungen über die Lage der dunkeln Streifen von HUGGINS, H. C. VOGEL und KEELER stimmen gut überein und beweisen, dass die dunkle Bande bei 618 μμ auch im Spectrum des Uranus vorhanden ist, sowie dass die Absorption in der Atmosphäre dieses Planeten eine ungewöhnlich starke und von der der Erdatmosphäre verschiedene ist, wenn auch beide darin sich gleichen, dass von der *F*-Linie ab im Blau und Violett nur noch eine allgemeine Absorption stattfindet.

Das Spectrum des Neptun endlich ist so lichtschwach, dass FRAUNHOFER'sche Linien gar nicht mehr und dunkle Absorptionsstreifen mit Mühe darin zu erkennen sind, doch gelang es VOGEL, eine allgemeine Uebereinstimmung derselben mit denjenigen des Uranus nachzuweisen.

Das Spectrum der Kometen.

Theilweise um die Sonne kreisend und theilweise nach einmaliger Annäherung an dieselbe sich im Weltraume verlierend, bilden die Kometen gleichsam ein Verbindungsglied zwischen dem Sonnensysteme und der Fixsternwelt, und daher wird man beim Uebergange der spectroskopischen Betrachtung von ersterem zu letzteren die Besprechung der Kometenspectra als natürliche Brücke anzusehen haben. Dieselben bestehen im Allgemeinen aus einem continuirlichen Spectrum, in welchem drei helle Bänder aufleuchten. Diese letzteren setzen sich aus einer grossen Anzahl heller Linien zusammen, welche gegen das Violett hin an Helligkeit und Abstand verlieren. Betrachtet man dieselben bei weit geöffnetem Spalt, wie er wegen der Lichtschwäche der Kometen meistens angewendet werden muss, so erscheinen jene hellen Partien als einseitig (d. h. nach dem Violett zu) verwaschene Bänder mit ziemlich scharfer Grenze gegen das Roth. Dabei pflegt das Maximum der Helligkeit nicht mit dieser Grenze zusammenzufallen, sondern etwas gegen das Violett hin verschoben zu sein, ein Umstand, der die zum Theil recht erheblichen Differenzen in der Lagenbestimmung dieser Bänder erklärt. Da diese Maximalhelligkeit möglicherweise keine feste Lage in dem Bande hat, so ist es richtiger, bei der Wellenlängenbestimmung die scharfe Grenze gegen das Roth hin einzustellen. Die besten darauf bezüglichen Messungen geben im Mittel die Wellenlängen der drei Bänder zu 563·0, 516·6 und 471·9 μμ. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese drei hellen Kometenbänder identisch sind mit denen der Kohlenwasserstoffe, die bei allen diesen gleich sind und wahrscheinlich dem Acetylen, einem der Zersetzungsprodukte der Kohlenwasserstoffe, ihr Dasein verdanken, und deren Wellenlängen 563·5, 516·5 und 473·8 μμ betragen. Ein Unterschied zwischen den Spectren der Kohlenwasserstoffe und der Kometen besteht nun darin, dass in ersteren noch zwei weitere Bänder (je eines im Roth und Violett bei 618·8 und 431·2 μμ) vorhanden sind, welche bei den Kometen fehlen, was seine Erklärung wohl am einfachsten dadurch findet, dass diese beiden — nebenbei schwächsten — Banden im Kohlenwasserstoffspectrum bei niedrigen Temperaturen nicht auftreten. Doch fand VOGEL im Komet 1882 I einen rothen Streifen bei 613 μμ, der möglicher Weise dem rothen Kohlenwasserstoffbande angehört. Ein weiterer Unterschied zwischen dem Kohlenwasserstoff- und dem Kometenspectrum besteht darin, dass in ersterem die Helligkeitsmaxima der einzelnen Banden mit der scharfen Kante nach Roth hin zusammenfallen, wobei auch erwähnt sei, dass man in den meisten Kohlenwasserstoffbändern eine Anzahl (etwa bis fünf) Unterabtheilungen beobachten kann, von denen HASSELBERG die eine im Grün bei 512·9 μμ in den Kometenspectren 1882 II und 1884 I unterscheiden konnte, ein Beweis einmal

dafür, dass man in den Kometenspectren wirklich ein Kohlenwasserstoffspectrum vor sich hat, und ferner, dass die in ersteren auftretende Verschiebung der Maximalhelligkeit gegen Violett hin nicht etwa als ein besonders helles Aufleuchten einer der erwähnten Unterabtheilungen aufzufassen ist. H. C. VOGEL hat nun nachgewiesen, dass wenn man die durch Erhitzen aus Meteorsteinen austretenden Gase, hauptsächlich Kohlenwasserstoff- und Kohlenoxydgas, in einer GEISSLER'schen Röhre unter Verwendung eines starken Funkeninductors zum Leuchten bringt, in dem engen Theile der Röhre ein Spectrum auftritt, welches dem Kometenspectrum viel mehr ähnelt als das reine Kohlenwasserstoffspectrum, besonders was die Verschiebung der Helligkeitsmaxima betrifft. Auch traten in dem von VOGEL künstlich erzeugten Spectrum zwei für gewöhnlich im Kometenspectrum fehlende Streifen auf, die aber CAMPBELL im Spectrum des Kometen 1893 IV bei 487 und 455 $\mu\mu$ beobachtet hat. Auf etwas anderm Wege suchte HASSELBERG künstlich das Kometenspectrum herzustellen, was ihm — wenn auch durchaus nicht vollständig — so doch angenähert dadurch gelang, dass er durch Kohlenwasserstoff in weiten GEISSLER'schen Röhren unter möglichst herabgeminderten Druck- und Temperaturverhältnissen disruptive elektrische Entladungen hindurchschickte. Man wird also wohl sagen dürfen: die drei hellen Bänder des Kometenspectrums gehören einem theils durch Vermischung mit Kohlenoxydgas, theils durch geringen Druck und niedrige Temperatur modificirten Kohlenwasserstoffspectrum an. Eine auffällige Erscheinung trat im Spectrum der Kometen 1882 I und II auf, indem nämlich bei Annäherung an die Sonne die *D*-Linie hell aufleuchtete, während die Kohlenwasserstoffbänder fast ganz verschwanden; mit der grösseren Entfernung der Kometen von der Sonne nahm die Intensität der Natriumlinie ab. Versuche von E. WIEDEMANN und solche von HASSELBERG haben gezeigt, dass, wenn man in eine mit Kohlenwasserstoff gefüllte GEISSLER'sche Röhre Natrium einführt und dieses erhitzt, während starke disruptive Entladungen durch die Röhre gehen, das Spectrum des Natriums das des Kohlenwasserstoffs schliesslich völlig überdeckt, sodass also nicht nur das Vorhandensein von Natrium — wenigstens in den genannten beiden Kometen — sondern wohl auch ferner nachgewiesen ist, dass das Selbstleuchten der Kometen durch disruptive elektrische Entladungen zu Stande kommt. Dass die Natriumlinien gerade in den Spectren dieser beiden Kometen auftraten, erklärt sich wohl am ungezwungensten daraus, dass diese letzteren der Sonne so nahe kamen, dass das vorhandene Natrium in Dampfform übergehen konnte. Bei dem Kometen 1882 II beobachteten übrigens COPELAND und J. G. LOHSE, dass kurz nach seiner grössten Sonnennähe ausser der *D*-Linie auch fünf helle Linien im Gelb und Grün sichtbar waren, die nach den Messungen wohl sicher den stärksten Eisenlinien in diesem Theile des Spectrums entsprechen.

Ausser diesen hellen Banden und Linien enthält das Kometenspectrum auch noch ein continuirliches Spectrum, dessen Intensität gegenüber den Bändern nicht nur bei den einzelnen Objecten, sondern auch in den verschiedenen Punkten ihrer Bahnen wechselt. Dass ein Theil desselben von reflektirtem Sonnenlicht herrührt, haben photographische Aufnahmen, die HUGGINS von den Spectren der Kometen 1881 II und 1882 I gemacht hat, bewiesen, da in diesen zweifellos FRAUNHOFER'sche Linien zu sehen waren; damit stimmt überein, dass ein Theil des Kometenlichtes polarisirt ist. Dass aber auch ein Theil des continuirlichen Spectrums durch das Eigenlicht der Kometen zu Stande kommt, bewies die photometrische Beobachtung des Kometen 1884 I, bei welchem G. MÜLLER eine Lichtzunahme um 1·3 Grössenklassen innerhalb weniger Stunden am 1. Januar 1884

constatirte, während H. C. VOGEL gleichzeitig im Spectroskop eine starke Aufhellung im continuirlichen Spectrum des Kerns beobachtete, wobei die hellen Bänder zwar an sich Veränderungen, aber keine Lichtzunahme erfuhren. HASSELBERG hat nun gezeigt, dass wenn man Kohlenwasserstoff und Sauerstoff gleichzeitig unter dem Druck von etwa einer Atmosphäre in einem GEISSLER'schen Rohr hat, die elektrischen Entladungen in demselben eine helle, gelbe, eigenthümlich flammende Lichterscheinung geben, welche ein continuirliches Spectrum aussendet. So kann man sich also ungefähr auch das Aufleuchten des continuirlichen Spectrums bei den Kometen erklären, besonders da dabei wiederholt eine gelbliche Färbung des Kernes beobachtet ist. Jedenfalls haben wir es bei der Lichtentwickelung der Kometen mit elektrischen und zwar wohl disruptiven Entladungen zu thun.

Die den Kometen der Bahn nach verwandten Sternschnuppen und Meteore sind in Bezug auf ihre Spectren wenig untersucht. Sie haben ein continuirliches Spectrum, hervorgerufen durch das Glühen ihrer festen Masse, in dem gelegentlich das Grün stark hervortritt. SECCHI will die Magnesiumlinie, andre dagegen Linien im Roth wahrgenommen haben, sicher verbürgt ist durch KONKOLY wohl nur das Auftreten der Natriumlinie. Diese leuchtet gelegentlich nicht gleich im Anfang, sondern erst nach einiger Zeit auf, was sich wohl ungezwungen durch die Temperatursteigerung, die das Natrium allmählich erst zum Verdampfen bringt, erklärt. Im Uebrigen bieten die auf die Erde gestürzten Meteorsteine ganz direkt das Material für die Untersuchung der Bestandtheile dieser Himmelskörper.

Die Spectra der Fixsterne.

Die Spectra der Fixsterne zeigen schon bei oberflächlicher Beobachtung auffallende Unterschiede, die sich noch erheblich vermehren, sobald man in ein genaueres Studium derselben eintritt. Wenn man sich daher einen Ueberblick über die Sternspectra verschaffen will, so ist es nöthig, dieselben zu klassificiren. Der erste Versuch einer solchen Klassifikation rührt von FRAUNHOFER her, der gelegentlich seiner Untersuchungen über Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögen einzelner Glasarten im Wesentlichen drei verschiedene Arten von Sternspectren erkannte, als deren Repräsentanten er Sirius, Capella und Beteigeuze aufführte. Er hat damit die Haupttypen der Sternspectren richtig charakterisirt, wenn er dieselben auch noch nicht als solche bezeichnete. Da diese Untersuchungen lange vor Entdeckung der eigentlichen Spectralanalyse und gleichsam nur beiläufig angestellt waren, so fanden dieselben keine besondere Beachtung, sodass später SECCHI unabhängig davon an eine Eintheilung der Sternspectra ging, welche er im Jahre 1863 in zwei Klassen schied, die sich nicht allein auf das Spectrum, sondern auch auf die Farbe der Sterne bezogen, indem die eine gefärbte, die andere weisse Sterne umfasste. 1866 fügte er einen weiteren Typus hinzu, der in der Hauptsache die blauen Sterne umfasste, und machte 1868 noch auf einen vierten Typus aufmerksam, der ihm bisher deshalb entgangen war, weil ihm vorwiegend schwache Sterne angehörten. Zum Schluss fand er noch bei zwei Sternen das Wasserstoffspectrum, die er deshalb als Vertreter einer fünften Klasse ansah. Danach ist schliesslich die SECCHI'sche Eintheilung der Fixsternspectra die folgende:

I. Typus. Die Farbe dieser Sterne ist weiss (Sirius, Altair, Regulus etc.). Ihr Spectrum besteht aus den sieben Farben, welche durch vier starke schwarze Linien unterbrochen sind, eine im Roth, die andere im Grünblau, die beiden

letzten im Violett. Sie gehören dem Wasserstoff an. Fast die Hälfte aller Sterne gehört hierher.

II. Typus. Die Farbe dieser Sterne ist gelb (Capella, Pollux, Arcturus etc.). Ihr Spectrum ist vollständig dem der Sonne zu vergleichen, also von vielen sehr feinen, dicht zusammenstehenden schwarzen Linien durchsetzt, die dieselben Stellen wie im Sonnenspectrum einnehmen. In manchen Sternen sind diese Linien ausserordentlich schwach (Pollux, Capella), in anderen breit und sehr deutlich (Arcturus, Aldebaran). Procyon kann als die Zwischenstufe von I zu II, Aldebaran als der Uebergang von II zu III angesehen werden.

III. Typus. Die Farbe dieser Sterne ist orange und roth (α Herculis, α Orionis). Das Spectrum ist als aus zwei übereinander gelagerten Spectren zusammengesetzt zu betrachten, von denen das eine aus breiten dunklen Streifen besteht, welche das ganze Spectrum so theilen, dass es den Anblick von der Seite des Roth her beleuchteter Säulen darbietet, während das andere die schwarzen feinen Linien enthält, die das Spectrum des II. Typus charakterisiren. Die Lage der Hauptlinien ist in allen Sternen dieselbe.

IV. Typus. Die Farbe dieser Sterne ist blutroth. Das Spectrum enthält drei fundamentale Zonen: Gelb, Grün und Blau. Bei einigen Sternen ist auch noch eine Andeutung der rothen Zone zu erkennen. Während beim III. Typus die Banden nach Violett scharf begrenzt erscheinen und nach Roth zu verwaschen sind, sind sie hier nach Roth zu scharf begrenzt und nach Violett verwaschen. Die Helligkeit der Sterne dieses Typus ist nur gering.

V. Typus. Einige wenige Sterne geben direkt das Spectrum des Wasserstoffs (β Lyrae, γ Cassiopeae).

Diese Klassifikation von SECCHI ist zunächst eine rein äusserliche, auf die augenfälligen Unterschiede der Spectren begründete, doch hat ihr Urheber nachträglich eingesehen, dass dieselbe auch eine auf die physische Beschaffenheit der Sterne besonders auf die Temperaturverhältnisse bezügliche Bedeutung hat.

Den SECCHI'schen Typen schliesst sich im Wesentlichen die von PICKERING bei Aufstellung des »Draper Katalogs«, der die Spectren von 10351 Sternen umfasst, befolgte Klassificirung an, nur dass dieselbe sich lediglich auf das Aussehen der auf der photographischen Platte sichtbaren Theile der Sternspectren bezieht und eine viel detaillirtere ist; auf Beziehungen zu der Constitution der betreffenden Sterne ist dabei nicht geachtet. PICKERING äussert sich über seine Spectraltypen im 26. und 27. Bande der »Annals of Harvard College Observatory« etwa folgendermaassen:

»Wenn man die Spectren einer grossen Zahl von Sternen photographirt, so findet sich eine Form vorherrschend. Sie besteht aus einem nahezu continuirlichen Spectrum, durchkreuzt von einer Reihe mit grosser Regelmässigkeit angeordneter dunkler Bänder oder Linien. Die Zwischenräume zwischen den Linien verringern sich mit der Wellenlänge. Diese Linien scheinen der Anwesenheit von Wasserstoff ihr Dasein zu verdanken. Sie haben die folgenden Bezeichnungen und in Millionstel Millimeter ausgedrückten Wellenlängen:

	μμ		μμ		μμ
C	656·3	α	388·9	ε	375·0
F	486·1	β	383·6	ζ	373·4
G	434·1	γ	379·8	η	372·2
h	410·2	δ	377·1	ϑ	371·2
H	397·0				

Die erste dieser Linien liegt im Roth und erscheint in den Photographen nicht. Die dritte ist hier aus Bequemlichkeit *G* genannt. Sie darf nicht mit der benachbarten breiten Bande bei Wellenlänge 431 μμ verwechselt werden, die im Sonnenspectrum erscheint und von FRAUNHOFER *G* genannt wurde. Sterne, die das oben beschriebene Spectrum zeigen, gehören zum I. Typus nach der gewöhnlichen Klassifikation der Sternspectra. Die *K*-Linie 393·4 μμ ist auch meistens sichtbar, doch schwankt ihre Intensität bei verschiedenen Sternen. Danach erhält die Bezeichnung:

A ein Spectrum, in dem keine anderen als die oben erwähnten Linien sichtbar sind.

B ein Spectrum, in dem man noch andere Linien entdeckt. Die am häufigsten gesehenen Linien haben die Wellenlängen 402·6 μμ und 447·1 μμ. Viele Sterne im Orion und Canis major gehören in diese Klasse.

C ein Spectrum des ersten Typus, in welchem die *G*- und *h*-Linien doppelt zu sein scheinen. Es ist nicht sicher, ob diese Erscheinung der Wirklichkeit entspricht, da sie durch bei stärkerer Dispersion gemachte Aufnahmen nicht bestätigt wird. Vielleicht entsteht sie aus mangelhafter Focusirung, oder es lässt die Anwesenheit der oben erwähnten Bande von der Wellenlänge 431 μμ in einigen Fällen die *G*-Linie doppelt erscheinen.

D ein Spectrum des ersten Typus, welches helle Banden enthält.

Die Buchstaben *E* bis *L* sind für verschiedene Varietäten der Spectra des Typus II gebraucht. Der helle Theil der Spectren wird von den Linien *K* und *F* eingeschlossen. Die *K*-Linie (Wellenlänge 393·4 μμ) hat in diesen Spectren nahezu die gleiche Intensität wie die *H*-Linie. Die anderen Linien sind meistens schwach. Es bezeichnet:

E ein Spectrum, in dem nur die Linien *F*, *H* und *K* sichtbar sind und dessen Intensität keine plötzliche Aenderung erleidet.

F ein Spectrum, in dem die Linien, *G* und *h*, wenn auch schwach, vorhanden sind. Man kann das Spectrum als ein solches des ersten Typus ansehen, in welchem die *K*-Linie sehr stark und die *G*- und *h*-Linien nur schwach sind.

G ein Spectrum, in dem noch weitere Linien bemerkbar sind.

H ein Spectrum, welches dem unter *F* beschriebenen ähnelt, nur dass die Intensität des Spectrums plötzlich abnimmt, wenn die Wellenlänge kleiner als 431 μμ wird. Dieses letztere ist eine bei nahezu allen Spectren des dritten Typus auftretende Erscheinung und wurde anfangs als Kriterium für ein solches Spectrum angesehen. Diese Spectra wurden demgemäss bei der ursprünglichen Prüfung der Platten zum dritten Typus gerechnet.

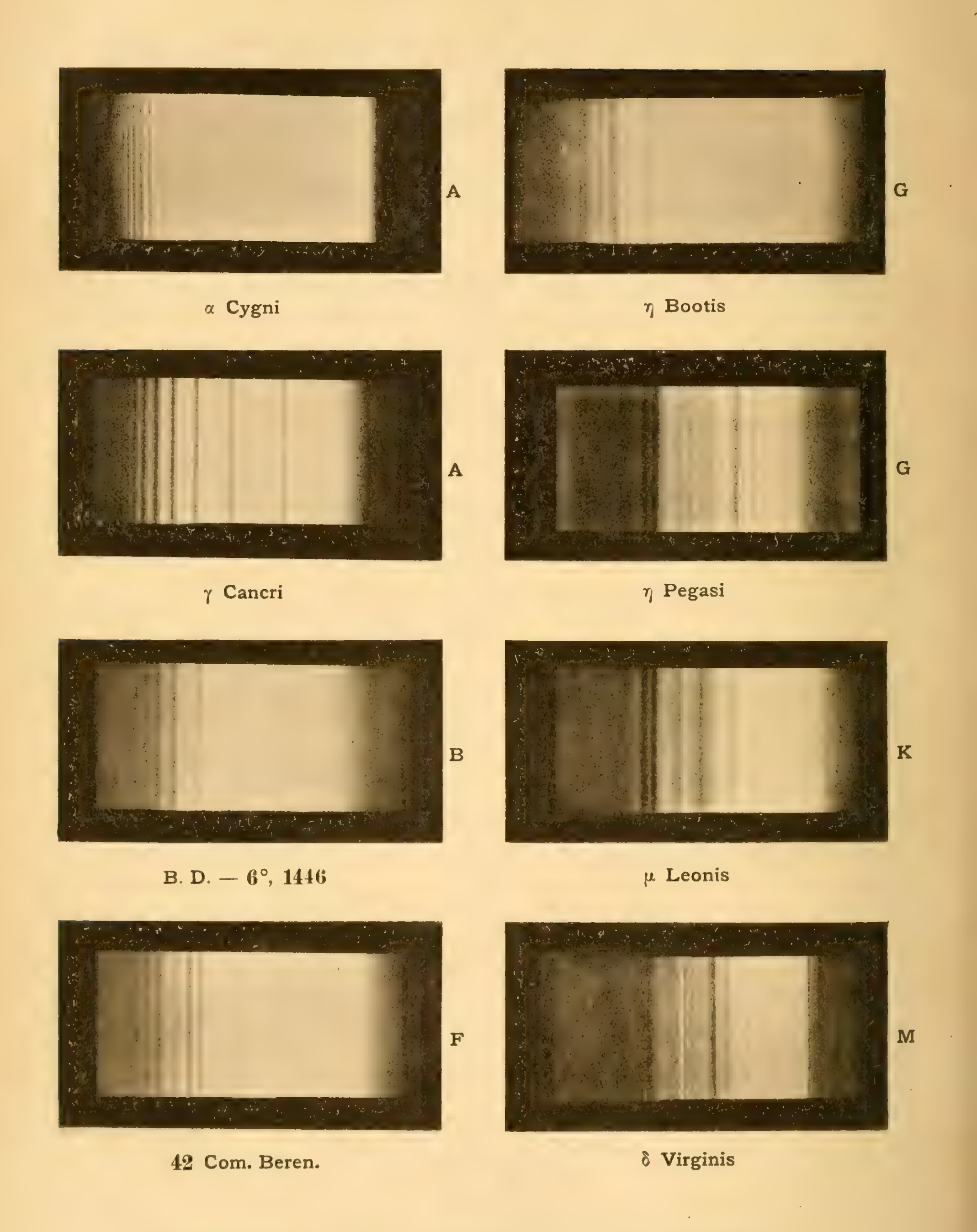
I ein Spectrum, in dem noch weitere Linien sichtbar sind.

K ein Spectrum, in dem helle Banden sichtbar sind, wenn das Spectrum gut definirt ist. Dieselben mögen ihre Entstehung hellen Theilen des Spectrums, die von zwei dunkeln Banden eingeschlossen sind, verdanken.

L ein Spectrum, welches andere Varietäten dieser Form zeigt.

M bezeichnet ein Spectrum des dritten SECCHI'schen Typus. Die Differenz zwischen diesem und dem zweiten ist im photographischen Theil der Spectra viel weniger ausgeprägt als im sichtbaren. Der auffälligste Unterschied ist der, dass in den Spectren des dritten Typus die Intensität sich bei der Wellenlänge 476·2 μμ plötzlich ändert. Strahlen grösserer Wellenlänge als diese sind schwächer als solche von kürzerer.





Sternspectren nach photographischen Aufnahmen
von E. C. PICKERING

Verlag von EDUARD TREWENDT

N ist reservirt für die Sterne des vierten Typus, obwohl kein Stern dieses Typus hell genug ist, um bei der rothen Farbe aller solcher Sterne im »Draper Katalog« zu erscheinen.

O ist für Sterne gebraucht, deren Spectra hauptsächlich aus hellen Linien bestehen, wie die von RAYET entdeckten.

P soll die Spectren von planetarischen Nebeln bezeichnen. Da die photographischen Spectren der Klassen *O* und *P* sich sehr ähneln, ist es vielleicht angezeigt, dieselben zu einem fünften Spectraltypus zusammenzufassen. Der einzige Stern im »Draper Katalog« ist D. C. 3889, dessen Spectrum zur Klasse *O* gehört.

Mit *Q* sind alle Spectren bezeichnet, die nicht in den obigen Klassen enthalten sind.

Danach bedeuten also *A*, *B*, *C* und *D* Varietäten des ersten Typus, *E* bis *L* solche des zweiten, *M* den dritten, *N* den vierten und *O*, *P* und *Q* Spectren, welche keinem der vorhergehenden Typen ähneln.«

Zur Erläuterung dieser Spectraleintheilung diene die beigegebene Tafel, die acht »Sternspectren nach photographischen Aufnahmen von E. C. PICKERING« enthält. Unter jedem Spectrum ist angegeben, welchem Stern es angehört, während daneben ein Buchstabe zur Bezeichnung des Typus steht, zu dem es nach PICKERING zu rechnen ist. Bei sämmtlichen Spectren liegt das violette Ende links, das rothe rechts vom Beschauer. Das Spectrum von α Cygni ist besonders lange exponirt, um die Linien im Ultraviolett bei Typus *A* deutlich hervortreten zu lassen, dadurch sind aber die übrigen Theile des Spectrums überexponirt, sodass das continuirliche Spectrum die dunkeln Linien im Grün und Blau überstrahlt hat. Nähert man sich von rechts her dem linken Ende, so ist die erste der in Reproduction deutlich hervortretenden Linien, die Linie β (nach der obigen PICKERING'schen Bezeichnung), dann folgen deutlich sichtbar γ, δ, ε, ζ, η und schwach ϑ; zwischen δ und ε zeigt sich eine schwache Linie, deren Wellenlänge 376·4 μμ beträgt; in der Originalplatte waren noch drei Linien 370·3 μμ, 369·6 μ und 369·0 μμ zu erkennen. Die erste (von rechts kommende) deutliche Linie im Spectrum von γ Cancri ist *h*, dann folgen *H*, α, β, γ, δ, ε, die übrigen sind in der Tafel nicht mehr deutlich zu erkennen. In dem gerade darunter stehenden Spectrum von B. D. — 6°, 1446 sind dieselben Linien, wenn auch viel schwächer, so doch deutlich zu erkennen, ausserdem zwischen *H* und α eine schwache Linie, die nicht mit der *K*-Linie (393·4 μμ) identisch ist, denn ihre Wellenlänge beträgt 392·2 μμ; auch einige Linien grösserer Wellenlänge sind schwach angedeutet. Das Spectrum von η Bootis ist ebenso wie das von α Cygni stark überexponirt, um die violetten Theile des Typus *G* deutlich zur Anschauung zu bringen, wodurch dann aber die Linien im Blau und Grün nicht zur Darstellung kommen, diese zeigt das Spectrum von η Pegasi deutlich. Im Spectrum von δ Virginis ist die auffällige Linie von der Wellenlänge 422·7 μμ nicht charakteristisch für den Typus *M*. Im Allgemeinen sollen diese 8 Spectren nur Repräsentanten der verschiedenen Typen sein, und nicht etwa zur speciellen Untersuchung der Spectren der angegebenen Sterne dienen, denn auch im besten Lichtdruck gehen eine grosse Menge feiner Details, die das Original aufweist, verloren.

Man sieht sofort, dass die ganze Eintheilung von PICKERING lediglich mit Rücksicht auf die Praxis aufgestellt ist, und dass der Verfasser selbst sie für keine strenge und bindende hält, wie aus den Bemerkungen bei den Klassen *C*, *F* und *H* besonders deutlich hervorgeht. Die Tendenz, eine möglichst de-

taillirte Eintheilung der Sternspectren bei Aufstellung eines so grossen Katalogs, wie es der »Draper Katalog« ist, festzuhalten, ist nur zu billigen, da dadurch die Brauchbarkeit desselben für weitergehende Untersuchungen nur erhöht wird. Wenn man jedoch eine Klassifikation der Sternspectren in der Weise anstrebt, dass die aus derselben erkennbare, physische Beschaffenheit der betreffenden Himmelskörper berücksichtigt ist, so wird man von den PICKERING'schen Buchstaben absehen müssen. Es war ZÖLLNER, der zuerst die Ansicht aussprach, dass die gelben und rothen Sterne nur verschiedene Abkühlungsstufen der weissen Sterne seien. Diese Anschauung hat H. C. VOGEL seiner Nomenclatur der Sternspectren zu Grunde gelegt, die sich schon mehrfach Anerkennung und bei neueren spectroskopischen Untersuchungen von Fixsternen Eingang verschafft hat. VOGEL will den vierten SECCHI'schen Typus nicht als einen solchen bestehen lassen, sondern die demselben angehörigen Sterne mit dem ersten Typus vereinigt wissen, da sich der vierte vom ersten SECCHI'schen Typus nur durch die allerdings augenfällige andere Anordnung der dunkeln Streifen im Spectrum unterscheide; diese deute aber lediglich auf andere Bestandtheile in der Atmosphäre der betreffenden Himmelskörper hin, nicht aber auf wesentlich andere Temperaturen und Drucke. Nach VOGEL hätte man in der Hauptsache drei Klassen von selbstleuchtenden Gestirnen zu unterscheiden, die zugleich drei zeitlich aufeinanderfolgende Entwickelungsphasen darstellen.

»1) Sterne, deren Glühzustand ein so beträchtlicher ist, dass die in ihren Atmosphären enthaltenen Metalldämpfe nur eine überaus geringe Absorption ausüben können, sodass entweder keine oder nur äusserst zarte Linien im Spectrum zu erkennen sind. (Hierher gehören die weissen Sterne).

2) Sterne, bei denen, ähnlich wie bei unserer Sonne, die in den sie umgebenden Atmosphären enthaltenen Metalle sich durch kräftige Absorptionslinien im Spectrum kundgeben (gelbe Sterne), und endlich

3) Sterne, deren Glühhitze soweit erniedrigt ist, dass Associationen der Stoffe, welche ihre Atmosphären bilden, eintreten können, welche, wie neuere Untersuchungen ergeben haben, stets durch mehr oder weniger breite Absorptionsstreifen charakterisirt sind (rothe Sterne).«

Auf Grund dieser Eintheilung giebt VOGEL folgende Klassificirung der Sternspectra:

Klasse I.

Spectra, in welchen die Metallinien nur äusserst zart auftreten oder garnicht zu erkennen sind, und die brechbareren Theile des Spectrums, Blau und Violett, durch ihre Intensität besonders auffallen.

a) Spectra, in denen, ausser den sehr schwachen Metalllinien, die Wasserstofflinien sichtbar sind und sich durch ihre Breite und Dunkelheit auszeichnen (hierher gehören die meisten weissen Sterne, Sirius, Wega).

b) Spectra, in denen entweder einzelne Metalllinien nur ganz schwach angedeutet oder garnicht zu erkennen sind und die starken Wasserstofflinien der Klasse Ia fehlen (β, γ, δ, ε Orionis).

c) Spectra, in denen die Wasserstofflinien hell erscheinen und ausser diesen Linien noch die Linie D_3, ebenfalls hell, sichtbar ist (bis jetzt ist nur β Lyrae und γ Cassiopeae bekannt).

Klasse II.

Spectra, in denen die Metalllinien sehr deutlich auftreten. Die brechbareren Theile des Spectrums sind im Vergleich zur vorigen Klasse matt, in den weniger brechbaren Theilen treten zuweilen schwache Banden auf.

a) Spectra mit sehr zahlreichen Metalllinien, die besonders im Gelb und Grün durch ihre Intensität leicht kenntlich werden. Die Wasserstofflinien sind meist kräftig, aber nie so auffallend verbreitert wie bei Klasse Ia; in einigen Sternen sind dieselben jedoch schwach, und bei solchen sind dann gewöhnlich in den weniger brechbaren Theilen durch zahlreiche dichtstehende Linien entstandene schwache Banden zu erkennen (Capella, Arcturus, Aldebaran).

b) Spectra, in denen ausser dunkeln Linien und einzelnen schwachen Banden helle Linien auftreten (*T* Coronae und höchst wahrscheinlich die von Wolf und Rayet beobachteten Sterne im Schwan, sowie vielleicht auch *R* Geminorum).

Klasse III.

Spectra, in denen ausser dunkeln Linien auch zahlreiche dunkle Banden in allen Theilen des Spectrums auftreten und die brechbareren Theile desselben auffallend schwach sind.

a) Ausser den dunkeln Linien sind in den Spectren Banden zu erkennen, von denen die auffallendsten nach dem Violett dunkel und scharf begrenzt, nach dem Roth matt und verwaschen erscheinen (α Herculis, α Orionis, β Pegasi).

b) Spectra, in denen dunkle, sehr breite Banden zu erkennen sind, von denen die am stärksten hervortretenden nach Roth scharf begrenzt und am dunkelsten sind, nach Violett allmählich erblassen. Sie erscheinen also nach der entgegengesetzten Seite verwaschen, wie die Banden in den Spectren der vorigen Unterabtheilung, auch ist ihre Anzahl geringer als dort. Das Blau und Violett ist gewöhnlich überaus schwach. (Bisher nur schwächere Sterne als hierher gehörig bekannt: Schjellerup, »Catal. rother Sterne« Nr. 78, 152, 173 etc.).

Ebenso wie die Vogel'sche Klassifikation der Sternspectren nimmt die von Norman-Lockyer aufgestellte Rücksicht auf die Beschaffenheit der Himmelskörper, aber freilich unter Zugrundelegung einer neuen von Lockyer selbst aufgestellten Theorie über die Entstehung und Weiterentwickelung der Gestirne. Danach bestehen alle Körper im Weltenraum aus meteoritischen Dämpfen und Meteoren, und sie unterscheiden sich hauptsächlich durch die Dichte, mit welcher die letzteren in den einzelnen leuchtenden Gebilden vorhanden sind, und durch verschiedene Temperaturgrade. Eine ständig zunehmende Dichte und eine bis zur Mitte aufsteigende und dann wieder herabsinkende Temperatur der Gestirne kommt auch in den sieben Hauptgruppen der Lockyer'schen Spectreneintheilung zum Ausdruck, welche übrigens alle Gestirne, also auch die Nebel und Kometen sowie die dunkeln Sterne (Siriusbegleiter) einschliesst. Lockyer will ausserdem diese vielen Gruppen noch in verschiedene Arten zerlegt wissen, die er jedoch selbst noch nicht vollständig aufführt, weshalb dieselben hier nicht näher berücksichtigt werden. Es umfasst danach

Gruppe I: Spectren mit hellen Linien oder Banden, in den letzten Arten dieser Gruppe beginnt sich Absorption zu zeigen (Cometen, Nebel, γ Cassiopeae).

Gruppe II: Spectren, in denen neben hellen Kohlenstoffbanden und gelegentlich hellen Wasserstofflinien gut entwickelte Absorptionsbanden auftreten.

Gruppe III: Spectren mit vorwiegender Linienabsorption bei wachsender Temperatur; die verschiedenen Arten werden durch wachsende Einfachheit des Spectrums charakterisirt.

Gruppe IV: Spectren mit einfachster Linienabsorption, doch bestehen keine scharfen Grenzen gegen die vorhergehende und die nachfolgende Gruppe. Jedenfalls gehören hierher die Himmelskörper mit höchster Temperatur (z. B. α Lyrae).

Gruppe V: Spectren mit vorwiegender Linienabsorption bei abnehmender Temperatur; die Wasserstofflinien nehmen an Intensität ab und andere Absorption tritt ein; die verschiedenen Arten werden durch abnehmende Complikation der Spectren charakterisirt. Die Gruppe V ist schwer von Gruppe III zu trennen.

Gruppe VI: Spectren mit vorherrschenden Absorptionsbanden des Kohlenstoffs; die verschiedenen Unterarten sind in ihrer Folge unterschieden durch ein stufenweises Hinzutreten von anderen Absorptionsbanden als denen des Kohlenstoffs, während gleichzeitig die letzteren an Deutlichkeit abnehmen.

Gruppe VII: Dunkle Körper.

Bis zur vierten Gruppe nehmen also die Temperaturen der betreffenden Körper ständig zu, in den drei letzten ständig ab, während die Dichte der meteoritischen Substanz von Gruppe I bis VII ständig zunimmt. Das mag über die LOCKYER'sche Theorie, welche eine sehr kühne, zugleich auch sehr anfechtbare ist, hier genügen.

Eine ganz strenge Vergleichung lässt sich zwischen den Spectralklassen der einzelnen Autoren nicht durchführen, weil es kaum einmal vorkommt, dass sich zwei Bezeichnungen verschiedener Nomenklaturen genau decken. Immerhin lassen sich doch gewisse Parallelen ziehen, und deshalb mag hier eine kleine Tabelle Platz finden, welche die von VOGEL, SECCHI, LOCKYER und PICKERING aufgestellten Eintheilungen der Sternspectren in Beziehung zu einander setzt, indem die verschiedenen Benennungen für eine ungefähr gleiche Spectrenart auf einer Horizontalreihe stehen. Die VOGEL'sche Nomenklatur ist deshalb der Vergleichung zu Grunde gelegt, weil sie die eingehendste, erschöpfendste und theoretisch durchgebildetste ist.

H. C. VOGEL	SECCHI	N. LOCKYER	E. C. PICKERING
Klasse Ia	Typus I	Gruppe IV	*A* bis *D*
„ Ib			
„ Ic	„ V	„ I	*O* und *P*
„ IIa	„ II	„ III u. V	*E* bis *L*
„ IIb		„ I	
„ IIIa	„ III	„ II	*M*
„ IIIb	„ IV	„ VI	*N*

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die in der Tabelle erfolgte Gleichsetzung verschiedener Bezeichnungen keineswegs eine absolute Uebereinstimmung der darunter verstandenen Spectren bedeuten soll, im Gegentheil können diese zuweilen noch erhebliche Verschiedenheiten aufweisen, wie schon daraus hervorgeht, dass gelegentlich die Bezeichnung eines Autors mit zwei verschiedenen eines anderen gleich gesetzt werden musste, wie z. B. die Gruppe I von LOCKYER mit VOGEL's Klassen Ic und IIb identificirt ist. Ferner sind die PICKERING'schen Bezeichnungen direkt nach der in dem oben citirten Stück von ihm gegebenen Gleichstellung mit den SECCHI'schen Typen eingetragen. Dass diese Identificirung bei manchen praktischen Resultaten nicht zutrifft, zeigt sich am besten aus einer Vergleichung, die PICKERING zwischen dem im Harvard College Observatory entworfenen »Draper Katalog« und den in Potsdam von H. C. VOGEL und G. MÜLLER beobachteten »Spectren von 4051 Sternen bis einschliesslich 7·5. Grösse in der Zone von — 1° bis + 20° Deklination« vorgenommen hat. Es fanden sich dabei 247 Sterne, deren Spectren in Potsdam und Amerika verschieden notirt wurden, und PICKERING liess bei 161 derselben Neubestimmungen vornehmen an spectralphotographischen Platten, die 60 *m* exponirt und zur Auf-

stellung des »Draper Katalog« nicht benutzt waren. Bezeichnet man diese 161 Neubestimmungen mit den 86 nicht neu bestimmten Spectren nach dem »Draper Katalog« zusammen als »zweite Beobachtung«, während man die ursprünglichen Angaben des »Draper Katalog« für die 247 Spectren als »erste Beobachtung« auffasst, so giebt die nachfolgende Tabelle eine Darstellung der Identificirungen, die nach diesen abweichenden Messungen zwischen den PICKERING'schen Spectralarten und den VOGEL'schen Klassen beständen. Dabei geben die in einer Verticalcolumne untereinander stehenden Zahlen ohne bezw. in Klammer ( ) an, wieviel Sterne nach der »ersten«, bezw. »zweiten Beobachtung« unter den 247 sich befinden, deren Spectrum mit dem über der Verticalcolumne stehenden Buchstaben der PICKERING'schen Nomenclatur bezeichnet ist, während in einer Horizontalreihe nebeneinander die entsprechenden Zahlen der VOGEL'schen Klassen stehen. Die letzteren sind in der vordersten Columne angegeben, wobei auch die Bezeichnungen I und II mit aufgeführt werden mussten für diejenigen Sterne, deren Spectren sich nicht genau in eine der Unterabtheilungen dieser beiden Klassen einordnen liessen, während die Klasse Ic wegbleiben konnte, da sich unter den 247 verglichenen Spectren kein derartiges befindet, wogegen eine Horizontalreihe für die in Potsdam als »continuirlich« beobachteten Spectren eingeführt werden musste. In der untersten Reihe endlich sind die Summen der in den Verticalcolumnen stehenden Zahlen gezogen. Es bedeutet also z. B. die in der mit *A* überschriebenen Verticalcolumne auf der Horizontalreihe IIa stehende Angabe: 34 (27), dass sich nach der »ersten Beobachtung« 34, nach der »zweiten« 27 Sterne unter den 247 befinden, deren Spectren in Harvard College als zum Typus *A* in Potsdam als zur Klasse IIa gehörig bezeichnet worden sind.

VOGEL'S Klassen	PICKERING'S Arten										
	A	*B*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*K*	*L*	*M*	*N*
Klasse I	(1)	2 (2)	3	2 (3)	(2)	4 (1)			(1)		
„ Ia	(34)	11 (11)	15 (4)	(23)	5 (17)	69 (5)	4 (1)	1 (7)	(2)	(1)	
„ Ib	6 (1)	6 (11)				1 (1)		(1)			
„ II	1 (1)		1 (1)			8 (8)					
„ IIa	34 (27)	1 (1)		(3)	3 (4)	(2)					
„ IIb											
„ IIIa	6 (2)		2 (1)	1		27 (20)	6 (5)	1 (1)	(2)	(13)	
„ IIIb						1					(1)
Continuir.	16 (7)	1 (10)	2 (1)	2 (6)	(1)	5	(1)				
Summe	63 (73)	21 (35)	23 (7)	5 (35)	8 (24)	115 (37)	10 (7)	2 (9)	(5)	(14)	(1)

Betrachtet man die aus der »ersten Beobachtung« gefundenen Zahlen dieser Tabelle (d. h. also die nicht eingeklammerten), so sieht man sofort, dass eine nach diesen vorgenommene Identisirung zwischen PICKERING's Arten und VOGEL's Klassen wesentlich anders ausfallen würde, als die eben vorgenommene, denn nach diesen Ziffern würde man z. B. *A* mit IIa und *H* mit Ia übereinstimmend finden. Zieht man dagegen die eingeklammerten Beträge aus der »zweiten Beobachtung« zu Rathe, so zeigt sich, dass durch letztere eine erhebliche Annäherung an die ursprüngliche Identificirung erzielt ist, mit Ausnahme etwa der Arten *F* und *G*; die starken Anomalien, die bei der »ersten Beobachtung« in den Buchstaben *A* und *H* zu Tage traten, sind bei der »zweiten« fast ganz beseitigt. Welche erhebliche Aenderungen die 161 Neubestimmungen der »zweiten Beobachtung« hervorgerufen haben, zeigen besonders die Summen der letzten Zeile. Die ganze Tafel ist hier nur mit

aufgeführt, um zu zeigen, einmal, dass zwischen einer direkten und einer photographischen Beobachtung von Sternspectren gelegentlich grosse Unterschiede auftreten können; und zweitens, dass zwei photographische Aufnahmen des gleichen Spectrums ein erheblich anderes Aussehen desselben zu zeigen vermögen, wenn nur die Expositionszeiten beträchtlich verschieden waren. Daraus folgt aber, dass zur genauen und sicheren Prüfung von photographisch fixirten Spectren nicht nur peinliche Sorgfalt, sondern auch grosse Erfahrung gehört, wenn die Resultate zuverlässig sein sollen, eine Behauptung, welche schon früher bei der Besprechung der Spectrographen aufgestellt wurde, für die aber erst die obige Tabelle den Beweis liefert.

Was nun die Frage nach der Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Spectralarten anbetrifft, so können darüber die spectroskopischen Kataloge wenigstens einigermaassen Auskunft geben. Es kommen dabei im Wesentlichen die folgenden in Betracht:

1) Der Potsdamer Katalog, derselbe enthält die Spectren aller Sterne bis einschliesslich 7·5. Grösse in der Zone von — 1° bis + 20° Deklination nach den Beobachtungen von H. C. Vogel und G. Müller.

2) Der O-Gyallaer Katalog, welcher eine genaue Fortsetzung der Potsdamer Durchmusterung in der Zone von 0° bis — 15° Deklination ist nach den Beobachtungen von v. Konkoly und v. Kövesligethy.

3) Der Draper Katalog, welcher auf der Sternwarte des Harvard College zu Cambridge in Nordamerika nach photographischen Aufnahmen von E. C. Pickering zusammengestellt ist und die Spectren der Sterne bis etwa 8. Grösse zwischen dem Nordpol und — 25° Deklination umfasst. Von den 4051 Spectren des Potsdamer Katalogs sind bei der folgenden Auszählung als nicht mit Sicherheit bestimmbar oder als continuirlich 349 weggelassen und entsprechend von den 2022 Sternen der O-Gyallaer Zusammenstellung 73 aus den gleichen Gründen. Dann giebt die folgende Tabelle an, wieviel von den beobachteten Sternspectren der einen oder anderen Spectralklasse angehören.

Spectralklassen	Potsdam	O-Gyalla	Summe	In Procenten
I a	2155	990	3145	55·7
I b	10	4	14	0·2
II a	1240	865	2105	37·3
III a	288	87	375	6·6
III b	9	3	12	0·2

Die in der Columne »Summe« aufgeführten Zahlen werden allerdings von der Wahrheit insofern etwas abweichen, als ja jeder der beiden Kataloge, aus denen sie abgeleitet sind, die in der Zone von 0° bis —1° Deklination liegenden Sterne enthält, diese also doppelt gezählt sind, doch dürfte dieser Umstand keinen so erheblichen Einfluss haben, dass dadurch die in der letzten Spalte stehenden Werthe, welche die in den einzelnen Spectralklassen enthaltenen Sterne in Procenten der Gesammtsumme angeben, merklich beeinflusst wären. Das Material, das der »Draper Katalog« bietet, ist insofern weniger homogen, als es auf einer photographischen Durchmusterung beruht, d. h. alle die Sternspectren enthält, die bei einer bestimmten Expositionsdauer auf den Platten deutlich erkennbar waren. Nun bedürfen aber die Sternspectren, um in gleicher Deutlichkeit auf der photographischen Platte zu erscheinen, verschieden langer Expositionszeiten, je nachdem die brechbaren Theile im Spectrum mehr oder minder stark absorbirt sind. So brauchen die Spectren der ersten Vogel'schen Klasse die

kürzeste Belichtungsdauer, bei denen der zweiten Klasse muss sie schon länger sein, und sehr erheblich grösser bei denen der dritten. So werden also Spectren der dritten Klasse nur dann auf den Platten erscheinen, wenn sie besonders hell, d. h. wenn sie von einem besonders hellen Stern herrühren; während es sehr leicht eintreten kann, dass Sterne, die heller als 7·5 Grösse sind, doch ein so schwaches Spectrum der dritten Klasse zeigen, dass dieses auf den Platten nicht fixirt wird. Vielleicht ist es hauptsächlich hieraus zu erklären, dass die Zahl der Spectren vom PICKERING'schen Typus *M* (gleich der VOGEL-schen Klasse IIIa) im »Draper Katalog« eine ganz ausserordentlich geringe ist, während solche vom Typus *N* (Klasse IIIb) überhaupt in demselben nicht vorkommen. Um nun eine leichtere Uebersicht über die Vertheilung der Spectren am Himmel zu erlangen, unterscheidet PICKERING zunächst vier Zonen, deren erste sich vom Nordpol bis + 61° 2′·7 Deklination, die zweite von + 61° 2′·7 bis + 30°, die dritte von + 30° bis 0° und endlich die vierte von 0° bis — 30° erstreckt. Von diesen theilt er die erste durch die Stundenkreise 0^h, 8 und 16^h in drei gleich grosse Dreiecke, die zweite in neun Vierecke durch Stundenkreise, die um 2 Stunden 40 Minuten von einander abstehen, die dritte und vierte Zone durch die Stundenkreise 0^h, 2^h, 4^h u. s. w. in je 12 Quadrate. Durch 18 der so entstandenen 36 gleich grossen Räume am Himmel zieht sich die Milchstrasse, und PICKERING hat nun die Sternspectren in jedem dieser Räume nach ihren Arten gesondert abgezählt, und daraus die Anzahl berechnet, die in jeder der vier Zonen und ferner die in den 18 von der Milchstrasse berührten und den 18 davon frei bleibenden Räumen sich befinden. Die gewonnenen Resultate zeigt die folgende kleine Tafel, wobei wegen ihrer grossen Aehnlichkeit untereinander die Spectralarten *E* und *G* einerseits, sowie *H*, *I* und *K* andererseits zusammengefasst sind. Die erste Verticalcolumne enthält die Grenzen der vier Zonen und die Bezeichnungen »Milchstrasse« und »Ausserhalb«, deren erste sich auf die 18 von der Milchstrasse durchzogenen Räume, die zweite auf die übrigen 18 bezieht; die zweite Verticalcolumne giebt die relative Grösse der Zonen an, wenn man die Fläche der ersten gleich der Einheit setzt; dabei ist die vierte Zone nur bis — 25° Deklination gerechnet, da sich der Katalog thatsächlich nur bis dahin erstreckt. Die nächsten sieben Columnen enthalten die Anzahl der in den einzelnen Zonen und Räumen vorkommenden Spectralarten, die in den Ueberschriften bezeichnet sind, während die letzte Columne die Summen der auf jeder Horizontalreihe neben einander stehenden Ziffern, also die Anzahl der beobachteten Sternspectren in den einzelnen Himmelsabtheilungen angeben. In der letzten Horizontalreihe sind die Summen der in den vier obersten Horizontalreihen einer Verticalspalte stehenden Sternzahlen gezogen, welche natürlich gleich der Summe der in der 5. und 6. Horizontalreihe befindlichen Ziffern sind.

Zonen und Abtheilungen	Flächeninhalt der Zonen	*A*	*B*	*F*	*E* u. *G*	*H*, *I* u. *K*	*M*	Sonstige Spectralarten	Summen
+90° bis +61° 2′·7	1	952	7	260	269	520	22	11	2041
+61° 2′·7 bis +30°	3	1887	35	355	436	825	22	10	3570
+30° bis 0°	4	1461	26	288	324	679	27	2	2807
0° bis —25°	3·38	918	31	177	242	538	17	4	1927
Milchstrasse . . .	5·74	3560	80	650	628	1275	40	18	6251
Ausserhalb . . .	5·64	1658	19	430	643	1287	48	9	4094
Summen		5218	99	1080	1271	2562	88	27	10345

Um die Zahlen dieser Tabelle mit denen der oben nach dem Potsdamer und O-Gyallaer Katalog zusammengestellten leichter vergleichen zu können, ist in der folgenden kleinen Tafel eine procentarische Umrechnung derselben gegeben, wobei die Spectraltypen *A* bis *D* und *E* bis *L* entsprechend den Vogel-schen Klassen Ia und IIa zusammengerechnet sind, während Typus *M* gleichbedeutend mit Klasse IIIa ist. Die auf einer Horizontalreihe nebeneinander stehenden Zahlen geben also an, wieviel Procent der gesammten in der entsprechenden Zone beobachteten Sternspectren dem in der Ueberschrift der Columne genannten Spectraltypus angehören. In der letzten Reihe sind die auf dem gesammten Himmelsraum bis zu — 25° Deklination geltenden Procentsätze angeführt.

Zonen und Abtheilungen	*A* bis *D*	*E* bis *L*	*M*
+90° bis +61° 2′·7	47·2	51·7	1·1
+61° 2′·7 bis +30°	54·0	45·4	0·6
+30° bis 0°	53·0	46·0	1·0
0° bis —25°	49·3	49·8	0·9
Milchstrasse . . .	58·4	41·0	0·6
Ausserhalb	41·0	57·8	1·2
+90° bis —25°	51·5	47·6	0·9

Aus dieser Uebersicht zusammen mit der oben nach den Potsdamer und O-Gyallaer Katalogen gegebenen scheint nur das eine mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit gefolgert werden zu können, dass die Sterne der I. Klasse reichlich die Hälfte aller ausmachen. Die der zweiten Klasse kommen ihnen nach der Pickering'schen Uebersicht procentarisch ziemlich nahe, doch ist auf diese Zahl mit Rücksicht dessen, was oben über die Spectren des Typus *M* gesagt ist, wohl nicht sehr viel zu geben, jedenfalls scheint da die Häufigkeitsziffer nach den beiden anderen Katalogen, wenn sie sich auch auf eine kleinere Zone am Himmel bezieht, zuverlässiger. Aus der letzten kleinen Tafel ist übrigens das eine mit ziemlicher Bestimmtheit zu schliessen, dass die Vertheilung der Sterne der einzelnen Spectralklassen in den verschiedenen Zonen am Himmel eine recht gleichmässige ist. Als einzige Ausnahme könnte hier die Milchstrasse angesehen werden, in der das procentarische Verhältniss der Spectren I. Klasse zu denen II. sehr günstig für die ersteren liegt und gerade das Umgekehrte wie bei den Regionen ausserhalb der Milchstrasse ist.

Auf eine genauere Besprechung der einzelnen Spectralklassen der Sterne hier einzugehen, fehlt es leider an Raum, und so mag nur nochmals kurz auf die physikalische Begründung der Vogel'schen Klassen hingedeutet werden, nach welcher die Sterne mit Spectren der I. Klasse die heissesten sind, aus denen sich durch allmähliche Abkühlung diejenigen, deren Spectren der II. Klasse angehören, entwickelt haben, bis endlich bei noch weiterer Abkühlung die Sterne mit Spectren der III. Klasse entstehen, welche natürlich sich immer noch in glühendem Zustande befinden und sehr hohe Temperaturen haben, die letzteren sind nur relativ gering im Vergleich zu denen der Klassen I und II. Wie hoch sich die Temperaturen wenigstens in der Photosphäre, d. h. der Licht absorbirenden Schicht auf den Sternen, ungefähr belaufen, darüber giebt nach Scheiner

das Verhalten zweier Magnesiumlinien in den Sternspectren einigen Aufschluss. Die eine derselben (Wellenlänge 448·2 μμ) ist nach Untersuchungen von Liveing und Dewar sowie nach solchen von Scheiner im Spectrum des frei brennenden Magnesiums sowie in dem des Dampfes desselben im elektrischen Bogenlicht nicht sichtbar, dagegen breit und intensiv im Funkenspectrum, während die andere (435·2 μμ) das gerade umgekehrte Verhalten zeigt, indem sie im Funkenspectrum nur schwer oder gar nicht zu erkennen ist, dagegen kräftig und breit im Magnesiumspectrum des Bogenlichtes erscheint. Von diesen beiden Magnesiumlinien ist die erstere in allen Spectren der I. Klasse breit und deutlich zu erkennen, ja sie wetteifert in einigen derselben an Breite mit den Wasserstofflinien, während sie in den Spectren der Klasse IIa, also auch im Sonnenspectrum, schwach, ja in Spectren, die sich der Klasse III nähern, überhaupt nicht mehr zu erkennen ist. Die Linie 435·2 μμ dagegen ist in den Spectren der Klasse Ia überhaupt nicht zu finden, in denen der Klasse Ib aber schon schwach vorhanden; in Klasse IIa gehört sie zu den hervorragenderen Linien und ist endlich im Spectrum von α Orionis (Klasse IIIa) eine der stärksten. Also während Linie 448·2 μμ von den Spectren von Klasse Ia ab allmählich bis zum völligen Verschwinden in Klasse III abnimmt an Breite und Deutlichkeit, nimmt die von Linie 435·2 μμ ungefähr im gleichen Verhältniss zu. Dieses eigenthümliche Verhalten kann nur durch verschieden hohe Temperaturen erklärt werden, denn bei Zunahme des Druckes kann nach dem Kirchhoff'schen Gesetz eine Linie nur breiter und deutlicher werden, aber nie schwächer und schmäler, was bei gesteigerter Temperatur sehr wohl der Fall sein kann. Scheiner schliesst daraus, dass die Temperatur in der Photosphäre der Sterne der Klasse Ia etwa die Temperatur des elektrischen Funkens, deren obere Grenze bei 15000° liegt, hat, dann bei den Sternen der folgenden Spectralklassen abnimmt und bei denen der Klasse IIIa nur noch gleich der des elektrischen Bogens, also etwa 3000° bis 4000°, ist; für die Sterne der Klasse IIa, also auch für die Sonne, würde die Photosphärentemperatur etwa in der Mitte zwischen diesen beiden Grenzwerthen liegen. Diese ganze Ueberlegung will J. E. Keeler auf die aus drei Magnesiumlinien bestehende *b*-Gruppe ausdehnen, welche sich ähnlich wie die Magnesiumlinie 435·2 μμ verhält, nur dass sie in den Spectren der Klasse I nicht ganz zu verschwinden scheint (Keeler hat ihr Fehlen bisher nur bei β Orionis (Ib) nachweisen können), aber doch nur sehr schwach noch vorhanden ist. Nun ist aber diese *b*-Gruppe auch im Funkenspectrum des Magnesiums noch gut zu sehen; wenn sie also in einem Sternspectrum fehlt oder wenigstens sehr schwach ist, so würde das auf eine Photosphärentemperatur bei diesem Himmelskörper deuten, welche die des elektrischen Funkens und damit alle künstlich herstellbaren Temperaturen, also auch die oben angegebene Grenze von 15000° übersteigt. Diese Angabe von Keeler schiebt also nur die obere Temperaturgrenze hinaus, schliesst sich aber sonst dem Scheiner'schen Raisonnement im Princip vollkommen an. In diesem letzteren darf man aber doch wohl einen direkten Beweis für die Richtigkeit der physikalischen Deutung der Vogel'schen Spectralklassen erblicken.

Es würde sich nun fragen, ob alle bisher beobachteten Sternspectren sich in die Vogel'sche Eintheilung rubriciren lassen, und diese Frage darf, wenn man Uebergänge aus einer Klasse in die andre gelten lässt und rasche Aenderungen im Spectrum, wie sie die neuen und die veränderlichen Sterne aufweisen, nicht alle einzeln aufführt, bejaht werden. Ueber die Spectren der zuletzt genannten Sternarten mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden.

Die Spectren der neuen Sterne

sind in die Klasse IIb zu rechnen, beziehentlich als Uebergang von IIb zu IIIa anzusehen, soweit sich dieselben bei den gelegentlich ziemlich schnellen Aenderungen, die man in ihnen beobachtet hat, überhaupt klassificiren lassen. In dem Artikel über die »Astrophotometrie« sind einige nähere Angaben über die Spectren einiger neuer Sterne und die in einzelnen beobachteten Veränderungen gemacht, weshalb hier nicht nochmals darauf eingegangen zu werden braucht, dagegen sei den Spectren einiger veränderlicher Sterne hier noch kurz Beachtung geschenkt. In den Spectren von *R* Leonis und *R* Hydrae entdeckte ESPIN helle Wasserstofflinien, in χ Cygni fand er die D_3-Linie hell. In dem der Klasse IIIa angehörenden Spectrum von *R* Cygni sah er am 13. August 1888 die *F*-Linie sehr hell, welche jedoch mit abnehmender Helligkeit des Sternes ebenfalls an Intensität verlor. Es waren übrigens diese Erscheinungen doch wohl mehr oder weniger vorübergehende, entsprachen also nur zeitweisen Veränderungen und Vorgängen auf den betreffenden Sternen. Sehr eingehende Untersuchungen des Spectrums von β Lyrae sind von KEELER, PICKERING, BELOPOLSKY, SIDGRAEVES, sowie VOGEL und WILSING angestelllt, ohne bisher zu einem völlig klaren Resultat zu führen. In dem linienreichen, zur I. Klasse gehörenden Spectrum von β Lyrae treten alle Wasserstofflinien als deutliche dunkle Linien auf, daneben aber zeigen sich auch helle Linien, die mit den dunkeln Linien mehr oder minder in Beziehung stehen, indem sie stets unmittelbar neben diesen erscheinen oder zeitweise dieselben überdecken und gleichsam einfassen. Es findet hier also ein Verschieben der hellen Linien gegen die dunkeln statt, sodass der Schluss nahe liegt, dass man es bei diesem Veränderlichen mit einem System von zwei oder drei umeinander kreisenden Körpern zu thun hat, die verschiedene physikalische Beschaffenheit haben und sich zeitweise gegen die Erde verdecken. Man hätte also im Spectrum von β Lyrae mindestens zwei, wenn nicht drei übereinander gelagerte verschiedene Spectren vor sich. Eine einigermaassen plausible Erklärung hat sich bis jetzt für das Spectrum des Veränderlichen *R* Geminorum nicht finden lassen. H. C. VOGEL hat in demselben ausser einer Anzahl dunkler Linien und Banden auch eine Anzahl heller Linien ihren Wellenlängen nach bestimmt, wobei das merkwürdige Resultat sich ergeben hat, dass diese hellen Linien den dunkeln des Spectraltypus IIIb zu entsprechen scheinen. Die Messungen sind aber bei der Schwierigkeit der Beobachtung noch zu ungenau, um mit Sicherheit hier eine Umkehr der dunkeln Linien der IIIb Klasse zu constatiren, eine Erscheinung, die — wenn reell — sich der VOGEL'schen Eintheilung nicht fügen würde. Das ist bisher das einzige Beispiel einer Ausnahme von den gewöhnlichen Spectren am Fixsternhimmel, und als solche leitet es zu einer Gruppe von Himmelskörpern über, deren Spectren in keine der VOGEL-schen Klassen hineinpassen und auch von vornherein bei Aufstellung derselben ausgeschlossen wurden, nämlich der

Nebel.

Die Spectren derselben bestehen, gleichviel ob es planetarische oder andere Nebel sind, im Wesentlichen aus vier hellen Linien, deren Wellenlängen nach den besten vorliegenden Bestimmungen zu 500·59, 495·72, 486·09 und 434·07 $\mu\mu$ anzunehmen sind. Von diesen sind die beiden letzten die Wasserstofflinien *F* und $H\gamma$, während der Ursprung der beiden ersteren vollkommen unbekannt ist. Die Helligkeiten der vier Linien zeigen starke Differenzen, und diese letzteren scheinen wieder mit den einzelnen Objecten zu wechseln, doch bleibt die Linie

500·59 $\mu\mu$ stets die hellste und ist bei schwachen Nebeln zuweilen die einzige sichtbare. Ausser diesen vier Hauptlinien sind von einzelnen Beobachtern noch andere helle Linien von geringerer Intensität gegenüber den ersteren gesehen worden, so von TAYLOR, H. C. VOGEL und COPELAND; letzterer constatirte eine Linie bei 587·5 $\mu\mu$ im Spectrum des Orionnebel, die wahrscheinlich mit der D_3-Linie identisch ist. Der zuletzt genannte Nebel ist, wohl seiner Grösse und Helligkeit wegen, vielfach Gegenstand spectroskopischer Untersuchungen gewesen, die recht interessante Resultate geliefert haben. HUGGINS und DRAPER photographirten das Spectrum des Orionnebels wiederholentlich, wobei die gewonnenen Resultate auffällige Unterschiede zeigten, je nach der Stelle des Nebels, die auf den Spalt projicirt wurde. Besonders fand HUGGINS, dass, wenn der Spalt durch ein oder zwei der Sterne des bekannten Trapezes im Orionnebel hindurchging, Linien im Nebelspectrum auftraten, die àm intensivsten in unmittelbarer Nähe der Sternspectren waren und die im Spectrum von Nebelpartien in einiger Entfernung von den Trapezsternen sich überhaupt nicht zeigten, was darauf schliessen liesse, dass die Nebelmaterie in unmittelbarer Umgebung der Trapezsterne am dichtesten sei, und dass diese letzteren wirklich innerhalb des Nebels ständen und sich nicht etwa bloss auf denselben projicirten. Einen weiteren Stützpunkt für die Annahme, dass der Nebel thatsächlich und nicht nur dem Augenschein nach zu den sonstigen Sternen im Orion gehört, liefert eine Beobachtung von COPELAND, der im Nebelspectrum bei ungefähr 447·6 $\mu\mu$ eine helle Linie fand, die wahrscheinlich mit einer nur in den Orionsternen und im Algol bisher beobachteten Linie bei 447·136 $\mu\mu$ identisch ist, welche keiner Linie im Sonnenspectrum entspricht und daher ihrer Natur nach unbekannt ist.

Was nun die verhältnissmässig grosse Einfachheit der Nebelspectra, sowie das Zusammenschrumpfen derselben bei sehr lichtschwachen Objecten auf nur eine helle Linie anbetrifft, so kann dieselbe nach theoretischen Betrachtungen von ZÖLLNER und praktischen Versuchen von FRANKLAND und LOCKYER durch geringe Dichtigkeit der den Nebel bildenden Gase erklärt werden, während HUGGINS experimentell nachwies, dass auch eine erhebliche allgemeine Absorption des ausgesandten Lichtes eine Reduction der Spectren der Gase auf wenige Linien bewirkt.

Weit schwieriger als das helle Linienspectrum der Nebel ist das bei einer ganzen Reihe derselben ausserdem beobachtete schwache continuirliche Spectrum zu erklären. Dasselbe scheint seine grösste Helligkeit etwa bei der *b*-Gruppe zu haben, wie das ähnlich auch die Spectren der Sternhaufen zeigen. H. C. VOGEL glaubt nicht, dass sich dies Spectrum bei Anwendung starker Dispersionen in Linien auflösen lasse, während COPELAND und HUGGINS das für möglich halten. Eine klare Vorstellung über den Ursprung dieses continuirlichen Nebelspectrums hat man bis jetzt nicht gewonnen. Das Charakteristische für die Nebel bleibt immer das Auftreten der hellen Linien im Spectrum, und mit Hilfe dieses Erkennungsmittels hat man einzelne sternartig erscheinende Objecte als zur Klasse der planetarischen Nebel gehörig nachgewiesen. Zwischen diesen letzteren und den grossen, ausgedehnteren Nebeln hat sich ein specifischer Unterschied im Spectrum nicht nachweisen lassen, sodass also den Bestandtheilen nach zwischen diesen beiden der Form nach gewöhnlich unterschiedenen Arten keine eigentliche Differenz besteht. Da sich übrigens in den mächtigsten Fernröhren der Gegenwart die planetarischen Nebel keineswegs immer als Gebilde von einfacher Form darstellen, so dürfte man wohl besser die ganze Trennung in zwei Klassen bei den Nebeln aufgeben.

Die Linienverschiebung nach dem Doppler'schen Princip.

Die bisher besprochenen spectroskopischen Beobachtungen waren alle angestellt, um über die physische Beschaffenheit der Himmelskörper, deren Licht man untersuchte, Aufklärung zu erhalten, wir müssen nun zum Schluss noch einige spectroskopische Untersuchungen hier erwähnen, bei denen es auf die Ermittelung von Bewegungen am Himmel abgesehen ist. Im Jahre 1843 sprach es Christian Doppler zuerst aus, dass, wenn der Abstand zwischen einer Ton- oder Lichtquelle und dem Beobachter ständig zu- oder abnimmt, sich auch die Tonhöhe bezw. die Farbe des Lichtes ändern müsse. Die Richtigkeit dieses unter dem Namen des Doppler'schen Princips bekannten Satzes ist viel umstritten worden und besonders zunächst aus zwei Gründen, weil nämlich einmal Doppler selbst aus seinem Princip zu weitgehende und damit falsche Folgerungen zog, und zweitens weil sich ein experimenteller Beweis wenigstens auf optischem Gebiete nicht erbringen liess. Nachdem jedoch eine Einschränkung in den Schlussfolgerungen aus dem Princip Platz gegriffen hat, und ein praktischer Beweis nicht nur auf akustischem, sondern auch auf optischem Gebiete erbracht ist, kann an der Gültigkeit des Doppler'schen Princips nicht mehr gezweifelt werden. Die mathematisch-theoretische Darstellung lässt sich nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen durchführen und ist auch dann noch recht verwickelt, weshalb sie hier auch angesichts der gebotenen Raumbeschränkung übergangen werden kann, dagegen sollen einige einfache Ueberlegungen das Verständniss für das gedachte Princip vermitteln helfen. Man kann die Lichtwellen als Hohlkugeln ansehen, in deren gemeinsamem Mittelpunkt die Lichtquelle sich befindet, und die immer grösser und grösser werdend sich rasch im Raume ausbreiten. Treffen diese nun das Auge des Beobachters, so rufen sie daselbst eine Empfindung hervor, die wir Licht nennen. Die Art dieser Empfindung wechselt mit der Schnelligkeit, in der die aufeinander folgenden Wellen das Auge erreichen, und wird von uns als Farbe bezeichnet. Die Geschwindigkeit, mit welcher diese Wellenstösse das Auge treffen, ist eine ausserordentlich grosse und die Zwischenzeit zwischen den einzelnen derselben eine unmessbar kleine. Wenn wir die Empfindung des rothen Lichtes haben, so ist die Aufeinanderfolge der einzelnen Wellen eine verhältnissmässig langsame, sie ist schneller im Gelb, noch schneller im Grün und Blau und am schnellsten in den violetten Strahlen, die das Auge gerade noch wahrnehmen kann. Bewegt sich nun eine Lichtquelle sehr rasch auf den Beobachter zu, oder nähert sich dieser sehr schnell der Lichtquelle, so treffen die einzelnen Lichtwellen in rascherer Aufeinanderfolge das Auge, als sie im Raume selbst fortschreiten, d. h. als wenn Beobachter und Lichtquelle in constantem Abstand von einander bleiben; das Auge hat also bei rascher Annäherung von Lichtquelle und Beobachter eine andere Empfindung durch die von ersterer ausgehenden Wellen, als wenn beide sich in Ruhe befinden. Diese »andere Empfindung« des Auges wird sich aber als andere Farbe dokumentiren, d. h. wenn sich Beobachter und Lichtquelle einander rasch nähern, so wird letztere dem ersteren in anderer und zwar mehr nach dem Violett zu liegender Farbe erscheinen, als wenn beide in unverändertem Abstand von einander beharren. Die ganz entsprechende Ueberlegung greift Platz, wenn Lichtquelle und Beobachter sich von einander entfernen, nur dass dann eine Farbenänderung nach dem Roth zu erfolgen müsste. In Wirklichkeit wird nun ein solcher Farbenwechsel niemals eintreten, weil dazu bei der enorm grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes eine so ausserordentlich schnelle Annäherung oder Trennung zwischen Lichtquelle und Beobachter nöthig

wäre, wie eine solche in der Natur für materielle Theile nirgends auftritt. Aber wenn man also auch eine Farbenänderung im gewöhnlichen Sinne nicht beobachten kann in Folge des DOPPLER'schen Princips, so ist es doch möglich, die Richtigkeit desselben mit Hilfe der in den Spectren auftretenden Linien nachzuweisen. Diese werden bei Annäherung oder Entfernung der Lichtquelle ihre Wellenlänge verkürzen oder verlängern, d. h. nach dem violetten bezw. rothen Ende des Spectrums zu sich um eine Kleinigkeit verschieben. Dabei ist es gleichgültig, ob die Linien einem Emissions- oder Absorptionsspectrum angehören, d. h. ob die bewegte Gasmasse selbst leuchtet oder nur Strahlen einer dahinter befindlichen weissen Lichtquelle absorbirt. Beobachtet man an einer Linie von der Wellenlänge λ eine Aenderung derselben um $\Delta\lambda$, so ist die Geschwindigkeit, mit der sich die beobachtete Lichtquelle im Visionsradius bewegt, gleich

$$g = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot v,$$

wobei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist. Es ergiebt sich hieraus g in demselben Längenmaass und der gleichen Zeiteinheit ausgedrückt wie v. Nehmen wir v rund zu 300000 Kilometer pro Secunde an, so würde für eine Verschiebung der Linie D_1 nach D_2, d. h. also für eine Abnahme der Wellenlänge von D_1 um 0·595 $\mu\mu$, eine Annäherungsgeschwindigkeit der Lichtquelle von 302·7 Kilometer in einer Secunde nothwendig sein. Aus diesem Beispiel leuchtet sofort ein, dass an die Erbringung eines experimentellen Beweises für die Gültigkeit des DOPPLER'schen Princips für Lichtwellen auf der Erdoberfläche nicht gedacht werden kann, denn selbst wenn man die grössten Bewegungsgeschwindigkeiten für Lichtquellen, nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Explosionen, anwendet, so sind dieselben noch immer so gering, dass sich die dadurch hervorgerufene Linienverschiebung wegen ihrer Kleinheit nicht sicher constatiren lässt. Man muss also zu Bewegungen von Lichtquellen im Weltraum seine Zuflucht nehmen, und so erwächst der Astronomie, welche an dem Nachweis der Richtigkeit des DOPPLER'schen Princips für Lichtwellen das höchste Interesse hat, weil für sie die Anwendung desselben den grössten Vortheil bringt, zunächst die Aufgabe, den geforderten Beweis selbst zu erbringen, indem sie anderweitig bekannte Bewegungen von Himmelskörpern im Visionsradius auch durch die Spectralanalyse nicht nur nachzuweisen, sondern auch zu messen hat. Da vorauszusehen war, dass diese Messungen an gewöhnlichen Spectrometern sehr schwierig sein würden, so construirte ZÖLLNER seine oben besprochenen Reversionsapparate, mit denen denn auch der erste Beweis für die Richtigkeit des DOPPLER'schen Princips bei Lichtwellen geliefert wurde. Als geeignetes Untersuchungsobject bot sich zunächst die Sonne dar, deren Rotationsgeschwindigkeit aus Sonnenfleckenbeobachtungen bekannt ist, sodass man leicht daraus berechnen kann, mit welcher Geschwindigkeit sich die Theile des Ostrandes dem Beobachter nähern, die des Westrandes von ihm entfernen, und H. C. VOGEL gelang es, mit einem Reversionsspectroskop im Jahre 1871 eine Linienverschiebung in den Spectren dieser Randtheile zu constatiren, die nicht nur dem Sinne nach mit der Sonnenrotation übereinstimmte, sondern auch nach beiläufiger Schätzung ihrem Betrage nach nicht zu erheblich abwich. Mit viel besseren Apparaten gelang es YOUNG im Jahre 1876, eine Rotationsgeschwindigkeit des Sonnenäquators von 2·29 Kilometern in einer Secunde aus der Linienverschiebung zu ermitteln, während die direkte Rechnung 2·01 Kilometer dafür giebt. Zu ähnlichen Resultaten kam LANGLEY 1877 während COPELAND 1883 constatirte, dass die Linie 588·42 $\mu\mu$ am Westrande

einfach, am Ostrande dagegen doppelt ist, was sich so erklärt, dass diese Linie sich thatsächlich aus einer Eisenlinie und einer atmosphärischen Linie zusammensetzt, und dass erstere durch die Rotationsbewegung am Westrande gerade soviel verschoben wird, dass sie sich mit letzterer deckt. Dass CORNU dieses Princip zur Constatirung der tellurischen Linien im Sonnenspectrum angewendet hat, ist früher bereits erwähnt.

Ferner ist bei den Planeten die Bewegung im Visionsradius aus ihren Bahnelementen genau zu berechnen, und diese boten daher eine weitere Möglichkeit zur Prüfung des DOPPLER'schen Princips, doch ist es bei der geringen Geschwindigkeit erst verhältnissmässig spät gelungen, hier zuverlässige Resultate zu erlangen. VOGEL und SCHEINER haben dies in Potsdam auf photographischem Wege an der Venus bewerkstelligt, und es mögen hier die bei Ausmessung der Platten von beiden Beobachtern unabhängig gefundenen Werthe getrennt aufgeführt werden, um zugleich ein Urtheil über die Zuverlässigkeit solcher Messungsresultate zu erhalten.

No. der Platte	Datum	Geschwind. in Kilom. nach DOPPLER's Princip		Berechnete Geschwindigkeit
		VOGEL	SCHEINER	
56	1888 Dec. 7	−11·0	−10·5	−10·5
78	1889 Jan. 2	−12·5	−15·6	−11 6
99	1889 Febr. 10	−11·6	−11·4	−12·8

Die einzelnen Columnen bedürfen keiner weiteren Erklärung, die Geschwindigkeiten sind in Kilometern pro Secunde angegeben. Man kann nach alledem wohl sagen, dass die Gültigkeit des DOPPLER'schen Princips bei Lichtwellen innerhalb der jetzt zu erreichenden Genauigkeit bewiesen ist, und wir können nun zur Betrachtung der mittelst dieses Princips am Himmel gewonnenen Resultate über Bewegungen im Visionradius übergehen.

Zunächst schritt man zu einer genauen Untersuchung der Sonnenrotation, deren Ermittelungen aus Sonnenflecken das merkwürdige Ergebniss geliefert hatte, dass die Sonne oder wenigstens die Schicht, in welcher sich die Sonnenflecken befinden, nicht wie eine starre Kugel, sondern gegen die Pole zu langsamer als am Aequator rotirt, während WILSING aus der Untersuchung von Sonnenfackeln eine Aenderung der Rotationszeit mit wachsenden heliocentrischen Breiten nicht constatiren konnte. Nun fand CREW in Amerika mit Hilfe ROWLAND'scher Gitter, dass die lichtabsorbirende Schicht auf der Sonne am Aequator eine Rotationsgeschwindigkeit von 3·86 ± 0·043 Kilometer pro Secunde hat und wie eine starre Kugel rotirt. Es ist fraglich, ob der geringe wahrscheinliche Fehler von ± 0·043 wirklich zutrifft und die ganze Untersuchung den hohen Grad von Genauigkeit hat, der ihr danach zukommt, jedenfalls stehen ihre Resultate in grellem Widerspruch mit einer sehr sorgfältigen Beobachtungsreihe von DUNÉR, der ebenfalls ROWLAND'sche Gitter verwendete und die Verschiebung der Sonnenlinien gegen die atmosphärischen an den beiden Sonnenrändern maass, wobei er eine ganz ausserordentliche Genauigkeit erzielte. Nach diesen Messungen ergiebt sich der tägliche Rotationswinkel der Sonne für eine

heliocentrische Breite von 0°·4 zu 14°·14
„ „ „ 15·0 „ 13·66
„ „ „ 30·0 „ 13·06
„ „ „ 45.0 „ 11·99
„ „ „ 60·0 „ 10·62
„ „ „ 74·8 „ 9·34.

Diese DUNÉR'schen Zahlen würden also die aus den Sonnenflecken gefundenen Rotationswerthe im Grossen und Ganzen bestätigen. Die sonstigen Linienverschiebungen an der Sonne treten in den Spectren der Sonnenflecke und -protuberanzen gelegentlich auf und sind schon bei Besprechung dieser erwähnt und durch Zeichnungen erläutert worden, worauf hier nur verwiesen wird.

Die interessantesten Resultate hat das DOPPLER'sche Princip in seiner Anwendung auf die Fixsternspectra gezeitigt. Die ersten Versuche auf diesem Gebiete wurden von HUGGINS im Jahre 1867 und von VOGEL 1871 angestellt, aber wegen ihrer ausserordentlichen Schwierigkeit und Unsicherheit (beide Beobachter suchten direkt im Spectroskop die Linienverschiebung zu messen) nicht weiter fortgesetzt. Trotz dieser wenig ermuthigenden Erfahrung wurden systematische Beobachtungen dieser Art sowohl in Greenwich als auch von SEABROKE unternommen, jedoch mit sehr geringen Erfolgen. Bei beiden Beobachtungsreihen konnte die Messung eines Sterns an einem Abend nicht einmal eine sichere Entscheidung über das Vorzeichen der Verschiebung liefern, geschweige denn über deren Grösse. Diese konnte erst aus einer sehr erheblichen Anzahl von Beobachtungen eines Sterns einigermaassen festgelegt werden, doch ist bisher in Greenwich die erforderliche Anzahl erst bei einigen der untersuchten Sterne erreicht, durchaus noch nicht bei allen; bei SEABROKE ist diese Anzahl für keinen Stern vorhanden. Die Beobachtungen des letzteren scheinen auch theilweise von systematischen Fehlern beeinflusst zu sein. Bezeichnend für die Güte der beiden in Rede stehenden Beobachtungsreihen ist auch der Umstand, dass eine Berücksichtigung der Erdbewegung im Visionsradius oder mit anderen Worten, die Reduction der Messungen auf den Sonnenmittelpunkt keine bessere Uebereinstimmung zwischen den einzelnen Resultaten eines Sterns herbeizuführen vermag. Diese Uebelstände der direkten Messung am Spectroskop wurden mit einem Schlage beseitigt, als VOGEL im Jahre 1888 die Photographie zu Hilfe nahm und einen vorzüglichen Spectrographen für die Potsdamer Sternwarte anfertigen liess. Mit Hilfe dieses Instruments haben H. C. VOGEL und SCHEINER vom 26. September 1888 bis zum 3. Mai 1891 252 Aufnahmen der Spectren von 51 der hellsten Sterne (für schwächere reichten die optischen Mittel nicht aus) gemacht und ausgemessen. Der wahrscheinliche Fehler, mit welchem das Messungsresultat aus einer Aufnahme behaftet ist, beträgt in Potsdam $\pm$ 2·60 Kilometer pro Secunde, in Greenwich bei den Beobachtungen eines Abends $\pm$ 21·52 Kilometer, während sich die mittlere Geschwindigkeit der Sterne im Visionsradius nach den Potsdamer Messungen zu 16 Kilometer, nach den Greenwicher zu 27 Kilometer pro Secunde ergiebt, danach würde also im Mittel der wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung in Potsdam 16%, in Greenwich dagegen 80% vom Resultat betragen. Eine sehr schöne Bestätigung haben die Potsdamer Resultate durch die von KEELER mit dem Riesenrefractor des Lick Observatory angestellten direkten Messungen von Verschiebungen der D-Linie erfahren, denn bei den vorzüglichen optischen Leistungen dieses Instruments stehen diese Beobachtungen den photographischen Potsdamer Aufnahmen an Werth gleich. Danach haben sich für die Bewegungen im Visonsradius in einer Secunde in den drei Beobachtungsorten ergeben für

	Greenwich	Potsdam	Lick Observatory
α Botis	—70·5	— 7·4	— 6·9
α Tauri	+50·5	+48·2	+49·0,

wo die Zahlen wiederum Kilometer sind und das positive Vorzeichen ein Wachsen, das negative ein Abnehmen der Distanz Stern-Sonne bedeutet.

Auch auf einem anderen, wenn auch nahe verwandten Gebiet hat die Anwendung des DOPPLER'schen Princips einen schönen Triumph gefeiert, nämlich in der Entdeckung und Untersuchung von Doppelsternen. Zunächst haben die Potsdamer Beobachtungen von Algol eine Duplicität desselben nachgewiesen, worüber in dem Artikel über »Astrophotometrie« das Nähere mitgetheilt ist. Auch α Virginis wurde in Potsdam als Doppelstern erkannt und ferner von PICKERING in Amerika β Aurigae und ζ Ursae majoris, welche Beobachtungen in Potsdam bestätigt wurden. Dass neuere Beobachtungen die Duplicität oder gar Dreitheilung des Veränderlichen β Lyrae wahrscheinlich gemacht haben, ist oben schon näher besprochen worden. Jedenfalls wird vielleicht schon die nächste Zukunft auf diesem Gebiete neue und interessante Resultate zu Tage fördern.

Schliesslich sei hier noch einer Consequenz gedacht, die ABNEY aus dem DOPPLER'schen Princip gezogen hat, indem er aus der Verbreiterung der Linien in den Spectren der Sterne auf die Rotation der letzteren um ihre Axe schliessen zu können glaubte. Wenn auch theoretisch seine Ueberlegung richtig ist, so dürfte doch wohl niemals ein praktisches Resultat auf diesem Wege zu erwarten sein, denn ganz abgesehen von der Schwierigkeit, hierbei exacte Messungen auszuführen, so kann doch die Verbreiterung solcher Linien ganz verschiedene Ursachen haben. Nur wenn alle Linien in einem Sternspectrum gleichmässig verbreitert und mit verwaschenen Rändern erschienen, könnte man die Rotation des Sterns als Ursache annehmen. Aber wenn auch in diesem Punkte die Astrospectroskopie uns keine neuen Aufschlüsse liefern sollte, so hat sie es doch auf sehr vielen anderen Gebieten gethan, und zweifellos sind die Erkenntniss schätze, die sie zu bieten hat, noch längst nicht alle gehoben.

Literaturnachweis.

J. VON FRAUNHOFER, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. Denkschriften der Königl. Akad. d. Wissensch. zu München für die Jahre 1814 u. 1815; Bd. V, pag. 193 ff., München 1817.

A. J. ÅNGSTRÖM, Recherches sur le spectre solaire. Upsala, W. SCHULZ, 1868; dazu gehört: Spectre normal du soleil, Atlas de six planches.

F. ZÖLLNER, Ueber die spectroskopische Beobachtung der Rotation der Sonne und ein neues Reversionsspectroskop; POGG. Ann. Bd. 144, pag. 449. 1872. — Ueber das spectroskopische Reversionsfernrohr; POGG. Ann., Bd. 147, pag. 617. 1872.

L. CAMPHAUSEN, Ueber die Verbindung des Sonnenspectroskops mit einem Prisma vor dem Objectivglase des Fernrohrs oder zwischen Objectivglas u. Spalt. Köln 1872.

A. SECCHI, Die Sonne. Autorisirte deutsche Ausgabe und Originalwerk herausgegeben von Dr. H. SCHELLEN. Braunschweig 1872.

H. C. VOGEL, Ueber ein Spectroskop zur Beobachtung lichtschwacher Sterne. Berichte d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1873, pag. 538 ff.

EDM. BECQUEREL, Sur la détermination des longueurs d'onde des rayons de la partie infrarouge du spectre, au moyen des effets de phosphorescence. Compt. rend., t. 77, pag. 302, 1873. — Sur l'observation de la partie infra-rouge du spectre solaire, au moyen des effets de phosphorescence. Compt. rend., t. 83, pag. 249, 1876.

H. C. VOGEL, Untersuchungen über die Spectra der Planeten. Leipzig 1874.

W. H. M. CHRISTIE, The magnifying power of the half-prism as a means of obtaining great dispersion, and on the general theory of the half-prism spectroscope. Proceed. of the Roy. Soc. of London, Vol. XXVI, pag. 8, 1877.

A. SECCHI, Die Sterne. Grundzüge der Astronomie der Fixsterne. Autorisirte deutsche Ausgabe, Leipzig 1878.

A. Cornu, Étude du spectre solaire ultra-violet, Compt. rend., t. 86, 1878, pag. 101. — Sur les raies du spectre solaire et la constitution du Soleil, pag. 315. — Sur quelques conséquences de la constitution du spectre solaire, pag. 530.

H. C. Vogel, Untersuchungen über das Sonnenspectrum. Publikationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, No. 3, Bd. I, 1879. — Vorrichtung zur Messung der Spectrallinien, besonders bei lichtschwachen Spectren. Zeitschr. für Instrumentenkunde, I. Jahrgang, 1881, pag. 20.

O. Lohse, Ueber einen rotirenden Spectralapparat. Zeitschr. für Instrumentenkunde, I. Jahrgang, 1881, pag. 22.

Ch. Fievez, Étude du spectre solaire. — Étude de la région rouge (A—C) du spectre solaire. Ann. de l'observatoire de Bruxelles, nouv. série, Ann. astron., t. IV. 1882, u. t. V. 1883.

H. C. Vogel u. G. Müller, Spectroskopische Beobachtungen der Sterne bis einschliesslich 7·5. Grösse in der Zone von — 1° bis + 20° Deklination. Publikationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, No. 11, Bd. III, 1883.

Henri Becquerel, Phosphorographie de la région infra-rouge du spectre solaire. Longueur d'onde des principales raies, Compt. rend., t. 96, 1883, pag. 121. — Étude des radiations infra-rouges au moyen des phénomènes de phosphorescence, pag. 1215. — Détermination des longueurs d'onde des raies et bandes principales du spectre solaire infra-rouge. Compt. rend., t. 99, pag. 417, 1884.

R. Thalén, Sur le Spectre du Fer, obtenu à l'aide de l'arc électrique. Nova Acta Reg. Soc. Ups., Ser. III. 1885.

Langley, Observations on the invisible heat spectra and the recognition of the hitherto unmeasured wave-lengths, made at the Alleghany Observatory, Pa. Amer. Journ. of science, 3. ser., Vol. 31, pag. 1; Vol. 32, pag. 83. 1886.

G. Müller u. P. Kempf, Bestimmung der Wellenlängen von 300 Linien im Sonnenspectrum. Publikationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, No. 20, Bd. V, 1886.

M. Thollon, Spectroscopie solaire. Ann. de l'Observatoire de Nice, t. II, Paris 1887.

J. Norman Lockyer, Suggestions on the classification of the various species of heavenly bodies. Proceed. of the Roy. Soc. of London, Vol. XLIV, pag. 1, 1888.

Huggins, On the limit of solar and stellar light in the ultraviolet part of the spectrum. Proceed. of the Roy. Soc. of London, Vol. XLV, pag. 544, 1888.

N. von Konkoly, Handb. f. Spectroskopiker im Cabinet und am Fernrohr. Halle a. S. 1890.

J. Scheiner, Die Spectralanalyse der Gestirne. Leipzig 1890.

E. C. Pickering, Ann. of the astronomical observatory of Harvard College, Vol. XXVI 1. 1890; Vol. XXVII. 1890.

G. Müller, Photometrische u. spectroskopische Beobachtungen angestellt auf dem Gipfel des Säntis. Publikationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, No. 27, Bd. VIII, 1891.

H. C. Vogel, Untersuchungen über die Eigenbewegung der Sterne im Visionsradius auf spectrographischem Wege. Publikationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, No. 25, Bd. VII, 1. Theil, 1892.

F. Krüger, Catalog der farbigen Sterne zwischen dem Nordpol und 23° südlicher Deklination mit besonderer Berücksichtigung des Spectraltypus. Publikation der Sternwarte in Kiel, VIII, 1893.

J. Scheiner, Ueber die Temperatur an der Oberfläche der Fixsterne und der Sonne verglichen mit derjenigen irdischer Wärmequellen. Sitzungsber. d. Kgl. preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1894, pag. 257.

J. E. Keeler, The magnesium spectrum as an index of the temperature of the stars. Astronomy and Astrophysiks, Vol. XIII, pag. 660, October 1894.

H. C. Vogel, Neuere Untersuchungen über die Spectra der Planeten. Sitzungsber. d. Kgl. preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1895 II, pag. 1.

H. A. Rowland, Preliminary Table of solar spectrum wave-lengths. The Astrophysical Journ. Vol. I, 1895, pag. 29, 131, 222, 295, 377, Vol. II, 1894, pag. 45, 109, 1881, 302, 360.

Walter F. Wislicenus.

Aufgang nennt man das Erscheinen eines Gestirnes über dem Horizont des Beobachtungsortes, entsprechend Untergang das Verschwinden desselben unter dem Horizont. Kennt man den Augenblick des Auf- und Unterganges, so erhält man daraus den Tagebogen des Gestirnes, welcher die Zeit bezeichnet, während welcher letzteres sich über dem Horizont befindet. Da bei den Sternen ohne merkbare Eigenbewegung die Zeit vom Aufgang bis zum Meridiandurchgang gleich der vom letzteren bis zum Untergang ist, so spricht man auch oft vom halben Tagebogen. Die Berechnung dieser Momente und Grössen, sowie die sich daraus sofort ergebenden Erscheinungen der täglichen Bewegung sollen im folgenden besprochen werden.

Bezeichnet, wie auf pag. 164 δ die Deklination eines Gestirnes, h seine Höhe (bezw. z seine Zenithdistanz $= 90° - h$), t seinen Stundenwinkel und φ die Polhöhe oder geographische Breite des Beobachtungsortes, so liefert das sphärische Dreieck Pol des Aequators, Zenith, Stern die Gleichung

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t. \tag{1}$$

Das Gestirn befindet sich zur Zeit des Aufganges (bezw. Unterganges) im Horizont, dann ist also $h = 0$. Bezeichnen wir den zugehörigen Werth von t mit t_0, so findet sich für den Stundenwinkel zur Zeit des Aufganges und Unterganges aus

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0$$

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta. \tag{2}$$

Kennt man also die Sternzeit, wenn der Stern durch den Meridian geht, d. h. seine Rectascension, so hat man nur davon den Werth von t_0 (in Zeit ausgedrückt) zu subtrahiren, um die Sternzeit des Aufganges zu erhalten, man muss dagegen den Werth von t_0 zu der Rectascension addiren, wenn man die Sternzeit des Unterganges des Sternes haben will. Durch Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit ergiebt sich dann die letztere für jene Momente. Der absolute Werth von t_0 ist dann der halbe Tagebogen, die Differenz $12^h - t_0{}^h$ der halbe Nachtbogen (Nachtbogen die Zeit, während welcher der Stern unter dem Horizont ist).

Man kann t_0 auch unter Anwendung der Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)] \sin\frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]}{\cos\varphi \cos\delta}} \tag{3}$$

berechnen (wo dann $z = 90°$ zu setzen ist), indem in einem beliebigen sphärischen Dreieck ABC der Winkel B aus den drei Seiten a, b, c nach der Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

gefunden wird, wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist, und ferner $B = t$, $a = 90° - \delta$, $b = z$, $c = 90° - \varphi$ sind.

Oder man kann auch die Gleichung (2) dadurch umformen, dass man auf beiden Seiten einmal zu 1 addirt, dann von 1 subtrahirt. Dadurch kommt

$$1 + \cos t_0 = 2\cos^2\tfrac{1}{2}t_0 = 1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$$

$$1 - \cos t_0 = 2\sin^2\tfrac{1}{2}t_0 = 1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta,$$

woraus

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}t_0 = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}. \tag{4}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun verschiedene Folgerungen ableiten

Setzen wir $\varphi = 0$, liegt also der Beobachtungsort unter dem Aequator, so wird die Gleichung

$$\cos t_0 = 0, \quad \text{also} \quad t_0 = 90^\circ = 6^h,$$

d. h. am Aequator der Erde sind die Tagebogen und Nachtbogen aller Sterne gleich lang, die Sterne bleiben ebenso lange über dem Horizont als unter demselben, alle Parallelkreise werden vom Horizont halbirt.

Ist $\delta = 0$, steht also der Stern im Aequator, so wird andererseits für jeden Werth von φ auch $\cos t_0 = 0$ und $t_0 = 90^\circ = 6^h$, d. h. die Aequatorsterne verweilen an allen Orten auf der Erde ebenso lange über dem Horizont als unter demselben. Ist δ positiv, steht also der Stern nördlich vom Aequator, so wird für Orte unter nördlicher Breite (wo also φ positiv) $\cos t_0$ negativ; dann ist also $t_0 > 90^\circ$ oder 6^h, d. h. der Stern verweilt länger über dem Horizont als unter demselben. Ist dagegen δ negativ, so wird bei nördlicher Breite $\cos t_0 = + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$, also positiv, daher $t_0 < 90^\circ$ oder 6^h, d. h. der Stern ist kürzer über dem Horizont als unter demselben. Bei südlicher Breite werden die Verhältnisse gerade umgekehrt. Man erhält dann für Sterne mit nördlicher Deklination t_0 positiv, für solche mit südlicher Deklination t_0 negativ.

Aus den Gleichungen ergiebt sich ferner, dass t_0 nur so lange mögliche Werthe annehmen kann, als $\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta < 1$ ist, es muss also $\operatorname{tang} \delta < \operatorname{cotang} \varphi$ oder $\delta < 90^\circ - \varphi$ sein, wenn ein Gestirn noch am betreffenden Ort auf- und untergehen soll. Ist $\delta = 90^\circ - \varphi$, so ist $\cos t_0 = -1$, $t_0 = 180^\circ = 12^h$, und das Gestirn berührt dann nur im Nordpunkt den Horizont. Ist aber die nördliche Deklination $\delta > 90^\circ - \varphi$, so geht dann das Gestirn nicht unter, ist die südliche Deklination $-\delta > 90^\circ - \varphi$, so geht es nicht auf. Die Sterne, für welche ersteres stattfindet, heissen Circumpolarsterne.

Auf die Sonne angewandt ergeben sich folgende ja auch sonst bekannte Resultate. Unter dem Erdäquator steht sie immer ebenso lange unter als über dem Horizont, hier ist also stets Tag und Nacht gleich. Auf der nördlichen Halbkugel der Erde verweilt die Sonne, wenn sie nördliche Deklination hat, länger über dem Horizont als unter demselben, der Tag ist länger als die Nacht; hat sie südliche Deklination, so bleibt sie dagegen länger unter dem Horizont als über demselben, es ist die Nacht länger als der Tag. Auf der südlichen Halbkugel der Erde bleibt die Sonne bei südlichen Deklinationen länger über als unter dem Horizont, es ist also dann hier der Tag länger als die Nacht, bei nördlichen Deklinationen ist dagegen die Nacht länger als der Tag. Steht sie endlich im Aequator, so ist für alle Orte der Erdoberfläche auf beiden Hemisphären Tag und Nacht gleich.

Da nun die Deklination der Sonne zwischen $\pm 23^\circ 27'$ (Schiefe der Ekliptik) liegt, so haben diejenigen Orte der Erdoberfläche, für welche die Sonne auch nur einen einzigen Tag im Jahre nicht auf- oder nicht untergeht, eine nördliche oder südliche Breite von $\varphi = 90^\circ - 23^\circ 27' = 66^\circ 33'$. Diese Orte liegen in den beiden Polarkreisen. Für die den Polen noch näher gelegenen Orte geht die Sonne in einem Theile des Jahres um so länger nicht auf oder nicht unter, je näher sie eben den Polen selbst liegen.

Diese hier angeführten Formeln gelten nur für den wahren Auf- und Untergang. Die Sterne erscheinen in Folge der Refraction in grösserer Höhe, sie erscheinen eher über dem Horizont und gehen später unter den Horizont als es ohne den Einfluss der Atmosphäre der Fall sein würde; und da nun die Refraction im Horizont $34'{\cdot}9$ beträgt, so erscheint der Stern schon im Horizont,

wenn er thatsächlich noch um so viel unter demselben steht. Bezeichnet also dz die Horizontalrefraction, so haben wir in dem oben betrachteten Dreieck statt der Seite z zu setzen $z + dz$, oder, im betrachteten Fall $90° + dz$, woraus dann

$$\cos t_0 = -\frac{dz \sin 1'' + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}. \tag{5}$$

Will man dagegen nur den Einfluss der Refraction auf den halben Tagebogen t_0 kennen, so kann man die letzte Gleichung von der Gleichung (2) abziehen und findet dann die Correction

$$dt = \frac{dz}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} = \frac{140^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} \tag{6}$$

Beispiel: $\varphi = 49° 0'{\cdot}5$ (Karlsruhe).

Für die Sterne α Tauri und α Can. maj. sollen der halbe Tagebogen und die Zeiten des Auf- und Unterganges für den 1. März 1895 berechnet werden. Die Rectascension (α) und die Deklination (δ) für dieses Datum ist

	für α Tauri		für α Can. maj.
	$\alpha = 4^h 29^m 54^s$		$\alpha = 6^h 40^m 33^s$
	$\delta = +16° 18'{\cdot}0$		$\delta = -16° 34'{\cdot}4$
$lg\ tang\ \varphi$	0·06096	$lg\ tang\ \varphi$	0 06096
$lg\ tang\ \delta$	9·46601	$lg\ tang\ \delta$	$9{\cdot}47364_n$
$lg\ cos\ t_0$	$9{\cdot}52697_n$	$lg\ cos\ t_0$	9·53460
t_0	$109° 39'{\cdot}8 = 7^h 18^m 39^s$	t_0	$69° 58'{\cdot}4 = 4^h 39^m 54^s$
$lg\ sin\ t_0$	9·9739	$lg\ sin\ t_0$	9·9729
$lg\ cos\ \varphi$	9·8169	$lg\ cos\ \varphi$	9·8169
$lg\ cos\ \delta$	9·9822	$lg\ cos\ \delta$	9·9816
lg Summe	9 7730	lg Summe	9·7714
$lg\ 140^s$	2·1461	$lg\ 140^s$	2·1461
$lg\ dt$	2·3731 $dt = 3^m 56^s$	$lg\ dt$	2·3747 $dt = 3^m 57^s$

$t_0 + dt$	7^h	22^m	35^s	$t_0 + dt$	4^h	43^m	51^s
α	4	29	54	α	6	40	33
Sternzt. Aufg.	21	7	19	Sternzt. Aufg.	1	56	42
Untg.	11	52	29	Untg.	11	24	24
oder Mittl. Zt. Aufg. März 0	22	31	30	Mittl. Zt. Aufg. März 1	3	20	5
Untg. März 1	13	14	15	Untg. März 1	12	46	14

Während also die beiden Sterne etwa $2^h 11^m$ nach einander durch den Meridian gehen, geht α Tauri etwa $4^h 49^m$ vor α Can. maj. auf und 28^m nach ihm unter. Der erstere befindet sich $14\frac{3}{4}$ Stunden, der zweite nur $9\frac{1}{2}$ Stunden über dem Horizont, und der Tagebogen wird um fast 8 Minuten durch die Refraction verlängert.

Hat das Gestirn nun eine eigene Bewegung, ändert sich also Deklination und Rectascension, so muss hierauf unter Umständen Rücksicht genommen werden, so bei der Sonne und ganz besonders beim Monde. Man muss dann zuerst mit einer genäherten Deklination, die man den Ephemeriden entnimmt, wo z. B. beim Mond die Positionen von 12 zu 12 Stunden, oder von Stunde zu Stunde gegeben sind, den Werth von t_0 berechnen, den man ebenfalls dann nur genähert richtig erhält. Mit diesem interpolirt man dann den Mondort für die Zeit des Auf- und Unterganges und wiederholt die Rechnung. Strenge richtig ist diese zweite Berechnung von t_0 ja auch noch nicht, da man erst mit dem genäherten t_0 auch nur noch einen genäherten Ort erhält, indessen genügt dieselbe in der Praxis vollkommen. Man kann übrigens unter Benutzung der unten gegebenen Tagebogentafel schon mit der genäherten Deklination den genäherten

Werth von t_0 entnehmen und braucht dann nur einmal die Rechnung selbst durchzuführen.

Bei Sonne und Mond ist noch auf den Halbmesser ihrer Scheiben Rücksicht zu nehmen, wenn man den Moment kennen will, in welchem der eine oder andere Rand über dem Horizont erscheint oder unter ihm hinabsinkt, da die Ephemeridenorte für den Mittelpunkt der Scheibe gelten. Endlich ist die Parallaxe zu berücksichtigen, welche die Zeit des Aufganges verzögert, die des Unterganges beschleunigt, also der Refraction entgegenwirkt, und welche beim Mond von 54′ bis 61′ variiren kann. In Summa hat man also für z zu setzen $90° + 35' - p \pm d$, wo p die Horizontalparallaxe, d der Halbmesser des Gestirnes ist, welche Grössen auch in den Ephemeriden gegeben sind.

Beispiel: $\varphi = 49°\ 0'\cdot5$ (Karlsruhe).

Für die Sonne und den Mond sollen die Zeiten des Auf- und Unterganges für den 7. März 1895 berechnet werden.

a) Die Sonne. Für die Sonne ist nach dem Berliner Astron. Jahrbuch zur Zeit des wahren Berliner Mittags

März 6	$\delta = -5°\ 39'\ 30''$		$d = 16'\ 7''$	$p = 9''$
		23′ 18″		
„ 7	$-5\ \ 16\ \ 12$			
		23 21		
„ 8	$-4\ \ 52\ \ 51$			

Nach der Tagebogentafel ist der halbe Tagebogen für Karlsruhe bei $-5°16'$ Deklination $5^h\ 40^m$, und es wird daher unter Berücksichtigung der Längendifferenz Berlin-Karlsruhe $= 19^m\ 58^s$ für die Zeit des Aufganges am 7. März (bürgerlich) mit $\delta = -5°\ 21'\cdot4$, für die Zeit des Unterganges mit $\delta = -5°\ 10'\cdot4$ zu rechnen sein. Nehmen wir als Auf- bezw. Untergang den Augenblick des Erscheinens bezw. des Verschwindens des oberen Sonnenrandes, so ist $z = 90° + 34'\ 54'' - 9'' + 16'\ 7'' = 90°\ 50'\ 52'' = 90°\ 50'\cdot9$ (wo übrigens die Parallaxe unbedenklich fortgelassen werden könnte). Nach Formel 3 ist dann die Rechnung folgende:

Aufgang		Untergang	
$\varphi - \delta$	$54°\ 21'\cdot9$	$\varphi - \delta$	$54°\ 10'\cdot9$
$\frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)]$	72 36·4	$\frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)]$	72 30·9
$\frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]$	18 14·5	$\frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]$	18 20·0
$lg\ sin \frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)]$	9·97968	$lg\ sin \frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)]$	9·97946
$lg\ sin \frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]$	9·49558	$lg\ sin \frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]$	9·49768
Compl. $lg\ cos\ \varphi$	0·18313	Compl. $lg\ cos\ \varphi$	0·18313
Compl. $lg\ cos\ \delta$	0·00190	Compl. $lg\ cos\ \delta$	0·00177
$lg\ sin^2 \frac{1}{2} t_0$	9·66029	$lg\ sin^2 \frac{1}{2} t_0$	9·66204
$\frac{1}{2} t_0$	$42°\ 33'\cdot4$	$\frac{1}{2} t_0$	$42°\ 39'\cdot7$
t_0	$5^h\ 40^m\ 27^s$	t_0	$5^h\ 41^m\ 18^s$

t_0 giebt hier den Stundenwinkel der wahren Sonne, durch Hinzufügung der Zeitgleichung erhalten wir als mittlere Zeit des Aufganges März 7 früh $6^h\ 30^m\ 49^s$ (astronomisch = März 6 $18^h\ 30^m\ 49^s$), des Unterganges $5^h\ 42^m\ 27^s$.

b) Der Mond. Für den Mond sind die Daten nach dem Berliner Astronomischen Jahrbuch zur Zeit der oberen und unteren Culmination des Mondes für Berlin

März 6	Unt. C.	$\alpha = 7^h\ 43^m\ 24^s$	$\delta = +25°\ 55'\cdot4$	$d = 16'\ 24''$	$p = 60'\ \ 6''$
„ 7	Ob. C.	8 16 3	24 0·4	16 29	60 24
„ 7	Unt. C.	8 47 57	21 38·8	16 33	60 41
„ 8	Ob. C.	9 18 58	18 53·9	16 37	60 56

Nach der Tagebogentafel ist der halbe Tagebogen für Karlsruhe bei

$$\begin{array}{rr} \delta = +\,25^\circ\,55' & t_0 = 8^h\,20^m \\ 24\quad 0 & 8\quad 7 \\ 21\quad 39 & 7\quad 53 \end{array}$$

und damit finden sich unter Benutzung der im Jahrbuch ebenfalls angegebenen Veränderungen der Mondorte für eine Stunde die der Rechnung zu Grunde zu legenden Deklinationen für den Aufgang $+\,25^\circ\,19'$, für den Untergang $+\,22^\circ\,26'$, ferner z (Aufg.) $89^\circ\,51'{\cdot}1$, z (Unterg.) $89^\circ\,50'{\cdot}8$. Führt man nun die Rechnung ebenso wie im vorher für die Sonne gegebenen Beispiel durch, so ergiebt sich

$$t_0 \text{ Aufg. } 8^h\,10^m\,43^s \qquad t_0 \text{ Unterg. } 7^h\,52^m\,21^s.$$

Mit diesen Stundenwinkeln ergiebt sich für die Rectascensionen des Mondes $7^h\,54^m\,47^s$ bezw. $8^h\,37^m\,58^s$, und danach die Sternzeiten des Auf- und Unterganges $23^h\,44^m\,4^s$ und $16^h\,30^m\,19^s$, welche in mittlere Zeit verwandelt $0^h\,44^m\,24^s$ und $17^h\,27^m\,54^s$ ergeben.

Die hier nun folgende Tafel giebt die Werthe der halben Tagebogen für alle nördlichen geographischen Breiten von 30° bis 60°, und die Deklinationen von — 30° bis + 50° jeweils von 2 zu 2 Grad. Hat man an demselben Ort vielfach Auf- und Untergänge zu berechnen, so empfiehlt es sich, sich eine Specialtafel in solchen Intervallen durch Interpolation herauszuschreiben (oder direkt zu berechnen), dass die gesuchten Werthe dann ohne jede weitere Interpolation direkt entnommen werden können.

Ueber die Bedeutung und Berechnung des heliakischen, kosmischen und akronychischen Auf- bezw. Unterganges s. den Artikel »Allgemeine Einleitung in die Astronomie« pag. 3 und »Chronologie«.

Tabelle der halben Tagebogen.

δ \ φ	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
—30°	4 45	4 38	4 31	4 24	4 16	4 8	3 59	3 48	3 37	3 25	3 11	2 55	2 36	2 13	1 41	0 49
28	4 51	4 45	4 39	4 32	4 25	4 17	4 9	4 0	3 50	3 40	3 28	3 14	2 58	2 38	2 15	1 43
26	4 57	4 52	4 46	4 40	4 34	4 27	4 19	4 11	4 3	3 53	3 42	3 30	3 17	3 1	2 42	2 18
24	5 3	4 58	4 53	4 48	4 42	4 35	4 29	4 22	4 14	4 5	3 56	3 46	3 34	3 20	3 5	2 45
22	5 9	5 4	5 0	4 55	4 49	4 44	4 38	4 32	4 25	4 17	4 9	4 0	3 50	3 38	3 24	3 9
—20	5 14	5 10	5 6	5 2	4 57	4 52	4 47	4 41	4 35	4 28	4 21	4 13	4 4	3 54	3 43	3 29
18	5 19	5 16	5 12	5 8	5 4	4 59	4 55	4 50	4 45	4 39	4 33	4 26	4 18	4 9	4 0	3 48
16	5 24	5 21	5 18	5 15	5 11	5 7	5 3	4 59	4 54	4 49	4 44	4 38	4 31	4 24	4 15	4 6
14	5 29	5 27	5 24	5 21	5 18	5 15	5 11	5 7	5 3	4 59	4 54	4 49	4 44	4 37	4 30	4 23
12	5 35	5 32	5 30	5 27	5 25	5 22	5 19	5 16	5 12	5 9	5 5	5 0	4 56	4 51	4 45	4 38
—10	5 39	5 37	5 35	5 33	5 31	5 29	5 26	5 24	5 21	5 18	5 15	5 11	5 8	5 3	4 59	4 53
8	5 44	5 43	5 41	5 39	5 37	5 36	5 34	5 32	5 30	5 27	5 25	5 22	5 19	5 16	5 12	5 8
6	5 49	5 47	5 46	5 45	5 44	5 43	5 41	5 40	5 38	5 36	5 35	6 33	5 30	5 28	5 25	5 22
4	5 53	5 52	5 52	5 51	5 50	5 49	5 48	5 47	5 46	5 45	5 44	5 43	5 42	5 40	5 38	5 36
— 2	5 58	5 57	5 57	5 57	5 56	5 56	5 56	5 55	5 55	5 54	5 54	5 53	5 53	5 52	5 51	5 50
0	6 2	6 2	6 3	6 3	6 3	6 3	6 3	6 3	6 3	6 3	6 3	6 4	6 4	6 4	6 4	6 4
+ 2	6 7	6 7	6 8	6 8	6 9	6 9	6 10	6 11	6 11	6 12	6 13	6 14	6 15	6 16	6 17	6 18
4	6 11	6 12	6 13	6 14	6 15	6 16	6 17	6 18	6 20	6 21	6 22	6 24	6 26	6 28	6 30	6 32
6	6 16	6 18	6 19	6 20	6 22	6 23	6 25	6 26	6 28	6 30	6 32	6 34	6 37	6 40	6 43	6 46
8	6 21	6 23	6 24	6 26	6 28	6 30	6 32	6 34	6 37	6 59	6 42	6 45	6 48	6 52	6 56	7 1

δ \ φ	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°	48°	50°	52°	54°	56°	58°	60°
	h m	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*	*h m*
+10	6 26	6 28	6 30	6 32	6 34	6 37	6 39	6 42	6 45	6 48	6 52	5 56	7 0	7 5	7 10	7 16
12	6 31	6 33	6 36	6 38	6 41	6 44	6 47	6 51	6 55	6 58	7 2	7 7	7 12	7 18	7 24	7 31
14	6 36	6 38	6 41	6 44	6 48	6 51	6 55	6 59	7 3	7 8	7 13	7 18	7 24	7 31	7 39	7 47
16	6 41	6 44	6 47	6 51	6 55	6 59	7 3	7 7	7 12	7 18	7 24	7 30	7 37	7 45	7 54	8 4
18	6 46	6 50	6 53	6 57	7 2	7 6	7 11	7 16	7 22	7 28	7 35	7 42	7 51	8 0	8 10	8 22
+20	6 51	6 55	7 0	7 4	7 9	7 14	7 20	7 26	7 32	7 39	7 47	7 55	8 5	8 15	8 28	8 42
22	6 57	7 1	7 6	7 11	7 17	7 22	7 29	7 35	7 43	7 50	7 59	8 9	8 20	8 32	8 47	9 4
24	7 2	7 7	7 13	7 19	7 25	7 31	7 38	7 45	7 54	8 3	8 12	8 24	8 36	8 51	9 8	9 29
26	7 8	7 14	7 20	7 26	7 33	7 40	7 48	7 56	8 5	8 15	8 27	8 39	8 54	9 11	9 33	10 0
28	7 14	7 21	7 27	7 34	7 42	7 49	7 58	8 7	8 18	8 29	8 42	8 57	9 14	9 35	10 2	10 42
+30	7 21	7 28	7 35	7 43	7 51	8 0	8 9	8 20	8 31	8 44	8 59	9 17	9 38	10 4	10 43	—
32	7 28	7 35	7 43	7 51	8 1	8 11	8 21	8 33	8 46	9 1	9 19	9 39	10 6	10 44	—	—
34	7 35	7 43	7 52	8 1	8 11	8 22	8 34	8 47	9 3	9 20	9 41	10 8	10 46	—	—	—
36	7 43	7 52	8 1	8 11	8 23	8 35	8 48	9 4	9 21	9 42	10 9	10 47	—	—	—	—
38	7 51	8 1	8 11	8 23	8 35	8 49	9 4	9 22	9 43	10 10	10 48	—	—	—	—	—
+40	8 0	8 11	8 22	8 35	8 49	9 5	9 23	9 44	10 10	10 48	—	—	—	—	—	—
42	8 10	8 21	8 34	8 49	9 5	9 23	9 44	10 11	10 48	—	—	—	—	—	—	—
44	8 20	8 33	8 48	9 4	9 22	9 44	10 11	10 48	—	—	—	—	—	—	—	—
46	8 32	8 46	9 3	9 21	9 43	10 10	10 48	—	—	—	—	—	—	—	—	—
48	8 45	9 2	9 20	9 42	10 10	10 48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+50	9 0	9 19	9 41	10 9	10 48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

VALENTINER.

Azimuthbestimmung. Die Bestimmung des Azimuthes eines irdischen Objectes ist eine Winkelmessung zwischen dem Meridian des Beobachtungsortes und dem betreffenden Object, und wird in der Regel mit einem Theodoliten oder Universalinstrument (überhaupt einem Winkelmessinstrument), unter Umständen auch mit einem Passageninstrument ausgeführt. Es kommt, wenn das Instrument mit einem Horizontalkreis versehen ist, darauf an, den Punkt des Kreises zu ermitteln, welcher dem Meridian entspricht; hat das Instrument keinen Kreis, so tritt an Stelle der den Winkel messenden Theilung die Mikrometerschraube. Die Aufgabe lässt sich in jedem Falle so fassen, dass die Richtung des Meridians bestimmt werde; hieran schliesst sich dann für Gradmessungs- oder sonstige Zwecke die Ermittelung des Azimuthes eines terrestrischen Objectes. Man kann, schon entsprechend der Anwendung verschiedener Instrumente, verschiedene Methoden befolgen. Handelt es sich nur um mehr oder minder rohe Annäherungen, so führen folgende Wege zum Ziel.

Da ein Gestirn bei seiner oberen Culmination, d. h. bei seinem oberen Meridiandurchgang, die grösste Höhe erreicht, so kann man es mit einem Universalinstrument so lange verfolgen, bis eine Höhenzunahme nicht mehr zu bemerken ist. Die Richtung der Visirlinie fällt dann mit der Richtung des Meridians zusammen, und liest man in dieser Stellung den Azimuthal- (Horizontal-) kreis ab, so ist damit Süd- und Nordpunkt auf dem Kreis gegeben. Stellt man danach das Object ein, dessen Azimuth zu bestimmen ist, so ergiebt die Differenz der beiden Ablesungen den gesuchten Winkel, wobei die Zählungsweise des Azimuthes (von Süd über West, Nord, Ost nach Süd, oder von Nord über Ost,

Süd, West nach Nord von 0 bis 360°) zu beachten ist. Da nun aber die Höhenänderung in der Nähe des Meridians sehr gering ist, so bleibt diese Methode ausserordentlich unsicher und kann nur als erste Näherung bei der Aufstellung der Instrumente betrachtet werden, ebenso wie die Beobachtung der Richtung der kürzesten Schattenlänge nicht für genauere Zwecke in Betracht kommen kann.

Geeigneter ist die Beobachtung correspondirender Höhen. Beobachtet man nämlich dasselbe Gestirn bei gleicher Höhe vor und nach dem Meridiandurchgang, so werden, da zu gleichen Stundenwinkeln auch gleiche Höhen gehören, hierdurch zwei gleich weit vom Meridian abstehende Verticalkreise bestimmt. Hat man nun für diese beiden Momente den Horizontalkreis genau abgelesen, so liegt die Meridianrichtung gerade in der Mitte zwischen beiden. Ist hierbei ein Gestirn mit merkbarer Eigenbewegung gebraucht worden, so muss auf letztere während der Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen natürlich Rücksicht genommen werden, was nach folgendem geschieht.

Wenn die allgemeine Gleichung im Dreieck Pol, Zenith, Stern, wo δ die Deklination, h die Höhe und a das Azimuth des Sternes, φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bezeichnen,

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a \tag{1}$$

nach δ und a differenzirt wird, kommt

$$da = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi \cos h \sin a} \tag{2}$$

oder weil

$$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$

ist,

$$da = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi \sin t}. \tag{3}$$

Es wird also die für den Meridianpunkt sich ergebende Ablesung um die Hälfte jener Grösse zu verbessern sein, wenn für $d\delta$ die in der Zeit zwischen der östlichen und westlichen Beobachtung stattgefundene Deklinationsänderung gesetzt wird, und zwar mit Berücksichtigung des Zeichens der Deklinationsänderung.

In der Regel nun ersetzt man die Azimuthbestimmung durch die direkte Winkelmessung zwischen einem Stern und dem betreffenden Object, indem man dann das für die Zeit der Beobachtung geltende Azimuth des Sternes berechnet und daraus die gesuchte Grösse herleitet.

Beobachtet man z. B. an einem Universalinstrument den Zeitmoment, wo ein Gestirn den verticalen Mittelfaden oder die Mitte zwischen zwei engen, den Mittelfaden ersetzenden Doppelfäden passirt und liest dabei den Horizontalkreis ab, so ergiebt das für die Beobachtungszeit berechnete Azimuth, verglichen mit der Ablesung des Kreises, die Nord-Südrichtung auf letzterem. Diese Beobachtungen sind aber um die Fehler der Aufstellung des Instrumentes und seines Collimationsfehlers zu verbessern. Seien dazu i und I die Neigungen der Axe bei der Beobachtung des Sternes sowie des Objectes, positiv genommen, wenn das linke Axenende das höhere ist, seien z und z_1 die Zenithdistanzen des Sternes und des Objectes, und $90° + c$ der Winkel, den die optische Axe mit dem Kreisende der horizontalen Umdrehungsaxe bildet, laufe endlich die Theilung auf dem Kreis im Sinne der Azimuthe von Süd, durch West, Nord, Ost zu Süd, so sind die Ablesungen (vergl. Universalinstrument) zu verbessern um

$$i \operatorname{cotang} z \pm c \operatorname{cosec} z \quad \text{und} \quad I \operatorname{cotang} Z \pm c \operatorname{cosec} Z, \tag{4}$$

wo das obere Zeichen für Kreis links, das untere für Kreis rechts gilt.

Wenn nun die Beobachtungen symmetrisch in beiden Kreislagen und derartig in rascher Folge angestellt werden, dass die Zenithdistanz des Sternes nicht merkbar verändert wird, so fällt alsdann im Mittel aus diesen beiderseitigen Beobachtungen der Collimationsfehler heraus. Verfliesst aber eine längere Zwischenzeit, so wird es gerathen sein den Collimationsfehler zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen, indem man für jede Kreislage getrennt den Werth von a unter Berücksichtigung der ermittelten Neigungen berechnet. Dann findet sich

$$c = \frac{a_l - a_r}{C + C'}, \tag{6}$$

wo C, C' die Coëfficienten von c in den verschiedenen Kreislagen und gültig für die Zenithdistanz des Sternes zur Zeit seiner Einstellung sind. Was die Neigung betrifft, so wird für das terrestrische Object, wo Z nahe $= 90°$ ist, die genaue Bestimmung im allgemeinen, wenn überhaupt das Instrument in seiner Aufstellung berichtigt ist, nicht erforderlich sein, wohl aber ist ein Fehler der Neigung von sehr grossem Einfluss auf die Beobachtung des Sternes, da der Coëfficient bereits bei einer Zenithdistanz von $45° = 1$ ist; hier ist also die Bestimmung der Neigung jeweils mit grosser Sorgfalt auszuführen.

Was nun nach diesen allgemeinen Bemerkungen die geeignetste Auswahl der Sternbeobachtung betrifft, so erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$\sin z \cos a = - \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t, \tag{7}$$

wo z die Zenithdistanz, t der Stundenwinkel des Sternes bedeuten, und unter Benutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin z \sin a &= \cos \delta \sin t \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \end{aligned} \tag{8}$$

und anderer bekannter Formeln, die folgenden Differentialausdrücke

$$\begin{aligned} &1)\quad \frac{da}{d\delta} = \frac{\cos \varphi \sin a}{\cos \delta \sin z} = \frac{\cos \varphi \sin t}{\sin^2 z} \\ &2)\quad \frac{da}{dt} = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} \\ &3)\quad \frac{da}{d\varphi} = - \frac{\sin a}{\tang z}, \end{aligned} \tag{9}$$

wo mit q der parallactische Winkel bezeichnet wird. Im allgemeinen wächst also der Fehler in der Bestimmung des Azimuthes mit zunehmender Höhe des Gestirnes über dem Horizont, d. h. mit abnehmendem Sinus oder Tangente der Zenithdistanz z. Wählt man aber Sterne, die dem Pole des Aequators möglichst nahe sind, so wird der Faktor $\cos \delta$ in $\frac{da}{dt}$, und $\sin a$ in $\frac{da}{d\varphi}$ eine kleine Grösse, und beobachtet man den Stern in der Nähe der grössten Digression, wenn also q nahe $= 90°$ ist, so wird ein Fehler in der Zeitbestimmung fast ganz gehoben. Während sich so die Beobachtungen eines Polsternes günstig gestalten, verhält sich der Differentialausdruck $\frac{da}{d\delta}$ gerade anders. Hier würde ein Fehler in der angenommenen Deklination von geringstem Einfluss sein, wenn man Aequatorsterne in der Nähe des Meridians beobachtete. Es lassen sich aber die Vortheile, welche sonst Polsterne bieten, auch ganz ausnützen, wenn man etwa gleichmässig Beobachtungen in der östlichen und westlichen Digression anstellt, oder auch in der unmittelbaren Nähe des Meridians, wo dann freilich, wie erwähnt, der Differentialausdruck $\frac{da}{dt}$ ungünstiger wird.

Unter den Polsternen eignet sich vorzugsweise der Polarstern, α Urs. min., welchen man schon mit den gewöhnlichen Fernröhren von 60—70 *mm* Oeffnung

den ganzen Tag sieht. Für ihn speciell kann man die Berechnung wie folgt anstellen, wobei nun aber das Azimuth nicht mehr von Süd, sondern von Nord über Ost, Süd, West von 0°—360° gezählt werden soll. Es ist

$$tang\, a = -\frac{sin\, t}{tang\, \delta\, cos\, \varphi - sin\, \varphi\, cos\, t}, \tag{10}$$

wo der Stundenwinkel $t = u + x - \alpha$ aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges durch den Mittelfaden (u), der Uhrcorrection x und der Rectascension α zu berechnen ist. Diese Formel, an sich sehr einfach, lässt sich noch umformen und die Berechnung kann durch Hilfstafeln dann nicht unwesentlich erleichtert werden. Ersetzen wir dazu die Deklination δ durch die Poldistanz p, und multipliciren wir Zähler und Nenner mit $tang\, p\, sec\, \varphi$, so kommt

$$tang\, a = -\frac{tang\, p\, sin\, t\, sec\, \varphi}{1 - tang\, p\, tang\, \varphi\, cos\, t}, \tag{11}$$

welcher Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von p entwickelt, übergeht in

$$\begin{aligned} a = & - p\, sec\, \varphi\, sin\, t - \tfrac{1}{2}p^2\, sin\, 1''\, sec\, \varphi\, tang\, \varphi\, sin\, 2t \\ & - \tfrac{1}{3}p^3\, sin^2\, 1''\, sec\, \varphi\, sin\, t[(1 + 4\, tang^2\, \varphi)\, cos^2\, t - tang^2\, \varphi] \\ & - \tfrac{1}{2}p^4\, sin^3\, 1''\, sec\, \varphi\, tang\, \varphi\, sin\, 2t[\tfrac{2}{3} + tang^2\, \varphi - (1 + 2\, tang^2\, \varphi)\, sin^2\, t] \\ & - p^5\, sin^4\, 1''\, sec\, \varphi\, sin\, t\,[\tfrac{2}{15} + tang^2\, \varphi\, cos^2\, t + tang^4\, \varphi\, cos^4\, t - \tfrac{1}{3}\, sec^2\, \varphi\, sin^2\, t - \\ & \qquad \tfrac{2}{15}\, sec^4\, \varphi\, sin^4\, t - 2\, sec^2\, \varphi\, tang^2\, \varphi\, sin^2\, t\, cos^2\, t] \ldots . \end{aligned} \tag{12}$$

Die Glieder 5. Ordnung erreichen für mittlere Breiten kaum den Betrag von $0''\cdot01$, können also vernachlässigt werden. Dagegen müssen die Glieder 4. Ordnung, wenn es auf grösste Genauigkeit ankommt, berücksichtigt werden. Die Reihe lässt sich nun auch so schreiben:

$$a = -p\, sec\, \varphi\, sin\, t - M\, sin\, 2t - N, \tag{13}$$

wo

$$M = \tfrac{1}{2}p^2\, sin\, 1''\, tang\, \varphi\, sec\, \varphi$$

und $N =$ der Summe der Glieder dritter und vierter Ordnung ist. M und N können nun für bestimmte Werthe von p und φ berechnet, und zugleich die Aenderungen dieser Grössen für eine Aenderung von p angegeben, und dann Tafeln mit dem Argumente t angelegt werden, in denen aber das Glied mit N stets einen kleinen Werth behält. Es ist vom Verfasser dieses Artikels in seinen »Beiträgen zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen«, Leipzig 1869, der Versuch gemacht, solche Tafeln in grosser Ausdehnung für alle nördlichen geographischen Breiten von 36°– 64° herzustellen. Bei der raschen Aenderung aber der Poldistanz des Polarsternes werden solche Tafeln doch bald veraltet erscheinen, und es dürfte sich empfehlen, in jedem einzelnen Falle Specialtafeln ähnlicher Art anzulegen.

Eine andere Form der Reihenentwickelung hat ÅSTRAND (»Astron. Nachr.« No. 1901) vorgeschlagen. Wenn

$$tang\, p\, cos\, t = tang\, \psi \tag{14}$$

gesetzt wird, so ist

$$tang\, a = -\frac{tang\, p\, sec\, \varphi\, sin\, t}{1 - tang\, \psi\, tang\, \varphi} = -\, tang\, p\, sin\, t\, cos\, \psi\, sec\, (\psi + \varphi). \tag{15}$$

Werden nun $tang\, a$ und $tang\, p$ in Reihen entwickelt, so erhält man

$$a + \tfrac{1}{3}a^3 = -(p + \tfrac{1}{3}p^3 \ldots)\, sin\, t\, cos\, \psi\, sin\, (\psi + \varphi)$$

$$a = -p\, sin\, t\, cos\, \psi\, sin\, (\psi + \varphi) - \tfrac{1}{3}p^3\, sin\, t\, cos\, \psi\, sec\, (\psi + \varphi) - \tfrac{1}{3}a^3. \tag{16}$$

Bezeichnet man das erste Glied als einen Näherungswerth von a mit a' und berechnet damit a^3, so wird

$$\begin{aligned} a &= -a' - \tfrac{1}{3}p\, sin\, t\, cos\, \psi\, sec\, (\psi + \varphi)\, (p^2 - a'^2)\, sin^2 1'' \\ &= -a' - \tfrac{1}{3}a'\, (p - a')(p + a')\, sin^2 1''. \end{aligned} \tag{17}$$

Hier kann nun auch der Winkel ψ tabulirt werden, ebenso das Produkt $(p - a')(p + a')$ nach a', aber trotzdem erkennt man bald, dass kaum eine Zeitersparniss erreicht wird.

Auch E. BLOCK hat Tafeln zur Erleichterung der Rechnung gegeben (»Hilfstafeln zur Berechnung der Polaris-Azimuthe, zunächst mit Rücksicht auf die Zeitbestimmung im Vertical des Polarsternes«, Petersburg 1875), die, wie schon der Titel besagt, ursprünglich für die Reduction einer Zeitbestimmung im Vertical des Polarsternes (s. Zeitbestimmung) hergestellt wurden. Es werden auch hier die ursprünglichen Formeln (7) und (8), in denen für die Zenithdistanz z die Höhe h, für die Deklination δ, die Poldistanz p eingeführt wird, sodass sie

$$\cos h \sin a = \sin p \sin t$$
$$\cos h \cos a = \cos \varphi \cos p - \sin \varphi \sin p \cos t$$

lauten, durch Zerlegung des Dreiecks zwischen Zenith, Pol, Stern in zwei rechtwinklige durch das Perpendikel vom Stern auf den Meridian umgeformt. Behalten wir dieselben Bezeichnungen, wie ÅSTRAND sie in den Formeln (14) und (15) verwendet, so giebt BLOCK für einen bestimmten Werth von p mit dem Argument Stundenwinkel den Winkel ψ (14); ferner den Werth

$$Y = \frac{\tan p}{\sin 1''} \sin t \cos \psi$$

und

$$\eta = \sin t \sec^2 Y.$$

(Bei BLOCK sind diese Grössen durch 15 dividirt, um das Azimuth in Zeitsecunden zu erhalten). Nennt man nun

$$\varphi + \psi = \chi,$$

so ist dann $a = Y \sec \chi \cos^{\frac{2}{3}} a$, da $\tan a = a \sec^{\frac{2}{3}} a$ zu setzen ist, und um die für einen bestimmten Werth von p geltende Tafel auch für andere Werthe verwenden zu können,

$$\frac{\Delta a}{\Delta p} = \eta \sec \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \chi} \cos a\right)^2.$$

Auch die Grössen $\frac{2}{3} \lg \sec a$ und $2 \lg \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \chi} \cos a\right)$ sind den Tafeln mit dem doppelten Argument der Polhöhe und dem Stundenwinkel zu entnehmen. Von besonderem Werth werden diese Tafeln, wenn man nach ihnen Specialtafeln für besondere Fälle, bestimmte Polhöhe und Poldistanz, anlegt. Ohne diese Specialtafeln würde die Rechnung insbesondere wegen der schnellen Veränderung von p keine Erleichterung gewähren.

Am vortheilhaftesten kann schliesslich doch folgendes Verfahren angesehen werden. Benutzt wird die oben angeführte und an sich einfache Formel

$$\tan a = -\frac{\tan p \sec \varphi \sin t}{1 - \tan p \tan \varphi \cos t}.$$

Man kann nun Hilfstafeln in der Weise berechnen, dass gleich mit dem Argument $\lg \tan p \tan \varphi \cos t$ der Logarithmus $\frac{1}{1 - \tan p \tan \varphi \cos t} = b$ gegeben wird, sodass dann $\lg \tan a = -(\lg \tan p \sec \varphi \sin t + b)$ ist. Der Vortheil solcher Tafeln liegt auf der Hand, man hat die beiden Constanten $\tan p \sec \varphi$ und $\tan p \tan \varphi$, zu denen $\sin t$ resp. $\cos t$ addirt wird, und mit dieser letzteren Summe entnimmt man b, welches zur ersteren addirt $\tan a$ ergiebt. In grosser Ausführlichkeit und Bequemlichkeit finden sich solche Tafeln in ALBRECHT's »Formeln und Hilfstafeln zur geographischen Ortsbestimmung«, 3. Aufl. Für die Zwecke dieses Handbuches genügt es, die Tafeln in abgekürzter Form zu geben, indem danach für den besonderen Fall nach Bedarf Tafeln in engeren Intervallen gerechnet werden können.

Tafel zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes.

Arg.: $lg\,a' = lg\,tang\,p\,tang\,\varphi\,cos\,t$, Tafelwerth: $lg\,b = lg\,\frac{1}{1-a'}$, Einh. d. 6. Decim.

lg a'	*lg b*	Diff.	*lg a'*	*lg b*	Diff.	*lg a'*	*lg b*	Diff.	*lg a'*	*lg b*	Diff.
8·60	+17643	410	8·10	+5502	126	7·60	+1732	39	7·10	+547	12
8·59	17233	400	8·09	5376	123	7·59	1693	39	7·09	535	13
8·58	16833	390	8·08	5253	120	7·58	1654	37	7·08	522	11
8·57	16443	381	8·07	5133	118	7·57	1617	37	7·07	511	12
8·56	16062	372	8·06	5015	115	7·56	1580	36	7·06	499	11
8·55	15690	364	8·05	4900	112	7·55	1544	36	7·05	488	12
8·54	15326	355	8·04	4788	109	7·54	1508	34	7·04	476	10
8·53	14971	347	8·03	4679	107	7·53	1474	34	7·03	466	11
8·52	14624	338	8·02	4572	105	7·52	1440	32	7·02	455	10
8·51	14286	330	8·01	4467	102	7·51	1408	32	7·01	445	10
8·50	+13956	323	8·00	+4365	100	7·50	+1376	32	7·00	+435	10
8·49	13633	315	7·99	4265	98	7·49	1344	30	6·99	425	10
8·48	13318	308	7·98	4167	95	7·48	1314	30	6·98	415	10
8·47	13010	301	7·97	4072	93	7·47	1284	30	6·97	405	9
8·46	12709	294	7·96	3979	91	7·46	1254	28	6·96	396	9
8·45	12415	286	7·95	3888	89	7·45	1226	28	6·95	387	9
8·44	12129	280	7·94	3799	87	7·44	1198	28	6·94	378	8
8·43	11849	273	7·93	3712	85	7·43	1170	26	6·93	370	9
8·42	11576	267	7·92	3627	82	7·42	1144	26	6·92	361	8
8·41	11309	261	7·91	3545	81	7·41	1118	26	6·91	353	8
8·40	+11048	254	7·90	+3464	79	7·40	+1092	25	6·9	+345	71
8·39	10794	249	7·89	3385	78	7·39	1067	24	6·8	274	56
8·38	10545	243	7·88	3307	76	7·38	1043	24	6·7	218	45
8·37	10302	237	7·87	3231	74	7·37	1019	23	6·6	173	36
8·36	10065	232	7·86	3157	72	7·36	996	23	6·5	137	28
8·35	9833	226	7·85	3085	70	7·35	973	22	6·4	109	22
8·34	9607	221	7·84	3015	69	7·34	951	22	6·3	87	18
8·33	9386	216	7·83	2946	67	7·33	929	21	6·2	69	14
8·32	9170	211	7·82	2879	66	7·32	908	20	6·1	55	12
8·31	8959	206	7·81	2813	64	7·31	888	21	6·0	43	9
8·30	+ 8753	201	7·80	+2749	63	7·30	+ 867	19	5·9	+ 34	7
8·29	8552	197	7·79	2686	61	7·29	848	20	5·8	27	5
8·28	8355	192	7·78	2625	60	7·28	828	19	5·7	22	5
8·27	8163	187	7·77	2565	59	7·27	809	18	5·6	17	3
8·26	7976	183	7·76	2506	57	7·26	791	18	5·5	14	3
8·25	7793	179	7·75	2449	56	7·25	773	18	5·4	11	2
8·24	7614	175	7·74	2393	54	7·24	755	17	5·3	9	2
8·23	7439	171	7·73	2339	53	7·23	738	17	5·2	7	2
8·22	7268	167	7·72	2286	52	7·22	721	16	5·1	5	1
8·21	7101	163	7·71	2234	52	7·21	705	16	5·0	4	
8·20	+ 6938	159	7·70	+2182	50	7·20	+ 689	16	4·0	+ 0	
8·19	6779	155	7·69	2132	48	7·19	673	15			
8·18	6624	152	7·68	2084	48	7·18	658	15			
8·17	6472	149	7·67	2036	46	7·17	643	15			
8·16	6323	145	7·66	1990	46	7·16	628	14			
8·15	6178	141	7·65	1944	44	7·15	614	14			
8·14	6037	139	7·64	1900	43	7·14	600	14			
8·13	5898	135	7·63	1857	43	7·13	586	13			
8·12	5763	132	7·62	1814	41	7·12	573	13			
8·11	5631	129	7·61	1773	41	7·11	560	13			

Proportionaltheile

	410	400	390	380
1	41	40	39	38
2	82	80	78	76
3	123	120	117	114
4	164	160	156	152
5	205	200	195	190
6	246	240	234	228
7	287	280	273	266
8	328	320	312	304
9	369	360	351	342

	370	360	350	340
1	37	36	35	34
2	74	72	70	68
3	111	108	105	102
4	148	144	140	136
5	185	180	175	170
6	222	216	210	204
7	259	252	245	238
8	296	288	280	272
9	333	324	315	306

	330	320	310	300
1	33	32	31	30
2	66	64	62	60
3	99	96	93	90
4	132	128	124	120
5	165	160	155	150
6	198	192	186	180
7	231	224	217	210
8	264	256	248	240
9	297	288	279	270

	290	280	270	260
1	29	28	27	26
2	58	56	54	52
3	87	84	81	78
4	116	112	108	104
5	145	140	135	130
6	174	168	162	156
7	203	196	189	182
8	232	224	216	208
9	261	252	243	234

Tafel zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes.

Arg.: $lg\, a' = lg\, tang\, p\, tang\, \varphi\, cos\, t$, Tafelwerth: $lg\, b = lg \frac{1}{1 - a'}$, Einh. d. 6. Decim.

$lg\, a'$	$lg\, b$	Diff.	$lg\, a'$	$lg\, b$	Diff.	$lg\, a'$	$lg\, b$	Diff.	$lg\, a'$	$lg\, b$	Diff.
8·60$_n$	—16954	378	8·10$_n$	—5433	123	7·60$_n$	—1726	40	7·10$_n$	— 546	12
8·59$_n$	16576	371	8·09$_n$	5310	120	7·59$_n$	1686	38	7·09$_n$	534	12
8·58$_n$	16205	362	8·08$_n$	5190	117	7·58$_n$	1648	37	7·0$_n$	522	12
8·57$_n$	15843	354	8·07$_n$	5073	115	7·57$_n$	1611	37	7·07$_n$	510	12
8·56$_n$	15489	347	8·06$_n$	4958	112	7·56$_n$	1574	36	7·06$_n$	498	11
8·55$_n$	15142	339	8·05$_n$	4846	110	7·55$_n$	1538	35	7·05$_n$	487	11
8·54$_n$	14803	331	8·04$_n$	4736	107	7·54$_n$	1503	34	7·04$_n$	476	11
8·53$_n$	14472	324	8·03$_n$	4629	105	7·53$_n$	1469	33	7·03$_n$	465	10
8·52$_n$	14148	317	8·02$_n$	4524	103	7·52$_n$	1436	33	7·02$_n$	455	11
8·51$_n$	13831	310	8·01$_n$	4421	100	7·51$_n$	1403	32	7·01$_n$	444	10
8·50$_n$	—13521	303	8·00$_n$	—4321	98	7·50$_n$	—1371	31	7·00$_n$	—434	10
8·49$_n$	13218	297	7·99$_n$	4223	96	7·49$_n$	1340	30	6·99$_n$	424	9
8·48$_n$	12921	290	7·98$_n$	4127	93	7·48$_n$	1310	30	6·98$_n$	415	10
8·47$_n$	12631	283	7·97$_n$	4034	91	7·47$_n$	1280	29	6·97$_n$	405	9
8·46$_n$	12348	277	7·96$_n$	3943	89	7·46$_n$	1251	29	6·96$_n$	396	9
8·45$_n$	12071	271	7·95$_n$	3854	87	7·45$_n$	1222	27	6·95$_n$	387	9
8·44$_n$	11800	265	7·94$_n$	3767	86	7·44$_n$	1195	28	6·94$_n$	378	9
8·43$_n$	11535	259	7·93$_n$	3681	84	7·43$_n$	1167	26	6·93$_n$	369	8
8·42$_n$	11276	254	7·92$_n$	3597	81	7·42$_n$	1141	26	6·92$_n$	361	8
8·41$_n$	11022	248	7·91$_n$	3516	80	7·41$_n$	1115	25	6·91$_n$	353	8
8·40$_n$	—10774	242	7·90$_n$	—3436	78	7·40$_n$	—1090	25	6·9$_n$	— 345	71
8·39$_n$	10320	237	7·89$_n$	3358	76	7·39$_n$	1065	24	6·8$_n$	274	56
8·38$_n$	10295	232	7·88$_n$	3282	74	7·38$_n$	1041	24	6·7$_n$	218	45
8·37$_n$	10063	226	7·87$_n$	3208	73	7·37$_n$	1017	23	6·6$_n$	173	36
8·36$_n$	9837	221	7·86$_n$	3135	71	7·36$_n$	994	23	6·5$_n$	137	28
8·35$_n$	9616	217	7·85$_n$	3064	70	7·35$_n$	971	22	6·4$_n$	109	22
8·34$_n$	9399	212	7·84$_n$	2994	68	7·34$_n$	949	21	6·3$_n$	87	18
8·33$_n$	9187	207	7·83$_n$	2926	66	7·33$_n$	928	22	6·2$_n$	69	14
8·32$_n$	8980	202	7·82$_n$	2860	65	7·32$_n$	906	20	6·1$_n$	55	12
8·31$_n$	8778	198	7·81$_n$	2795	63	7·31$_n$	886	20	6·0$_n$	43	9
8·30$_n$	— 8580	194	7·80$_n$	—2732	62	7·30$_n$	— 866	20	5·9$_n$	— 34	7
8·29$_n$	8386	189	7·79$_n$	2670	61	7·29$_n$	846	19	5·8$_n$	27	5
8·28$_n$	8197	184	7·78$_n$	2609	59	7·28$_n$	827	19	5·7$_n$	22	5
8·27$_n$	8013	181	7·77$_n$	2550	58	7·27$_n$	808	18	5·6$_n$	17	3
8·26$_n$	7832	177	7·76$_n$	2492	57	7·26$_n$	790	18	5·5$_n$	14	3
8·25$_n$	7655	173	7·75$_n$	2435	55	7·25$_n$	772	18	5·4$_n$	11	2
8·24$_n$	7482	169	7·74$_n$	2380	54	7·24$_n$	754	17	5·3$_n$	9	2
8·23$_n$	7313	165	7·73$_n$	2326	53	7·23$_n$	737	17	5·2$_n$	7	2
8·22$_n$	7148	161	7·72$_n$	2273	51	7·22$_n$	700	16	5·1$_n$	5	1
8·21$_n$	6987	158	7·71$_n$	2222	51	7·21$_n$	704	16	5·0$_n$	4	
8·20	— 6829	154	7·70$_n$	—2171	49	7·20$_n$	— 688	16	4·0$_n$	— 0	
8·19$_n$	6675	151	7·69$_n$	2122	48	7·19$_n$	672	15			
8·18$_n$	6524	147	7·68$_n$	2074	47	7·18$_n$	657	15			
8·17$_n$	6377	144	7·67$_n$	2027	46	7·17$_n$	642	15			
8·16$_n$	6233	141	7·66$_n$	1981	45	7·16$_n$	627	14			
8·15$_n$	6092	138	7·65$_n$	1936	44	7·15$_n$	613	14			
8·14$_n$	5954	135	7·64$_n$	1892	43	7·14$_n$	599	14			
8·13$_n$	5819	131	7·63$_n$	1849	42	7·13$_n$	585	13			
8·12$_n$	5688	129	7·62$_n$	1807	41	7·12$_n$	572	13			
8·11$_n$	5559	126	7·61$_n$	1766	40	7·11$_n$	559	13			

Proportionaltheile

	250	240	230	220
1	25	24	23	22
2	50	48	46	44
3	75	72	69	66
4	100	96	92	88
5	125	120	115	110
6	150	144	138	132
7	175	168	161	154
8	200	192	184	176
9	225	216	207	198

	210	200	190	180
1	21	20	19	18
2	42	40	38	36
3	63	60	57	54
4	84	80	76	72
5	105	100	95	90
6	126	120	114	108
7	147	140	133	126
8	168	160	152	144
9	189	180	171	162

	170	160	150	140
1	17	16	15	14
2	34	32	30	28
3	51	48	45	42
4	68	64	60	56
5	85	80	75	70
6	102	96	90	84
7	119	112	105	98
8	136	128	120	112
9	153	144	135	126

	130	120	110	100
1	13	12	11	10
2	26	24	22	20
3	39	36	23	30
4	52	48	44	40
5	65	60	55	50
6	78	72	66	60
7	91	84	77	70
8	104	96	88	80
9	117	108	89	90

Bei der Reduction der in Frage kommenden Beobachtungen entnehmen wir die scheinbaren Sternörter in der Regel den astronomischen Jahrbüchern, wobei nur der Einfluss der Präcession, Nutation und jährlichen Aberration, nicht aber der der täglichen Aberration berücksichtigt wird. An die Rectascension α und Deklination δ des beobachteten Sternes sind hierfür folgende Correctionen anzubringen:

$$d\alpha = \lambda \sec \delta \cos t$$

$$d\delta = \lambda \sin \delta \sin t,$$

wo $\lambda = 0''{\cdot}32 \cos \varphi$ ist. Setzen wir diese Werthe für $d\alpha$ oder dt $(= - d\alpha)$ und $d\delta$ in die Differentialausdrücke $\frac{da}{dt}$ und $\frac{da}{d\delta}$ ein, so kommt

$$da = + \frac{\cos \varphi \sin^2 t}{\sin^2 z} \lambda \sin \delta - \frac{\cos q}{\sin z} \lambda \cos t \text{ (}a\text{ von Nord gezählt)}$$

oder da

$$\cos a = \sin q \sin t \sin \delta - \cos q \cos t$$

ist

$$da = \lambda \cos a \operatorname{cosec} z.$$

Ist also $a = 90°$ oder $270°$, werden die Beobachtungen in der Nähe des ersten Verticals angestellt, so wird $da = 0$. Beim Polarstern, der ja nach Obigem fast ausschliesslich zur Azimuthbestimmung Anwendung finden wird, ist das Azimuth aber stets sehr klein, sodass man $\cos a = 1$ setzen kann, und die Correction geht daher über in

$$da = \lambda \operatorname{cosec} z.$$

Hier ist nun aber wieder $\sin z$ sehr nahe gleich dem in λ enthaltenen $\cos \varphi$, und es wird daher an das Azimuth in jedem Stundenwinkel und bei jeder Polhöhe sehr nahe die Grösse $+ 0''{\cdot}32$ hinzuzufügen sein (das Azimuth von Nord nach Osten gezählt).

Was nun die Anstellung der Beobachtungen in der Praxis betrifft, so wird man am besten so verfahren, dass man abwechselnd das irdische Object, dessen Azimuth ermittelt werden soll, und das Gestirn mit dem Fernrohr einstellt, dabei dann jeweils den Horizontalkreis abliest. Derartige Einzelbeobachtungen sind nun aber häufig zu wiederholen, um die zufälligen Beobachtungsfehler, aber auch die systematischen Veränderungen am Instrument zu verringern. Bei den Beobachtungen des Gestirnes ist, wie schon oben bemerkt, die Ermittelung der Neigung stets von grösster Wichtigkeit, dieselbe ist aber auch bei den Einstellungen des irdischen Objectes wenigstens zu controliren. Zur Eliminirung der Theilfehler des Kreises ist anzurathen, eine geschlossene Reihe von Beobachtungen auf verschiedene Stellen des Kreises zu vertheilen, sodass man diesen letzteren nach je einem vollständigen Satz um einen gleichen Bogen (z. B. 30°) dreht, und dann soviele (z. B. 6) Sätze nimmt, bis man auf die erste Stelle des Kreises zurückkommt. Auch die Mikrometerschrauben der Ablesemikroskope sind genau zu untersuchen und die periodischen Fehler, wenn solche vorhanden, in Rechnung zu ziehen, eventuell die Einstellungen so anzuordnen und zu vermehren, dass die Fehler eliminirt werden (vergl. die Artikel über Mikrometerschraube und periodische Fehler). Ist das Fernrohr an dem einen Ende der Horizontalaxe angebracht, also nicht in der Mitte, so ist bei Einstellung naher Objecte natürlich auf die Parallaxe Rücksicht zu nehmen, die man durch Beobachtung in zwei Kreislagen (Fernrohr rechts und Fernrohr links) eliminirt, überhaupt ist mit Sorgfalt darauf zu achten, dass der Mittelpunkt des Instrumentes so genau als möglich vertical über dem Centrum der Station gelegen ist. Man wird übrigens schon der Theilfehler wegen stets in beiden Kreislagen beob-

achten. Um endlich den Collimationsfehler, d. i. den aus der Abweichung des Winkels, den die optische Axe mit der horizontalen Drehungsaxe bildet, von 90° herrührenden Fehler zu ermitteln und die Zapfenungleichheit der Horizontalaxe zu eliminiren, wird das Fernrohr in den Lagern umgelegt.

In der Instruction des Kgl. Preussischen Geodätischen Instituts ist als Schema für eine sorgfältige Azimuthbestimmung mit Hilfe des Universalinstrumentes Folgendes gegeben:

I. Kreis rechts: Einstellung des irdischen Objectes.
„ Ost: Durchgangsbeobachtung des Polarsternes.
„ Ost: Durchgangsbeobachtung des Polarsternes.
„ rechts: Einstellung des irdischen Objectes.
Fernrohr durchschlagen.
II. Kreis links: Einstellung des irdischen Objectes:
„ West: Durchgangsbeobachtung des Polarsternes.
„ West: Durchgangsbeobachtung des Polarsternes.
„ links: Einstellung des irdischen Objectes.

Die Nivellirung bei den Sternbeobachtungen kann passend so gemacht werden, dass nach der Einstellung des irdischen Objectes und der Kreisablesung das Niveau abgelesen und dann umgesetzt, darauf nach der Einstellung des Sternes die zweite Ablesung des Niveaus vorgenommen wird.

Eine solche Reihe gilt als halber Satz, und man wird, wenn es sich um grosse Genauigkeit handelt, diesen zunächst in umgekehrter Reihenfolge, also mit der nochmaligen letzten Einstellung beginnend, wiederholen, dann den Kreis um 30° drehen, in der neuen Stellung genau wie vorher beobachten, dann den Kreis abermals um 30° drehen u. s. w., bis man nach fortgesetzter Drehung bis zu 180°, dem ursprünglichen Stand, zurückgekommen ist.

Die Art der Pointirung richtet sich nach der Art des Objectes und der Beschaffenheit des Fadennetzes. Für letzteres empfiehlt sich, die Anordnung der Fäden so zu treffen, dass, von anderen Fäden abgesehen, in der Mitte zwei enge Verticalfäden und zwei enge Horizontalfäden vorhanden sind, sodass die Mitte des Gesichtsfeldes durch ein kleines Quadrat angegeben ist. Hat man nun als irdisches Object Heliotropenlicht, so wird die Einstellung auf einen der Fäden oft sicherer sein, als in die Mitte des Quadrats, andererseits wird sich, wenn das Object eine Thurmspitze oder dergl. ist, die Einstellung in die Mitte des Quadrats günstiger als die auf den Faden erweisen. Viel wird hierbei indessen von dem jeweiligen Luftzustand abhängen. Wird als Stern der Polarstern (oder ein Fixstern) gewählt, so ist durchaus anzurathen, die Einstellung nicht durch die Mikrometerbewegung zu bewirken, sondern den Stern mit Hilfe derselben nur dem mittleren Doppelfaden sehr nahe zu bringen, und zwar so, dass er sich auf den Faden zu bewegt. Man beobachtet dann, indem man den Stern beständig zwischen den Horizontalfäden hält, den Durchgang durch die beiden Verticalfäden nach den Schlägen der Uhr. Die Kreisablesung gehört dann zu dem Mittel der zwei Antrittszeiten. Diese Doppelbeobachtung ist natürlich sicherer als die Wahrnehmung des Momentes, wann der Stern durch die Mitte des Quadrats geht, und der grössere Zeitaufwand nicht von Belang. Verbindet man Morgen- und Abendbeobachtungen, so erreicht man einen doppelten Vortheil, einmal heben sich persönliche Fehler auf, die aus der Bewegungsrichtung des Sternes entstehen, sodann alle die Fehler, die aus der Ungenauigkeit des Sternortes (Rectascension und Deklination) und der Polhöhe hervorgehen. Die Betrachtung der Differentialausdrücke für den speciellen Fall der

Polarsternbeobachtungen (s. unten), ergiebt, dass alle diese Fehler in um 12 Stunden von einander verschiedenen Stundenwinkeln gleiche Werthe mit entgegengesetztem Zeichen annehmen. (Wird endlich die Sonne zur Beobachtung herangezogen, so muss man hier natürlich beide Ränder beobachten, und dabei empfiehlt es sich, da die Antritte an beiden Fäden zu rasch auf einander folgen, um genau erfasst werden zu können, ausserdem auch die Berührung eines Scheibenrandes mit einem Faden stets unsicher ist, den Moment zu notiren, wo der erste (resp. zweite) Sonnenrand genau in die Mitte des Quadrats tritt. Persönlichen Fehlern ist man hierbei allerdings ausgesetzt, da einmal das ausgeschnittene helle Segment rechts liegt und sich vergrössert, während es das andere Mal links liegt und sich verkleinert.)

Die Berechnung der Beobachtungen erfolgt dann in der Weise, dass nach Mittelbildung der Mikroskopablesungen aus den beobachteten, und für den Uhrstand corrigirten Uhrzeiten der Stundenwinkel durch Subtraction der scheinbaren Rectascension ermittelt wird. Dann werden die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Azimuthe des Polarsternes nach der Formel

$$tang\, a = -\frac{tang\, p\; sec\, \varphi\; sin\, t}{1 - tang\, p\; tang\, \varphi\; cos\, t}$$

berechnet. Bezeichnet man nun die Kreisablesung bei dem Stern mit Abl_*, die bei dem irdischen Object mit $Abl_{Obj.}$, die wegen Zapfenungleichheit corrigirten Neigungen bei den Einstellungen auf den Stern und das Object bezw. mit i und I, die betreffenden Zenithdistanzen mit z und Z, so findet sich das Azimuth unter Voraussetzung eines von links nach rechts getheilten und sich bewegenden Kreises

$$A = a + Abl_* - Abl_{Obj} - i\; cotang\, z + I\; cotang\, Z \pm c\,(cosec\, z - cosec\, Z) + 0''{\cdot}32\, \frac{cos\,\varphi}{sin\, z},$$

während bei ruhendem Kreis und sich bewegenden Mikroskopträgern $Abl_{Obj} - Abl_*$ statt $Abl_* - Abl_{Obj}$ zu setzen ist.

Man kann nun das Azimuth eines irdischen Objectes auch in gewissen Fällen mit dem Passageninstrument bestimmen. Dafür muss sich das betreffende Object sehr nahe im Meridian des Beobachtungsortes befinden und das Passageninstrument muss innerhalb gewisser Grenzen bequem im Azimuth verstellbar und mit einem beweglichen Faden, d. h. mit einem Mikrometerocular versehen sein. Da es, wie aus Obigem genugsam hervorgeht, bei weitem am zweckmässigsten ist, den Polarstern für die Azimuthbestimmungen zu verwenden, so ergeben sich aus der Grösse seines Parallelkreises zunächst die Grenzen für die Entfernung des Objectes vom Meridian, und andererseits für die Versetzung des Passageninstrumentes. Es muss das Object innerhalb der grössten Digression des Polarsternes, nämlich zwischen $\pm (90° - \delta)\; sec\,\varphi$ und $180° \pm (90° - \delta)\; sec\,\varphi$ liegen und soweit muss das Passageninstrument auch im Azimuth verstellbar sein. Diese Bedingung wird in der Regel selten erfüllt sein, und es hat ausserdem sein Bedenken, sehr nahe einer Digression zu beobachten, weil dann der Einfluss eines Fehlers in der Deklination des Polarsternes sehr gross wird und nich durch Beobachtungen in der anderen Digression eliminirt werden kann. Man kann dann von dieser bequemen Methode indirekt in der Weise Gebrauch machen, dass man eine Marke in der Richtung des Meridians und in gehöriger Entfernung anbringt (oder auch sonst ein vorhandenes Hilfsobject, das sich gut einstellen lässt, benutzt) und zunächst von dieser das Azimuth ermittelt, dann den Winkel zwischen ihr und dem eigentlichen Object mit dem Universal-

instrument misst. An sich wird dadurch wohl die Zahl der Einstellungen vermehrt, aber abgesehen davon, dass es bei genauen Bestimmungen von Vortheil ist, doppelte Methoden zur Anwendung zu bringen, liegt ein Vortheil dieses Verfahrens gegenüber der direkten Messung des Azimuthes zwischen dem Polarstern und dem irdischen Object mit Hilfe des Universalinstrumentes darin, dass die Verbindung der beiden terrestrischen Objecte auch bei bedecktem Himmel am Beobachtungsort vorgenommen werden kann, und man nicht auf die (namentlich oft im Gebirge) seltenen Gelegenheiten beschränkt bleibt, wo am Beobachtungsort und der entfernten, durch Heliotropenlicht sichtbar gemachten Station gleichzeitig klarer Himmel herrscht. Liegt aber das eigentliche irdische Object dem Meridian sehr nahe, so bleibt man bei dieser Methode von den Theilfehlern am Universalinstrument unabhängig.

Die Beobachtungen geschehen dann in folgender Weise. (Es wird bei dieser Darstellung wesentlich auf die Instruction Bezug genommen, welche von dem Königl. Preuss. Geodätischen Institut für solche Fälle ausgegeben ist und die auf Grund der Erfahrungen, die diese Behörde bei ihren überaus zahlreichen Beobachtungen gemacht hat, auch weiteren Kreisen nur empfohlen werden kann. Sie findet sich in den »Astronomisch-geodätischen Arbeiten in den Jahren 1881 und 1882«, Berlin 1883.)

Das Instrument wird so aufgestellt, dass das Object oder die Marke sehr nahe dem Mittelfaden ist (etwa 20″—40″). Mit dem beweglichen Faden wird nun zu wiederholten Malen der Abstand der Marke vom Mittelfaden gemessen, indem die Lage des Letzteren durch sogen. Coincidenzbeobachtungen bestimmt wird. Die Coincidenzbeobachtung ist dabei (wie überhaupt stets in allen ähnlichen Fällen) nicht durch Einstellen des beweglichen Fadens auf den festen zu bewirken, sodass man nur einen Faden zu sehen glaubt, sondern es wird der bewegliche Faden dem festen nur soweit genähert, dass nur noch eine ganz feine Lichtlinie (ein »*minimum visibile*«) zwischen beiden Fäden übrig bleibt. Nachdem in dieser Stellung die Schraubentrommel abgelesen, bewegt man den Faden in derselben Richtung weiter über den festen fort, bis nun auf der anderen Seite von letzterem eine ebenso feine Lichtlinie sichtbar wird. Auch für diese Stellung wird die Schraube abgelesen, und das Mittel aus beiden Ablesungen entspricht dann der Lage des festen Fadens. Eine vollkommene Coincidenzbeobachtung beruht in der Regel auf drei derartigen Doppeleinstellungen.

Hierauf folgt nun die Beobachtung einer Anzahl von Durchgängen des Polarsternes durch feste Fäden, oder ebenfalls unter Benutzung des beweglichen Fadens. Kommt dieser ausschliesslich zur Verwendung, so genügt für die Coincidenzbeobachtung mit dem Mittelfaden eine einfache Doppeleinstellung, da eine übrig bleibende Ungenauigkeit in der Verbindung mit den Polarsterndurchgängen eliminirt wird. Die Beobachtungen sind, um eine vollständige Reihe oder Serie zu erhalten, wiederholt in beiden Lagen des Kreises anzustellen. Zur Elimination der persönlichen Fehler, die aus der Bewegungsrichtung des Sternes entspringen können, ferner constanter Fehler in der Zeitbestimmung, ist anzustreben, dass solche Serien in gleicher Weise auf die obere und untere Culmination des Polarsternes vertheilt werden.

Alle Messungen mit dem beweglichen Faden werden zunächst in Theilen der Schraubenrevolution erhalten, man muss also den Werth der letzteren getrennt von den eigentlichen Beobachtungen mit grösster Genauigkeit ebenso wie die etwaigen Fehler der Schrauben ermitteln, wozu die verschiedensten Methoden (s. Mikrometerschraube) verwandt werden können. Zur möglichst vollständigen

Elimination der Unsicherheit, die in der Bestimmung des Winkelwerthes verblieben ist, muss man darauf bedacht sein, die Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes nahezu symmetrisch zum Mittelfaden des Instrumentes vorzunehmen. Zu diesem Ende ordnet man die Beobachtungen einer ganzen Serie so an, dass der Polarstern etwa zur Zeit der Mitte der Serie den Mittelfaden passirt. Auf die Bestimmung der Neigung der Axe ist auch hier grosses Gewicht zu legen, sodass innerhalb jeder Serie jedenfalls vier vollständige Nivellirungen vorgenommen werden. Das vom Geodätischen Institut zur Anwendung kommende Schema für die Beobachtungen ist das folgende:

I. Kreis Ost: 2—4 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes am beweglichen Faden oder an festen Fäden.
3—4 Einstellungen des irdischen Objectes mit dem beweglichen Faden.
3 Coincidenzbeobachtungen des beweglichen Fadens mit dem Mittelfaden.
3—4 Einstellungen des irdischen Objectes.
2—4 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes.

II. Kreis West: 2—4 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes.
3—4 Einstellungen des irdischen Objectes.
3 Coincidenzbeobachtungen mit dem Mittelfaden.
3—4 Einstellungen des irdischen Objectes.
2—4 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes.

Hierauf folgt als III und IV dieselbe Reihe in umgekehrter Ordnung, sodass mit Kreis West begonnen und mit Kreis Ost geendet wird. Damit ist dann eine Serie oder Reihe vollendet.

Zur Herleitung des Resultates bedarf man der genauen Kenntniss der Uhrcorrection und dann des Azimuthes des Mittelfadens. Man beobachtet dazu am geeignetsten zugleich einige Südsterne in jeder Kreislage, und berechnet dann aus dieser in Verbindung mit den Polarsterndurchgängen jene beiden Grössen nach den im Artikel »Zeitbestimmung« (im Meridian) gegebenen Formeln. (Wenn der Uhrstand anderweitig genau bekannt ist, so kann man, wenn das Fernrohr sehr nahe im Meridian steht, auch hier (vergl. Zeitbestimmung) das Azimuth des Mittelfadens einfach nach der Formel

$$k = \frac{\alpha' - U' - dU}{K'}$$

berechnen, wo k das Azimuth ist, α', U', K' die um den Betrag der täglichen Aberration verbesserte Rectascension, die um Collimationsfehler und Neigung verbesserte Durchgangszeit, und der Faktor der Azimuthalcorrection des Polarsternes, $\sin(\varphi - \delta) \sec \delta$, endlich dU die Uhrcorrection ist).

Bezeichnet dann m_o und m_w die mit dem beweglichen Faden gemessenen Abstände des Objectes oder der Marke vom Mittelfaden in den Kreislagen Ost und West, wobei diese Grössen positiv genommen werden, wenn das Object im gebrochenen astronomischen Fernrohr rechts, im geraden links vom Mittelfaden erscheint, ferner z die Zenithdistanz des Objectes, endlich i_o und i_w die betreffenden für Zapfenungleichheit corrigirten Neigungen, so findet sich das Azimuth des Objectes

$$a = -k + \frac{1}{2}\,\frac{m_o + m_w}{\sin z} \pm \frac{1}{2}\,\frac{i_o + i_w}{\tang z},$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn das Object im Norden liegt, das untere, wenn es im Süden liegt, und wo ein positiver Werth des Azimuthes eine Ab-

weichung der im Norden liegenden Marke vom Meridian nach Ost, der im Süden liegenden nach West bezeichnet. Liegt das Object nahe im Horizont und ist die Neigung klein, so vereinfacht sich obiger Ausdruck noch in

$$a = -k + \tfrac{1}{2}(m_o + m_w).$$

Hat man die Azimuthbestimmungen in den Theilen des Jahres vorzunehmen, in denen die Culmination des Polarsternes auf die späten Vormittags- und frühen Nachmittagsstunden, also nicht auf die Zeiten der ruhigen Bilder (früh Morgens und spät Nachmittags) fällt, oder muss man das irdische Object in grösseren Abständen vom Meridian beobachten, so wird das Rechnungsverfahren etwas anders. Man thut aber dann gut, wenn man anstatt der einen Marke zwei auf entgegengesetzten Seiten und gleich weit vom Meridian annimmt, die dann zur Zeit der ruhigen Bilder eingestellt werden können, und auf diametral gegenüberliegende Stellen der Bahn des Polarsternes fallen, wodurch die verschiedene Bewegungsrichtung ihres schädlichen Einflusses entzogen wird. Man verbessert dann die beobachteten Durchgangszeiten des Polarsternes wegen des Uhrfehlers (der nach der Methode der Zeitbestimmung im Vertical des Polarsternes zu berechnen ist) und bildet durch Subtraction der scheinbaren Rectascension die entsprechenden Stundenwinkel. Ist dann wieder a das Azimuth des Sternes und behält man im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so wird das Azimuth wieder nach der Formel

$$tang\, a = -\frac{tang\, p\, sin\, t\, sec\, \varphi}{1 - tang\, p\, tang\, \varphi\, cos\, t}$$

berechnet. Hat man übrigens die Durchgangsbeobachtungen am beweglichen Faden rasch aufeinander folgen lassen, so kann man aus drei Durchgängen für die Zeiten und die Schraubenablesungen die arithmetischen Mittel nehmen und für diese Mittelzeit das Azimuth a berechnen.

Bezeichnet man nun die Entfernung des Fadens, an dem der Polarstern beobachtet worden ist, vom Mittelfaden in Bogensecunden ausgedrückt mit e, die des irdischen Objectes vom Mittelfaden dagegen mit E, und mit z und Z die Zenithdistanzen des Polarsternes und des Objectes, mit i die Neigung der Horizontalaxe, so wird dann das Azimuth A des Objectes

$$A = a + e\, cosec\, z + E\, cosec\, Z - i\,(cotang\, z - cotang\, Z),$$

wozu noch für die tägliche Aberration hinzukommt $+ 0''\cdot 32 \frac{cos\, \varphi}{sin\, z}$. Was die Zeichen anbetrifft, so sind sie in obiger Formel so zu verstehen, dass e positiv ist, wenn der Polarstern im geraden Fernrohr rechts vom Mittelfaden, im gebrochenen aber links vom Mittelfaden ist, E dagegen positiv, wenn es im geraden Fernrohr links, im gebrochenen rechts erscheint. Die Neigung i ist wie immer auf das Westende bezogen und für Zapfenungleichheit verbessert angenommen. Der Collimationsfehler müsste streng genommen noch bei der Berechnung in Betracht gezogen werden, er wird aber eliminirt, wenn man je eine Bestimmung bei Kreislage (resp. Ocular) Ost und West anstellt

Es ist schliesslich nicht uninteressant, durch kleine Tabellen den Verlauf der Werthe der Differentialausdrücke speciell für den Polarstern zu überblicken, da daraus die Nothwendigkeit einer bestimmten Anordnung der Beobachtungen zur Elimination verschiedener Fehlerquellen am besten einleuchtet. Verwenden wir dazu nur die beiden ersten Glieder der Reihe, so ist:

$$\frac{da}{dt} = -p \sin 1'' \sec\varphi\,(\cos t + p \sin 1'' \cos 2t \tang\varphi)$$

$$\frac{da}{dp} = -\sin 1'' \sec\varphi\,(\sin t + p \sin 1'' \sin 2t \tang\varphi)$$

$$\frac{da}{d\varphi} = -p \sin 1'' \sec^2\varphi\,[\sin t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} p \sin 1'' \sin 2t \sec\varphi(1 + \sin^2\varphi)].$$

Setzt man hier $p = 1° 10' = 4200''$, so finden sich für $\frac{da}{dt}$ und $\frac{da}{dp}$ für die verschiedenen Stundenwinkel und bei verschiedenen geographischen Breiten die unten folgenden Werthe, wo als Einheit für dt die Zeitsecunde, für dp die Bogensecunde genommen ist; für $\frac{da}{d\varphi}$ ist eine entsprechende Tabelle unnöthig, da für mittlere Polhöhen dieser Ausdruck im Maximum nur einige Hundertel Bogensecunden betragen kann.

da für $dt = 1^s$.

t \ φ	30°	40°	50°	60°	φ / t
0^h	$-0''\cdot35$	$-0''\cdot40$	$-0''\cdot48$	$-0''\cdot61$	24^h
1	−0·34	−0·39	−0·47	−0·60	23
2	−0·30	−0·35	−0·42	−0·54	22
3	−0·25	−0·28	−0·34	−0·43	21
4	−0·17	−0·20	−0·23	−0·30	20
5	−0·09	−0·10	−0·11	−0·14	19
6	+0·00	+0·01	+0·01	+0·02	18
7	+0·09	+0·11	+0·13	+0·18	17
8	+0·18	+0·20	+0·24	+0·32	16
9	+0·25	+0·28	+0·34	+0·43	15
10	+0·30	+0·34	+0·41	+0·52	14
11	+0·34	+0·38	+0·45	+0·57	13
12	+0·35	+0·39	+0·46	+0·59	12

da für $dp = 1''$.

t \ φ	30°	40°	50°	60°	φ / t
0^h	$0''\cdot00$	$0''\cdot00$	$0''\cdot06$	$0''\cdot00$	24^h
1	−0·30 +	−0·35 +	−0·42 +	−0·55 +	23
2	−0·59 +	−0·67 +	−6·81 +	−1·60 +	22
3	−0·84 +	−0·95 +	−1·14 +	−1·49 +	21
4	−1·01 +	−1·15 +	−1·38 +	−1·79 +	20
5	−1·12 +	−1·27 +	−1·52 +	−1·97 +	19
6	−1·16 +	−1·32 +	−1·57 +	−2·04 +	18
7	−1·11 +	−1·25 +	−1·48 +	−1·90 +	17
8	−0·99 +	−1·11 +	−1·32 +	−1·67 +	16
9	−0·80 +	−0·90 +	−1·06 +	−1·34 +	15
10	−0·57 +	−0·64 +	−0·75 +	−0·94 +	14
11	−0·29 +	−0·33 +	−0·38 +	−0·48 +	13
12	0·00	0·00	0·00	0·00	12

Tritt endlich der Fall ein, dass das irdische Object sehr nahe dem I. Vertical gelegen ist, oder dass in der Richtung des Meridians keine für die Beobachtung brauchbare Marke anzubringen ist, solches aber im I. Vertical sehr gut möglich

ist, so braucht man auch dann noch nicht auf die Anwendung des Passageninstrumentes zu verzichten. Es treten dann nur die Vorschriften ein, die man bei der Beobachtung im ersten Vertical zu befolgen hat, indem man dann den Abstand des Objectes (der Marke) von diesem ermittelt. Bei dem im Allgemeinen wohl seltenen Eintreffen eines solchen Falles mögen hier kurze Hinweisungen genügen, indem auf die Herleitung der Formeln, wie oben bei den Zeitbestimmungen, auf den einschlägigen Artikel verwiesen wird. An Stelle des Polarsternes müssen dann natürlich solche Sterne treten, die den ersten Vertical passiren, und zwar hat man solche zu wählen, die ihn in grosser Zenithdistanz passiren. Die Beobachtungen müssen dann auf den Ost- und Westvertical und beide Kreislagen vertheilt werden, und es sind dann die Antrittszeiten an den Seitenfäden auf den Mittelfaden mit den betreffenden Formeln zu reduciren. Das wahrscheinlichste Azimuth des Mittelfadens ergiebt sich dann aus der Gesammtheit folgender Formeln:

Kreis Nord, Stern Ost: $T - (U - i \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cotang} z) = - a \operatorname{cosec} \varphi - c \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cosec} z$
Kreis Süd, Stern Ost: $T - (U - i \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cotang} z) = - a \operatorname{cosec} \varphi + c \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cosec} z$
Kreis Süd, Stern West: $T - (U + i \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cotang} z) = - a \operatorname{cosec} \varphi - c \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cosec} z$
Kreis Nord, Stern West: $T - (U + i \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cotang} z) = - a \operatorname{cosec} \varphi + c \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cosec} z$

Hier bedeutet dann T die wahre Durchgangszeit durch den ersten Vertical, die nach der Formel

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \varphi} \qquad T = \alpha \mp t$$

zu berechnen ist.

In Betreff der Verwendung von Reflexionsinstrumenten (Sextanten u. s. w.) zu solchen Bestimmungen sei auf die bei diesem Artikel gemachten Angaben und Bemerkungen verwiesen.

Beispiele.

Im Jahre 1888 wurde in der Zeit vom 11. bis 24. Juni das Azimuth der Richtung Schneekoppe (im Riesengebirge) — Gröditzberg bestimmt, und zwar unter Anwendung der direkten Messung mit dem Universalinstrument, als auch der Einführung einer Marke mit dem Passageninstrument. Was die Beobachtungen mit dem Universalinstrument betrifft, so wurden sie zunächst zur Elimination der Theilungsfehler auf 6 äquidistante Stände des Horizontalkreises gleichmässig vertheilt, und auf jedem Stande je eine Reihe Morgen- und Abendbeobachtungen ausgeführt, wodurch die Resultate frei von der Unsicherheit in der Position und in der Auffassung des Sternes wurden. Zu weiterer Elimination der Theilungsfehler wurde, da die Construction des Instrumentes eine Drehung des Kreises in kleineren Intervallen als 30° nicht zuliess, noch innerhalb eines jeden Kreisstandes eine dreimalige Drehung um je 1° in der Weise ausgeführt, dass inmitten einer jeden vollständigen Beobachtungsreihe eine Drehung um je 1° vorgenommen und die Morgen- und Abendbeobachtungen an Stellen des Kreises ausgeführt wurden, welche sich um 2° von einander unterschieden. So erfolgten die Abendbeobachtungen auf den Kreisständen 359°, 0°, 29°, 30°, 59°, 60°, 89°, 90°, 119°, 120°, 149°, 150° in der Lage I des Fernrohres, die Morgenbeobachtungen dagegen auf den Ständen 1°, 2°, 31°, 32° u. s. w. in der Lage II des Fernrohres. Hier wollen wir die Abendbeobachtungen des 11. Juni mittheilen, wofür der scheinbare Ort des Polarsternes nach dem »Berliner astron. Jahrbuch« ist:

$$\alpha = 1^h\, 17^m\, 35^s{\cdot}51 \qquad \delta = +\, 88°\, 42'\, 23''{\cdot}44.$$

Die Polhöhe war 50° 44′ 21″·0, die Zenithdistanz des irdischen Objectes 91° 35′.

Stand u. Lage des Instrum.	No.	Object	Kreislage	Sternzeit	Kreis-Ables. Stern resp. Object	Neigung i	Azimuth des Polarsternes a
359° I	1	Gröditzberg	*l*		88° 33′ 6″·10		
		Polaris	*W*	12h 14m 24s·32	90 40 28·95	— 0″·90	359° 27′ 28″·55
	2	Polaris	*W*	19 42·82	90 37 45·70		30 9·11
		Gröditzberg	*l*		88 33 6·20		
	3	Gröditzberg	*r*		268 32 55·60		
		Polaris	*O*	12 27 56·69	270 33 28·95	+ 8·36	359 34 19·81
	4	Polaris	*O*	32 5·49	270 31 24·00		36 26·81
		Gröditzberg	*r*		268 32 55·10	+ 5·36	
0° I	5	Gröditzberg	*r*		268 32 52·60		
		Polaris	*O*	12 40 49·87	270 26 57·50	+ 8·66	359 40 55·85
	6	Polaris	*O*	42 52·77	270 25 53·30		41 59·14
		Gröditzberg	*r*		268 32 50·75		
	7	Gröditzberg	*l*		88 33 2·40		
		Polaris	*W*	12 54 54·75	90 19 43·85	— 2·60	359 48 12·39
	8	Polaris	*W*	57 33·25	90 18 20·80		49 34·60
		Gröditzberg	*l*		88 33 1·35	— 2·00	

No.	Differenz der Kreis-Ables. Stern-Object	Corr. für Neigung	Corr. für tägl. Ab.	Azimuth ohne Collim.	Coëfficient der Collim.	Corr. für Collim.	Azimuth Definitiv
1	2° 7′ 22″·85	+ 1″·11	+ 0″·31	1° 34′ 52″·82	— 0·540 *c*	— 3″·30	1° 34′ 49″·52
2	4 39·50	+ 1·11	+ 0·31	50·03	— 0·539 *c*	— 3·30	46·73
3	2 0 33·35	— 9·92	+ 0·31	34 43·55	+ 0·539 *c*	+ 3·30	46·85
4	1 58 28·90	— 9·92	+ 0·31	46·10	+ 0·539 *c*	+ 3·30	49·40
5	54 4·90	— 10·27	+ 0·31	34 50·79	+ 0·539 *c*	+ 3·05	53·84
6	53 2·55	— 10·27	+ 0·31	51·73	+ 0·539 *c*	+ 3·05	54·78
7	46 41·45	+ 3·10	+ 0·31	34 57·25	— 0·538 *c*	— 3·05	54·20
8	45 19·45	+ 3·10	+ 0·31	57·46	— 0·538 *c*	— 3·05	54·41

Die beiden Standmittel ergeben 1° 34′ 48″·13 und 54″·31, das Mittel hieraus 1° 34′ 51″·22, während das Gesammtmittel aus der ganzen Beobachtungsreihe vom 11. bis 24. Juni bei Morgen- und Abendbeobachtungen und auf die oben genannten verschiedenen Stände vertheilt 1° 34′ 51″·82 geben.

Am Passageninstrument wurde unter Vermittlung einer Meridianmarke dasselbe Azimuth in der Zeit vom 8. bis 27. Juli 1888 ausgeführt. Die Marke lag in einem Azimuth von 359° 59′ in einer Entfernung von 7 Kilometer und bestand aus einer quadratischen Tafel von 1 Meter Seitenlänge, die in geringer Höhe über dem Erdboden an einem Baume angeschraubt war, der zur Vermeidung von Schwankungen unmittelbar über der Tafel abgesägt wurde. Die der Schneekoppe zugewandte Vorderfläche der Tafel war mit matter, schwarzer Oelfarbe angestrichen und hatte in der Mitte ein weiss gestrichenes gleichschenkliges Dreieck von 0·5 Meter Basis und 0·9 Meter Höhe. Die Bisection dieses

Dreiecks liess sich von der Schneekoppe aus mit grosser Schärfe vornehmen. Die Zenithdistanz Z betrug 96° 51′.

Die Beobachtungen erfolgten zur Zeit der oberen und unteren Culmination des Polarsternes, und das Azimuth des Mittelfadens wurde in der oben angegebenen Weise ermittelt und mit den gleichmässigen Messungen des Abstandes der Marke vom Mittelfaden verbunden. Im Folgenden sind nur die Mittelzahlen aus den Einzeleinstellungen gegeben, und zwar beruhen sie bei den Sterndurchgängen auf je 3, bei der Marke auf je 10, bei den Coincidenzbeobachtungen auf je 2 Messungen. Am 15. Juli wurden zur Zeit der oberen Culmination folgende Durchgänge und Ablesungen an der Schraube erhalten:

No.	Kreis-lage	Stellung des bew. Fadens	Sternzeit	Neigung		Stellung d. bew. F. bei		Entfernung Marke-Mittelfaden
				Stern	Marke	Marke	Mittelfaden	
1	*O*	17r·6000	0h 52m 26s02	— 1″·44		8r·1472	8r·9950	0r·8478
2	„	15·8000	57 48·82		— 1″·02			
3	*W*	3·3000	1 1 18·52	— 0·59		9·8110	9·0100	0·8010
4	„	5·1000	6 40·52					
5	„	6·3000	10 15·06	— 0·73		9·8045	9·0083	0·7962
6	„	8·4000	16 31·02		— 0·73			
7	*O*	8·6000	19 14·52	— 0·73		8·1378	8·9863	0·8485
8	„	5·8000	27 38·09					

Mit dem anderweitig ermittelten Werth einer Schraubenrevolution 1r = 60″·50 und der Polhöhe = 50° 44′ 21″·0, der Polarsternposition des »Berl. astron. Jahrbuchs« fanden sich folgende Azimuthe der Marke:

No.	Kreis-lage	*a*	*e cosec z*	*E cosec Z*	Corr. f. Neigung	Tägl. Aberr.	Azimuth der Marke
1	O	0° 14′ 6·″32	—14′ 6·″06	—0′ 51·″66	+1·″93	+0·″33	359°59′10″86
2	„	11 9·64	—11 9·13	—0 51·66	+1·93	+0·33	11·11
3	W	9 14·65	— 9 21·49	—0 48·81	+0·88	+0·33	5·56
4	„	6 17·80	— 6 24·50	—0 48·81	+0·88	+0·33	5·70
5	„	4 19·84	— 4 26·34	—0 48·52	+1·05	+0·33	6·36
6	„	0 52·99	— 0 59·82	—0 48·52	+1·05	+0·33	6·03
7	O	35959 23·01	+ 0 37·99	—0 51·70	+1·02	+0·33	10·65
8	„	54 45·96	+ 5 13·34	—0 51·70	+1·02	+0·33	8·95

Verbindet man No. 1 und 4, 2 und 3, 5 und 8, 6 und 7 zu Mitteln, so erhält man die Secunden 8″ 34, 8″·28, 7″·66, 8″·34, und daraus das Gesammtmittel dieser Reihe 359° 59′ 8″·16, während das Mittel aus allen Beobachtungen der ganzen Periode bei den oberen und unteren Culminationen für das Azimuth der Marke 359° 59′ 8″·54 ergiebt. Mit dem Universalinstrument wurde dann durch zahlreiche Beobachtungen der Winkel zwischen der Marke und dem Gröditzberg gemessen und hierfür gefunden 1° 35′ 42″·39. Verbindet man diesen Werth mit dem Azimuth der Marke, so erhält man als Azimuth des Gröditzberges 1° 34′ 50″·93 in naher Uebereinstimmung mit dem direkt am Universalinstrument gefundenen Werth.

VALENTINER.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Unter Bahnbestimmung versteht man wenigstens im modernen Sinne das Verfahren, die Bahn eines Himmelskörpers aus einer ganz beschränkten Anzahl von Beobachtungen in einem Kegelschnitte zu bestimmen. In dieser eingeschränkten Bedeutung des Wortes beginnt die Geschichte des Problemes mit dem Erscheinen von J. NEWTON's »*Philosophiae naturalis principia mathematica*«, worin zum ersten Male die Aufgabe gelöst ist, die parabolische Bahn eines Kometen aus nur drei geocentrischen Beobachtungen zu bestimmen. Seit dieser Zeit haben sich die Mathematiker und Astronomen des 18. und 19. Jahrhunderts mit dem Bahnbestimmungsprobleme beschäftigt, und der Beweis für die Beliebtheit, deren sich diese Aufgabe erfreute, wie nicht minder der Schwierigkeit, welche sie darbot, liegt in den Namen eines LAMBERT, LAPLACE, LEGENDRE u. a., welche nur bis zu einer gewissen Grenze wirklich praktisch brauchbare Auflösungen der Bahnbestimmung zu liefern vermochten. Naturgemäss muss ich daher an dieser Stelle verzichten, eine wenn auch nur summarische Uebersicht über die historische Entwickelung des Bahnbestimmungsproblemes zu geben, da selbst die blosse Anführung der Titel der einzelnen Abhandlungen einen bedeutenden Raum in Anspruch nehmen würde, ganz abgesehen davon, dass selbst die verlässlichsten Bibliographien den Gegenstand keineswegs erschöpfen. Ich begnüge mich daher hier anzuführen, dass die Bahnbestimmung in der Parabel durch W. OLBERS' klassische »Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen« (Weimar 1797) ihren Abschluss fand. Dem Verdienste, welches sich OLBERS durch seine Arbeit erwarb, wird dadurch gewiss kein Eintrag gethan, dass, wie W. FABRITIUS in einem Aufsatze »DU SÉJOUR und OLBERS« Astronomische Nachrichten No. 2526 (1883) nachwies, die Methode von OLBERS schon in den Memoiren der Pariser Akademie durch DIONYS DU SEJOUR im Jahre 1779 entwickelt wurde. So gerne wir die Priorität dieses berühmten französischen Astronomen anerkennen, was die Thatsache selbst betrifft, so wenig können wir seine Darstellung auch nur annähernd mit der klaren und lichtvollen Art vergleichen, die OLBERS in seiner Abhandlung anwandte, indem er die Schwierigkeiten der analytischen Auflösung in das rechte Licht setzte und die Grundgleichungen des Problemes in ihrer einfachsten Form an die Spitze seiner Abhandlung stellte.

Was OLBERS für die parabolische Kometentheorie, das hat GAUSS in seinem klassischen Werke »Theoria motus corporum celestium. Hamburgi 1809« für jede Kegelschnittslinie als Bahncurve geleistet. Wer sich jemals die Mühe nimmt, GAUSS' Referat in der Monatlichen Correspondenz Bd. 20 (September 1809) »Summarische Uebersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden« mit Aufmerksamkeit durchzustudiren, wird einen bedeutenden Fortschritt in den Methoden der Theoria motus erkennen, und so nur ist es zu verstehen, dass die Bahnbestimmungsarten von OLBERS und GAUSS heute noch nach fast hundertjährigem Gebrauche in der Praxis so zu sagen ihre Jugendfrische bewahrten, und dass man auch heute noch besonders diese Werke dem Studium des angehenden Astronomen empfiehlt. Langjährige praktische Beschäftigung mit dem Gegenstande, wie nicht minder theoretische Studien, liessen mich manchmal für diese oder jene der neueren Methoden Vorliebe gewinnen; hier aber, wo es meine Aufgabe ist, die Grundprincipien des Bahnbestimmungsproblemes zu erörtern, fühle ich mich gedrängt, jene zwei klassischen Werke zur Grundlage meiner Darstellung zu nehmen.

Um unnöthigen Wiederholungen vorzubeugen, möge an dieser Stelle die Bedeutung einiger häufig vorkommender Bezeichnungen Platz finden; es seien

$t_1\ t_2\ t_3$ die drei Beobachtungszeiten,
$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ die geocentrischen Längen,
$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ „ „ Breiten,
$\rho_1\ \rho_2\ \rho_3$ „ „ Entfernungen,
$\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ die sogen. curtirten Distanzen (die Projectionen der geocentrischen Distanzen auf die Ekliptik),
$l_1\ l_2\ l_3$ die heliocentrischen Längen,
$b_1\ b_2\ b_3$ „ „ Breiten,
$r_1\ r_2\ r_3$ „ „ Entfernungen,
des beobachteten Himmelskörpers.

$\odot_1\ \odot_2\ \odot_3$ die geocentrischen Sonnenlängen
$L_1\ L_2\ L_3$ die heliocentrischen Erdlängen ($L_1 = \odot_1 \pm 180°$ etc.),
$R_1\ R_2\ R_3$ die Entfernungen der Sonne und Erde in den drei Beobachtungen,
$x_1\ y_1\ z_1$ die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers;
$x_2\ y_2\ z_2$ die positive X-Axe geht durch den Frühlingspunkt, die positive Y-Axe
$x_3\ y_3\ z_3$ nach einem Punkte, dessen heliocentrische Länge $= 90°$ ist; die positive Z-Axe ist nach dem Nordpol der Ekliptik gerichtet, daher die XY-Ebene die Ekliptik selbst ist,

$\tau_1\ \tau_2\ \tau_3$ die Zwischenzeiten bezw. zwischen der 2. und 3., 1. und 3. und 1. und 2. Beobachtung multiplicirt mit k ($\log k = 8{\cdot}235581 - 10$); die Bedeutung dieser Constanten wird später erörtert werden,

s_2 die der Zwischenzeit $t_3 - t_1$ entsprechende Sehne in der Planeten- oder Kometenbahn, welche die Endpunkte von $r_1\ r_3$ verbindet,

$[r_2 r_3]\ [r_1 r_3]\ [r_1 r_2]$ die von den eingeklammerten Radienvectoren und den correspondirenden Sehnen eingeschlossenen doppelten Dreiecksflächen, also wenn v_1, v_2 und v_3 die bezüglichen Differenzen der wahren Anomalie bedeuten, $[r_2\ r_3] = r_2\ r_3\ \sin v_1$ etc.,

$X_1\ Y_1\ Z_1$ die rechtwinkligen Coordinaten der Sonne, bezogen auf den Aequator
$X_2\ Y_2\ Z_2$ als Grundebene; also wenn ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet, und
$X_3\ Y_3\ Z_3$ die Sonnenbreite vernachlässigt wird:

$$X_1 = R_1 \cos \odot_1, \quad Y_1 = R_1 \sin \odot_1 \cos \varepsilon, \quad Z_1 = R_1 \sin \odot_1 \sin \varepsilon \text{ etc.,}$$

$[R_2 R_3]\ [R_1 R_3]\ [R_1 R_2]$ die entsprechenden doppelten Dreiecksflächen der Erdbahn; also $[R_2 R_3] = R_2 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)$ etc.,

$\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ die geocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des Himmelskörpers,
$\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ sodass die Relationen bestehen
$\xi_3\ \eta_3\ \zeta_3$

$$\xi_1 = x_1 + X_1 \quad \eta_1 = y_1 + Y_1 \quad \zeta_1 = z_1 + Z_1 \text{ etc.}$$

Für die übrigen Grössen soll an geeigneter Stelle die Bedeutung beigebracht werden.

Als Einheit der Zeit soll im Folgenden der mittlere Sonnentag, als Einheit der Entfernung die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, als Einheit der Masse endlich die Sonnenmasse angenommen werden; dies vorausgesetzt lauten die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn k^2 die Krafteinheit (Wirkung der Masseneinheit in der Zeiteinheit und der Entfernung $= 1$) bedeutet und, wenn man für die Masse des Himmelskörpers (in Einheiten der Sonnenmasse) m setzt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k(1+m)x}{r^3} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k(1+m)y}{r^3} = 0 \tag{1}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k(1+m)z}{r^3} = 0,$$

worin

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Um die Integration dieser simultanen Differentialgleichungen 2. Ordnung auszuführen, multiplicire man die erste der Gleichungen (1) mit y die zweite mit x, so erhält man nach geschehener Subtraction und Integration

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = C_1$$

und ähnlich

$$\frac{zdx - xdz}{dt} = C_2 \tag{2}$$
$$\frac{ydz - zdy}{dt} = C_3,$$

worin C_1, C_2 und C_3 Constante sind. Daraus folgt die Relation

$$C_1 z + C_2 y + C_3 x = 0. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck besagt, dass die Ebenen aller Planeten- oder Kometenbahnen durch den Sonnenmittelpunkt gehen.

Man multiplicire ferner die drei Gleichungen (1) bezüglich mit

$$2\frac{dx}{dt} \quad 2\frac{dy}{dt} \quad 2\frac{dz}{dt}$$

und addire die Resultate; berücksichtigt man, dass die Relation gilt

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so erhält man nach ausgeführter Integration

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{2k^2(1+m)}{r} + C_4 = 0 \tag{4}$$

worin C_4 eine weitere Constante bedeutet. Es ist aber bekanntlich

$$ds^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{dv^2}{dt^2} \tag{5*}$$

der Ausdruck des Bogendifferentials ds der Bahncurve in rechtwinkligen und Polar-Coordinaten; quadrirt und addirt man die Gleichungen (2) und subtrahirt man von der Summe das Quadrat des Ausdruckes

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

das sich aus

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ergiebt, so erhält man, wenn gesetzt wird

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = C_5^2$$
$$r^2(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2) = C_5^2\,dt^2 \tag{5}$$

und daraus wegen (5*)

$$dv = \frac{C_5}{r^2}\,dt$$

oder (6)

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{dv}{dt} = \tfrac{1}{2}C_5.$$

Dies ist der Ausdruck des zweiten KEPLER'schen Gesetzes, wonach die Flächengeschwindigkeit eines Planeten oder Kometen in seiner Bahn eine constante Grösse ist.

Eliminirt man

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

aus (4) und (5), so ergiebt sich

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2k^2(1+m)r - C_4 r^2 - C_5^2}}. \tag{7}$$

Dieses Resultat mit Gleichung (6) verbunden liefert

$$\frac{dr}{dv} = \frac{r}{C_5}\sqrt{2k^2(1+m)r - C_4 r^2 - C_5^2}. \tag{8}$$

Die letzte Gleichung giebt das Maximum und Minimum des Radiusvectors, wenn man den Ausdruck rechter Hand gleich Null setzt; bezeichnet man

das Maximum von r mit $a(1+e)$
das Minimum von r mit $a(1-e)$,

so wird

$$C_4 = \frac{k^2(1+m)}{a} \qquad C_5 = k\sqrt{1+m}\;\sqrt{a(1-e^2)}. \tag{9}$$

Mit diesen Werthen erhält man

$$\sqrt{2k^2(1+m)\,r - C_4 r^2 - C_5^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}}\;\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}$$

und somit aus Gleichung (8)

$$\frac{dr}{dv} = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\cdot\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}.$$

Da r zwischen den Grössen $a(1-e)$ und $a(1+e)$ liegt, so kann man setzen

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ex},$$

worin x einen echten Bruch bedeutet; damit wird endlich nach einigen Reductionen

$$dv = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$v = arc\,cos\,x + C_6, \tag{10}$$

worin C_6 erst die fünfte Constante der Integration vorstellt, da C_5 keine unabhängige Constante war. Aus (10) folgt durch Substitution von r an die Stelle von x die Gleichung der Bahncurve

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos\,(v-C_6)}. \tag{11}$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Kegelschnitt, und es folgt aus (3) und (11) das erste KEPLER'sche Gesetz, wonach die Planetenbahnen Kegelschnittslinien sind, deren einen Brennpunkt die Sonne einnimmt. Führt man statt a, der grossen Halbaxe der Bahn, den Parameter durch die Relation

$$p = a(1-e^2)$$

ein, so wird

$$r = \frac{p}{1+e\,cos\,(v-C_6)}.$$

Man nennt die Punkte der Bahn, wo r den grössten und kleinsten Werth, bezüglich $a(1+e)$ nnd $a(1-e)$ erhält, das Aphel (Sonnenferne) und das Perihel (Sonnennähe). Perihel und Aphel sind um 180° Grade von einander

entfernt. Da alle Werthe von r innerhalb der obigen Grenzen liegen, so kann man ein beliebiges r durch die Formel darstellen

$$r = a(1 - e \cos E). \tag{12}$$

Die geometrische Bedeutung von E in Bezug auf die Planetenbahn wird sich im weiteren Verlaufe ergeben; aus der obigen Formel folgt

$$dr = ae \sin E dE.$$

Führt man die Werthe von r und dr in (7) ein, so wird zunächst der Wurzelausdruck im Nenner

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} \sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} ae \sin E$$

und damit die Gleichung (7)

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1+m}} (1 - e \cos E) dE,$$

woraus durch Integration folgt

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t + C_7 = E - e \sin E. \tag{13}$$

C_7 ist die 6. und letzte unabhängige Constante des Problems. Zählt man v und t vom Perihel aus, so ist nach (11)

$$C_6 = 0,$$

wird auch E vom Perihel aus gezählt, was sich aus (12) als Nothwendigkeit ergiebt, so ist auch

$$C_7 = 0.$$

Setzt man

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = \mu \quad \text{und} \quad \mu t = M,$$

so wird nach Gleichung (13)

$$\mu t = M = E - e \sin E = E^0 - \frac{180^\circ}{\pi} e \sin E^0. \tag{15}$$

Werden endlich die in (11) und (12) für r gewonnenen Resultate einander gleichgesetzt, so erhält man

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \qquad \sin v = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} \sin E$$

und (16)

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \operatorname{tang} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Lässt man den Planeten einen vollen Umlauf machen, d. h. setzt man

$$E' = E + 2\pi \qquad t = t',$$

so ist

$$t' = \frac{1}{\mu}(E + 2\pi - e \sin E) = t + \frac{2\pi}{\mu}$$

und aus Gleichung (12) und (16) folgt überdies

$$r' = r \qquad v' = v,$$

Bezeichnet man mit U die Zeit der Rückkehr zu demselben Punkte der Bahn, die sogen. Umlaufszeit, so ist

$$U = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{a^{\frac{3}{2}} 2\pi}{k\sqrt{1+m}}, \tag{17}$$

worin das dritte KEPLER'sche Gesetz modificirt enthalten ist.

Aus dieser Gleichung hat GAUSS (Theoria motus pag. 2) die Grösse k berechnet, indem er die Elemente der Erdbahn benützte; für

$$a = 1 \quad m = \frac{1}{354710} \text{ und } U = 365{\cdot}2563835 \text{ (siderisches Jahr)}$$

erhielt er

$$k = 0{\cdot}017202099 \text{ oder } 3548{\cdot}''1877$$
$$\log k = 8{\cdot}2355814 - 10$$
$$\log k'' = 3{\cdot}5500066 \ (k'' \text{ in Bogensecunden})$$

die sogen. Constante der Theoria motus.

Aus Gleichung (17) folgt, dass die Umlaufszeit von der sogen. numerischen Excentricität e unabhängig ist, dass sich also in jeder Ellipse mit der grossen Halbaxe a ein Himmelskörper so bewegt, wie in einem Kreise vom Radius a. In diesem Falle ist aber

$$e = 0$$

und es folgt aus (15) und (16)

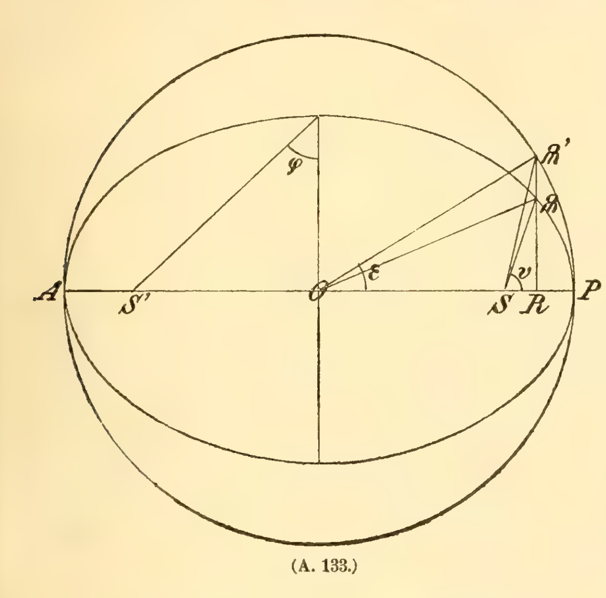
$$\mu t = M = E = v,$$

d. h. die Bewegung ist im Kreise gleichförmig. Insbesondere nennt man

M die mittlere Anomalie,
E die excentrische Anomalie,
v die wahre Anomalie.

Der Unterschied zwischen M und v ist lediglich von der Excentricität abhängig und heisst die Mittelpunktsgleichung *(äquatio centri)*. Endlich nennt man die Grösse

μ die mittlere tägliche siderische Bewegung.



(A. 133.)

Die transcendente Gleichung in E

$$M = E - e'' \sin E,$$

worin e'' die Excentricität in Bogensecunden ausgedrückt bedeutet, führt nach ihrem Urheber KEPLER den Namen KEPLER'sche Aufgabe oder KEPLER'sches Problem, da KEPLER dieselbe zuerst in die Planetentheorie einführte[1]). Sie vermittelt die Beziehung zwischen der mittleren und excentrischen Anomalie und lässt sich geometrisch folgendermaassen ableiten. Es sei in Fig. 133 $A\mathfrak{P}P$ die Bahnellipse, $A\mathfrak{P}'P$ der über der grossen Bahnaxe als Durchmesser beschriebene Kreis; P sei das Perihel, A das Aphel, $\mathfrak{P}$ der Ort des Himmelskörpers in der Bahn; man verbinde den Ort des Himmelskörpers mit dem Mittelpunkt der Sonne S, errichte auf der Verbindungslinie AP, der sogen. Apsidenlinie, die Senkrechte $\mathfrak{P}R$, welche den Kreis über der grossen Bahnaxe in $\mathfrak{P}'$ schneidet, und verbinde den Mittelpunkt der Ellipse O mit $\mathfrak{P}'$, so ist

$$\sphericalangle\, PS\mathfrak{P} = v$$

und

$$\sphericalangle\, PO\mathfrak{P}' = E.$$

[1]) KEPLER, Astronomia nova. Heidelbergae 1609, pag. 300, und Epitome astronomiae Copernicanae. Lincii 1618, pag. 696.

Aus der Eigenschaft der Ellipse folgt, dass

$$PR\mathfrak{P}' : PR\mathfrak{P} = a : b$$

ist, wo b die kleine Halbaxe der Bahn bedeutet.

Aus einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke ergiebt sich

$$\Delta SR\mathfrak{P}' : \Delta SR\mathfrak{P} = a : b,$$

daher das Verhältniss der Sectoren

$$SP\mathfrak{P}' : SP\mathfrak{P} = a : b.$$

Bezeichnet wie früher U die Umlaufszeit, t die Zeit, welche der Himmelskörper braucht, um von P nach $\mathfrak{P}$ zu gelangen, so ist

$$U : t = ab\pi : SP\mathfrak{P} = a^2\pi : SP\mathfrak{P}'.$$

Allein es ist

$$SP\mathfrak{P}' = PO\mathfrak{P}' - OS\mathfrak{P}' = aE \cdot \frac{a}{2} - \frac{ae \cdot a}{2} \sin E,$$

also

$$U : t = 2\pi : (E - e \sin E)$$

und wenn man

$$\frac{U}{2\pi} = \frac{1}{\mu}$$

setzt,

$$\mu t = E - e \sin E.$$

Für die transcendente Gleichung in E

$$M = E - e \sin E,$$

wenn M und e gegeben ist, sind eine grosse Zahl Auflösungen gegeben worden. Von den constructiven Lösungen, welche ihren Anfang in NEWTON's (s. Sir ISAAC NEWTON's Mathematische Principien d. Naturlehre. Deutsch v. J. PH. WOLFERS, Berlin 1872, pag. 122 ff.) Auflösung mit Hilfe der verkürzten Cykloide haben, soll zunächst jene angeführt werden, welche E. DUBOIS[1]) in den Astron. Nachrichten, Band 59, No. 1404 (1863) mit Hilfe der Sinuslinie ausführte. Zuvor mag noch erwähnt werden, dass die sogen. numerische Excentricität durch den Winkel φ (Fig. 133) gemessen wird, den der Radiusvector im Scheitel der kleinen Halbaxe mit derselben einschliesst; es ergiebt sich so

$$e = \sin \varphi$$

und φ heisst die optische Excentricität.

Es sei Fig. 134 die Sinuslinie von Grad zu Grad construirt, wobei der Maassstab der Abscissen und Ordinaten nicht derselbe zu sein braucht; wenn nun $M = 125°$ und $\varphi = 14°{\cdot}5$, also $e = 0{\cdot}25$ gegeben sind, so construire man im Punkte $125° = M$ die Gerade MQ so, dass

$$tang\, Q\, M\, 180° = \frac{1}{e} = 4.$$

Dann ist

$$0°\, E = 0°\, M + ME = M + e \sin E,$$

---

[1]) Diese Methode ist identisch mit der von »J. J. WATERSTONE, On a graphical mode of computing the Excentric Anomaly« Monthly notices of the R. A. Society vol. X. 1850. Dort kommt auch die Construction des Differentialquotienten

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}$$

vor, welche bei DUBOIS fehlt. Ich habe die Methode aus »KLINKERFUES, Theoretische Astronomie, Braunschweig 1871« entlehnt, wo KLINKERFUES die Construction des Differentialquotienten, ohne WATERSTONE's Erwähnung zu thun, anführt. Doch spricht er an einer anderen Stelle, pag. 173, von WATERSTONE'scher Construction, so dass die Anführung DUBOIS nur ein *lapsus calami* sein dürfte.

woraus $E = 134°$ folgt; diese constructive Methode wäre indessen unzulänglich, wenn man nicht die Möglichkeit hätte, den Differentialquotienten

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E$$

auf leichte Weise zu ermitteln, macht man nämlich

$$MD = \frac{1}{4} = e.$$

so ist

$$DE = e \cos E$$

und

$$DS = 1 - e \cos E = 1{\cdot}16$$

unter gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens von $\cos E$. Die aufzulösende Gleichung lautet

$$M = 125° = E - \overline{4{\cdot}7123} \sin E,$$

wo die überstrichene Zahl den Logarithmus von e in Bogensecunden, also

$$e'' = \frac{e}{\sin 1''}$$

bedeutet. Rechnet man für $E = 134°$ den Werth von M, so wird derselbe

$$123° \, 42'{\cdot}0,$$

also im Sinne Beobachtung weniger Rechnung

$$dM = + 78'{\cdot}0;$$

dividirt man diese Grösse durch

$$1 - e \cos E = 1{\cdot}16,$$

so ist

$$dE = + 67'{\cdot}3,$$

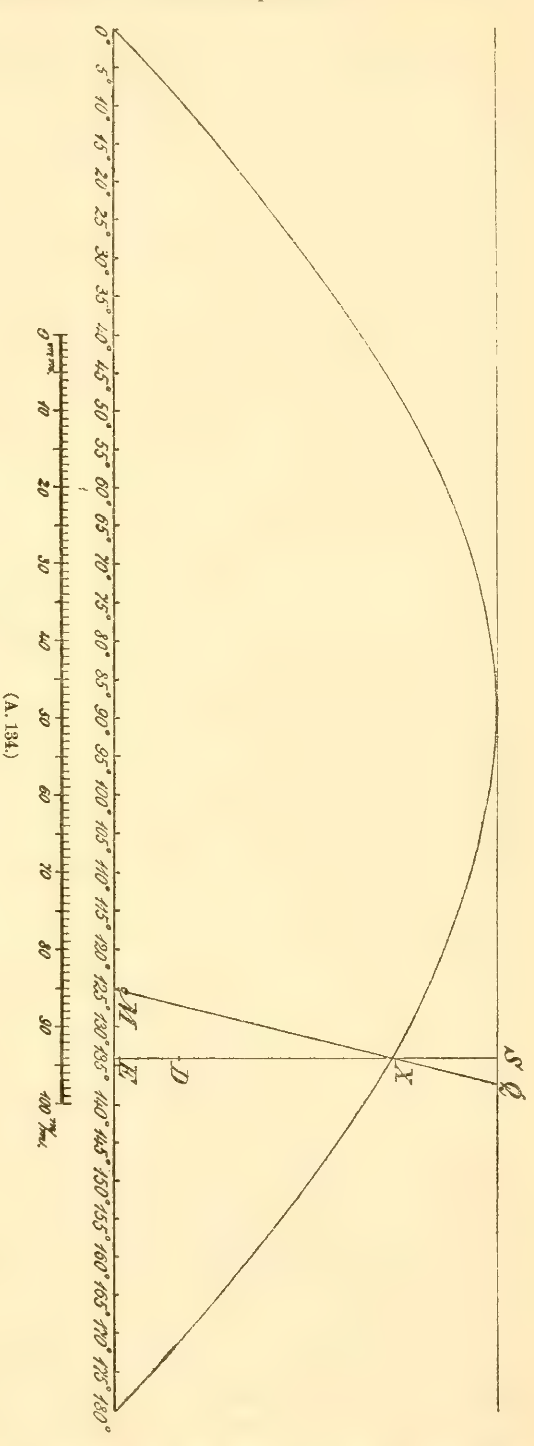
und der corrigirte Werth von E

$$E = 135° \, 7'{\cdot}3,$$

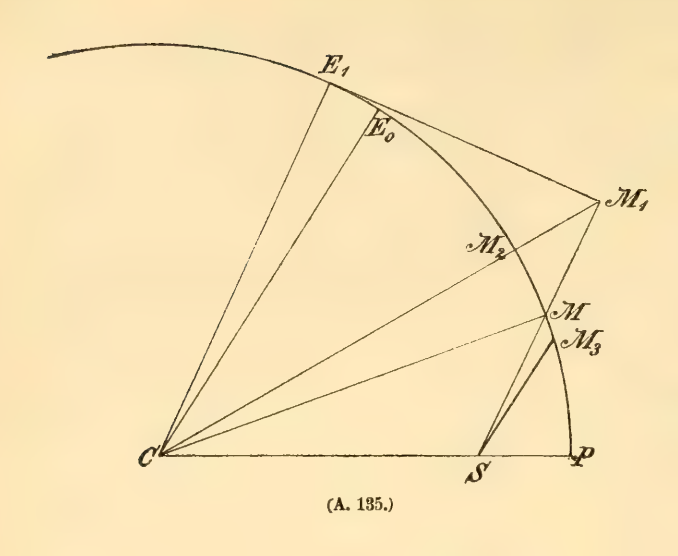
womit sich aus der vorgelegten Gleichung ergiebt

$$M = 125° \, 1'{\cdot}0.$$

Wie man sieht, leistet diese Methode alles, was man von einer Construction verlangen kann.



Eine andere Construction des KEPLER'schen Problemes hat J. F. ENCKE in den Astronomischen Nachrichten Bd. 30, No. 714 angegeben, welche den Vortheil bietet, dass man aus der Construction ein einfaches rechnerisches Verfahren ableiten kann. Es sei (Fig. 135) PME_1 der Kreis über der grossen Bahnaxe, P das Perihel, S der Ort der Sonne, C das Centrum des Kreises; da M gegeben ist, so ziehe man SM, so dass der Bogen



(A. 135.)

$$PM = M$$

ist; ferner sei

$$CE_1 \parallel SM$$

und man lege an E_1 eine Tangente, welche die verlängerte SM in M_1 schneidet, ziehe CM_1, welche den Kreis in M_2 schneidet. Theilt man MM_2 in drei gleiche Theile und trägt $\frac{1}{3} MM_2$ von M gegen P nach M_3 auf, zieht SM_3 und damit parallel CE_0, so repräsentirt der Bogen PE_0 oder kurz E_0 die gesuchte excentrische Anomalie.

Aus der Figur ergiebt sich leicht

$$tang\,(E_1 - M) = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$$

$$tang\,(E_1 - M_2) = \sin (E_1 - M).$$

Die erste Formel giebt durch Reihenentwickelung

$$E_1 - M = e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \frac{1}{3} e^3 \sin 3M + \frac{1}{4} e^4 \sin 4M + \frac{1}{5} e^5 \sin 5M \ldots .$$

die zweite

$$E_1 - M_2 = \sin (E_1 - M) - \frac{1}{3} \sin^3 (E_1 - M) + \frac{1}{5} \sin^5 (E_1 - M) \ldots$$

oder

$$E_1 - M_2 = (E_1 - M) - \frac{1}{2} (E_1 - M)^3 + \frac{3}{8} (E_1 - M)^5 \ldots$$

Substituirt man den Werth $E_1 - M$ in die letzte Formel, so wird

$$E_1 - M_2 = e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M - \left(\frac{3}{8} \sin M - \frac{11}{24} \sin 3M\right) e^3 - \ldots$$
$$- \left(\frac{3}{8} \sin 2M - \frac{7}{16} \sin 4M\right) e^4 + \left(\frac{11}{64} \sin M - \frac{59}{128} \sin 3M + \frac{283}{640} \sin 5M\right) e^5 \ldots ..$$

und daher

$$M_2 - M = (E_1 - M) - (E_1 - M_2) = \left(\frac{3}{8} \sin M - \frac{1}{8} \sin 3M\right) e^3 +$$
$$\left(\frac{3}{8} \sin 2M - \frac{3}{16} \sin 4M\right) e^4 - \left(\frac{11}{64} \sin M - \frac{59}{128} \sin 3M + \frac{31}{128} \sin 5M\right) e^5 + .$$

Macht man

$$M_3 = M - \frac{1}{3} (M_2 - M),$$

so folgt wegen

$$CE_0 \parallel SM_3$$

$$tang\,(E_0 - M_3) = \frac{e \sin M_3}{1 - e \cos M_3}$$

woraus

$$E_0 = M_3 + e \sin M_3 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2 M_3 + \frac{1}{3} e^3 \sin 3 M_3 + \frac{1}{4} e^4 \sin 4 M_3 + \frac{1}{5} e^5 \sin 5 M_3 + \ldots .$$

Mit Hilfe der früher gefundenen Ausdrücke ergiebt sich bis zur 5. Potenz der Excentricität

$$e \sin M_3 = e \sin M - \left(\frac{1}{24} \sin 2 M - \frac{1}{48} \sin 4 M\right) e^4 - \left(\frac{1}{16} \sin M + \frac{1}{32} \sin 3 M - \frac{1}{32} \sin 5 M\right) e^5 \ldots .$$

$$\frac{1}{2} e^2 \sin 2 M_3 = \frac{1}{2} e^2 \sin 2 M + \left(\frac{1}{12} \sin M - \frac{1}{16} \sin 3 M + \frac{1}{48} \sin 5 M\right) e^5 \ldots$$

$$\frac{1}{3} e^3 \sin 3 M_3 = \frac{1}{3} e^3 \sin 3 M \ldots .$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so ist

$$E_0 = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2 M + \left(\frac{3}{8} \sin 3 M - \frac{1}{8} \sin M\right) e^3 + \left(\frac{1}{3} \sin 4 M - \frac{1}{6} \sin 2 M\right) e^4 + \left(\frac{213}{640} \sin 5 M - \frac{95}{384} \sin 3 M + \frac{5}{64} \sin M\right) e^5 \ldots .$$

Die strenge Reihenentwickelung giebt

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2 M + \left(\frac{3}{8} \sin 3 M - \frac{1}{8} \sin M\right) e^3 + \left(\frac{1}{3} \sin 4 M - \frac{1}{6} \sin 2 M\right) e^4 + \left(\frac{125}{384} \sin 5 M - \frac{27}{128} \sin 3 M + \frac{1}{192} \sin M\right) e^5 + \ldots .$$

Daher

$$E = E_0 - \left(\frac{7}{960} \sin 5 M - \frac{7}{192} \sin 3 M + \frac{7}{96} \sin M\right) e^5 \ldots .$$

oder

$$E = E_0 - \frac{7}{60} e^5 \sin^5 M \ldots .$$

Formelzusammenstellung und Rechenbeispiel[1]).

$$\operatorname{tang}(E_1 - M) = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$$

$$\operatorname{tang}(E_1 - M_2) = \sin(E_1 - M)$$

$$M_3 = M - \frac{1}{3} [(E_1 - M) - (E_1 - M_2)]$$

$$\operatorname{tang}(E_0 - M_3) = \frac{e \sin M_3}{1 - e \cos M_3}$$

$M = 332° 28' 54.''8$ $\qquad \log e = 9{\cdot}389726$ $\qquad \log e'' = \log \frac{e}{\sin 1''} = 4{\cdot}704151$

$\log \operatorname{tang}(E_1 - M) = 9{\cdot}160945\, n$ $\qquad \log \operatorname{tang}(E_1 - M_2) = 9{\cdot}156436\, n$

$$E_1 - M = -8° 14' 32.''9$$

$$E_1 - M_2 = -8° \; 9' 30.''5$$

$$\frac{1}{3}(M_2 - M) = -0° 1' 40.''8$$

[1]) Theoria motus, pag. 12.

$$M_3 = 332^\circ\, 30'\, 35.''6$$
$$log\ tang\,(E_0 - M_3) = 9.160569\, n$$
$$E_0 - M_3 = -\,8^\circ\, 14'\, 7.''6$$
$$E_0 = 324^\circ\, 16'\, 28.''0$$

von dem wahren Werthe

$$E = 324^\circ\, 16'\, 29.''5$$

nur um $1.''5$ abweichend.

Natürlich werden diese Methoden nur dort angewendet, wo es sich um die Berechnung einzelner Werthe handelt; kommt aber der Fall vor, dass, wie z. B. bei Ephemeriden, eine Reihe von Werthen für äquidistante Zeitintervalle gerechnet werden soll, so wird man wohl 3 bis 4 Werthe nach diesem Verfahren berechnen; die übrigen ergeben sich durch einfache Summirung der Differenzen. Wären etwa die folgenden Werthreihen mit ihren Differenzen gegeben

$$\begin{array}{lllll} M_1 & & E_1 & & \\ & \Delta M & & \Delta E_1 & \\ M_2 & & E_2 & & \Delta^2 E_1 \quad \Delta^3 E_1, \\ & \Delta M & & \Delta E_2 & \\ M_3 & & E_3 & & \Delta^2 E_2 \\ & \Delta M & & \Delta E_3 & \\ M_4 & & E_4 & & \end{array}$$

worin $\Delta^3 E_1$ bei halbwegs engen Intervallen schon als constante Grösse betrachtet werden kann, so ergiebt sich der M_5 entsprechende Werth von E_5

$$E_5 = E_4 + \Delta\, E_3 + \Delta^2\, E_2 + \Delta^3\, E_1.$$

Wir kehren nach diesem Excurse über das KEPLER'sche Problem noch einmal zur Gleichung (4) zurück; es wurde dort

$$\frac{ds}{dt} = g$$

das Bogenelement durch die Zeit oder die Geschwindigkeit g, bezüglich deren Quadrat gefunden

$$g^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2k^2(1+m)}{r} - \frac{k^2(1+m)}{a},$$

also

$$g = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}. \tag{18}$$

Ist nun

q die Periheldistanz

des Himmelskörpers, so ist die grösste Geschwindigkeit

$$g_{max} = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{q} - \frac{1}{a}}. \tag{19}$$

Für den Kreis ist

$$q = a,$$

also

$$g_{max} = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{1}{q}}.$$

Für die Parabel ist

$$a = \infty,$$

also

$$g_{max} = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{q}}.$$

Da für die Ellipse a positiv, für die Hyperbel a negativ ist, so folgt, dass die Geschwindigkeit in der Ellipse kleiner, in der Hyperbel grösser ist als in der Parabel.

Ein Vergleich der grössten Geschwindigkeiten im Kreise und in der Parabel giebt

$$g_k \sqrt{2} = g_p. \tag{20}$$

Aus der Gleichung (18) geht übrigens hervor, warum der Fall einer kreisförmigen oder parabolischen Bahn ungleich weniger wahrscheinlich ist, als der einer der anderen möglichen Bahnformen, nämlich weil der Spielraum der Geschwindigkeit im Falle eines Kreises oder einer Parabel ein zu enger ist. Immerhin wird die Parabel bei Kometen, der Kreis bei Planeten als erste Annäherung an die richtige Bahnform betrachtet werden können.

Die drei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die ungestörte Bahnbewegung eines Himmelskörpers darstellen, erfordern wie wir gesehen haben, sechs willkürliche Constanten, welche durch die Beobachtungen bestimmt werden.

Jede Beobachtung liefert zwei sphärische Coordinaten (Rectascension und Deklination), die dritte der Coordinaten, die Distanz des Himmelskörpers von der Erde, wird durch die drei Beobachtungszeiten ersetzt, so dass in der That die drei Beobachtungsdaten zur Ableitung der sechs willkürlichen Constanten, der Bahnelemente, ausreichen; die Bahnelemente sind in der Form, wie wir sie benützen, wahrscheinlich erst nach und nach eingeführt worden, waren aber zur Zeit, als NEWTON's Principien erschienen, schon allgemein im Gebrauch. Zwei derselben bestimmen die Lage der Bahn gegen eine fixe Ebene, meistens die Ekliptik; die Neigung der Bahn i ist der Winkel zwischen der Bahnebene und der Fundamentalebene (Ekliptik); der aufsteigende (☊) oder niedersteigende (☋) Knoten ist jener Punkt der Bahn, in welcher der Himmelskörper von der südlichen zur nördlichen Breite oder umgekehrt übergeht; durch diese zwei Grössen ist die Bahnlage vollkommen definirt. Die Dimensionen der Bahn und ihre Lage in der Bahnebene erfordern drei weitere Elemente; der Parameter p und die numerische Excentricität e bestimmen die Grösse und Art des Kegelschnittes, die Länge des Perihels π, welche sich aus der Länge des aufsteigenden Knotens und aus dem Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten ω zusammensetzt,

$$\pi = ☊ + \omega,$$

sind für die Lage der Bahn in der Bahnebene maassgebend. Als sechstes und letztes Element tritt noch die Stellung des Himmelskörpers in seiner Bahn hinzu; diese kann gegeben sein durch die einem gewissen Zeitpunkt, der Epoche, entsprechende mittlere Anomalie (Planeten) oder durch die Zeit, zu welcher der Himmelskörper das Perihel passirte T (Kometen).

Ausserdem pflegt man in Ellipsen (Planeten) die grosse Bahnhalbaxe a, bei Parabeln oder nahe parabolischen Bahnen (Kometen) die Periheldistanz q anzugeben. Endlich wird bei den Planetenbahnen häufig statt der numerischen Excentricität e die sogen. optische Excentricität φ, d. h. jener Winkel eingeführt, unter dem vom Scheitel der kleinen Axe der Bahn aus die numerische Excentricität erscheint. Andere Elemente, wie z. B. die Masse des Himmelskörpers, müssen bei ersten Bahnbestimmungen vernachlässigt werden; dieselben sind meist im Vergleiche zu den eben betrachteten unbedeutend.

Da bei der Parabel die grosse Axe $a = \infty$ ist, also als bekannt vorausgesetzt werden kann, so fällt ein Bestimmungsstück weg; es ist also die Parabel durch drei Beobachtungen überbestimmt; in diesem Falle wird die dritte Beobachtung durch die Lage einer Ebene ersetzt, also die Anzahl der Bedingungen auf fünf reducirt.

Was endlich die Kreisbahn betrifft, so fällt ausser der Excentricität auch die Lage des Perihels fort; die Anzahl der Elemente reducirt sich auf vier, weshalb man zur Bestimmung einer Kreisbahn nur zwei geocentrische Beobachtungen gebraucht.

Noch wäre eines Umstandes zu gedenken, der allerdings praktisch eigentlich nur bei Kometen vorkommt, der sogen. retrograden Bewegung. Bewegt sich nämlich ein Himmelskörper im Sinne der wachsenden heliocentrischen Längen so, dass die letzteren zunehmen, so nennt man seine Bewegung direkt; im anderen Falle retrograd; dieser Unterschied besteht nur so lange, als man die Neigung i von 0° bis 90° zählt; rechnet man aber nach GAUSS' Vorgange die Neigung i von 0° bis 180°, so fällt dieser Unterschied weg. Bezeichnet man die Bahnelemente nach alter Zählweise (retrograde Bewegung) mit dem Index »0«, so lassen sich unschwer die folgenden Relationen beweisen.

$$i + i_0 = 180° \qquad \Omega = \Omega_0 \qquad \pi + \pi_0 = 2\Omega, \qquad \omega = -\omega_0,$$

so dass die Uebertragung der Zählweise von alt auf neu keiner Schwierigkeit unterliegt.

I. Bahnbestimmung eines Himmelskörpers ohne Voraussetzung über die Excentricität.

Im Folgenden soll der Weg, den GAUSS eingeschlagen hat, die Bahn eines Himmelskörpers ohne Veraussetzung über die Excentricität zu bestimmen, in jener Form dargestellt werden, die ENCKE im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1854 (Berlin 1851) angewendet hat. Mag auch das, was nach ihm HANSEN, OPPOLZER, TIETJEN, FABRITIUS u. A. zur Förderung des Problems beigetragen haben, in mancher Beziehung mit Rücksicht auf grössere Convergenz erspriesslicher sein, hier handelt es sich zunächst um klare Darstellung, und in dieser Hinsicht ist die Methode von GAUSS in Bezug auf die Planeten ebenso wenig bis jetzt übertroffen worden, wie die OLBERS'sche Behandlung des Kometenproblems.

Die Methode lässt sich kurz in folgenden vier Postulaten formuliren:

1) Die drei Beobachtungen sollen der Bedingung einer Ebene Genüge leisten, welche durch den Sonnenmittelpunkt geht.

2) Die Beobachtungen sollen auf einem Kegelschnitte liegen, dessen Brennpunkt durch den Mittelpunkt der Sonne gebildet wird.

3) Die Flächengeschwindigkeit des Himmelskörpers in seiner Bahn soll eine constante Grösse sein.

4) Die Zwischenzeiten sollen endlich der Bewegung in dem Kegelschnitte Genüge leisten.

Hier tritt sofort eine organische Scheidung in einen algebraischen und transcendenten Theil ein. Der transcendente Theil ist von GAUSS, ENCKE, BESSEL, HANSEN u. A. in so befriedigender Weise erledigt worden, dass in dieser Richtung kaum etwas zu wünschen übrig bleibt. Der algebraische Theil hingegen, der die Bedingung der Ebene umfasst, hat eine Reihe von Methoden ins Leben gerufen, die zum Theil bestimmten Problemen (Bahnbestimmung der kleinen Planeten etc.) angepasst sind und daher einer gewissen Einschränkung nicht entbehren. Im Falle eines Kometen mit kurzer Umlaufszeit werden meist schon aus der parabolischen Bahnbestimmung genäherte Werthe der geocentrischen und heliocentrischen Entfernung so wie der heliocentrischen Bewegung existiren, so dass die hypothetischen Voraussetzungen in gewisser Beziehung als frei von allzu grosser Willkür betrachtet werden können.

a) Vorbereitung der Beobachtungen.

Die Beobachtungen, wie dieselben aus den Händen des Beobachters kommen, sind:

1) Die Zeit der Beobachtung, bezogen auf den Meridian des Beobachtung sortes diese muss durch Anbringung der Meridiandifferenz auf einen Einheitsmeridian (Berlin, Greenwich, Paris) reducirt und in Theile des Tages verwandelt werden.

2) Die scheinbare Rectascension α des Himmelskörpers.

3) Die scheinbare Deklination δ des Himmelskörpers.

Meistens wird von den Beobachtern auch der Logarithmus des parallactischen Faktors in α und δ hinzugefügt. Dieser hat indessen bei ersten Bahnbestimmungen keine Bedeutung, da die Distanz des Himmelskörpers von der Erde unbekannt ist. Bei ersten Bahnbestimmungen von Kometen wird die Parallaxe ganz vernachlässigt, bei Planeten derselben insofern Rechnung getragen, als man den Beobachtungsort nach GAUSS durch den sogen. *locus fictus* ersetzt. Aus dem gleichen Grunde kann auch die sogen. Aberrationszeit

$$-\,493^{s}{\cdot}20\ \rho \quad \text{nach DELAMBRE,}$$
$$-\,497{\cdot}83\ \rho \quad \text{nach STRUVE}$$

an die Beobachtungszeit nicht angebracht werden; bei Kometen wird derselben insofern theilweise Rechnung getragen, als man bei der Reduction vom scheinbaren auf den mittleren Ort die Fixsternaberration mitnimmt und am Schlusse der Rechnung die Zeit des Durchganges durch das Perihel T um den Betrag

$$-\,497^{s}{\cdot}83\ \rho_2$$

corrigirt (OPPOLZER). Bei Planeten, deren Beobachtungen sich einer ungleich grösseren Genauigkeit erfreuen, wird die erste Hypothese bis zur Kenntniss der Grössen

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$$

durchgeführt, mit diesen Werthen werden die Beobachtungszeiten corrigirt und mit den so corrigirten Werthen die zweite und die folgenden Hypothesen durchgerechnet.

Um alles auf die Bahnbestimmungen bezügliche beisammen zu haben, mögen die zu diesen verschiedenen Vorbereitungsrechnungen dienenden Formeln, wegen deren ausführlicherer Herleitung auf die betreffenden Specialartikel, Parallaxe, Coordinaten u. s. w. verwiesen wird, hier Platz finden.

α) Parallaxe. Sind α, δ und ρ die geocentrischen Coordinaten, α', δ' und ρ' die Coordinaten in Bezug auf den Beobachtungsort; $[\rho]$ die geocentrische Entfernung des Beobachtungsortes, φ' die geocentrische Breite des Beobachtungsortes (Deklination des geocentrischen Zenithes), θ die Sternzeit der Beobachtung (Rectascension des geocentrischen Zenithes), so ist

$$\rho' \cos\delta' \cos\alpha' = \rho \cos\delta \cos\alpha - [\rho] \cos\varphi' \cos\theta$$
$$\rho' \cos\delta' \sin\alpha' = \rho \cos\delta \sin\alpha - [\rho] \cos\varphi' \sin\theta$$
$$\rho' \sin\delta' = \rho \sin\delta - [\rho] \sin\varphi'.$$

Für den vorliegenden Fall wird man auf weitläufige Reihenentwicklungen verzichten und setzen können:

$$-[\rho] \cos\varphi' \cos\theta = dx$$
$$-[\rho] \cos\varphi' \sin\theta = dy$$
$$-[\rho] \sin\varphi' = dz.$$

Durch Differentiation der Ausdrücke

$$x = \rho \cos\delta \cos\alpha$$
$$y = \rho \cos\delta \sin\alpha$$
$$z = \rho \sin\delta$$

ergiebt sich

$$dx = -\rho \cos\delta \sin\alpha \, d\alpha - \rho \sin\delta \cos\alpha \, d\delta + \cos\delta \cos\alpha \, d\rho$$
$$dy = \rho \cos\delta \cos\alpha \, d\alpha - \rho \sin\delta \sin\alpha \, d\delta + \cos\delta \sin\alpha \, \delta\rho$$
$$dz = \rho \cos\delta \, d\delta + \sin\delta \, d\rho.$$

Daraus findet man leicht

$$d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\delta}\frac{dx}{\rho} + \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}\frac{dy}{\rho}$$
$$d\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\rho}dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\rho}dy + \frac{\cos\delta}{\rho}dz$$

und

$$d\rho = \cos\alpha\cos\delta\, dx + \sin\alpha\cos\delta\, dy + \sin\delta\, dz.$$

Setzt man für dx, dy, dz die obigen Werthe ein und drückt $[\rho]$ in Einheiten der Erdbahnhalbaxe aus, indem man dafür

$$[\rho]\pi$$

substituirt (π Sonnenparallaxe nach Encke 8″57 [1824] nach Newcomb 8″85 [vor 1870]), so wird, wenn

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \qquad d\delta = \delta' - \delta \qquad \Delta\rho = \rho' - \rho$$

gesetzt wird,

$$\alpha - \alpha' = \frac{\pi[\rho]\cos\varphi'}{\rho\cos\delta}\sin(\theta - \alpha)$$
$$\delta - \delta' = \frac{\pi[\rho]}{\rho}[-\sin\delta\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha) + \cos\delta\sin\varphi']$$
$$\rho - \rho' = \pi[\rho][\cos\delta\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha) + \sin\delta\sin\varphi']\sin 1''.$$

Rechnet man für eine und dieselbe Sternwarte

$$\pi[\rho]\sin\varphi' = D_2$$

und bringt mit dem Argumente »Stundenwinkel« die Werthe

$$A = \pi[\rho]\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)$$
$$D_1 = -\pi[\rho]\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)$$

in eine Tafel, so findet man die Parallaxe

$$\alpha - \alpha' = \frac{A}{\rho\cos\delta}$$
$$\delta - \delta' = \frac{D_1}{\rho}\sin\delta + \frac{D_2}{\rho}\cos\delta$$
$$\rho - \rho' = (-D_1\cos\delta + D_2\sin\delta)\sin 1''.$$

Diese von Hansen in den Tafeln der »Egeria« (1867) vorgeschlagenen Formeln sind von E. von Rebeur-Paschwitz, soweit die Grössen nur von dem Beobachtungsorte und dem Stundenwinkel abhängen, für alle im Berliner Astronomischen Jahrbuche angegebenen Sternwarten in Tafeln gebracht worden[1]).

Hat man indessen keine Hilfstafeln zur Hand, so empfiehlt sich die Einführung eines Hilfswinkels durch die Gleichung

$$\tan\gamma = \frac{\tan\varphi'}{\cos(\theta-\alpha)}.$$

Damit wird

$$\alpha - \alpha' = \frac{\pi[\rho]\cos\varphi'}{\rho}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\delta}$$
$$\delta - \delta' = \frac{\pi[\rho]\sin\varphi'}{\rho}\frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}$$
$$\rho - \rho' = \pi[\rho]\sin\varphi'\frac{\cos(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}\sin 1'',$$

für Meridianbeobachtungen wird bei oberer Culmination ($\theta - \alpha = 0°$)

[1]) Veröffentlichungen der Grossherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe. 3. Heft 1889.

$$\alpha - \alpha' = 0$$
$$\delta - \delta' = \frac{\pi[\rho]}{\rho} \sin(\varphi' - \delta)$$
$$\rho - \rho' = [\rho] \cos(\varphi' - \delta) \sin 1'',$$

bei unterer Culmination $(\theta - \alpha = 180°)$

$$\alpha - \alpha' = 0$$
$$\delta - \delta' = \frac{\pi[\rho]}{\rho} \sin(\varphi' + \delta)$$
$$\rho - \rho' = -\pi[\rho] \cos(\varphi' + \delta) \sin 1''.$$

Will man die Sonnenbreiten B aus den Beobachtungen wegschaffen, was manchmal von Nutzen sein kann, so berücksichtige man, dass der Erdmittelpunkt von der Ekliptik die Entfernung

$$-R \sin B$$

hat, wo R die Entfernung der Erde von der Sonne bedeutet. Daraus ergiebt sicht leicht

$$d\beta = -\frac{R \sin B}{\rho} \cos\beta$$

oder wenn $R = 1$ und $\sin B = B$ gesetzt wird,

$$d\beta'' = -\frac{B''}{\rho} \cos\beta.$$

Sind bei der Bahnbestimmung die Beobachtungen auf den *locus fictus* bezogen worden, so muss diese Grösse an die aus den Elementen berechneten Breiten behufs Vergleichens angebracht werden.

β) *Locus fictus.* Um die Wirkung der Parallaxe ohne Kenntniss der Distanz des Himmelskörpers von der Erde in Rechnung zu ziehen, schlägt GAUSS (Theoria motus Art. 72) vor, da die Parallaxe ja eigentlich nur die Reduction der Beobachtung vom Beobachtungsorte auf den Erdmittelpunkt betrifft und der Erdmittelpunkt in der Ekliptik liegt, anstatt des Beobachtungsortes einen fingirten Beobachtungsort *(locus fictus)* einzuführen; dieser wird dadurch erhalten, dass man den Durchschnittspunkt der wahren vom Himmelskörper zur Erde gezogenen Geraden mit der Ekliptik als fingirten Beobachtungsort wählt. Die Breite des *locus fictus* ist den gemachten Voraussetzungen gemäss gleich Null, und der Himmelskörper projicirt sich von demselben und dem Beobachtungsorte auf denselben Punkt der Himmelskugel; da indessen das Licht eine gewisse Zeit gebraucht, um vom Beobachtungsorte zum *locus fictus* zu gelangen, so muss diesem Umstande auch Rechnung getragen werden. Die Fundamentalebene ist jetzt die Ekliptik, es wird daher nothwendig sein, die diesbezüglichen Transformationen vorzunehmen. Nennt man wie früher die geocentrische Rectascension und Deklination des Beobachtungsortes θ und φ', so wird man durch vierstellige logarithmische Rechnung aus den Formeln

$$m \sin M = \sin\varphi'$$
$$m \cos M = \cos\varphi' \sin\theta$$
$$\cos b \cos l = \cos\varphi' \cos\theta$$
$$\cos b \sin l = m \cos(M - \varepsilon)$$
$$\sin b = m \sin(M - \varepsilon),$$

worin ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet, die geocentrische Länge l und Breite b des Beobachtungsortes (Nonagesimus) finden; $[\rho]$ bleibt natürlich ungeändert; nennt man $\odot_0$, B und R_0 die geocentrischen Coordinaten der Sonne, $\odot$ und R dieselben vom *locus fictus* aus gezählt, λ und β die beobachteten Längen und

Breiten des Himmelskörpers, ρ_0 die Entfernung desselben vom Beobachtungsorte, ρ die Entfernung vom *locus fictus*, so sind die heliocentrischen Coordinaten des *locus fictus*

$$-R\cos\odot, \quad -R\sin\odot,$$

die heliocentrischen Coordinaten des Erdcentrums

$$-R_0\cos\odot_0\cos B, \quad -R_0\sin\odot_0\cos B, \quad -R_0\sin B.$$

Die geocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes

$$[\rho]\cos b\cos l$$
$$[\rho]\cos b\sin l$$
$$[\rho]\sin b.$$

$[\rho]$ ist mit $\sin\pi$ zu multipliciren, um die Coordinaten homogen zu machen. Die Coordinaten des Beobachtungsortes vom *locus fictus* sind

$$(\rho-\rho_0)\cos\lambda\cos\beta$$
$$(\rho-\rho_0)\sin\lambda\cos\beta$$
$$(\rho-\rho_0)\sin\beta.$$

Daraus folgt:

$$-R\cos\odot = -(\rho-\rho_0)\cos\lambda\cos\beta - R_0\cos\odot_0\cos B + [\rho]\sin\pi\cos l\cos b$$
$$-R\sin\odot = -(\rho-\rho_0)\sin\lambda\cos\beta - R_0\sin\odot_0\cos B + [\rho]\sin\pi\sin l\cos b$$
$$0 = -(\rho-\rho_0)\sin\beta - R_0\sin B + [\rho]\sin\pi\sin b.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen den Sinus und Cosinus von $(\odot - \odot_0)$ und berücksichtigt die Kleinheit dieser Bögen, so wird

$$\odot = \odot_0 + \frac{\sin(\odot_0-\lambda)}{tang\,\beta}\left[B - \frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b\right] + \frac{[\rho]\pi}{R_0}\cos b\sin(\odot_0 - l)$$

$$R = R_0 - R_0\frac{\cos(\odot_0-\lambda)}{tang\,\beta}\left[B - \frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b\right] - [\rho]\pi\cos b\cos(\odot_0 - l).$$

Drückt man R nicht im Bogenmaasse aus und bringt den Ausdruck auf logarithmische Form, so wird in Einheiten der 7. Decimale

$$\log R = \log R_0 - M\left[\frac{\cos(\odot_0-\lambda)}{tang\,\beta}\left(B - \frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b\right) + \frac{[\rho]\pi}{R_0}\cos b\cos(\odot_0 - l)\right]$$
$$\log M = 1\cdot 32336.$$

Es erübrigt noch die Zeit zu bestimmen, welche das Licht gebraucht, um von dem Beobachtungsorte zum *locus fictus* zu gelangen.

Mit Berücksichtigung der ersten Potenzen ergiebt sich

$$\rho - \rho_0 = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b - B\right]\sin 1''$$

und damit die Correction der Beobachtungszeit

$$dt = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b - B\right] 497^s\cdot 83 \cdot \sin 1''$$

oder in Einheiten der 5. Dezimalstelle des mittleren Sonnentages

$$dt = \frac{R_0}{\sin\beta}\left[\frac{[\rho]\pi}{R_0}\sin b - B\right]\cdot C$$
$$\log C = 7\cdot 44614 - 10.$$

Diese Berechnung des *locus fictus* ist OPPOLZER's »Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten« entnommen. SCHÖNFELD hat in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 57, No. 1357, ebenfalls ein Verfahren zur Reduction auf den *locus fictus* angegeben, welches ich hier der Kürze halber übergehe, da für den praktischen Gebrauch OPPOLZER's Verfahren alles Wünschenswerthe leistet, ohne Hilfstafeln zu erfordern, welche der SCHÖNFELD'schen Abhandlung beigegeben sind.

γ) Reduction auf das mittlere Aequinoctium.

Der Ort eines Himmelskörpers, wie er aus den Händen des Beobachters hervorgeht, ist auf das scheinbare Aequinoctium der Beobachtungszeit bezogen; befreit man denselben von dem Einflusse der Aberration, so erscheint er auf das wahre Aequinoctium des Beobachtungsdatums reducirt; bringt man endlich an die Beobachtungen die Correction wegen Präcession und Nutation (letztere häufig auch Gleichung der Aequinoctialpunkte genannt) an, so ist derselbe als auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogen

Hat man die scheinbaren Längen und Breiten mit Hilfe der scheinbaren Schiefe der Ekliptik aus den scheinbaren Rectascensionen und Deklinationen abgeleitet, so genügt es, an die scheinbaren Längen, die in den verschiedenen Jahrbüchern in gleichen Intervallen gegebenen Grössen »Präcession und Nutation in Länge« mit verkehrten Zeichen anzubringen, um die mittlere Länge zu erhalten, also

$$\lambda_m = \lambda_s - (\text{Präcession} + \text{Nutation}),$$

die Breite bleibt wegen der geringen Aenderung in beiden Fällen gleich.

Zieht man es indessen vor, schon die Rectascension und Deklination von diesem Einflusse zu befreien, so geben die astronomischen Jahrbücher die Grössen

f, G und g für die Präcession und Nutation,

H, h und i für die Aberration,

mit deren Hilfe durch die Formeln

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 = f + g \sin (G + \alpha) \tan \delta$$
$$d\delta_1 + d\delta_2 = g \cos (G + \alpha)$$

die scheinbaren Rectascensionen und Deklinationen vom Einflusse der Präcession und Nutation befreit werden; ebenso durch

$$d\alpha_3 = h \sin (H + \alpha) \sec \delta$$
$$d\delta_3 = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta$$

von dem Einflusse der Aberration der Fixsterne. Diese letzten Formeln werden eigentlich nur im Falle der Kometenbeobachtungen berechnet; aber auch hier kann die Berechnung umgangen werden; giebt nämlich der Beobachter ausser der mittleren Position der Vergleichsterne bei Mikrometerbeobachtungen, auch den scheinbaren Ort derselben, sowie die Differenz

☄ — *,

Komet weniger Stern an, so genügt es, diese Differenz an den mittleren Ort des Vergleichsternes anzubringen, um denselben vom Einflusse der Präcession, Nutation und Aberration zu befreien.

Die mittlere Rectascension und Deklination lautet also:

$$\alpha_0 = \alpha - [f + g \sin (G + \alpha) \tan \delta]$$
$$\delta_0 = \delta - g \cos (G + \alpha),$$

diese Werthe werden mit der mittleren Schiefe der Ekliptik für den Jahresanfang ε in Länge und Breite verwandelt, wobei wir im Folgenden der Einfachheit wegen den Index 0 weglassen.

δ) Verwandlung der äquatorealen Coordinaten in die ekliptikalen und umgekehrt.

Die hierzu dienenden Formeln sind aus dem Dreiecke Pol des Aequators, Pol der Ekliptik, Himmelskörper leicht herzuleiten, weshalb ich mich mit der blossen Anführung derselben begnüge. Mit den bekannten Bezeichnungen ergeben sich die Ausdrücke

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon$$
$$\sin\beta = -\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon,$$

führt man den Hilfswinkel N durch die Gleichungen ein:

$$\sin N = \frac{tang\,\delta}{\sin\alpha},$$

so ist

$$tang\,\lambda = \frac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N}\,tang\,\alpha$$
$$tang\,\beta = tang\,(N-\varepsilon)\sin\lambda.$$

Bezüglich der Bestimmung des Quadranten von λ gilt die Regel, dass $\cos\lambda$ und $\cos\alpha$ gleich bezeichnet sein müssen; als Probe kann die Relation benützt werden:

$$\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha} = \frac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N}.$$

Liegt die umgekehrte Aufgabe vor, sind also Länge und Breite gegeben, Rectascension und Deklination gesucht, so rechne man

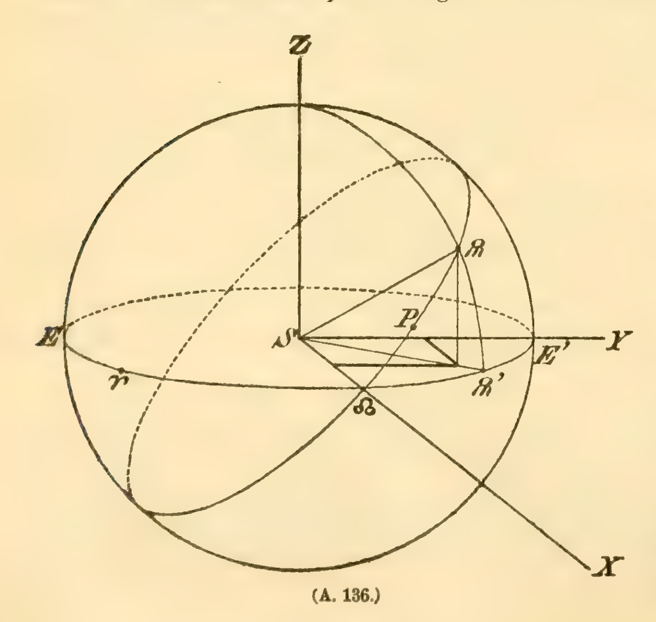
$$tang\,M = \frac{tang\,\beta}{\sin\lambda}$$
$$tang\,\alpha = \frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M}\,tang\,\lambda$$
$$tang\,\delta = tang(M+\varepsilon)\,tang\,\beta,$$

ε ist wieder die Schiefe der Ekliptik. Als Probe dient die Gleichung

$$\frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\delta\sin\alpha}{\cos\beta\sin\lambda}.$$

b) Aufstellung der Grundgleichungen des Bahnbestimmungsproblems und Berechnung der Elemente der Bahn.

Hat man auf die im vorigen Absatze gelehrte Weise die sphärischen Coordinaten des Himmelskörpers bezogen auf das mittlere Aequinoctium berechnet, so handelt es sich zunächst um Aufstellung der rechtwinkligen Coordinaten desselben.



(A. 136.)

Es sei in Fig. 136 EE' die Ebene der Ekliptik, ☊ P 𝔓 die Bahnebene des Himmelskörpers, ☊ der aufsteigende Knoten, P das Perihel, 𝔓 der Ort des Himmelskörpers. Legt man die positive X-Axe durch den Knoten, die positive Y-Axe durch den Punkt E' der Ekliptik, der die Länge $90° +$ ☊ hat, die positive Z-Axe gegen den Nordpol der Ekliptik, so ist

$$\Omega P = \omega$$
$$P \mathfrak{P} = v$$

und der Bogen

$$\Omega \mathfrak{P} = u = v + \omega$$

das sogenannte Argument der Breite; ferner ist

$$S \mathfrak{P} = r$$
$$\mathfrak{P} \mathfrak{P}' = b,$$

worin S den Ort der Sonne vorstellt. In dem rechtwinkligen, sphärischen Dreiecke $\Omega \mathfrak{P} \mathfrak{P}'$ ist, wenn Υ den Frühlingspunkt bezeichnet

$$\Omega \mathfrak{P}' = l - \Omega$$
$$\Omega \mathfrak{P} = u$$
$$\mathfrak{P} \Omega \mathfrak{P}' = i.$$

Daraus folgen die Coordinaten

$$\begin{aligned} x_0 &= r \cos b \cos (l - \Omega) = r \cos u \\ y_0 &= r \cos b \sin (l - \Omega) = r \sin u \cos i \\ z_0 &= r \sin b \qquad\qquad\quad\; = r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Dreht man das Coordinatensystem um die Z-Axe so, dass die positive X-Axe in den Frühlungspunkt fällt, so werden die Coordinaten nach bekannten Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,[\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i] \\ y_1 &= r\,[\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i] \\ z_1 &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Durch Drehung der XY-Ebene um den Winkel ε erhält man endlich die Aequatorealcoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\,[\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i] \\ y &= r\,[\cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon] \\ z &= r\,[\cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin u \sin i \cos \varepsilon]. \end{aligned}$$

Um diese Formeln zu vereinfachen setze man

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \sin a \sin A \\ - \sin \Omega \cos i &= \sin a \cos A \\ \sin \Omega \cos \varepsilon &= \sin b \sin B \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon &= \sin b \cos B \\ \sin \Omega \sin \varepsilon &= \sin c \sin C \\ \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon &= \sin c \cos C. \end{aligned}$$

Probe: $\tan i = \dfrac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}$

Die Werthe a, A, b, B, c und C haben eine bestimmte geometrische Bedeutung, die ich hier der Kürze wegen übergehe; damit werden unsere Coordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A + u) \\ y &= r \sin b \sin (B + u) \\ z &= r \sin c \sin (C + u). \end{aligned}$$

Aus Gründen der Zweckmässigkeit empfiehlt es sich, den constanten Theil der Grösse u, nämlich ω mit den Grössen A, B, C zu verbinden, sodass entsteht

$$\begin{aligned} A' &= A + \omega \\ B' &= B + \omega \\ C' &= C + \omega, \end{aligned}$$

und die Coordinaten lauten dann

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + v) \\ y &= r \sin b \sin (B' + v) \\ z &= r \sin c \sin (C' + v), \end{aligned}$$

und diese Coordinaten wollen wir zum Ausgangspunkt der weiteren Rechnung nehmen, da die anderen Formen daraus durch Specialisirung der Constanten a, b, c, A', B', C' entstehen.

Es seien also die Coordinaten des ersten Ortes

$$x_1 = r_1 \sin a \sin(A' + v_1)$$
$$y_1 = r_1 \sin b \sin(B' + v_1)$$
$$z_1 = r_1 \sin c \sin(C' + v_1),$$

und ebenso für die beiden anderen Orte durch Vertauschung des Index »1« mit »2« und »3«. Multiplicirt man die Gleichungen für x_1, x_2 und x_3 bezüglich mit $\sin(v_3 - v_2)$, $\sin(v_1 - v_3)$ und $\sin(v_2 - v_1)$, so erhält man durch Addition der Resultate

$$\frac{x_1}{r_1} \sin(v_3 - v_2) + \frac{x_2}{r_2} \sin(v_1 - v_3) + \frac{x_3}{r_3} \sin(v_2 - v_1) = 0\,^{1)}.$$

Aehnliche Relationen finden für die y und z statt. Multiplicirt man diese Gleichung mit $r_1 r_2 r_3$ und berücksichtigt, dass die doppelten Dreiecksflächen sind

$$[r_2 r_3] = r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2), \quad [r_1 r_3] = r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1), \quad [r_1 r_2] = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1),$$

so wird

$$[r_2 r_3] x_1 - [r_1 r_3] x_2 + [r_1 r_2] x_3 = 0$$

und ähnlich

$$[r_2 r_3] y_1 - [r_1 r_3] y_2 + [r_1 r_2] y_3 = 0$$
$$[r_2 r_3] z_1 - [r_1 r_3] z_2 + [r_1 r_2] z_3 = 0.$$

Diese Gleichungen sind identisch, sobald man darin für die Coordinaten die Werthe derselben einsetzt; sie repräsentiren im Grunde genommen nur die Bahnebene, die durch den Sonnenmittelpunkt geht. Setzt man aber statt der doppelten Dreiecksflächen von der Ebene unabhängige Bedingungen ein (etwa Functionen der Zwischenzeiten), so geben dieselben ein Mittel an, die heliocentrischen Entfernungen als Functionen der geocentrischen darzustellen.

Das zweite Postulat, dass die Bahnen Kegelschnitte mit der Sonne im Brennpunkte sein sollen, lässt sich durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e \cos v_1, \quad \frac{p}{r_2} = 1 + e \cos v_2, \quad \frac{p}{r_3} = 1 + e \cos v_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit $\sin(v_3 - v_2)$, $\sin(v_1 - v_3)$ und $\sin(v_2 - v_1)$ und addirt die Resultate, so wird

$$\frac{p}{r_1} \sin(v_3 - v_2) - \frac{p}{r_2} \sin(v_3 - v_1) + \frac{p}{r_3} \sin(v_2 - v_1)$$
$$= \sin(v_3 - v_2) - \sin(v_3 - v_1) + \sin(v_2 - v_1)$$
$$= 4 \sin\frac{v_3 - v_2}{2} \sin\frac{v_3 - v_1}{2} \sin\frac{v_2 - v_1}{2}.$$

Multiplicirt und dividirt man den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen mit

$$r_1^2 r_2^2 r_3^2 \cos\frac{v_3 - v_2}{2} \cos\frac{v_3 - v_1}{2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2},$$

so wird derselbe

$$\frac{[r_2 r_3] \cdot [r_1 r_3] \cdot [r_1 r_2]}{2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 \cos\frac{v_3 - v_2}{2} \cos\frac{v_3 - v_1}{2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2}}.$$

---

[1]) Nach der Formel der »Theoria motus«, Artikel 78, I.

Multiplicirt und dividirt man den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen mit

$$r_1\ r_2\ r_3,$$

so wird derselbe

$$\frac{p}{r_1 r_2 r_3}([r_2 r_3] - [r_1 r_3] + [r_1 r_2]),$$

sodass sich schliesslich ergiebt

$$p = \frac{[r_2 r_3] \cdot [r_1 r_3] \cdot [r_1 r_2]}{[r_2 r_3] - [r_1 r_3] + [r_1 r_2]} \cdot \frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos\frac{v_3 - v_2}{2} \cos\frac{v_3 - v_1}{2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2}}.$$

Ist p bestimmt, so findet man aus zwei der obigen Gleichungen

$$e \text{ und } \omega$$

Da die Argumente der Breite u_1, u_2, u_3 durch Rechnung gegeben sind, so kann man

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = u_3 - v_3$$

ermitteln.

Verbindet man die Gleichungen

$$e \cos(u_1 - \omega) = \frac{p}{r_1} - 1$$

$$e \cos(u_3 - \omega) = \frac{p}{r_3} - 1$$

durch Addition und Subtraction, so wird

$$2 e \cos\frac{u_3 - u_1}{2} \cos\left(\frac{u_3 + u_1}{2} - \omega\right) = \frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_3} - 2$$

$$2 e \sin\frac{u_3 - u_1}{2} \sin\left(\frac{u_3 + u_1}{2} - \omega\right) = \frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_3}.$$

Setzt man

$$\tang \psi_2 = \sqrt{\frac{r_3}{r_1}},$$

so wird

$$\frac{2 r_1 r_3}{r_1 - r_3} = \tang 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}$$

$$\frac{2 r_1 r_3}{r_1 + r_3} = \sin 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}$$

und damit

$$e \sin\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \frac{p}{\tang 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}} \frac{1}{\sin\frac{u_3 - u_1}{2}}$$

$$e \cos\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \left(\frac{p}{\sin 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}} - 1\right) \frac{1}{\cos\frac{u_3 - u_1}{2}}.$$

Es handelt sich nun zunächst darum, die geocentrischen Distanzen zu finden; die heliocentrischen Distanzen lassen sich dann leicht als Functionen der geocentrischen darstellen, und da sich überdies die Grössen

$$v_3 - v_1,\ v_2 - v_1 \text{ und } v_3 - v_2,$$

wie später gezeigt wird, unschwer ergeben, so unterliegt die Bestimmung der Elemente, welche von der Bahnlage und Bahngrösse abhängen, keinen Schwierigkeiten.

Setzen wir die Masse des Himmelskörpers $= 0$ im Vergleich zur Sonnenmasse und berücksichtigen, dass in der Ellipse

$$p = a(1 - e^2),$$

so ergeben sich, vermöge der Gleichung für die doppelten Sectorflächen die Werthe

$$\int_{v_1}^{v_2} r^2\, dv = k(t_2 - t_1)\sqrt{p} = \tau_3 \sqrt{p}$$
$$\int_{v_1}^{v_3} r^2\, dv = k(t_3 - t_1)\sqrt{p} = \tau_2 \sqrt{p}$$
$$\int_{v_2}^{v_3} r^2\, dv = k(t_3 - t_2)\sqrt{p} = \tau_1 \sqrt{p}$$

Andrerseits findet man, wenn für den Augenblick die Ebene der Bahn als Fundamentalebene angenommen wird

$$[r_1 r_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$[r_1 r_3] = x_1 y_3 - x_3 y_1$$
$$[r_2 r_3] = x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Es ist aber nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze

$$x_1 = x_2 - \frac{dx_2}{d\tau} \cdot \tau_3 + \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} \cdot \frac{\tau_3^2}{1 \cdot 2} \cdots$$
$$y_1 = y_2 - \frac{dy_2}{d\tau} \cdot \tau_3 + \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} \cdot \frac{\tau_3^2}{1 \cdot 2} \cdots$$
$$x_3 = x_2 + \frac{dx_2}{d\tau} \cdot \tau_1 + \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} \cdot \frac{\tau_1}{1 \cdot 2} \cdots$$
$$y_3 = y_2 + \frac{dy_2}{d\tau} \cdot \tau_1 + \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} \cdot \frac{\tau_1^2}{1 \cdot 2} \cdots$$

worin

$$d\tau = k\,dt.$$

Um die Differentialquotienten zu erhalten, berücksichtigen wir, dass unter Voraussetzung der Bahnebene als Fundamentalebene die Gleichungen gelten

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 \cdot \frac{y}{r^3},$$

daher

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} = -\frac{x_2}{r_2^3} \qquad \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} = -\frac{y_2}{r_2^3},$$

woraus sich durch Differentiation ergiebt

$$\frac{d^3 x_2}{d\tau^3} = 3\frac{x_2}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} - \frac{1}{r_2^3}\frac{dx_2}{d\tau}$$
$$\frac{d^3 y_2}{d\tau^3} = 3\frac{y_2}{r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} - \frac{1}{r_2^3}\frac{dy_2}{d\tau}$$

u. s. w.

Man kann also setzen für $\tau = -\tau_3$ und $\tau = +\tau_1$

$$x_1 = a_1 x_2 - b_1 \frac{dx_2}{d\tau_3} \qquad y_1 = a_1 y_2 - b_1 \frac{dy_2}{d\tau_3}$$
$$x_3 = a_3 x_2 + b_3 \frac{dx_2}{d\tau_1} \qquad y_3 = a_3 y_2 + b_3 \frac{dy_2}{d\tau_1},$$

worin die Grössen a_1, b_1, a_3, b_3 die folgende Bedeutung haben:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} \cdots\cdots$$

$$b_1 = \tau_3 - \frac{1}{6}\frac{\tau_3^3}{r_2^3} \cdots\cdots$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2}\frac{\tau_1^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt}$$

$$b_3 = \tau_1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^3}{r_1^3} \cdots\cdots$$

und somit nahe

$$[r_1 r_2] = b_1\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right)$$

$$[r_2 r_3] = b_3\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right)$$

$$[r_1 r_3] = (a_1 b_3 + a_3 b_1)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Es ist aber

$$x dy - y dx = r^2 dv = k\sqrt{p}\,dt,$$

also

$$[r_1 r_2] = b_1\sqrt{p}$$

$$[r_2 r_3] = b_3\sqrt{p}$$

$$[r_1 r_3] = (a_1 b_3 + a_3 b_1)\sqrt{p}.$$

Berücksichtigt man die Gleichung

$$\tau_1 + \tau_3 = \tau_2,$$

so wird

$$a_1 b_3 + a_3 b_1 = \tau_2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_2^2}{r_2^4}(\tau_1 - \tau_3)\frac{dr_2}{dt} \cdots\cdots\right)$$

und damit der Ausdruck im Nenner des Parameters

$$[r_1 r_2] - [r_1 r_3] + [r_2 r_3] = \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{2 r_2^3}\sqrt{p}\left(1 - \frac{\tau_1 - \tau_3}{r_2}\frac{dr_2}{dt} \cdots\cdots\right).$$

Dies ist aber offenbar nichts anderes, als die Fläche des kleinen Dreieckes, das von den drei Sehnen s_1, s_2 und s_3, welche bezüglich die Endpunkte von $r_2 r_3$, $r_1 r_3$ und $r_1 r_2$ verbinden, eingeschlossen ist; dasselbe ist wie ersichtlich dritter Ordnung, wenn τ eine Grösse erster Ordnung vorstellt; es müssen also in den Dreiecksflächen mindestens noch Grössen dritter Ordnung mitgenommen werden, weil sonst wegen

$$\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$$

auch die Bedingung gelten würde

$$[r_1 r_2] + [r_2 r_3] = [r_1 r_3],$$

was einer geraden Linie als Bahn oder $p = \infty$ entspricht. Da im weiteren Verlaufe nur die Verhältnisse der Dreiecksflächen auftreten, so sollen dieselben hier Platz finden. Es ist

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3} - \frac{1}{4}\frac{\tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} \cdots\cdots\right),$$

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_3(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} \cdots\right)$$

und endlich durch Addition

$$\frac{[r_1 r_2] + [r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} \cdots\cdots$$

Setzt man für die Verhältnisse der Dreiecksflächen

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_3 \quad \text{und} \quad \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1$$

und drückt man ferner die heliocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers durch die geocentrischen desselben und die heliocentrischen Coordinaten der Erde aus, setzt also

$$\begin{array}{lll} x_1 = \Delta_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1 & y_1 = \Delta_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1 & z_1 = \Delta_1 \operatorname{tang}\beta_1 \\ x_2 = \Delta_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2 & y_2 = \Delta_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2 & z_2 = \Delta_2 \operatorname{tang}\beta_2 \\ x_3 = \Delta_3 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3 & y_3 = \Delta_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3 & z_3 = \Delta_3 \operatorname{tang}\beta_3 \end{array}$$

so werden die Bedingungen der Ebene

$$\begin{array}{l} 0 = n_1(\Delta_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1) - (\Delta_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2) + n_3(\Delta_3 \cos\lambda_3 + R_3 \cos L_3) \\ 0 = n_1(\Delta_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1) - (\Delta_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2) + n_3(\Delta_3 \sin\lambda_3 + R_3 \sin L_3) \\ 0 = n_1 \Delta_1 \operatorname{tang}\beta_1 \qquad - \Delta_2 \operatorname{tang}\beta_2 \qquad + n_3 \operatorname{tang}\beta_3 \end{array}$$

Die Auflösung geschieht durch successive Näherungen; es wird sich dementsprechend empfehlen, nur ein Δ zu bestimmen und erst, wenn man die Versuche beendet hat, die beiden anderen curtirten Distanzen zu berechnen. Wir werden also zunächst aus obigen Gleichungen Δ_1 und Δ_3 eliminiren; multipliciren wir die drei Gleichungen bezüglich mit

$$\begin{array}{c} \operatorname{tang}\beta_1 \sin\lambda_3 - \operatorname{tang}\beta_3 \sin\lambda_1 \\ \operatorname{tang}\beta_3 \cos\lambda_1 - \operatorname{tang}\beta_1 \cos\lambda_3 \\ \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \end{array}$$

und addiren die Resultate, so wird

$$\begin{array}{l} 0 = n_1 R_1 [\operatorname{tang}\beta_1 \sin(\lambda_3 - L_1) - \operatorname{tang}\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_1)] - \\ \quad - R_2 [\operatorname{tang}\beta_1 \sin(\lambda_3 - L_2) - \operatorname{tang}\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_2)] + \\ \quad + n_3 R_3 [\operatorname{tang}\beta_1 \sin(\lambda_3 - L_3) - \operatorname{tang}\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_3)] - \\ \quad - \Delta_2 [\operatorname{tang}\beta_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) - \operatorname{tang}\beta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tang}\beta_3 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)]. \end{array}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes führen wir den aufsteigenden Knoten K und die Neigung J (I stets kleiner als 90^0) jenes grössten Kreises ein, der den ersten und dritten geocentrischen Ort verbindet; die entsprechenden Relationen sind:

$$\begin{array}{l} \sin(\lambda_1 - K) \operatorname{tang} J = \operatorname{tang}\beta_1 \\ \sin(\lambda_3 - K) \operatorname{tang} J = \operatorname{tang}\beta_3. \end{array} \qquad (☾)$$

Berücksichtigt man ferner, dass für jeden beliebigen Winkel w die Gleichung gilt

$$\begin{array}{l} \sin(\lambda_3 - w) \sin(\lambda_1 - K) - \sin(\lambda_1 - w) \sin(\lambda_3 - K) = \\ = \frac{1}{2} \cos[(\lambda_3 - \lambda_1) - w + K] - \frac{1}{2} \cos[(\lambda_3 - \lambda_1) + w - K] = \\ = \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \sin(w - K) \end{array}$$

so wird der obige Ausdruck nach Substitution der Grössen $\operatorname{tang}\beta_1$ und $\operatorname{tang}\beta_3$

$$\begin{array}{l} 0 = n_1 R_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \sin(L_1 - K) \operatorname{tang} J - \\ \quad - R_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \sin(L_2 - K) \operatorname{tang} J + \\ \quad + n_3 R_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \sin(L_3 - K) \operatorname{tang} J - \\ \quad - \Delta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) [\sin(\lambda_2 - K) \operatorname{tang} J - \operatorname{tang}\beta_2] \end{array}$$

Kürzt man durch den gemeinschaftlichen Faktor $\sin(\lambda_3 - \lambda_1)$ ab und setzt noch

$$\operatorname{tang}\beta_0 = \sin(\lambda_2 - K) \operatorname{tang} J,$$

so erhält man

$$\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\cos\beta_2 \cos\beta_0 \operatorname{tang} J} \Delta_2 = R_2 \sin(L_2 - K) - n_1 R_1 \sin(L_1 - K) - n_3 R_3 \sin(L_3 - K).$$

Durch ähnliche Reihenentwickelungen nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze, wie dieselben früher zur Ermittelung von x_1, x_3, y_1, y_3 aus x_2, y_2 angewendet wurden, lässt sich nachweisen, dass der Coëfficient von Δ_2 von dritter, wenn nicht höherer Ordnung der Zwischenzeiten in der letzten Gleichung ist. Dagegen sind die Coëfficienten von $R_1 n_1$, R_2 und $R_3 n_3$, besondere Fälle ausgenommen, erster Ordnung. Da nun Δ_2 nullter Ordnung ist, so ist klar, dass man in n_1 und n_3 mindestens die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigen muss, welche aus den Gliedern dritter Ordnung der Dreiecksflächen resultiren, wie dies schon bei Ermittelung des Werthes

$$[r_1 r_2] - [r_1 r_3] + [r_2 r_3]$$

durch die Zwischenzeiten angedeutet wurde. In der That bereitet dies keine Schwierigkeit, da der im Nenner auftretende Werth von r_2 auf ziemlich einfache Weise mit Δ_2 zusammenhängt. OPPOLZER hat in der von ihm angegebenen Methode noch das nächste Glied mit berücksichtigt, indem er setzt

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) - \frac{1}{2}\frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}(r_3 - r_1)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{r_3 - r_1}{\tau_2}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich unschwer auffinden. Indessen scheint es, als ob für die in der Praxis auftretenden Fälle die Genauigkeit hier zu weit getrieben sei. Bei den meisten Bahnbestimmungen werden, wofern nicht genäherte Werthe der Radienvectoren bekannt sind, die Zwischenzeiten so gering sein, dass man mit den früher entwickelten Näherungen auskommt, es sei denn, dass die Beobachtungen selbst eine geänderte und genauere Form der Bahnbestimmung fordern.

Kehren wir wieder zu unserem Ausdrucke

$$n_1 R_1 \sin(L_1 - K) + n_3 R_3 \sin(L_3 - K)$$

zurück und substituiren darin n_1 und n_3 bis auf Glieder zweiter Ordnung, so wird

$$\frac{\tau_1 R_1 \sin(L_1 - K) + \tau_3 R_3 \sin(L_3 - K)}{\tau_2} +$$
$$+ \frac{\tau_1 \tau_3}{6 \tau_2 r_2^3}[(\tau_1 + \tau_2) R_1 \sin(L_1 - K) + (\tau_2 + \tau_3) R_3 \sin(L_3 - K)]$$

oder

$$\frac{\tau_1 R_1 \sin(L_1 - K) + \tau_3 R_3 \sin(L_3 - K)}{\tau_2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3}\right) +$$
$$+ \frac{\tau_1 \tau_3}{6 \tau_2 r_2^3}(\tau_1 - \tau_3)[R_3 \sin(L_3 - K) - R_1 \sin(L_1 - K)].$$

Der Klammerausdruck des zweiten Theiles ist mindestens erster Ordnung, daher der zweite Theil mindestens dritter Ordnung; man kann denselben daher ohne Weiteres vernachlässigen.

Behält man also nur den ersten Theil bei und schreibt denselben unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3,$$

so wird

$$\frac{R_1 \sin(L_1 - K) + \frac{\tau_3}{\tau_1} R_3 \sin(L_3 - K)}{1 + \frac{\tau_3}{\tau_1}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_1 \tau_3}{r_2^3}\right)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der strengen Form

$$\frac{R_1 \sin(L_1 - K) + \frac{n_3}{n_1} R_3 \sin(L_3 - K)}{1 + \frac{n_3}{n_1}} (n_1 + n_3),$$

so sieht man, dass die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, wenn man in erster Näherung setzt

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \quad \text{und} \quad n_1 + n_3 = 1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2 r_2^3},$$

so dass es nach den Reihenentwickelungen darauf ankommt, von den Reihen nur die ersten Glieder mitzunehmen.

Jetzt wird es auch einleuchtend, warum GAUSS in seiner Methode, um bei Näherungen den genäherten Ausdruck der strengen Form so nahe als möglich zu bringen und dadurch die Verbesserungen auf das einfachste zu gestalten, als zu verbessernde Grössen annimmt.

$$P = \frac{n_3}{n_1} \qquad Q = (n_1 + n_3 - 1)\, 2 r_2^3,$$

wofür er in erster Näherung setzt

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \qquad Q = \tau_1 \tau_3$$ [1].

Setzt man, um diese Werthe zu verbessern

$$y'''[r_1 r_2] = \tau_3 \sqrt{p} \qquad y''[r_1 r_3] = \tau_2 \sqrt{p} \qquad y'[r_2 r_3] = \tau_1 \sqrt{p}$$

und berücksichtigt, dass

$$p = \frac{[r_1 r_2][r_2 r_3]}{n_1 + n_3 - 1} \; \frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos \frac{v_3 - v_2}{2} \cos \frac{v_2 - v_1}{2} \cos \frac{v_3 - v_1}{2}},$$

ist, und ferner

$$[r_1 r_2] \cdot [r_2 r_3] = \frac{\tau_1 \tau_3 p}{y' y'''},$$

so wird

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \frac{y'}{y'''} \qquad Q = \frac{\tau_1 \tau_3}{y' y'''} \cdot \frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos \frac{v_3 - v_2}{2} \cos \frac{v_2 - v_1}{2} \cos \frac{v_3 - v_1}{2}}.$$

Um die Rechnung übersichtlich zu gestalten, setze man

$$a_0 = \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\tang J \cdot \cos \beta_0}$$

$$b = \frac{R_1 \sin(L_1 - K)}{a_0}$$

$$c = \frac{R_2 \sin(L_2 - K)}{a_0}$$

$$d = \frac{R_3 \sin(L_3 - K)}{a_0},$$

damit wird

$$\Delta_2 \sec \beta_2 = c - \frac{b + Pd}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right).$$

[1]) Es mag hier angeführt werden, dass V. KNORRE in einer Abhandlung Astron. Nachr. Bd. 81, No. 1933 und 1934 (1873) die GAUSS'schen Grössen P und Q auf eine Form gebracht hat, die eine successive Verbesserung dieser Grössen durch Differentialformeln ermöglicht.

Betrachtet man das Dreieck Erde, Sonne, Himmelskörper und nennt δ_2' den äusseren Winkel des Dreieckes an der Erde, so wird

$$r_2^2 = R_2^2 + 2\frac{\Delta_2 R_2}{\cos\beta_2}\cos\delta'_2 + \frac{\Delta_2^2}{\cos^2\beta_2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels δ_2' (Supplement der Elongation des Himmelskörpers von der Sonne)[1] dienen die Gleichungen

$$\tang w_2 = \frac{\tang\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$

$$\tang\delta_2' = \frac{\tang(\lambda_2 - L_2)}{\cos w_2}.$$

δ_2' ist immer kleiner als 180° und es muss die Relation gelten

$$\cos\delta_2' = \cos\beta_2\cos(\lambda_2 - L_2).$$

Löst man die quadratische Gleichung nach $\frac{\Delta_2}{\cos\beta_2}$ auf, so wird

$$\frac{\Delta_2}{\cos\beta_2} = -R_2\cos\delta_2' \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2\sin^2\delta_2'}.$$

Substituirt man

$$c_0 = \frac{b + dP}{1 + P}$$

$$k_0 = c - c_0$$

$$l_0 = \frac{c_0 Q}{2},$$

so reducirt sich die Auflösung auf die beiden Gleichungen

$$\frac{\Delta_2}{\cos\beta_2} = k_0 - \frac{l_0}{r_2^3}$$

$$\frac{\Delta_2}{\cos\beta_2} = -R_2\cos\delta_2' \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2\sin^2\delta_2'}.$$

Nach Wegschaffung des Wurzelausdruckes resultirt hieraus eine Gleichung 8. Grades in r_2 von der Form

$$r_2^8 - [(k_0 + R_2\cos\delta_2')^2 + R_2^2\sin^2\delta_2']\,r_2^6 + 2l_0(k_0 + R_2\cos\delta_2')\,r_2^3 - l_0^2 = 0.$$

Setzen wir

$$R_2\sin\delta_2' = \mu\sin q$$

$$k_0 + R_2\cos\delta_2' = \mu\cos q,$$

so wird

$$r_2^8 - \mu^2 r_2^6 + 2l_0\mu\cos q\, r_2^3 - l_0^2 = 0$$

oder

$$r_2^8 = (\mu r_2^3 - l_0\cos q)^2 + l_0^2\sin^2 q.$$

Substituirt man also noch

$$\mu r_2^3 - l_0\cos q = r_2^4\cos\zeta$$

$$l_0\sin q = r_2^4\sin\zeta,$$

so folgt durch Elimination von r_2^4

$$0 = \mu r_2^3\sin\zeta - l_0\sin(\zeta + q),$$

oder wenn man l_0 einsetzt

$$\frac{\mu}{r_2} = \frac{\sin(\zeta + q)}{\sin q}.$$

[1] Wir werden diesem Winkel respective seinem Supplemente bei der Behandlung des Kometenproblemes wieder begegnen, wo er die Bezeichnung ψ führt.

Berücksichtigt man die Gleichung

$$\mu \sin q = R_2 \sin \delta_2',$$

so wird

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta_2'}{\sin(\zeta + q)}$$

woraus augenblicklich zu ersehen ist, dass

$$\zeta + q = z',$$

und z' der Winkel am Himmelskörper in dem Dreiecke Sonne, Erde, Himmelskörper ist. Wir erhalten endlich zur Bestimmung von ζ die Gleichung

$$\sin \zeta = \frac{l_0}{\mu^4 \sin^3 q} \sin^4(\zeta + q)$$

oder

$$\sin(z' - q) = m \sin^4 z',$$

wenn man setzt

$$m = \frac{l_0}{\mu R_2^3 \sin^3 \delta_2'}.$$

m soll immer positiv sein, weil es bei der Wahl des Quadranten von μ immer möglich ist, den Winkel q so zu wählen, dass μ gleichbezeichnet ist mit l_0, und $\sin \delta_2'$ naturgemäss positiv ist. Es folgt ferner aus der geometrischen Bedeutung von z', dass nur solche Wurzeln zulässig sind, für welche $\sin z'$ positiv und $z' < \delta_2'$, weil wegen

$$\frac{\Delta_2}{\cos \beta_2} = \frac{R_2 \sin(\delta_2' - z')}{\sin z'}$$

$\sin(\delta_2' - z')$ nicht negativ sein darf. Es sind also alle negativen und selbstverständlich auch die Wurzeln von z' ausgeschlossen, für welche Δ_2 imaginär wird, und ausserdem von den positiven jene, für welche $z' > \delta_2'$ wird.

Aus der Natur des Problems folgt unmittelbar, dass eine der Wurzeln z' stets gleich oder nahe gleich δ_2' wird; denn die Bedingung der Ebene des Kegelschnittes und der constanten Flächengeschwindigkeit gilt auch für die Erdbahn. Die Beobachtungen geben nur die Richtungslinien an und gelten deshalb auch für Orte, welche den bezüglichen Beobachtungsorten entsprechen. Die Gleichungen müssten also durch die Werthe

$$\Delta_2 = 0 \quad \text{und} \quad z' = \delta_2'$$

strenge erfüllt werden, wenn man nur die Grössen P und Q der Erdbahn entlehnt, also setzt

$$P = \frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}$$

$$Q = 2\left(\frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1) + R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)} - 1\right) R_2^3.$$

Dann wird wegen der Bedingung der Ebene

$$c - c_0\left(1 + \frac{Q}{2 R_2^3}\right) = 0$$

und ferner

$$k_0 = \frac{l_0}{R_2^3}$$

$$\Delta_2 = 0.$$

Wir gehen nun zur Discussion der Gleichung

$$m \sin^4 z = \sin(z - q)$$

über. Setzen wir

$$1)\ y = m \sin^4 z$$

$$2)\ y = \sin(z - q),$$

so repräsentirt die Gleichung (2) eine Sinuslinie, die von $z = q$ bis $z = 180° + q$ positive Ordinaten hat.

Die Gleichung (1) dagegen ist der Repräsentant einer Curve vierter Ordnung, welche nur positive Ordinaten hat. Nimmt man zunächst m so gross an, dass schon bei $z = q$ die erste Curve ausserhalb der zweiten sich befindet, und bis $z = 90° + q$ auch ausserhalb derselben bleibt, so wird nur einmal ein Durchschnitt bei $z < 180°$ erfolgen; in diesem Falle ist für $\sin z$ nur ein positiver Werth möglich; vermindert man jetzt m, so wird endlich einmal der Fall eintreten, dass die Curve 4. Ordnung die Sinuscurve in einem Punkte von aussen berührt; zwei imaginäre Wurzeln verwandeln sich dann in zwei gleiche Wurzeln und die Gleichung erhält von jetzt an drei positive reelle Wurzeln; diese Wurzelwerthe treten immer weiter auseinander, bis der eine sich mit der positiven reellen Wurzel in der Nähe von 180° zu zwei gleichen Wurzeln vereinigt. Die Curve 4. Ordnung berührt dann die Sinuscurve von innen. Im weiteren Verlaufe werden diese zwei Wurzeln imaginär und es resultirt wiederum nur ein positiver reeller Werth.

Es ist aber nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze, wenn z_0 einen bestimmten Werth bedeutet

$$y = m \sin^4 z_0 + 4 m \sin^3 z_0 \cos z_0 \Delta z_0 + (12 m \sin^2 z_0 \cos^2 z_0 - 4 m \sin^4 z_0) \frac{1}{2} \Delta z_0^2 \ldots .$$

$$y' = \sin(z_0 - q) + \cos(z_0 - q) \Delta z_0 - \sin(z_0 - q) \frac{1}{2} \Delta z_0^2 \ldots .$$

Daraus folgt

$$y - y' = [m \sin^4 z_0 - \sin(z_0 - q)] + [4 m \sin^3 z_0 \cos z_0 - \cos(z_0 - q)] \Delta z_0 +$$
$$+ [12 m \sin^2 z_0 \cos^2 z_0 - 4 m \sin^4 z_0 + \sin(z_0 - q)] \frac{1}{2} \Delta z_0^2 \ldots .$$

Ist nun z_0 ein Schnittpunkt der beiden Curven also

$$m \sin^4 z_0 - \sin(z_0 - q) = 0,$$

so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$y - y' = \frac{3 \sin(2 z_0 - q) - 5 \sin q}{2 \sin z_0} \Delta z_0 +$$
$$+ \left(3 \left[\frac{3 \sin(2 z_0 - q) - 5 \sin q}{2 \sin z_0}\right] \frac{\cos z_0}{\sin z_0} + \frac{3 \cos(2 z_0 - q)}{\sin z_0}\right) \frac{1}{2} \Delta z_0^2 \ldots .$$

Soll überdies eine Berührung stattfinden, so muss der Coëfficient von Δz_0 gleich Null werden, also

$$\sin(2 z_0 - q) = \frac{5}{3} \sin q$$

und der Ausdruck $y - y'$ wird

$$y - y' = \frac{3 \cos(2 z_0 - q)}{2 \sin z_0} \Delta z_0^2 \ldots .$$

Die Berührung wird eine äussere oder innere, je nachdem

$$2 z_0 - q \lesseqgtr 90°$$

wird, und kann nur dann stattfinden, wenn

$$\sin q < \pm \frac{3}{5}$$

oder

$$q < \pm 36° \, 52' \cdot 2.$$

Ausserhalb dieser Grenzen sind für jedes m sechs imaginäre Wurzeln und eine der Erdbahn angehörige positive reelle.

Bestimmt man den spitzen Winkel W aus der Gleichung

$$\sin W = \frac{5}{3} \sin q\,,$$

so ist für den Punkt der äusseren Berührung

$$2 z_0 - q = W \qquad z_0 = \frac{W + q}{2}$$

und das zugehörige

$$m' = \frac{\sin (z_0 - q)}{\sin^4 z_0} = \frac{\sin \frac{1}{2} (W - q)}{\sin^4 \frac{1}{2} (W + q)}\,,$$

für den Punkt der inneren Berührung wird

$$2 z_0 - q = 180° - W \qquad z_0 = 90° - \frac{1}{2} (W - q)$$

und damit

$$m'' = \frac{\sin (z_0 - q)}{\sin^4 z_0} = \frac{\cos \frac{1}{2} (W + q)}{\cos^4 \frac{1}{2} (W - q)}\,.$$

Nur innerhalb dieser beiden Werthe von m' und m'' werden drei reelle, positive Wurzeln möglich sein.

Allein selbst in diesem Falle ist wegen

$$z' < \delta_2'$$

die Anzahl der Lösungen beschränkt. Nennt man die zulässigen Wurzeln der Grösse nach geordnet

$$z', z'', z''',$$

so wird, wenn

$$z' = \delta_2'$$

oder wenigstens der Grösse nahe ist, eine Bahn nicht möglich sein wegen der Gleichung

$$\frac{\Delta_2}{\cos \beta_2} = \frac{R_2 \sin (\delta_2 - z')}{\sin z'}\,,$$

da $\delta_2' - z''$ und $\delta_2' - z'''$ und die Sinus derselben negativ sind, was mit der Bedeutung von Δ_2 unvereinbar ist.

Ist z'' gleich oder mindestens nahe δ_2', so ist z'' die der Erdbahn entsprechende Lösung, und z' gilt für eine Bahn.

Ist endlich z''' gleich oder nahe gleich δ_2', so tritt der Fall einer doppelten Lösung ein.

Da die Planeten meist in der Nähe der Opposition entdeckt werden (δ_2' nahe $= 0°$), so wird dieser Fall fast nie eintreten, und ebenfalls nur selten für $\delta_2' < 90°$. Bei Kometen kommt der Fall einer doppelten Bahnbestimmung wegen $\delta_2' > 90°$ doch mitunter vor. Zwei Beispiele hierfür hat ENCKE in den »Astronom. Nachrichten«, Bd. 27, No. 640 und 641 (1848) angeführt. Für den Kometen von 1843 war nach SANTINI (»Astronomische Nachrichten«, No. 489) bei

$$\delta_2' = 102° \, 24' \, 31'' \qquad q = + 29° \, 39' \, 45''$$

die aufzulösende Gleichung

$$\overline{9{\cdot}98205} \sin^4 z = \sin (z - 29° \, 39' \, 45'')$$ [1].

[1]) Die überstrichene Zahl bedeutet einen Logarithmus.

Der Coëfficient m liegt, wie man sich aus der beigegebenen Tafel überzeugen kann, zwischen m' und m'', und die Gleichung giebt

$$z' = 36°\,40'\,45'' \qquad z'' = 54°\,12'\,47'' \qquad z''' = 97°\,33'\,49''.$$

Wiewohl der Werth z''', welcher δ_2' am nächsten liegt, noch ziemlich davon abweicht, so muss man dies doch nicht allzusehr in die Wagschale legen, da die berechnete Bahn noch sehr ungenau war.

Bei dem Kometen von 1846 fand sich

$$\delta_2' = 138°\,30'\,55'' \qquad q = -\,32°\,57'\,11''$$

und

$$\overline{9{\cdot}90482}\; sin^4 z = sin\,(z + 32°\,57'\,11''),$$

also da $log\, m$ wieder zwischen $log\, m'$ und $log\, m''$ liegt

$$z' = 94°\,34'\,57'' \qquad z'' = 118°\,55'\,45'' \qquad z''' = 137°\,9'\,52'',$$

also wieder zwei Lösungen; bei dieser Zweideutigkeit müssen erst spätere Beobachtungen über den richtigen Werth entscheiden. Es ist selbstverständlich, dass die ganze angestellte Betrachtung auch für ein negatives q gilt, also für die Gleichung

$$m\, sin^4 z = sin\,(z + q).$$

Abgekürzte Tafel zur Bestimmung mehrfacher Lösungen von z' nach Astron. Nachr., Bd. 27, No. 641.

q	$lg\, m'$	$lg\, m''$	z'		z''		z'''		z''''	
			m'	m''	m'	m''	m'	m''	m'	m''
−36·°9	9·844	9·844	116°·6	116°·6	116°·6	116°·6	116°·6	116·6	326°·8	326°·8
36·0	9·860	9·855	104·3	111·2	122·8	111·2	122·8	127·5	327·5	327·4
33·0	9·929	9·886	88·9	106·1	130·9	106·1	130·9	138·4	330·0	329·8
30·0	0·017	9·909	78·0	103·2	136·8	103·2	136·8	144·9	332·7	332·2
27·0	0·123	9·929	68·5	101·1	141·9	101·1	141·9	149·9	335·3	334·6
24·0	0·250	9·945	59·8	99·3	146·7	99·3	146·7	154·2	338·0	337·1
21·0	0·401	9·959	51·7	97·8	151·2	97·8	151·2	158·0	340·7	339·7
18·0	0·583	9·970	43·9	96·5	155·5	96·5	155·5	161·5	343·4	342·4
15·0	0·805	9·980	36·3	95·3	159·7	95·3	159·7	164·7	346·2	345·2
12·0	1·082	9·987	28·8	94·1	163·9	94·1	163·9	167·9	348·9	348·1
9·0	1·447	9·993	21·5	93·1	167·9	93·1	167·9	171·0	351·7	351·0
6·0	1·969	9·997	14·3	92·0	172·0	92·0	172·0	174·0	354·5	354·0
− 3·0	2·868	9·999	7·1	91·0	176·0	91·0	176·0	177·0	357·2	357·0
0·0	∞	0·000	0·0	90·0	180·0	90·0	180·0	180·0	0·0	0·0
			0·0	0·0	0·0	90·0	180·0	90·0	180·0	180·0
+ 3·0	2·868	9·999	4·0	3·0	4·0	89·0	172·9	89·0	182·8	183·0
6·0	1·969	9·997	8·0	6·0	8·0	88·0	165·7	88·0	185·5	186·0
9·0	1·447	9·993	12·1	9·0	12·1	86·9	158·5	86·9	188·3	189·0
12·0	1·082	9·987	16·1	12·1	16·1	85·9	151·2	85·9	191·1	191·9
15·0	0·805	9·980	20·3	15·3	20·3	84·7	143·7	84·7	193·8	194·8
18·0	0·583	9·970	24·5	18·5	24·5	83·5	136·2	83·5	196·6	197·6
21·0	0·401	9·959	28·8	22·0	28·8	82·2	128·3	82·2	199·3	200·3
24·0	0·250	9·945	33·3	25·8	33·3	80·7	120·2	80·7	202·0	202·9
27·0	0·123	9·929	38·1	30·1	38·1	78·9	111·5	78·9	204·7	205·4
30·0	0·017	9·909	43·2	35·1	43·2	76·8	102·0	76·8	207·3	207·8
33·0	9·929	9·886	49·1	41·6	49·1	73·9	91·1	73·9	210·0	210·2
36·0	9·860	9·855	57·2	52·5	57·2	68·8	75·7	68·8	212·5	212·6
36·9	9·844	9·844	63·4	63·4	63·4	63·4	63·4	63·4	213·3	213·3

Die Auflösung der Gleichung

$$m \sin^4 z = \sin (z \pm q)$$

geschieht durch Versuche; dieselbe bietet keine Schwierigkeiten dar; bei den kleinen Planeten, die in der Nähe der Opposition entdeckt werden, wird man für z links vom Gleichheitszeichen in erster Näherung $\pm q$ setzen können, so dass aus

$$m \sin^4 q = \sin (z \pm q)$$

ein erster genäherter Werth von z folgt, mit dem weitere Versuche angestellt werden können. Bei Kometen hingegen wird aus der ersten parabolischen Bahn ein genähertes r_2 vorliegen, so dass die Bestimmung eines ersten genäherten Werthes von z vollends keinen Schwierigkeiten unterliegt.

In der Abhandlung »Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen« (Sitzungsberichte der »sächsischen Akademie der Wissenschaften« 1863) findet HANSEN für den mittleren Radiusvector r_2 die folgende Gleichung (pag. 98).

$$[A - C + P(B - C) - K(1 + P)\Delta_2 \cos \beta_2]\, r_2^3 + \frac{Q}{2}(A + BP) = 0.$$

Darin sind P und Q die bekannten Grössen und

$$A = R_1\, [\tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - L_1) - \tan \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_1)]$$
$$B = R_3\, [\tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - L_3) - \tan \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_3)]$$
$$C = R_2\, [\tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - L_2) - \tan \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_2)]$$
$$K = \tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) - \tan \beta_2 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) + \tan \beta_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Wir wollen diesen Ausdruck, der sich nur wenig von dem früher angeführten unterscheidet, zur Discussion der Ausnahmefälle seiner Uebersichtlichkeit wegen verwenden. Zunächst betrachtet HANSEN den Fall

$$K = 0$$

und findet,

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{\frac{Q}{2}(A + BP)}{C - A + P(C - B)}}.$$

A, B und C sind im allgemeinen zweiter Ordnung. In diesem Falle liegen die Beobachtungen wegen

$$K = 0$$

in einem grössten Kreise.

Wird auch

$$C = 0,$$

d. h. liegt der mittlere Erd- oder Sonnenort in demselben grössten Kreise, so wird

$$(A + BP)\left(r_2^3 + \frac{Q}{2}\right) = 0.$$

Da der zweite Faktor in diesem Ausdrucke nie gleich Null werden kann, so ist eine Bestimmung von r_2 unmöglich. Die Bedingung

$$A + BP$$

giebt nach Substitution der Werthe für A und B

$$P = \frac{R_1}{R_3}\,\frac{\tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - L_1) - \tan \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_1)}{\tan \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_3) - \tan \beta_1 \sin (\lambda_3 - L_3)}.$$

Nennt man die Neigung des grössten Kreises, der durch die Orte

$$\lambda_1 \beta_1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 \beta_3$$

geht, J_4, so ist

$$tang\,\beta_1 = tang\,J_4\,sin\,(\lambda_1 - L_2)$$
$$tang\,\beta_3 = tang\,J_4\,sin\,(\lambda_3 - L_2),$$

daher

$$P = \frac{R_1}{R_3}\,\frac{sin\,(\lambda_1 - L_2)\,sin\,(\lambda_3 - L_1) - sin\,(\lambda_3 - L_2)\,sin\,(\lambda_1 - L_1)}{sin\,(\lambda_1 - L_3)\,sin\,(\lambda_3 - L_2) - sin\,(\lambda_3 - L_3)\,sin\,(\lambda_1 - L_2)}.$$

Ersetzt man im Zähler und Nenner die Differenzen der Winkel bezüglich durch

$$\lambda_1 - L_2 = (\lambda_1 - L_1) - (L_2 - L_1)$$
$$\lambda_3 - L_2 = (\lambda_3 - L_1) - (L_2 - L_1)$$
$$\lambda_1 - L_2 = (\lambda_1 - L_3) - (L_2 - L_3)$$
$$\lambda_3 - L_2 = (\lambda_3 - L_3) - (L_2 - L_3)$$

und löst die Sinus der Differenzen auf, so wird

$$P = \frac{R_1}{R_3}\cdot\frac{sin\,(L_2 - L_1)}{sin\,(L_3 - L_2)} = \frac{N''}{N'},$$

wo N'' und N' dasselbe für die Erdbahn bedeuten, wie n'' und n' für die Planetenbahn. Es hat aber OPPOLZER (»Astron. Nachrichten«, Bd. 92, No. 2191. 1878. »Einige Bemerkungen über die Bahnbestimmungen aus drei Orten«) nachgewiesen, dass die Bedingung

$$K = 0$$

nothwendig die Bedingung

$$C = 0$$

zur Folge habe. Setzt man nämlich in dem Ausdrucke, der zur Bestimmung von Δ_2 dient

$$c - c_0\left(1 + \frac{Q}{2R_2^3}\right) = 0$$

und

$$\frac{\Delta_2}{cos\,\beta_2} = \rho_2,$$

so ergiebt sich durch Subtraction

$$\rho_2 = \frac{Q}{2}\,c_0\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

Entwickelt man die Grössen b und d nach Potenzen der Zwischenzeit, so wird

$$b = c - \alpha\tau_3 + \ldots$$
$$d = c + \alpha\tau_1 + \ldots,$$

daher, wenn genähert gesetzt wird

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$$

$$c_0 = \frac{b + Pd}{1 + P} = \frac{c + c\dfrac{\tau_3}{\tau_1}}{1 + \dfrac{\tau_3}{\tau_1}} = c,$$

also

$$\rho = c\,\frac{Q}{2}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).$$

Von R_2c aber lässt sich beweisen, dass es dem Verhältnisse der Sinus der sphärischen Perpendikel vom mittleren Sonnen- und Planetenort auf den durch die äusseren Beobachtungen gelegten grössten Kreis multiplicirt mit einer positiven Grösse gleich ist; nennt man diese Perpendikel bezüglich P'', p'' und die positive Grösse f und setzt

$$Q = \tau_1\tau_3,$$

so erhält man

$$\frac{\rho_2}{R_2} = \frac{\tau_1\tau_3}{2}\frac{\sin P''}{\sin p'} f\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

den berühmten LAMBERT'schen Satz von der Krümmung der scheinbaren Bahn[1]). Ist also

$$p'' = 0,$$

so liegt der zweite Planetenort auf dem durch die äusseren Beobachtungen gelegten grössten Kreise; soll also der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, abgesehen von dem Falle $r_2 = R_2$ eine Bedeutung haben, so muss nothwendig, wenn ρ_2 überhaupt einen bestimmten Werth erhalten soll,

$$\sin P'' = 0$$

werden, was zu beweisen war.

Kehren wir wieder zur Gleichung für Δ_2 zurück, so wird, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_3 \qquad \beta_1 = \beta_3$$

ist, auch werden

$$K = 0 \qquad A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0.$$

Die Bahnbestimmung ist in diesem Falle unmöglich; die scheinbare Bahn bildet eine sogen. Schleife.

Werden alle drei Breiten gleich Null, so ist ebenfalls, wie leicht einzusehen, eine Bestimmung der Bahn unmöglich.

Ist endlich der Planet in der zweiten Beobachtung geradezu mit der Sonne in Opposition, so wird

$$\lambda_2 = L_2$$
$$\beta_2 = 0,$$

es ist dann

$$KR_2 = C \qquad r_2 = R_2 + \rho_2$$

und es folgt

$$\frac{C(P+1)}{R_2(A+PB)} r_2^4 - r_2^3 - \frac{1}{2} Q = 0.$$

Daraus ist aber eine Bestimmung des r_2 unmöglich; denn C ist mindestens dritter Ordnung; es soll aber nach der obigen Gleichung

$$\frac{C(P+1)}{R_2(A+PB)} r_2 - 1$$

zweiter Ordnung sein, da Q zweiter Ordnung ist. Die Beobachtungsfehler werden dann, selbst wenn eine Bestimmung überhaupt gelingt, einen bedeutenden Einfluss ausüben, auch wenn die Bedingungen

$$\lambda_2 = L_2$$
$$\beta_2 = 0$$

nur näherungsweise erfüllt sind; in diesem Falle wird man die Bahnbestimmung aus 3 Orten verlassen und jene aus 4 Orten versuchen müssen.

Nach diesem Excurse gehen wir zur Fortsetzung der Bahnbestimmung nach der GAUSS'schen Methode zurück.

Hat man aus der Gleichung 8. Grades den Werth z gefunden, so folgt

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \delta'_2}{\sin z} \qquad \Delta_2 \sec \beta_2 = \frac{R_2 \sin(\delta'_2 - z)}{\sin z}$$

und es ergeben sich die Werthe n_1 und n_3 aus den Gleichungen

$$n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)\frac{1}{1+P} \qquad n_3 = nP.$$

[1]) Mémoires de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin 1771, pag. 352.

Um nun die Werthe y', y''', welche zur Verbesserung von P und Q dienen, zu berechnen, müssen die Werthe Δ_1 und Δ_3 aus den Fundamentalgleichungen bestimmt werden. Eliminirt man aus den ersten zwei Δ_3, so wird

$$\Delta_1 = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \frac{\Delta_2}{n_1} - \frac{n_1 R_1 \sin(\lambda_3 - L_1) - R_2 \sin(\lambda_3 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\lambda_3 - L_3)}{n_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)}.$$

Es ist aber

$$- a_0 \sec\beta_2 \Delta_2 = n_1 R_1 \sin(L_1 - K) - R_2 \sin(L_2 - K) + n_3 \sin(L_3 - K),$$

eliminirt man aus den letzten Ausdrücken n_3, so wird der Zähler des zweiten Theiles von Δ_1

$$- \frac{a_0 \sin(\lambda_3 - L_3)}{\cos\beta_2 \sin(L_3 - K)} \Delta_2 + \frac{n_1 R_1}{\sin(L_3 - K)} [\sin(\lambda_3 - L_1) \sin(L_3 - K) - - \sin(\lambda_3 - L_3) \sin(L_1 - K)] - \frac{R_2}{\sin(L_3 - K)} [\sin(\lambda_3 - L_2) \sin(L_3 - K) - - \sin(\lambda_3 - L_3) \sin(L_2 - K)]$$

oder

$$- \frac{a_0 \Delta_2}{\cos\beta_2} \cdot \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)}{\sin(L_3 - K)} + \frac{n_1 R_1}{\sin(L_3 - K)} \sin(L_3 - L_1) \sin(\lambda_3 - K) - - \frac{R_2}{\sin(L_3 - K)} \cdot \sin(L_3 - L_2) \sin(\lambda_3 - K)$$

oder auch

$$- \frac{a_0 \Delta_2}{\cos\beta_2} \cdot \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)}{\sin(L_3 - K)} + \frac{\sin(\lambda_3 - K)}{\sin(L_3 - K)} [n_1 R_1 \sin(L_3 - L_1) - R_2 \sin(L_3 - L_2)],$$

wofür man auch setzen kann

$$- \frac{a_0 \Delta_2}{\cos\beta_2} \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)}{\sin(L_3 - K)} + \frac{\sin(\lambda_3 - K)}{\sin(L_3 - K)} n_1 R_1 \sin(L_3 - L_1) \left[1 - \frac{(R_2 R_3)}{(R_1 R_3)} \cdot \frac{1}{n_1}\right].$$

Setzt man

$$\frac{(R_2 R_3)}{(R_1 R_3)} = N_1 \qquad \frac{(R_1 R_2)}{(R_1 R_3)} = N_3,$$

so wird

$$\Delta_1 = \left[\frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{a_0 \sec\beta_2}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \cdot \frac{\sin(\lambda_3 - L_3)}{\sin(L_3 - K)}\right] \frac{\Delta_2}{n_1} + + R_1 \frac{\sin(L_3 - L_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \frac{\sin(\lambda_3 - K)}{\sin(L_3 - K)} \left[\frac{N_1}{n_1} - 1\right].$$

Vertauscht man die Indices 1 und 3, so wird

$$\Delta_3 = \left[\frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{a_0 \sec\beta_2}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \frac{\sin(\lambda_1 - L_1)}{\sin(L_1 - K)}\right] \frac{\Delta_2}{n_3} + R_3 \frac{\sin(L_3 - L_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \frac{\sin(\lambda_1 - K)}{\sin(L_1 - K)} \left[\frac{N_3}{n_3} - 1\right].$$

Die Coëfficienten der Grössen $\frac{\Delta_2}{n_1}$, $\frac{\Delta_2}{n_3}$, $\frac{N_1}{n_1} + 1$ und $\frac{N_3}{n_3} - 1$ sind von jeder Hypothese unabhängig und werden ein für alle Mal berechnet.

Setzt man noch

$$\frac{\sec\beta_2}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} = f$$

$$\frac{[R_1 R_3] \sin(L_3 - L_1)}{a_0 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)} = h$$

$$M_1' = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} + f\frac{R_3 \sin(\lambda_3 - L_3)}{d}$$
$$M_1''' = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} - f\frac{R_1 \sin(\lambda_1 - L_1)}{b}$$
$$M_2' = h\frac{\sin(\lambda_3 - K)}{d} \qquad M_2''' = h\frac{\sin(\lambda_1 - K)}{b},$$

so wird

$$\Delta_1 = M_1'\frac{\Delta_2}{n_1} + M_2'\left(\frac{N_1}{n_1} - 1\right); \quad \Delta_3 = M_1'''\frac{\Delta_2}{n_3} + M_2'''\left(\frac{N_3}{n_3} - 1\right).$$

Hat man so Δ_1 und Δ_3 gefunden, so geben die Formeln, welche den Uebergang auf den heliocentrischen Ort vermitteln

$$\begin{aligned}
r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) &= \Delta_1 \sin(\lambda_1 - L_1)\\
r_1 \cos b_1 \cos(\lambda_1 - L_1) &= \Delta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1\\
r_1 \sin b_1 &= \Delta_1 \operatorname{tang} \beta_1\\
r_2 \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) &= \Delta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)\\
r_2 \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) &= \Delta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) + R_2\\
r_2 \sin b_2 &= \Delta_2 \operatorname{tang} \beta_2\\
r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3) &= \Delta_3 \sin(\lambda_3 - L_3)\\
r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3) &= \Delta \ \cos(\lambda \ - L_3) + R_3\\
r_3 \sin b_3 &= \Delta_3 \operatorname{tang} \beta_{11},
\end{aligned}$$

wobei r_2 mit dem früher berechneten identisch gefunden werden muss.

Aus den Gleichungen

$$\operatorname{tang} b_1 = \sin(l_1 - \Omega) \operatorname{tang} i$$
$$\operatorname{tang} b_3 = \sin(l_3 - \Omega) \operatorname{tang} i,$$

die sich leicht aus der Betrachtung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke heliocentrischer Ort, Knoten und Fusspunkt des ersten und dritten Breitenkreises auf die Ekliptik ergeben, findet man, wenn

$$l_3 - \Omega = (l_1 - \Omega) + (l_3 - l_1)$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} b_3 = \sin(l_1 - \Omega) \operatorname{tang} i \cos(l_3 - l_1) + \cos(l_1 - \Omega) \operatorname{tang} i \sin(l_3 - l_1),$$

die Formeln

$$\operatorname{tang} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tang} b_1$$
$$\operatorname{tang} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tang} b_3 - \operatorname{tang} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}.$$

Hat man so Knoten (Ω) und Neigung (i) gefunden, so ergeben sich aus denselben sphärischen Dreiecken

$$\operatorname{tang} u_1 = \operatorname{tang}(l_1 - \Omega) \sec i \qquad \operatorname{tang} u_3 = \operatorname{tang}(l_3 - \Omega) \sec i$$

und ähnlich

$$\operatorname{tang} u_2 = \operatorname{tang}(l_2 - \Omega) \sec i.$$

Als zweite Probe muss

$$\operatorname{tang} i \sin(l_2 - \Omega) = \operatorname{tang} b_2$$

streng erfüllt sein, da sie die Bedingung der Ebene ergiebt. Diese Probe verificirt den grössten Theil der Vorbereitungsrechnungen.

Die dritte Probe folgt aus den Gleichungen

$$n_1 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \qquad n_3 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}.$$

Diese Werthe müssen mit den früher bestimmten identisch werden; dies wird wegen der Kleinheit der Winkel

$$u_2 - u_1, \quad u_3 - u_2 \quad \text{und} \quad u_3 - u_1$$

selten stattfinden. Man untersuche, ob sich die Differenzen durch Zehntel einer Secunde (bei sechsstelliger Rechnung) wegschaffen lassen, wobei nur u_2 geändert wird; dann ist

$$d(u_3 - u_2) = - du_2; \qquad d(u_2 - u_1) = du_2$$

und in Einheiten der 6. Decimale

$$d \log n_1 = - 2{\cdot}1055 \, tang\,(u_3 - u_2)\, du_2$$
$$d \log n_3 = + 2{\cdot}1055 \, tang\,(u_2 - u_1)\, du_2.$$

Hier wäre noch zu bemerken, dass aus den so ermittelten Werthen

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$$

die Grössen

$$\rho_1 = \frac{\Delta_1}{\cos\beta_1}, \quad \rho_2 = \frac{\Delta_2}{\cos\beta_2} \quad \rho_3 = \frac{\Delta_3}{\cos\beta_3}$$

berechnet werden, mit deren Hilfe man die Beobachtungszeiten von dem Einflusse der Aberration befreit. Indem man nach STRUVE setzt:

$$\log \varkappa = 7{\cdot}76057,$$

worin $\varkappa$ in Einheiten des Tages angesetzt ist, erhält man für die zweite und die folgenden Hypothesen

$$t_1' = t_1 - \varkappa\rho_1$$
$$t_2' = t_2 - \varkappa\rho_2$$
$$t_3' = t_3 - \varkappa\rho_3$$

Bis jetzt ist von den Eingangs erwähnten Postulaten nur das eine streng erfüllt worden, dass sich die drei Beobachtungen mit dem Sonnenmittelpunkte in einer Ebene befinden. Wollte man schon hier die Bedingungen des Kegelschnittes und der constanten Flächengeschwindigkeit einführen, so würde dies nur zu unnöthigen Complicationen führen. Wir werden uns daher begnügen, vorläufig nur die Grössen P und Q mit der erforderlichen Schärfe zu bestimmen; dabei müssen wir in Betracht ziehen, dass eine strenge Uebereinstimmung der Anfangs- und Endwerthe innerhalb desselben Versuches nicht existiren muss, und dies wird namentlich von Q gelten. Es genügt vielmehr, dass die Werthe n_1 und n_3 innerhalb der Grenzen der logarithmischen Rechnung übereinstimmen.

Um die Grössen y' und y''' zu ermitteln, welche die Ausdrücke P und Q verbessern, hat GAUSS in der »Theoria motus« Hilfstafeln gegeben, welche dieselben mit aller erforderlichen Strenge geben. Es ist aber nicht nothwendig, dieselben zu gebrauchen; denn berücksichtigt man, dass

$$y'' = \frac{\tau_2 \sqrt{p}}{[r_1 r_3]}$$

ist, so findet man durch Reihenentwickelung von $[r_1 r_3]$

$$[r_1 r_3] = \tau_2 \sqrt{p} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_2}{r_2^4} (\tau_1 - \tau_3) \frac{dr_2}{dt} \ldots \right]$$

wenn man bedenkt, dass nahezu gilt

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$$

$$y'' = 1 + \frac{4}{3} \frac{\tau_2^2}{(r_1 + r_3)^3} + A \frac{\tau_2^4}{(r_1 + r_3)^6} \ldots\ldots$$

Setzt man in erster Näherung $y'' = 1$, so werden die r mit einem Fehler erster Ordnung behaftet erscheinen; man wird daher bei ihrem Gebrauche zur Bestimmung des y'' nur das Glied zweiter Ordnung mitnehmen. Namentlich bei ersten Bahnbestimmungen, wo die Zwischenzeit zwischen der 1. und 3. Beob-

achtung selten mehr als 20 Tage beträgt, wird man mit dem Gliede zweiter Ordnung ausreichen, da das Glied vierter Ordnung erst eine Einheit der siebenten Decimalstelle ausmacht.

Da überdies nicht y'', sondern y' und y''' berechnet werden, so kann ohne Bedenken selbst bei 40tägiger Zwischenzeit das Glied zweiter Ordnung als ausreichend betrachtet werden; jedenfalls wird unter allen Umständen und bei äusserster Genauigkeit in der Reihenentwicklung die Mitnahme der Glieder bis zur sechsten Ordnung genügend sein.

Es soll nun das Gauss'sche Verfahren zur Berechnung des Verhältnisses »Sector zu Dreieck« auseinandergesetzt werden. Bezeichnen

$$\theta_1 \quad \text{und} \quad \theta_3$$

die seit dem Periheldurchgange bis zur ersten und dritten Beobachtung verflossenen Zeiten, multiplicirt mit der Constanten k, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = E_1 - e \sin E_1$$

$$\frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = E_3 - e \sin E_3$$

Durch Subtraction findet man

$$\frac{\tau_2}{a^{\frac{3}{2}}} - (E_3 - E_1) - 2e \sin \frac{E_3 - E_1}{2} \cos \frac{E_3 + E_1}{2}.$$

Aus den Ausdrücken

$$\sin \frac{E_1}{2} \sqrt{a(e+1)} = \sin \frac{v_1}{2} \sqrt{r_1} \qquad \sin \frac{E_3}{2} \sqrt{a(e+1)} = \sin \frac{v_3}{2} \sqrt{r_3}$$

$$\cos \frac{E_1}{2} \sqrt{a(1-e)} = \cos \frac{v_1}{2} \sqrt{r_1} \qquad \cos \frac{E_3}{2} \sqrt{a(1-e)} = \cos \frac{v_3}{2} \sqrt{r_3}$$

erhält man

$$\sin \frac{E_3 - E_1}{2} \sqrt{a} = \sin \frac{v_3 - v_1}{2} \sqrt{\frac{r_1 r_3}{p}} = \sin \frac{u_3 - u_1}{2} \sqrt{\frac{r_1 r_3}{p}}$$

$$e \cos \frac{E_3 + E_1}{2} = \cos \frac{E_3 - E_1}{2} - \cos \frac{v_3 - v_1}{2} \frac{\sqrt{r_1 r_3}}{a} = \cos \frac{E_3 - E_1}{2} - $$

$$- \cos \frac{u_3 - u_1}{2} \frac{\sqrt{r_1 r_3}}{a}$$

Es ist aber

$$\tau_2 \sqrt{p} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1) \right.$$
$$\left. + 2 \sin \frac{E_3 - E_1}{2} \left(\cos \frac{E_3 - E_1}{2} - e \cos \frac{E_3 + E_1}{2} \right) \right],$$

substituirt man die gewonnenen Ausdrücke, so wird

$$\tau_2 \sqrt{p} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{2 \sin \frac{u_3 - u_1}{2} \cos \frac{u_3 - u_1}{2} r_1 r_3}{a \sqrt{ap}} \right]$$
$$= a^2 \sqrt{1 - e^2} [E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)] + r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1).$$

Ersetzt man hierin a aus der Gleichung zwischen $\sin \frac{E_3 - E_1}{2}$ und $\sin \frac{u_3 - u_1}{2}$, so ist

$$\tau_2\sqrt{p} = \left[\frac{(E_3 - E_1) - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_3 - E_1}{2}}\right] \cdot \left[\frac{\sin \frac{u_3 - u_1}{2} \sqrt{r_1 r_3}}{\sqrt{p}}\right]^3 \sqrt{p}$$

$$+ r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1).$$

Es ist ferner

$$y'' = \frac{\tau_2\sqrt{p}}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_2\sqrt{p}}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)},$$

substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und dividirt durch $\sqrt{p}$, so erhält man

$$\text{(A)} \qquad \tau_2 = \left[\frac{(E_3 - E_1) - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_3 - E_1}{2}}\right] \left[\frac{\tau_2}{2\cos \frac{u_3 - u_1}{2} \sqrt{r_1 r_3}}\right]^3 \frac{1}{y''^3} + \frac{\tau_2}{y''}.$$

Wäre der Faktor rechter Hand bekannt, so wäre y'' gegeben; um dies zu erreichen, müssen wir zur Reihenentwicklung Zuflucht nehmen. Zunächst ist

$$r_1 = a - a e \cos E_1$$
$$r_3 = a - a e \cos E_3$$
$$r_1 + r_3 = 2a - 2a e \cos \frac{E_3 + E_1}{2} \cos \frac{E_3 - E_1}{2},$$

substituirt man den früher für $e \cos \frac{E_3 + E_1}{2}$ gefundenen Ausdruck, so wird

$$r_1 + r_3 = 2a \sin^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2} \cos \frac{E_3 - E_1}{2}$$

$$= 2 \frac{r_1 r_3}{p} \sin^2 \frac{u_3 - u_1}{2} + 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4}\right)$$

$$= \frac{2\tau_2^2}{y''^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4}\right),$$

woraus sich ergiebt

$$\text{(B)} \quad \sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4} = \frac{\tau_2^2}{y''^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2}}\right)^3 - \frac{r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_3 r_1} \cos \frac{u_3 - u_1}{2}}{4\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2}}.$$

Der Ausdruck in (A)

$$\frac{(E_2 - E_1) - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_3 - E_1}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von $\sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4}$ entwickeln (Theoria motus, Art. 90); es ist

$$\frac{(E_3 - E_1) - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_3 - E_1}{2}} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sin^4 \frac{E_3 - E_1}{4} \dots$$

Das Problem y'' zu bestimmen, ist also durch die Gleichungen (A) und (B) vollkommen gelöst. Das Quadrat der Sehne zwichen dem ersten und dritten Orte ist aber

$$s_2^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2 r_1 r_3 \cos(u_3 - u_1) = (r_1 + r_3)^2 - 4 r_1 r_3 \cos^2 \frac{u_3 - u_1}{2}$$

$$s_2^2 = (r_1 + r_3)^2 \left[1 - \frac{4 r_1 r_3 \cos^2 \frac{u_3 - u_1}{2}}{(r_1 + r_3)^2}\right].$$

Setzt man

$$\frac{2\sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{u_3-u_1}{2}}{r_1+r_3}=\cos\gamma_2,$$

so wird

$$s_2=(r_1+r_3)\sin\gamma_2$$

und

$$\sin^2\frac{E_3-E_1}{4}=\frac{\tau_2^2}{y''^2}\left[\frac{1}{(r_1+r_3)\cos\gamma_2}\right]^3-\frac{\sin^2\frac{\gamma_2}{2}}{\cos\gamma_2}$$

$$\tau_2=\frac{\tau_2}{y''}+\left(\frac{4}{3}+\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\sin^2\frac{E_3-E_1}{4}\;\ldots\right)\cdot\left[\frac{\tau_2}{(r_1+r_3)\cos\gamma_2}\right]^3\cdot\frac{1}{y''^3}.$$

Die GAUSS'schen Grössen m_2 und l sind endlich

$$m_2=\frac{\tau_2^2}{[(r_1+r_3)\cos\gamma_2]^3}\qquad l=\frac{\sin^2\frac{\gamma_2}{2}}{\cos\gamma_2}.$$

In der Theoria motus sind Tafeln gegeben, welche das Problem streng lösen. Hat man diese Tafeln nicht zur Hand, so wird man sich mit Vortheil des Kettenbruches bedienen, den HANSEN in der oben angeführten Abhandlung abgeleitet hat; setzt man in dem GAUSS'schen Werthe

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}$$

den Werth von ξ = Null, so stimmen die Entwickelungen von GAUSS und HANSEN bis auf die Glieder sechster Ordnung überein, was für erste Bahnbestimmungen vollkommen ausreichend ist; das HANSEN'sche Verfahren ist insofern auch allgemeiner, als es (wegen $\xi = 0$) über die Natur des Kegelschnittes keine Voraussetzung macht. Setzt man

$$m=\frac{\tau_2^2}{2\cos\frac{u_3-u_1}{2}}\qquad \operatorname{tang}(45^\circ+\omega)=\sqrt[4]{\frac{r_3}{r_1}}$$

$$l=\frac{\sin\frac{u_3-u_1}{2}+\operatorname{tang}2\omega}{\cos\frac{u_3-u_1}{2}}\qquad h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l},$$

so ist

$$y''-1=\frac{10}{11}\cdot\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{\ddots}}}\qquad \begin{aligned}\log\frac{5}{6}&=9{\cdot}920819\\ \log\frac{11}{9}&=0{\cdot}087150\\ \log\frac{10}{11}&=9{\cdot}958607\end{aligned}$$

für die Ellipse wird $x=\frac{m}{y''^2}-l$ positiv

für die Parabel wird $x=\frac{m}{y''^2}-l$ Null

für die Hyperbel wird $x=\frac{m}{y''^2}-l$ negativ.

OPPOLZER berechnet in seinem »Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen«, I. Theil, 2. Aufl. (1882) den Fehler der HANSEN'schen Näherung als

eine Einheit der 7. Stelle für $v_3 - v_1 < 18.°4$
„ „ „ 6. „ „ $v_3 - v_1 < 27.0$
„ „ „ 5. „ „ $v_3 - v_1 < 39.7$,

sodass also für erste Bahnbestimmungen der Kettenbruch vollkommen genügt. Bei Kometen, wo $v_3 - v_1$ grössere Werthe erhält, wird meistens ein genäherter Werth von $E_3 - E_1$ bekannt sein, sodass in diesem Falle die Auflösung nach GAUSS vorzuziehen ist.

Wenn durch die Versuche eine genügende Uebereinstimmung der Anfangs- und Endwerthe einer und derselben Versuchsreihe erzielt ist, so sind die vier Postulate erfüllt, und es bleibt nur mehr übrig, die Elemente der Bahn zu finden. Zunächst muss die Gleichung

$$p = \left[\frac{y''' r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3}\right]^2 = \left[\frac{y' r_3 r_2 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1}\right]^2 = \left[\frac{y'' r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2}\right]^2$$

innerhalb der Grenzen der logarithmischen Rechnung stimmen. Etwaige Unterschiede werden so ausgeglichen, dass man das arithmetische Mittel zwischen dem ersten und zweiten Werthe nimmt, welches mit dem dritten Werthe nahezu übereinstimmen muss. Dies giebt eine vierte Probe der Rechnung ab.

Für die Länge des aufsteigenden Knotens Ω, die Neigung i und die Argumente der Breite u wurden die Formeln bereits früher ermittelt. Die Excentricität e und die Länge des Perihels π oder die damit zusammenhängende Grösse Winkelabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten ω können durch die folgenden Gleichungen berechnet werden,

$$e \sin\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \frac{p}{\sqrt{r_1 r_3}\, \tang 2\psi_2} \frac{1}{\sin\frac{u_3 - u_1}{2}}$$

$$e \cos\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \left(\frac{p}{\sqrt{r_1 r_3}\, \sin 2\psi_2} - 1\right) \frac{1}{\cos\frac{u_3 - u_1}{2}},$$

worin

$$\tang \psi_2 = \sqrt{\frac{r_3}{r_1}}$$

ist.

Für Planeten ist e meist klein, daher die Bestimmung des Winkels φ aus

$$e = \sin\varphi$$

hinreichend genau. Für Kometen bestimmt man aus der Gleichung

$$\sin^2\frac{E_3 - E_1}{4} = \frac{\tau_2^2}{y''^2}\left[\frac{1}{(r_1 + r_3)\cos\gamma_2}\right]^3 - \frac{\sin^2\frac{\gamma_2}{2}}{\cos\gamma_2}$$

den Winkel $E_3 - E_1$. Es ist aber

$$p = a(1 - e^2) = a\cos^2\varphi$$

und daher mit Rücksicht auf die Gleichung

$$a\cos\varphi = \frac{\sin\frac{u_3 - u_1}{2}}{\sin\frac{E_3 - E_1}{2}}\sqrt{r_1 r_3}$$

$$a = \frac{p}{\cos^2\varphi}.$$

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von φ aus

$$e = \sin\varphi \quad \text{und} \quad \frac{p}{a\cos\varphi} = \cos\varphi$$

worin

$$a\cos\varphi = \frac{\sin\frac{u_3 - u_1}{2}}{\sin\frac{E_3 - E_1}{2}}\sqrt{r_1 r_3}$$

ist, kann als fünfte Probe betrachtet werden. Die wahren Anomalien werden

$$v_1 = u_1 - \omega \qquad v_2 = u_2 - \omega \qquad v_3 = u_3 - \omega$$

und die Werthe

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v_1} \qquad r_2 = \frac{p}{1 + e\cos v_2} \qquad r_3 = \frac{p}{1 + e\cos v_3}$$

müssen mit den früher gefundenen übereinstimmen.

Zur Ermittelung der excentrischen Anomalien dienen die Gleichungen

$$\tan\frac{E_1}{2} = \tan\frac{v_1}{2}\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\tan\frac{E_2}{2} = \tan\frac{v_2}{2}\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\tan\frac{E_3}{2} = \tan\frac{v_3}{2}\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Die mittleren Anomalien werden dann

$$M_1 = E_1 - e\sin E_1$$
$$M_2 = E_2 - e\sin E_2$$
$$M_3 = E_3 - e\sin E_3.$$

Wählt man irgend einen Zeitpunkt T_0 als Epoche mit der mittleren Anomalie M_0, so gelten die Gleichungen

$$\mu = \frac{M_1 - M_0}{t_1 - T_0} = \frac{M_2 - M_0}{t_2 - T_0} = \frac{M_3 - M_0}{t_3 - T_0}$$

und das so berechnete μ muss mit dem Werthe

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3{\cdot}550007$$

übereinstimmen; dies ist die sechste und ausreichendste Probe.

Man wird sich gewöhnlich überzeugen wollen, wie die Elemente die Beobachtungen darstellen; man rechnet deshalb für alle drei Orte

$$r\cos v = a\cos E - a\sin\varphi$$
$$r\sin v = a\cos\varphi\sin E$$
$$u = v + \pi - \Omega = v + \omega$$

und findet nach den Formeln

$$\xi = x + X$$
$$\eta = y + Y$$
$$\zeta = z + Z$$

die rechtwinkligen geocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers. Bezieht man alles auf die Ekliptik als Fundamentalebene und rechnet alle Längen vom aufsteigenden Knoten anstatt vom Frühlingspunkte, so ist

$$\xi = \rho\cos\beta\cos(\lambda - \Omega)$$
$$\eta = \rho\cos\beta\sin(\lambda - \Omega)$$
$$\zeta = \rho\sin\beta.$$

Mit Vernachlässigung der Sonnenbreite wird

$$X = R\cos(\odot - \Omega)$$
$$Y = R\sin(\odot - \Omega)$$
$$Z = 0$$

und endlich

$$x = r\cos u$$
$$y = r\sin u\cos i$$
$$z = r\sin u\sin i,$$

daher

$$\rho\cos\beta\cos(\lambda - \Omega) = r\cos u + R\cos(\odot - \Omega)$$
$$\rho\cos\beta\sin(\lambda - \Omega) = r\sin u\cos i + R\sin(\odot - \Omega)$$
$$\rho\sin\beta = r\sin u\sin i.$$

Hat man sich so von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt, indem die übrig bleibenden Fehler, die unvermeidliche Unsicherheit der angewandten Logarithmentafeln nicht übersteigen sollen, so wird man gewöhnlich eine sogen. Ephemeride rechnen, entweder um alle Beobachtungen mit der berechneten Bahn zu vergleichen, oder auch um dem Beobachter das Mittel an die Hand zu geben, den Himmelskörper weiter zu verfolgen.

Bei den Planeten wird ihrer meist regelmässigen Bewegung wegen die Construction der Ephemeride erst nach einer 20—30tägigen Beobachtungsdauer erfolgen, bei Kometen erfolgt dies ihrer unregelmässigen geocentrischen Bewegung wegen schon nach einigen Tagen; für beide Himmelskörper ist es nothwendig, die scheinbare geocentrische Bahn während der Dauer einer Opposition (Planeten) oder der Dauer der Sichtbarkeit (Kometen) darzustellen. Zu diesem Behufe wird es am besten sein, den Aequator als Grundebene zu wählen, da die Beobachtungen in Rectascension und Deklination gegeben sind. Die astronomischen Jahrbücher geben die geocentrischen äquatorealen Sonnencoordinaten. Um zunächst den Fall der Planetenbewegung zu erledigen, wäre es zeitraubend, die heliocentrischen Aequatorcoordinaten in der Form

$$x = r\sin a'\sin(A' + v)$$
$$y = r\sin b'\sin(B' + v)$$
$$z = r\sin c'\sin(C' + v)$$

vorauszusetzen, da der jedesmalige Uebergang von E auf v eine bedeutende Mehrarbeit verursacht. Deshalb hat GAUSS vorgeschlagen, ein anderes System von Constanten einzuführen. Löst man die Klammerausdrücke auf, so wird

$$x = r\sin a'\sin A'\cos v + r\sin a'\cos A'\sin v$$
$$y = r\sin b'\sin B'\cos v + r\sin b'\cos B'\sin v$$
$$z = r\sin c'\sin C'\cos v + r\sin c'\cos C'\sin v.$$

Berücksichtigt man die Formeln

$$r\sin v = a\sin E\cos\varphi$$
$$r\cos v = a\cos E - a\sin\varphi$$

und setzt

$$a\sin a'\sin A' = l\sin L$$
$$a\sin a'\cos\varphi\cos A' = l\cos L$$
$$-\sin\varphi\, l\sin L = \lambda$$
$$a\sin b'\sin B' = m\sin M$$
$$a\sin b'\cos\varphi\cos B' = m\cos M$$
$$-\sin\varphi\, m\sin M = \mu$$

$$a \sin c' \sin C' = n \sin N$$
$$a \sin c' \cos \varphi \cos C' = n \cos N$$
$$- \sin \varphi \, n \sin N = \nu,$$

so werden die heliocentrischen Aequatorcoordinaten des Himmelskörpers

$$x = l \sin (E + L) + \lambda$$
$$y = m \sin (E + M) + \mu$$
$$z = n \sin (E + N) + \nu$$

Bei sogen. Aufsuchungs-Ephemeriden *(sweeping ephemeris)*, welche vollständig ausreichend mit vierstelligen Logarithmentafeln gerechnet werden, wählt man als Zeitintervall zwischen den einzelnen Ephemeridenorten bei Planeten 20 Tage wegen ihrer ziemlich regelmässigen scheinbaren Bewegung (Jahresephemeriden des »Berliner astron. Jahrbuches«); bei den Kometen hingegen wird man dies Intervall wegen ihrer meist unregelmässigen scheinbaren Bewegung beträchtlich reduciren müssen; doch wird erfahrungsgemäss ein Intervall von 4 Tagen als vollkommen ausreichend angenommen werden können.

Handelt es sich jedoch um solche Ephemeriden, mit denen die Beobachtungen direkt verglichen werden, um die Fehler von Planetentafeln oder Elementen zu bestimmen (Oppositionsephemeriden des »Berliner astron. Jahrbuches«, Transitephemeriden des »Nautical Almanac«), oder um aus den Beobachtungen, während der Sichtbarkeitsperiode eines Himmelskörpers sogen. Normalorte zur weiteren Verbesserung der Bahn zu erlangen, so ist man von einer gewissen Willkür in betreff des zu wählenden Intervalles nicht frei. Meistens werden die Orte von zwei zu zwei Tagen mit sechs- oder siebenstelligen Logarithmentafeln gerechnet, worauf die Erweiterung der Ephemeride von Tag zu Tag durch Interpolation erfolgt. Indessen kann es vorkommen, dass das betreffende Intervall merklich eingeengt, ja in besonderen Fällen auf eine Stunde festgesetzt werden muss.

Dies ist namentlich der Fall bei Kometen von sehr kleiner Periheldistanz in der Sonnennähe (Komet 1843) oder bei Kometen, die in ihrer scheinbaren Bahn dem Aequatorpol nahe kommen (Komet Swift 1879); in dem letzteren Falle wird man zunächst die Grössen

$$x + X, \quad y + Y, \quad z + Z$$

von Tag zu Tag berechnen und erst diese in Intervallen von Stunde zu Stunde interpoliren; dabei wird man sich begnügen, die mittleren Orte anzusetzen, da wohl selten ein Komet bei $\delta = 88°$ und höheren Graden der Deklination beobachtet wird; sollte indessen doch die Nothwendigkeit vorliegen, den scheinbaren Ort abzuleiten, so wird man sich mit Vortheil der Formeln bedienen, welche W. Fabritius in den »Astron. Nachrichten« Bd. 87, No. 2072 und 2073 entwickelt hat.

Die aus den Gleichungen

$$X + x = \rho \cos \delta \cos \alpha$$
$$Y + y = \rho \cos \delta \sin \alpha$$
$$Z + z = \rho \sin \delta$$

berechneten Werthe von α und δ sind mittlere, da die Elemente auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogen sind. Die Reduction auf den scheinbaren Ort wird mit Hilfe der Formeln

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 = f + g \sin (G + \alpha) \tang \delta$$
$$d\delta_1 + d\delta_2 = g \cos (G + \alpha)$$

ausgeführt, welche mit ihrem Vorzeichen an den Ephemeridenort angebracht werden; wegen ihrer geringen Grösse und Aenderung wird man dieselben meist in grossen Intervallen mit vierstelligen Logarithmentafeln berechnen und dann auf das Ephemeriden-Zeitintervall interpoliren.

Der Aberration wird auf folgende Weise Rechnung getragen; die Ephemeriden geben unter dem Titel »Aberrationszeit« gewöhnlich die Grösse

$$497^{s}\cdot 83 \cdot \rho.$$

Diese Zeit wird mit negativen Vorzeichen an die Beobachtungszeit angebracht. Es versteht sich von selbst, dass die Beobachtungszeit durch Anbringung der Meridiandifferenz auf jenen Meridian reducirt werden muss, für welchen die Ephemeride gilt.

Die Parallaxe wird nach den bekannten Formeln gerechnet und mit entsprechendem Zeichen an die beobachtete Rectascension und Deklination angebracht; erst, wenn die Beobachtungen auf diese Weise korrigirt sind, werden dieselben unmittelbar mit der Ephemeride vergleichbar sein.

Obwohl der Fall einer hyperbolischen Bahn bei ersten Bahnbestimmungen selten vorkommt (ausser den von ENCKE »Astron. Nachrichten« Bd. 27, No. 641, bei dem Kometen von 1843 und von GOULD im »Astronomical Journal« vol. I bei dem Kometen 1847 V angeführten zwei Fällen ist mir kein anderer bekannt) so soll doch an dieser Stelle das Beispiel der »Theoria motus« (Art. 21 und ff. und 105) angeführt werden, zumal sich das Verfahren innig an das in der Ellipse befolgte anschliesst.

Bekanntlich ist, wenn b die kleine Axe der Hyperbel bedeutet[1]),

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

und da

$$e > 1,$$

so ist b nothwendig imaginär; da ferner der Parameter p wesentlich positiv ist und

$$p = \frac{b^2}{a}$$

ist, so wird die grosse Halbaxe a negativ und damit der Ausdruck

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

imaginär.

Die Grösse $r \sin v$ ist reell, daher wegen Gleichung (16) $\sin E$ imaginär. Es gilt aber auch bei der Hyperbel mit Vernachlässigung von m die Gleichung

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e \sin E,$$

es muss also auch E imaginär werden; setzen wir

$$E = iu \qquad \sin E = \frac{c^{-u} - c^{+u}}{2i}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

worin wie bekannt c die Basis des natürlichen Logarithmensystemes ist, so wird

$$ui - e\frac{c^{-u} - c^{+u}}{2i} = -\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}} i}$$

oder

$$-u - \frac{1}{2}e(c^{-u} - c^{+u}) = -\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}};$$

setzt man

---

[1]) W. KLINKERFUES, Theoretische Astronomie. Braunschweig 1871, pag. 16, 17, 23 und 24.

$$c^{-u} = tang\,\frac{1}{2}\,F,$$

so wird

$$\log nat\, tang\,\frac{F}{2} + e\, cotang\, F = -\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = M,$$

für das Perihel wird $F = 90°$, also, wenn man den entsprechenden Werth der »Theoria motus« Fm setzt,

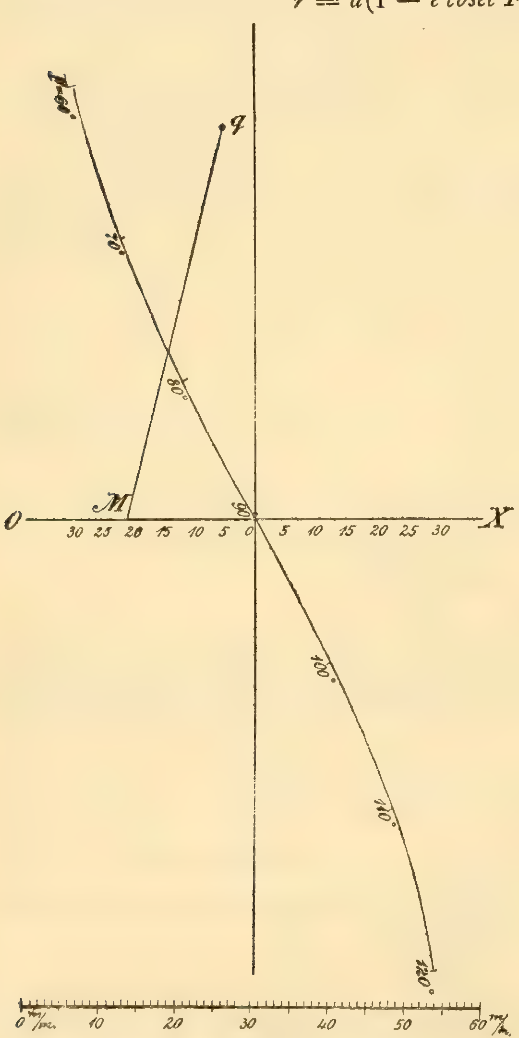
$$F = 90° + Fm.$$

Endlich ist

$$\sin\frac{E}{2} = \frac{\sqrt{tang\,\frac{F}{2}} - \sqrt{cotang\,\frac{F}{2}}}{2i} \qquad \cos\frac{E}{2} = \frac{\sqrt{tang\,\frac{F}{2}} + \sqrt{cotang\,\frac{F}{2}}}{2}$$

$$tang\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\; cotang\left(45° + \frac{F}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\; tang\left(45° - \frac{F}{2}\right)$$

$$r = a(1 - e\, cosec\, F).$$



(A. 137)

Zur Auflösung der transcendenten Gleichung in erster Näherung, wird man mit Vortheil die von KLINKERFUES (a. a. O., pag. 23) angeführte graphische Auflösung benutzen. Auf der Abscissenaxe (Fig. 137) werden die Werthe

$$\log nat\, tang\,\frac{F}{2},$$

auf der Ordinatenaxe die entsprechenden Werthe

$$cotang\, F$$

aufgetragen, wobei man eine Curve von nebenstehender Gestalt erhält; darauf werden die Werthe F markirt. Durch den Punkt M, dessen Abscisse gleich ist dem Bogen M, der mittleren Anomalie, ziehe man die Gerade Mq so, dass dieselbe mit der positiven Richtung der Abscissenaxe den Winkel

$$tang\, Omq = \frac{1}{e}$$

einschliesst; dann giebt der Durchschnitt der Geraden mit der Curve einen genäherten Werth von F, der nach der *Regula falsi* verbessert werden kann.

Um die hyperbolischen Elemente zu finden (Knoten, Neigung und Argumente der Breite werden wie in der Ellipse berechnet), führt man die Rechnung bis zur Ermittelung des y'' wie in der Ellipse durch, da, wie dort angegeben wurde, wegen Vernachlässigung der Grösse ξ der HANSEN'sche Kettenbruch auch für die Hyperbel und Parabel gilt. Hat man y'' gefunden, so ergeben die Formeln der »Theoria motus« Art. 99 und ff.

$$z = l - \frac{m^2}{y''_2}$$

$$tang\, 2n = 2\sqrt{z(1+z)} \qquad tang\, \psi = \frac{tang\, \frac{u_3 - u_1}{2}\, tang\, 2n}{2(l-z)} = \sqrt{e^2 - 1}$$

$$\beta = \frac{\sin \frac{u_3 - u_1}{2} \sqrt{r_1 r_3}}{tang\, 2n} \qquad \beta = \alpha \sqrt{e^2 - 1} \qquad e = \frac{1}{\cos \psi}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{tang\, \psi} \qquad p = \beta\, tang\, \psi$$

$$tang\, 2N = \frac{2 \sin \psi\, tang\, 2\omega}{\cos 2\omega \sin \frac{u_3 - u_1}{2}} \qquad tang\, \frac{v_1}{2} = \frac{\sin (N - n)}{\cos (N + n)\, tang\, \frac{\psi}{2}}$$

$$tang\, \frac{v_3}{2} = \frac{\sin (N + n)}{\cos (N - n)\, tang\, \frac{\psi}{2}}.$$

Setzt man die Zeiten vom Perihel bis zum ersten, bezüglich zweiten Ort

$$T - \frac{t}{2} \quad \text{und} \quad T + \frac{t}{2},$$

so wird

$$T = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left[\frac{e\, tang\, 2N}{\cos 2n} - \log nat\, tang\, (45^\circ + N)\right]$$

$$t = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left[\frac{e\, tang\, 2n}{\cos 2N} - \log nat\, tang\, (45^\circ + n)\right].$$

Es sei gegeben

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = 24^\circ\, 6'\, 0''0 \qquad \log r_1 = 0{\cdot}0333585 \qquad \log r_3 = 0{\cdot}2008541$$

$$t = 51{\cdot}4979,$$

aus

$$\sqrt[4]{\frac{r_3}{r_1}} = tang\, (45^\circ + \omega)$$

(»Theoria motus«, Artikel 89 ff.) findet man

$$\omega = 2^\circ\, 45'\, 28''{\cdot}5$$

$$l = 0{\cdot}0579604$$

$$h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l} = 0{\cdot}064437.$$

Aus dem HANSEN'schen Kettenbruche ergiebt sich

$\log h$	$= 8{\cdot}809135$	$\log \frac{m^2}{y''^2}$	$= 8{\cdot}703069$
$\log \frac{11}{9} h$	$= 8{\cdot}896285$	$\frac{m^2}{y''^2}$	$= 0{\cdot}0504741$
$\log Add$	$= 0{\cdot}032923$		
	$8{\cdot}863362$	$\frac{m^2}{y''^2} - l$	$= -0{\cdot}0074863 < 0$
$\log Add$	$= 0{\cdot}030602$		
	$0{\cdot}865683$	daher der Kegelschnitt eine Hyperbel	
$\log Add$	$= 0{\cdot}030761$		
	$0{\cdot}865524$		
$\log Add$	$= 0{\cdot}030750$		
$\log \frac{11}{10} (y'' - 1)$	$= 8{\cdot}865535$ Grenze		

$\log(y''-1) = 8{\cdot}824142$
$\log y'' = 0{\cdot}028044$
$\log y''^2 = 0{\cdot}056088$

$\log z = 7{\cdot}874267$
$\log(1+z) = 0{\cdot}003239$
$\frac{1}{2}\log z(1+z) = 8{\cdot}938753$
$\log 2 = 0{\cdot}301030$
$\log tang\, 2n = 9{\cdot}239783$
$2n = 9^\circ\, 51'\, 12{\cdot}''88$

$n = 4^\circ\, 55'\, 36{\cdot}''4$

$\log \sin \frac{u_3-u_1}{2} = 9{\cdot}611012$
$\log\sqrt{r_1 r_3} = 0{\cdot}117106$
$compl \log tang\, 2n = 0{\cdot}760217$
$\log \beta = 0{\cdot}488335$
$\log tang\, \psi = 9{\cdot}886304$
$\log \alpha = 0{\cdot}602031$
$\log p = 0{\cdot}374639$

$\log tang \frac{u_3-u_1}{2} = 9{\cdot}650620$
$\log\left(\frac{1}{2}\, tang\, 2n\right) = 8{\cdot}938753$
$compl \log (l-z) = 1{\cdot}296931$
$\log tang\, \psi = 9{\cdot}886304$
$\psi = 37^\circ\, 35'\, 3{\cdot}''7$
$\frac{\psi}{2} = 18^\circ\, 47'\, 31{\cdot}''9$

$compl \log\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u_3-u_1}{2}\right) = 0{\cdot}690018$
$\log tang\, 2\omega = 8{\cdot}984833$
$compl \log \cos 2\omega = 0{\cdot}002015$
$\log \sin \psi = 9{\cdot}785279$
$\log tang\, 2N = 9{\cdot}462145$

$\log \sin(N-n) = 8{\cdot}740634$
$compl \log \cos(N+n) = 0{\cdot}011291$
$\log cotang \frac{\psi}{2} = 0{\cdot}468169$
$\log tang \frac{v_1}{2} = 9{\cdot}220094$
$\frac{v_1}{2} = 9^\circ\, 25'\, 29{\cdot}''5$

$2N = 16^\circ\, 9'\, 47{\cdot}''6$
$N = 8^\circ\, 4'\, 53{\cdot}''8$
$N+n = 13^\circ\, 0'\, 30{\cdot}''2$
$N-n = 3^\circ\, 9'\, 17{\cdot}''4$

$\log \sin(N+n) = 9{\cdot}352364$
$compl \log \cos(N+n) = 0{\cdot}000659$
$\log cotang \frac{\psi}{2} = 0{\cdot}468169$
$\log tang \frac{v_3}{2} = 9{\cdot}821192$
$\frac{v_3}{2} = 33^\circ\, 31'\, 29{\cdot}''9$

$v_3 = 67^\circ\, 2'\, 59{\cdot}''8$
$v_1 = 18^\circ\, 50'\, 59{\cdot}''0$
$v_3 - v_1 = 48^\circ\, 12'\, 0{\cdot}''8$

$\log e$	$= 0{\cdot}101025$	$\log e$	$= 0{\cdot}101025$
$\log tang\, 2N$	$= 9{\cdot}462145$	$\log tang\, 2n$	$= 9{\cdot}239783$
$compl \log \cos 2n$	$= 0{\cdot}006454$	$compl \log \cos 2N$	$= 0{\cdot}017515$
Summe	$= 9{\cdot}569624$	Summe	$= 9{\cdot}358323$
Zahl	$= 0{\cdot}371214$	Zahl	$= 0{\cdot}228204$
$\log nat\, tang(45^\circ+N)$	$= 0{\cdot}285919$	$\log nat\, tang(45^\circ+n)$	$= 0{\cdot}172832$
Differenz	$= 0{\cdot}085295$	Differenz	$= 0{\cdot}055372$
$\log$ Diff.	$= 8{\cdot}930924$	$\log$ Diff.	$= 8{\cdot}743290$
$\frac{3}{2}\log \alpha$	$= 0{\cdot}903046$	$\frac{3}{2}\log \alpha$	$= 0{\cdot}903046$
$compl \log k$	$= 1{\cdot}764419$	$compl \log k$	$= 1{\cdot}764419$
$\log T$	$= 1{\cdot}598389$	$\log 2$	$= 0{\cdot}301030$
		$\log t$	$= 1{\cdot}711785$

$$t = 51{\cdot}4974$$
$$\frac{t}{2} = 25{\cdot}7487$$
$$T = 39{\cdot}6633.$$

Also die Zeit, bezüglich vom ersten oder zweiten Orte bis zum Perihel:

$$T - t_1 = T - \frac{t}{2} = 13{\cdot}9146 \qquad T - t_3 = T + \frac{t}{2} = 65{\cdot}4120.$$

III. Bahnbestimmung in einer Parabel.

a) Vorbereitung der Beobachtungen.

Da die Vorbereitung der Beobachtungen schon früher erledigt wurde, werden wir uns mit einer kurzen Zusammenfassung der Vorschriften begnügen

Die Kometenbeobachtungen sind ungleich unsicherer als die der Planeten, und es werden überdies meistens die ersten Bahnbestimmungen zum Zwecke der Aufsuchungsephemeriden aus einem kleinen Zeitintervall abgeleitet; es wäre deshalb unnöthig die Kometenbeobachtungen mit jener Schärfe zu reduciren wie etwa die Planetenbeobachtungen durch Einführung des *locus fictus*, vielmehr wird man entweder die Correctionen

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3 \qquad d\delta_1 + d\delta_2 + d\delta_3$$

nach einem Vorschlage OPPOLZER's an die beobachteten Rectascensionen und Deklinationen mit verkehrten Vorzeichen anbringen und die so corrigirten Werthe mit der mittleren Schiefe der Eklipktik für den Jahresanfang in Länge und Breite verwandeln; oder man wird die beobachteten Rectascensionen und Deklinationen unmittelbar mit der scheinbaren Schiefe der Ekliptik für den Beobachtungstag in Länge und Breite umsetzen; an die so gewonnenen Längen werden [Präcession + Nutation] in Länge mit dem negativen Zeichen angebracht, während die Breite ungeändert bleibt. Dieses letztere Verfahren berücksichtigt also nur die Correctionen

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 \text{ und } d\delta_1 + d\delta_2$$

in Rectascension und Deklination. OPPOLZER's Vorschlag kann aber um so eher Berücksichtigung finden, weil damit theilweise die Aberration durch die Fixstern-aberration berücksichtigt wird, dann aber auch, was eigentlich die Hauptsache ist, die Anwendung desselben beinahe keine Mehrarbeit erfordert, denn die Beobachter pflegen bei den ersten angestellten Beobachtungen meist den mittleren Ort der Vergleichsterne, die Differenz ☄ — α_*, und ☄ — δ_* und endlich die scheinbaren Orte der Kometen anzugeben, um dem Rechner einigermaassen die Möglichkeit zu geben die Rechnungen zu controlliren. Bringt man unmittelbar an den mittleren Ort des oder der Vergleichsterne die Differenz ☄ — a_* und ☄ —δ_* an, so erhält man die von OPPOLZER geforderten Daten ohne weitere Rechnung.

b) Aufstellung der Grundgleichungen des Bahnbestimmungsproblems und Ermittelung der Elemente.

Bekanntlich kann man die Parabel als den einen Grenzfall der Ellipse, nämlich als eine Ellipse mit unendlich grosser Halbaxe a betrachten. Soll also die doppelte Sectorfläche bestimmt werden, so muss man sich eines anderen Verfahrens als bei der Ellipse und der Hyperbel bedienen. Setzen wir

$$p = a(1 - e^2)$$

und berücksichtigen, dass die Entfernung des Perihels q vom Brennpunkte

$$q = \frac{p}{2}$$

ist, so erhält man unter Vernachlässigung der Masse aus Gleichung (6)

$$r^2 dv = k\sqrt{2q}\,dt$$

und durch Integration

$$k\sqrt{2q}\,t = \int r^2 dv + C_6;$$

es ist aber

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}$$

eine Gleichung, die sich einfach aus der Polargleichung der Parabel

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v}$$

ergiebt; daher wird

$$k\sqrt{2q}\,t = q^2 \int \frac{dv}{\cos^4 \frac{v}{2}} + C_6 = q^2 \int \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{v}{2}\right) d\left(\operatorname{tang} \frac{v}{2}\right) + C_6$$

$$= q^2 \left(\operatorname{tang} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2}\right) + C_6,$$

rechnet man v und t vom Perihel aus, so wird

$$C_6 = 0$$

und

$$\frac{kt}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tang} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2}$$

oder

$$\frac{75kt}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}} = 75 \operatorname{tang} \frac{v}{2} + 25 \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{75k}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}$$

hat den Namen mittlere tägliche parabolische Bewegung erhalten nach Analogie mit den entsprechenden Werthen der Ellipse und Hyperbel. Die Grösse rechts vom Gleichheitszeichen wurde zuerst von BARKER[1]) mit dem Argumente v tabulirt; diese Tafel führt daher den Namen BARKER'sche Tafel und vermittelt den Zusammenhang der wahren Anomalie mit der seit dem Periheldurchgange verflossenen Zeit. OPPOLZER hat bequemer für den rechnerischen Gebrauch die Grösse

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tang} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v}{2}\right) = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$$

in eine Tafel gebracht (s. dieselbe am Schluss des Werkes). Nennen wir die Zeiten, welche vom Periheldurchgange bis zur ersten, bezüglich zweiten Beobachtung verflossen sind

$$T_1 \quad \text{und} \quad T_3,$$

so wird

$$k\sqrt{2q}\,T_1 = 2q^2 \left(\operatorname{tang} \frac{v_1}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v_1}{2}\right)$$

$$k\sqrt{2q}\,T_3 = 2q^2 \left(\operatorname{tang} \frac{v_3}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v_3}{2}\right),$$

dann ist der doppelte Sector

---

[1]) An account of the discoveries concerning comets with the way to find their orbits etc. by THOMAS BARKER, London 1757.

$$2S = k\sqrt{2q}(T_3 - T_1) = 2q^2\left(tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(tang^2\frac{v_3}{2} + tang\frac{v_3}{2}tang\frac{v_1}{2} + tang^2\frac{v_1}{2}\right)\right]$$

$$= 2q^2\left(tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2}\right)\left[1 + tang\frac{v_3}{2}\,tang\frac{v_1}{2} + \frac{1}{3}\left(tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2}\right)^2\right]$$

$$= 2q^2\left(tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2}\right)\left[\frac{\cos\frac{v_3 - v_1}{2}}{\cos\frac{v_3}{2}\cos\frac{v_1}{2}} + \frac{1}{3}\left(tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2}\right)^2\right].$$

Setzt man

$$\frac{v_3 - v_1}{2} = f$$

und berücksichtigt

$$\cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_1}}, \qquad \cos\frac{v_3}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_3}},$$

so wird

$$\frac{\cos\frac{v_3 - v_1}{2}}{\cos\frac{v_3}{2}\cos\frac{v_1}{2}} = \frac{\cos f\sqrt{r_1 r_3}}{q} \qquad tang\frac{v_3}{2} - tang\frac{v_1}{2} = \frac{\sin f\sqrt{r_1 r_3}}{q}$$

und damit

$$k(T_3 - T_1) = \frac{r_1 r_3\sqrt{2}\sin f\cos f}{\sqrt{q}} + \frac{1}{3}\,\frac{(r_1 r_3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\sin^3 f}{q^{\frac{3}{2}}}. \qquad (I^*)$$

Es ist aber

$$\sin^2 f = \left(\sin\frac{v_3}{2}\cos\frac{v_1}{2} - \sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_3}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 f = \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_3} - 2\cos f\frac{q}{\sqrt{r_1 r_3}}$$

$$\sin^2 f = \frac{q}{r_1 r_3}\left[r_1 + r_3 - 2\cos f\sqrt{r_1 r_3}\,\right].$$

Führt man die Sehne s_2 zwischen dem ersten und dritten Ort ein, so ergiebt sich aus dem Dreiecke r_1, r_3, s_2

$$\cos f = \pm\sqrt{\frac{(r_1 + r_3 + s_2)(r_1 + r_3 - s_2)}{4 r_1 r_3}}.$$

Das positive Zeichen gilt für heliocentrische Bewegungen, welche kleiner als 180° ($f < 90°$) sind, das negative für solche, welche grösser als 180° ($f > 90°$) sind. Ferner ist

$$\frac{\sqrt{r_1 r_3}}{\sqrt{q}}\sin f = \sqrt{r_1 + r_3 - 2\cos f\sqrt{r_1 r_3}},$$

da f niemals grösser als 180° werden kann, so ist das Vorzeichen der Wurzel positiv. Setzt man für den Augenblick abkürzend

$$\sqrt{r_1 + r_3 + s_2} = m \qquad \sqrt{r_1 + r_3 - s_2} = n,$$

so wird

$$\cos f = \pm\frac{mn}{2\sqrt{r_1 r_3}}$$

$$\frac{\sqrt{r_1 r_3}}{\sqrt{q}}\sin f = \sqrt{\frac{1}{2}(m^2 + n^2) \mp mn}$$

oder

$$\frac{\sqrt{2 r_1 r_3}}{\sqrt{q}}\sin f = m \mp n.$$

Damit erhalten wir

$$k(T_3 - T_1) = \cos f \sqrt{r_1 r_3}(m \mp n) + \frac{1}{6}(m \mp n)^3$$
$$= \pm \frac{mn}{2}(m \mp n) + \frac{1}{6}(m \mp n)^3,$$

woraus endlich

$$6k(T_3 - T_1) = (r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

Dies ist das berühmte sogenannte LAMBERT'sche Theorem; es ist eigentlich von EULER zuerst aufgestellt worden; LAMBERT gebührt indessen das Verdienst, es im Falle grosser Excentricitäten auf die übrigen Kegelschnitte ausgedehnt zu haben[1]). Diese Gleichung vermittelt auf algebraische Weise den Zusammenhang zwischen der Zeit, den beiden Radienvectoren und der von ihnen eingeschlossenen Sehne. Bei der elliptischen und hyperbolischen Bahn wird bekanntlich dieser Zusammenhang durch transcendente Gleichungen hergestellt.

Zu bemerken ist endlich noch, dass das obere Zeichen für heliocentrische Bewegungen $< 180°$, das untere für heliocentrische Bewegungen $> 180°$ gilt. Bei ersten Bahnbestimmungen ist der erste Fall (heliocentrische Bewegung $< 180°$) fast der ausschliessliche. Ausnahmen hiervon bilden nur die Kometen von sehr kurzer Periheldistanz, wenn sie in der Nähe des Perihels beobachtet werden.

Da s_2 bei ersten Bahnbestimmungen meist eine kleine Grösse im Verhältnisse zu r_1, r_3 ist, so würde die Ermittelung von $T_3 - T_1$ aus dieser Formel unsicher; ENCKE hat im Berliner Jahrbuch für 1833 eine Umformung gegeben, die auch ohne die von ihm gerechnete Hilfstafel eine scharfe Lösung erlaubt. Setzt man

$$\eta = \frac{\tau_2}{\sqrt{(r_1 + r_3)^3}} \qquad \sin\theta = \frac{3\eta}{\sqrt{8}} \quad \left(\log\frac{3}{\sqrt{8}} = 0{\cdot}025576\right)$$

$$\tau_2 = 2k(T_3 - T_1) \qquad \mu = \frac{3\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\theta}\sqrt{\cos\frac{2\theta}{3}},$$

so wird

$$s_2 = \frac{\tau_2\mu}{\sqrt{r_1 + r_3}};$$

ist $\theta < 45°$, so giebt es nur eine Lösung ($v_3 - v_1 < 180°$); für $\theta > 45°$ giebt es die Lösungen

$$\theta \quad \text{und} \quad 180° - \theta,$$

wobei die zweite zu nehmen ist ($v_3 - v_1 > 180°$). Aus dieser ENCKE'schen Transformation findet man einen sehr eleganten Ausdruck für den Werth Sector durch Dreieck nach Formel I*.

Nennt man

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} k(T_3 - T_1)$$
$$\sin\theta^0 = \frac{\theta_2}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\theta^0}{3}\sqrt{2},$$

so wird

$$\frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}} = \frac{1 + 2\sec\gamma}{3}.$$

Der Beweis möge der Kürze wegen übergangen werden.

---

[1]) J. H. LAMBERT, Insigniores orbitae cometarum proprietates. Augustae Vindelicorum, 1761, § 83, 210—213.

Um die Bedingung einzuführen, dass die drei beobachteten Orte in einer Parabel liegen, berücksichtige man, dass

$$\cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_1}} \qquad \cos\frac{v_3}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_3}}$$

ist, und wegen

$$f = \frac{v_3 - v_1}{2} \qquad \frac{v_3}{2} = f + \frac{v_1}{2}$$

ist; es ist also

$$\sqrt{\frac{q}{r_3}} = \cos f \cdot \sqrt{\frac{q}{r_1}} - \sin f \sin\frac{v_1}{2},$$

daher

$$\sin\frac{v_1}{2} = \left(\sqrt{\frac{q}{r_1}}\cos f - \sqrt{\frac{q}{r_3}}\right) \operatorname{cosec} f$$

und

$$\operatorname{tang}\frac{v_1}{2} = \frac{\dfrac{\operatorname{cotang} f}{\sqrt{r_1}} - \dfrac{\operatorname{cosec} f}{\sqrt{r_3}}}{1 : \sqrt{r_1}} = \operatorname{cotang} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \operatorname{cosec} f,$$

es ist aber

$$\operatorname{cotang} f = \frac{\sqrt{(r_1 + r_3 + s_2)(r_1 + r_3 - s_2)}}{\sqrt{(r_1 - r_3 + s_2)(-r_1 + r_3 + s_2)}}$$

$$\operatorname{cosec} f = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{\sqrt{(r_1 - r_3 + s_2)(-r_1 + r_3 + s_2)}}$$

daher

$$\operatorname{tang}\frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{(r_1 + r_3 + s_2)(r_1 + r_3 - s_2)} - 2r_1}{\sqrt{(r_1 - r_3 + s_2)(-r_1 + r_3 + s_2)}}.$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen findet man v_1 aus r_1, r_2 und s_3 und daher

$$\operatorname{tang}\frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + s_3)(r_1 + r_2 - s_3)} - 2r_1}{\sqrt{(r_1 - r_2 + s_3)(-r_1 + r_2 + s_3)}},$$

folglich

$$\frac{\sqrt{(r_1 + r_3 + s_2)(r_1 + r_3 - s_2)} - 2r_1}{\sqrt{(r_1 - r_3 + s_2)(-r_1 + r_3 + s_2)}} = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + s_3)(r_1 + r_2 - s_3)} - 2r_1}{\sqrt{(r_1 - r_2 + s_3)(-r_1 + r_2 + s_3)}} \tag{II}$$

Fügt man den Gleichungen (I) und (II) als dritte die Bedingung einer durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Ebene hinzu, nämlich

$$\frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} = \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{x_3 y_1 - x_1 y_3}, \tag{III}$$

so hat man die Grundgleichungen des Kometenproblemes in ihrer einfachsten Form, wie sie von OLBERS in seiner bekannten Abhandlung (Auflage von ENCKE 1847) § 8 aufgestellt worden sind.

Um das Wesen der OLBERS'schen Methode zu erläutern, kehren wir zu den Ausdrücken für die heliocentrischen Coordinaten zurück, ersetzen aber die dort gebrauchten Erdlängen L durch die Sonnenlängen $\odot$, ferner die curtirten Distanzen von der Erde Δ durch die wirklichen Distanzen ρ und vernachlässigen die Sonnenbreite; dann ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho_1 \cos\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \cos\odot_1 & x_2 &= \rho_2 \cos\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \cos\odot_2 \\
y_1 &= \rho_1 \sin\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \sin\odot_1 & y_2 &= \rho_2 \sin\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \sin\odot_2 \\
z_1 &= \rho_1 \sin\beta_1 & z_2 &= \rho_2 \sin\beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \rho_3 \cos\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \cos\odot_3 \\
y_3 &= \rho_3 \sin\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \sin\odot_3 \\
z_3 &= \rho_3 \sin\beta_3
\end{aligned}$$

und es ergeben sich daraus die Bedingungsgleichungen für die Ebene

$$0 = [r_2r_3](\rho_1 \cos\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \cos\odot_1) - [r_1r_3](\rho_2 \cos\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \cos\odot_2) + [r_1r_2](\rho_3 \cos\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \cos\odot_3)$$

$$0 = [r_2r_3](\rho_1 \sin\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \sin\odot_1) - [r_1r_3](\rho_2 \sin\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \sin\odot_2) + [r_1r_2](\rho_3 \sin\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \sin\odot_3)$$

$$0 = [r_2r_3]\rho_1 \sin\beta_1 - [r_1r_3]\rho_2 \sin\beta_2 + [r_1r_2]\rho_3 \sin\beta_3.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen ρ_2 und $[r_1r_3]$, so findet man

$$\rho_3 = \frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]}\rho_1 \frac{\sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\odot_2 - \lambda_2) - \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\odot_2 - \lambda_1)}{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_3) - \cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_2)} + \frac{\frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]} R_1 \sin\beta_2 \sin(\odot_2 - \odot_1) - R_3 \sin\beta_2 \sin(\odot_3 - \odot_2)}{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_3) - \cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_2)},$$

Es ist aber

$$[R_2R_3] = R_2R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)$$
$$[R_1R_2] = R_1R_2 \sin(\odot_2 - \odot_1).$$

Schreibt man nun den Ausdruck für ρ_3 in der Form

$$\rho_3 = M\rho_1 + m,$$

so ist

$$m = \frac{\sin\beta_2}{R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1)} \cdot \frac{\frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]} - \frac{[R_2R_3]}{[R_1R_2]}}{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_3) - \cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_2)}.$$

Führt man die bekannten Reihenentwicklungen

$$\frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt}\ldots\right)$$

$$\frac{[R_2R_3]}{[R_1R_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{R_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{r_2^4}\frac{dR_2}{dt}\ldots\right)$$

in den obigen Ausdruck ein, so findet man unter Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung bei ungleichen Zwischenzeiten und dritter Ordnung bei gleichen Zwischenzeiten (welche letztere Bedingung man immer durch geschickte Wahl der Beobachtungen wenigstens annähernd anstreben soll)

$$m = 0$$
$$\rho_3 = M\rho_1$$

und

$$M = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\frac{\sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\odot_2 - \lambda_2) - \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\odot_2 - \lambda_1)}{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_3) - \cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\odot_2 - \lambda_2)}.$$

In der Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten ist der Charakter der OLBERS'schen Methode ausgedrückt, indem OLBERS § 33 seiner Abhandlung sagt:

»Viel näher kommt man der Wahrheit, wenn man sich blos mit dem Satze begnügt, dass die Chorde der Kometenbahn vom mittleren Radiusvector im Verhältnisse der Zeiten geschnitten werde. Und nimmt man zugleich an, auch die Chorde der Erdbahn werde im nämlichen Verhältnisse geschnitten, so erhält man eine zwar indirekte, aber so leichte und bequeme Methode etc.«

Führt man zur grösseren Vereinfachung die Neigung J des durch den mittleren Kometen- und Sonnenort gelegten grössten Kreises ein, setzt also

$$\operatorname{cotang} J = \frac{\sin(\lambda_2 - \odot_2)}{\operatorname{tang}\beta_2}, \tag{1}$$

so wird

$$M = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\frac{\sin\beta_1 \operatorname{cotang} J - \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \odot_2)}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \odot_2) - \sin\beta_3 \operatorname{cotang} J}, \tag{2}$$

dadurch wird nebst den äusseren Beobachtungen die Lage dieses grössten Kreises gegen die Ekliptik für die mittlere Beobachtung als Bestimmungsstück eingeführt, so dass die Zahl der Bestimmungsstücke auf fünf reducirt wird.

Quadrirt und addirt man die Gleichungen für $x_1 y_1 z_1$ und $x_3 y_3 z_3$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1)\cos\beta_1 + \rho_1^2 \\ r_3^2 &= R_3^2 - 2\rho_3 R_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3)\cos\beta_3 + \rho_3^2 \\ \rho_3 &= M\rho_1 . \end{aligned} \tag{3}$$

Ferner erhalten wir, da

$$s_2^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

$$\begin{aligned} s^2 = r_1^2 + r_3^2 &- 2\rho_1 R_3 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \odot_3) + 2\rho_3 R_1 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \odot_1) \\ &- 2R_1 R_3 \cos(\odot_3 - \odot_1) - 2\rho_1\rho_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)\cos\beta_1\cos\beta_3 \\ &- 2\rho_1\rho_3 \sin\beta_1 \sin\beta_3 . \end{aligned} \tag{4}$$

Endlich ist (pag. 504)

$$6k(T_3 - T_1) = 6\tau_2 = (r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) lösen das Problem, durch Versuche eine geocentrische Distanz des Kometen von der Erde zu finden, vollständig. Es wird nach den Formeln (1) und (2) zunächst das Verhältniss der geocentrischen Distanzen im ersten und dritten Ort bestimmt; dann werden nach den Formeln (3) und (4) unter der Annahme eines Werthes für ρ_1 (aus praktischen Gründen meist $\rho_1 = 1$) die Werthe von r_1, r_3 und s_2 gerechnet, und mit Hilfe dieser Werthe die Zwischenzeit nach der Gleichung (5) ermittelt. Stimmt die berechnete Zwischenzeit mit der beobachteten überein, so ist die Annahme von ρ_1 richtig gewesen. Meistens ist dies indessen nicht der Fall, und man wird den Werth von ρ_1 variiren müssen, bis genügende Uebereinstimmung erfolgt. Im späteren Verlaufe werden wir sehen, dass auch die Annahme

$$r_1 + r_3 = 2$$

bei dem ersten Versuche als Näherung angenommen werden kann; überhaupt kann man sich bei der Lichtstärke und Objectivöffnung der heut zu Tage zur Entdeckung von Kometen angewandten Fernrohre nur von bestimmten praktischen Regeln über die Annahme der einen oder anderen Grösse leiten lassen.

Hat man so die Grössen ρ_1 und ρ_3 ermittelt, so geben die Formeln

$$\begin{aligned} \rho_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1)\cos\beta_1 - R_1 &= r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) \\ \rho_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1)\cos\beta_1 &= r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) \\ \rho_1 \sin\beta_1 &= r_1 \sin b_1 \\ \rho_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3)\cos\beta_3 - R_3 &= r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) \\ \rho_3 \sin(\lambda_3 - \odot_3)\cos\beta_3 &= r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \odot_3) \\ \rho_3 \sin\beta_3 &= r_3 \sin b_3 \end{aligned}$$

die Grössen r_1, l_1, b_1 und r_3, l_3, b_3 (Uebergang auf den heliocentrischen Ort). Die so erhaltenen Werthe von r_1 und r_3 müssen mit den früher gefundenen übereinstimmen, eine Probe, die indessen nur die Gleichungen (3) prüft.

Der Knoten und die Neigung der Bahn werden nach den bekannten Formeln (pag. 488) berechnet

$$\tan i \sin(l_1 - \Omega) = \tan b_1$$

$$\tan i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\tan b_3 - \tan b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)} .$$

Dabei ist zu beachten, dass im Falle abnehmender heliocentrischer Längen (retrograde Bewegung), also für

$$l_3 - l_1 \text{ negativ}$$

nach GAUSS'scher Zählweise *tang i* negativ zu nehmen ist, während im Falle wachsender heliocentrischer Längen, also für

$$l_3 - l_1 \text{ positiv}$$

tang i ebenfalls positiv gerechnet wird. Die Argumente der Breite u_1 und u_3 werden nach den Gleichungen gefunden (pag. 488)

$$tang\, u_1 = tang\,(l_1 - \Omega)\, sec\, i \qquad tang\, u_3 = tang\,(l_3 - \Omega)\, sec\, i.$$

Bezüglich der Quadranten von u_1 und u_3 mag die Bemerkung gelten, dass dieselben mit Hilfe der leicht zu beweisenden Gleichungen

$$sin\, u_1 = \frac{sin\, b_1}{sin\, i} \quad sin\, u_3 = \frac{sin\, b_3}{sin\, i}$$

bestimmt werden; ist i nahe gleich 90°, so empfehlen sich die Formeln

$$tang\, u_1 = \frac{tang\, b_1}{cos\,(l_1 - \Omega)\, sin\, i} \qquad tang\, u_3 = \frac{tang\, b_3}{cos\,(l_3 - \Omega)\, sin\, i}.$$

Wegen der Relation

$$u_3 - u_1 = v_3 - v_1$$

muss sein

$$tang\, \frac{u_3 - u_1}{2} = \sqrt{\frac{(r_1 - r_3 + s_2)(-r_1 + r_3 + s_2)}{(r_1 + r_3 + s_2)(r_1 + r_3 - s_2)}},$$

woraus sich eine weitere Probe für die Richtigkeit der Coëfficienten der Gleichung (4) ergiebt. Die Werthe von r_1, r_3 und s_2 sind aus den Versuchen zu entnehmen; sollten sich, was bei der Kleinheit des Winkels $u_3 - u_1$ bei ersten Bahnbestimmungen unvermeidlich ist, Differenzen ergeben, so wird man entweder den Werth aus $tang\, u_1$ und $tang\, u_3$ beibehalten, oder, wenn man diesen Werth mit

$$(u_3 - u_1)\, d$$

bezeichnet, jenen aus den Versuchen genommenen mit

$$(u_3 - u_1)\, p,$$

die Grössen u_1 und u_3 um die Beträge corrigiren

$$\Delta u_1 = \tfrac{1}{4}\,[(u_3 - u_1)\, d - (u_3 - u_1)\, p]$$
$$\Delta u_3 = -\Delta u_1.$$

Die Ermittlung der Grössen v_1 und v_3 erfolgt mit Hilfe der folgenden Gleichungen. Es ist nämlich wegen

$$f = \frac{v_3 - v_1}{2} = \frac{u_3 - u_1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\, sin\, \frac{v_1}{2} = \frac{cotang\, \frac{u_3 - u_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \frac{cosec\, \frac{u_3 - u_1}{2}}{\sqrt{r_3}}$$

$$\frac{1}{q}\, cos\, \frac{v_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

Da nun

$$v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$$

ist, so findet man die Zeit des Durchganges durch das Perihel T

$$T = t_1 - M_1\, q^{\frac{3}{2}} \qquad T = t_3 - M_3\, q^{\frac{3}{2}},$$

worin M aus der BARKER'schen Tafel nach OPPOLZER's Annahme entnommen wird. Die Uebereinstimmung der Werthe T muss eine vollständige innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung sein; der Werth M ist nach OPPOLZER

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\left(tang\, \frac{v}{2} + \frac{1}{3}\, tang^3\, \frac{v}{2}\right).$$

Wendet man die BARKER'sche Tafel in ihrer ursprünglichen Form an und nennt M' den Tafelwerth, so ist

$$M = M' n$$
$$\log n = 0{\cdot}039872.$$

Endlich muss

$$\omega = u_3 - v_3 = u_1 - v_1$$

sein.

Hat man auf diese Weise die Elemente berechnet, so sucht man aus der Zeit des Periheldurchganges T und der mittleren Beobachtungszeit t_2 mit Hilfe der BARKER'schen Tafel den zugehörigen Werth

$$v_2,$$

damit wird

$$u_2 = v_2 + \omega,$$

und mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - \Omega) &= r_2 \cos u_2 + R_2 \cos(\odot_2 - \Omega) \\ \rho_2 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \Omega) &= r_2 \sin u_2 \cos i + R_2 \sin(\odot_2 - \Omega) \\ \rho_2 \sin\beta_2 &= r_2 \sin u_2 \sin i. \end{aligned}$$

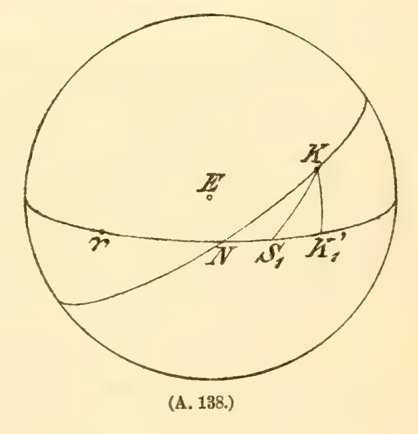
Sind λ_2^0 und β_2^0 die aus vorstehenden Gleichungen berechneten Werthe, λ_2 und β_2 die beobachteten, so sollte wegen Einführung der die mittlere Beobachtung und den mittleren Sonnenort enthaltenden Ebene als fünftes Datum der Bahnbestimmung die Gleichung

$$\frac{\sin(\lambda_2 - \odot_2)}{\tang\beta_2} = \frac{\sin(\lambda_2^0 - \odot_2)}{\tang\beta_2^0}$$

streng erfüllt sein; treten Differenzen auf, so sind diese in Beobachtungsfehlern, etwaiger Ellipticität der Bahn etc. zu suchen, und man wendet den sogen. Kunstgriff von CARLINI an, indem man $\log\cotang J$ um so viele Einheiten der letzten Stelle im verkehrten Sinne ändert, als diese Werthe von einander abweichen; mit dem so geänderten Werthe von $\cotang J$ wird die Rechnung neuerdings durchgeführt. Im Grunde genommen ist ein diesem analoges Verfahren schon von GAUSS (Summarische Uebersicht etc., Monatl. Correspondenz, Bd. 20, pag. 221) bei der Verbesserung einer Planetenbahn vorgeschlagen worden.

Es erübrigt noch die von GAUSS (Monatl. Corr., Bd. 28, pag. 504 ss.) eingeführten Vereinfachungen[1]) zum Zwecke leichterer numerischer Rechnung anzuführen. Die Gleichungen (3) für die Radienvectoren lauten:

$$r_1^2 = \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1)$$
$$r_3^2 = M^2\rho_1^2 + R_3^2 - 2M\rho_1 R_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3).$$



(A. 138.)

In Fig. 138 sei das Centrum der scheinbaren Himmelskugel die Erde E; ♈ sei der Widderpunkt, S_1 der erste Sonnenort, K der erste Kometenort, KK_1' senkrecht auf die Ekliptik NS_1K_1', also

$$KK_1' = \beta_1$$
$$KS_1 = \psi_1$$

sei die Elongation des Kometen von der Sonne

$$\text{Winkel } KS_1K_1' = P_1$$

und

$$K_1'S_1 = \lambda_1 - \odot_1,$$

dann wird

[1]) Es sind dies nicht mehr die GAUSS'schen Vereinfachungen in ihrer eigentlichen Form, sondern die durch Einführung neuer Hilfswinkel transformirten GAUSS'schen Annahmen.

$$\cos\psi_1 = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1)$$
$$\sin\psi_1 \cos P_1 = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1)$$
$$\sin\psi_1 \sin P_1 = \sin\beta_1$$

und ebenso für den dritten Ort

$$\cos\psi_3 = \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3)$$
$$\sin\psi_3 \cos P_3 = \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \odot_3)$$
$$\sin\psi_3 \sin P_3 = \sin\beta_3,$$

damit wird

$$r_1 = \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos\psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2\psi_1}$$
$$r_3 = \sqrt{(M\rho_1 - R_3 \cos\psi_3)^2 + R_3^2 \sin\psi_3}.$$

Setzt man

$$R_1 \cos\psi_1 = f_1 \qquad R_1 \sin\psi_1 = B_1$$
$$\frac{R_3 \cos\psi_3}{M} = f_3 \qquad \frac{R_3 \sin\psi_3}{M} = B_3,$$

so erhält man

$$r_1 = \sqrt{(\rho_1 - f_1)^2 + B_1^2} = B_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1 - f_1}{B_1}\right)^2}$$
$$r = M\sqrt{(\rho_1 - f_3)^2 + B_3^2} = MB_3\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1 - f_3}{B_3}\right)^2},$$

Führt man die Hilfswinkel θ_1 und θ_3 durch die Gleichungen

$$\frac{\rho_1 - f_1}{B_1} = tang\,\theta_1 \qquad \frac{\rho_3 - f_3}{B_3} = tang\,\theta_3,$$

ein, so werden

$$r_1 = R_1 \sin\psi_1 \sec\theta_1 \qquad r_3 = R_3 \sin\psi_3 \sec\theta_3 .$$

Für die Sehne s wurde Gleichung (4) gefunden

$$s_2^2 = [(M\rho_1 \cos\lambda_3 \cos\beta_3 - \rho_1 \cos\lambda_1 \cos\beta_1) - (R_3 \cos\odot_3 - R_1 \cos\odot_1)]^2 +$$
$$+ [M\rho_1 \sin\lambda_3 \cos\beta_3 - \rho_1 \sin\lambda_1 \cos\beta_1) - (R_3 \sin\odot_3 - R_1 \sin\odot_1)]^2$$
$$+ (M\rho_1 \sin\beta_3 - \rho_1 \sin\beta_1)^2.$$

Substituiren wir

$$R_3 \cos\odot_3 - R_1 \cos\odot_1 = g \cos G$$
$$R_3 \sin\odot_3 - R_1 \sin\odot_1 = g \sin G$$

oder wenn man die Längen von $\odot_1$ aus zählt

$$R_3 \cos(\odot_3 - \odot_1) - R_1 = g\cos(G - \odot_1)$$
$$R_3 \sin(\odot_3 - \odot_1) \qquad = g\sin(G - \odot_1),$$

so ist

g die Sehne der Erdbahn vom ersten zum dritten Ort,
G die Länge des dritten Erdortes vom ersten aus gesehen.

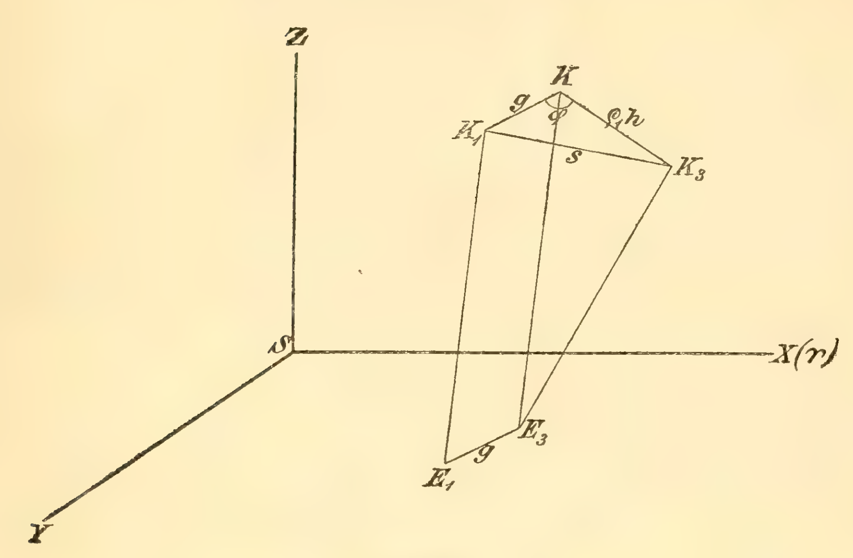
Es sei (Fig. 139) die XY-Ebene die Ekliptik, der Anfangspunkt S die Sonne; die positive X-Axe $S\,♈$ sei nach dem Frühlingspunkt, die positive Y-Axe SY nach dem Punkt von 90° Länge, die positive Z-Axe SZ nach dem Nordpol der Ekliptik gerichtet; bezeichnet man die beiden Erdorte mit E_1 und E_3, die Kometenorte mit K_1 und K_3 und zieht E_3K gleich und parallel E_1K_1, so ist, wenn man die Coordinaten von

K_1 mit x_1, y_1, z_1
K_3 „ x_3, y_3, z_3
K „ x, y, z

bezeichnet,

$$x_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 - R_1 \cos\odot_1 \qquad x_3 = \rho_3 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - R_3 \cos\odot_3$$
$$y_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 - R_1 \sin\odot_1 \qquad y_3 = \rho_3 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - R_3 \sin\odot_3$$
$$z_1 = \rho_1 \sin\beta_1 \qquad z_3 = \rho_3 \sin\beta_3$$

$$x = \rho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 - R_3 \cos\odot_3$$
$$y = \rho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 - R_3 \sin\odot_3$$
$$z = \rho_1 \sin\beta_1.$$



(A. 139.)

Da aber

$$x_3 - x_1 = (x_3 - x) - (x_1 - x)$$
$$y_3 - y_1 = (y_3 - y) - (y_1 - y)$$
$$z_3 - z_1 = (z_3 - z) - (z_1 - z)$$

ist, so wird, wenn man KK_3 mit $\rho_1 h$ bezeichnet und die Länge und Breite des Punktes K_3 in Bezug auf $K\ H$ und ζ genannt werden,

$$x_3 - x = \rho_1 h \cos\zeta \cos H = M\rho_1 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \rho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1$$
$$y_3 - y = \rho_1 h \cos\zeta \sin H = M\rho_1 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 - \rho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1$$
$$z_3 - z = \rho_1 h \sin\zeta = M\rho_1 \sin\beta_3 - \rho_1 \sin\beta_1$$

und ferner

$$x_1 - x = R_3 \cos\odot_3 - R_1 \cos\odot_1 = g \cos G$$
$$y_1 - y = R_3 \sin\odot_3 - R_1 \sin\odot_1 = g \sin G$$

daher

$$s_2{}^2 = (h\rho_1 \cos\zeta \cos H - g \cos G)^2$$
$$+ (h\rho_1 \cos\zeta \sin H - g \sin G)^2 + h^2\rho_1{}^2 \sin^2\zeta$$

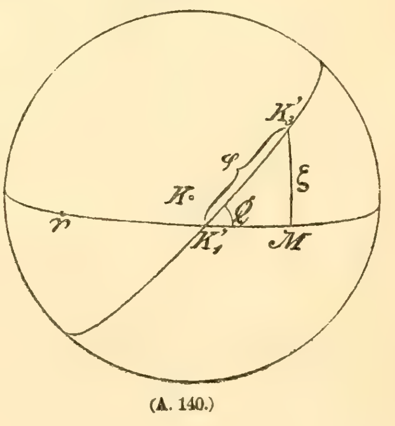
oder

$$s_2^2 = h^2 \rho_1^2 + g^2 - 2 h\rho_1 g \cos\zeta \cos(G - H).$$

In Bezug auf den Punkt K hat

K_1 die sphärischen Coordinaten $g,\ G,\ 0$

K_3 „ „ „ $\rho,\ h,\ H,\ \zeta.$



(A. 140.)

Macht man also für einen Augenblick K zum Centrum einer Kugel (Fig. 140) mit dem Radius $= 1$ und nennt

K_1' und K_3'

die Durchschnittspunkte der Linien

KK_1 und KK_3

mit der Kugeloberfläche, so ist

$$K_1'M = G - H$$

und wenn man

$$K_1'K_3' = \varphi$$
$$\text{Winkel } K_3'K_1'M = Q$$

bezeichnet, so folgt

$$\cos\varphi = \cos\zeta\cos(G-H)$$
$$\sin\varphi\cos Q = \cos\zeta\sin(G-H)$$
$$\sin\varphi\sin Q = \sin\zeta.$$

Daher wird

$$s_2 = h\sqrt{\rho_1^2 - \frac{2g}{h}\cos\varphi\,\rho_1 + \frac{g^2}{h^2}}$$

oder

$$s_2 = h\sqrt{\left(\rho_1 - \frac{g}{h}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{g}{h}\sin\varphi\right)^2}.$$

Setzt man

$$\frac{g}{h}\cos\varphi = \gamma \qquad \frac{g}{h}\sin\varphi = \Gamma,$$

so resultirt

$$s_2 = h\sqrt{(\rho_1-\gamma)^2 + \Gamma^2},$$

macht man endlich

$$\frac{\rho_1-\gamma}{\Gamma} = \operatorname{cotang}\vartheta,$$

so wird

$$s_2 = h\Gamma\operatorname{cosec}\vartheta = g\sin\varphi\operatorname{cosec}\vartheta.$$

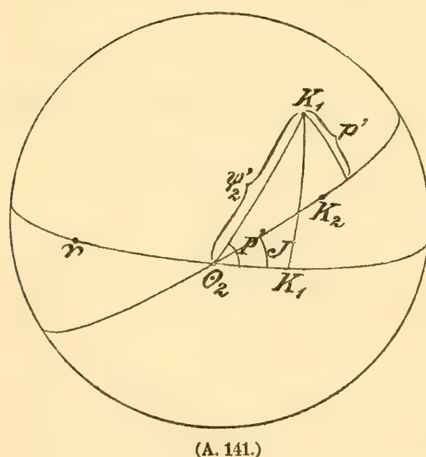
c) Der Ausnahmefall.

Betrachten wir in dem Ausdrucke von M [Gleichung (2)] den trigonometrischen Theil, nämlich

$$\frac{\sin\beta_1\operatorname{cotang}J - \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - \odot_2)}{\cos\beta_3\sin(\lambda_3-\odot_2) - \sin\beta_3\operatorname{cotang}J},$$

worin

$$\operatorname{cotang}J = \frac{\sin(\lambda_2-\odot_2)}{\operatorname{tang}\beta_2},$$



(A. 141.)

so lässt sich eine Deutung desselben nachweisen. Ziehen wir nämlich (Fig. 141) den grössten Kreis durch den mittleren Sonnen- und Kometenort und fällen vom ersten bezw. dritten Kometenort die sphärischen Perpendikel $p'p'''$ auf diesen grössten Kreis (die Construction für den dritten Kometenort wurde auf der Figur nicht durchgeführt, um dieselbe nicht zu compliciren), so folgt aus der Figur

$$\sin\psi_2'\sin(P'-J) = \sin p'$$

oder

$$\sin\psi_2'\sin P'\cos J - \sin\psi_2'\cos P'\sin J = \sin p'$$

oder mit Rücksicht auf die früheren Entwicklungen (pag. 510)

$$\sin\psi_2'\cos P' = \cos\beta_1\sin(\lambda_1-\odot_2)$$
$$\sin\psi_2'\sin P' = \sin\beta_1,$$

damit wird

$$\sin p' = \sin\beta_1\cos J - \cos\beta_1\sin(\lambda_1-\odot_2)\sin J$$

und ähnlich

$$\sin p''' = \cos\beta_3\sin(\lambda_3-\odot_2)\sin J - \sin\beta_3\cos J.$$

Es folgt

$$\frac{\sin p'}{\sin p'''} = \frac{\sin\beta_1\operatorname{cotang}J - \cos\beta_1\sin(\lambda_1-\odot_2)}{\cos\beta_3\sin(\lambda_3-\odot_2) - \sin\beta_3\operatorname{cotang}J}.$$

Es ist also der trigonometrische Theil von M gleich dem Verhältnisse der sphärischen Perpendikel vom 1. und 3. Kometenorte auf den durch den mittleren Sonnen- und Kometenort gelegten grössten Kreis. Liegen der erste und dritte Kometenort in demselben grössten Kreise, so erhält man

$$M = \frac{0}{0}$$

und diesem unbestimmten Werthe wird sich M schon nähern, wenn der Fall nur beiläufig eintritt.

Für diesen Fall schlägt OPPOLZER vor, den grössten Kreis durch den mittleren Kometenort so zu legen, dass die Summe der Quadrate des Zählers und Nenners von M ein Maximum wird. Führen wir also dort statt der Grösse $\odot_2$ des aufsteigenden Knotens einen vorläufig beliebigen Werth Π ein und nennen den Winkel zwischen diesem neuen Kreise und dem Breitenkreise in der mittleren Beobachtung W, so ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} \sin J \cos(\lambda_2 - \Pi) &= \cos W \\ \sin J \sin(\lambda_2 - \Pi) &= \sin W \sin\beta_2 \\ \cos J &= \sin W \cos\beta_2 . \end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Werthe in die Fundamentalgleichung und Ermittlung des Maximums, welche Operationen ich hier der Kürze wegen übergehe, erhält man zur Bestimmung der Grössen Π und J, da es sich hier nur um eine genäherte Erfüllung der Bedingung handelt

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_2 - \Pi) \tang J &= \tang\beta_2 \\ \cos(\lambda_2 - \Pi) \tang J &= -\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\beta_3 - \beta_1} , \end{aligned}$$

worin J stets zwischen 0° und 90° zu wählen ist[1]).

Durch Elimination der Grösse ρ_2 aus den Fundamentalgleichungen erhält man ρ_3 in der Form

$$\rho_3 = M\rho_1 + m,$$

worin

$$M = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \frac{\sin\beta_1 \cos J - \sin(\lambda_1 - \Pi)\cos\beta_1 \sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}$$

und

$$m = \frac{\sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}\left(\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} R_1 \sin(\odot_1 - \Pi) - \right.$$
$$\left. - \frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} R_2 \sin(\odot_2 - \Pi) + R_3 \sin(\odot_3 - \Pi)\right)$$

sind. Subtrahirt man von dem Klammerausdrucke die leicht zu beweisende auf Null reducirte Gleichung

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} R_1 \sin(\odot_1 - \Pi) - \frac{[R_1 R_3]}{[R_1 R_2]} R_2 \sin(\odot_2 - \Pi) + R_3 \sin(\odot_3 - \Pi) = 0,$$

so wird

$$m = \frac{\sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}\left[\left(\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} - \frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]}\right) R_1 \sin(\odot_1 - \Pi) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} - \frac{[R_1 R_3]}{[R_1 R_2]}\right) R_2 \sin(\odot_2 - \Pi)\right].$$

[1]) Für den Fall, dass die Beobachtungen dem Pole der Ekliptik nahe liegen, also β_1 und β_3 sehr gross sind, wird man sich der strengen Formeln bedienen müssen, die OPPOLZER in seinem Lehrbuche I. Bd., 2. Aufl., pag. 284, gegeben hat. Da dieser Fall relativ selten eintritt, so glaubte ich von der Angabe der Formeln Abstand nehmen zu dürfen.

Ersetzt man die Symbole durch

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3}\,\ldots\right)$$

$$\frac{[r_1 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3}\,\ldots\right).$$

Ferner

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{(R_1 + R_3)^3}\,\ldots\right)$$

$$\frac{[R_1 R_?]}{[R_1 R_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{(R_1 + R_3)^2}\,\ldots\right),$$

so wird

$$m = \tfrac{4}{3}\,\frac{\sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}\left(\frac{1}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{1}{(R_1 + R_3)^3}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_3}(\tau_2^2 - \tau_3^2) R_2 \sin(\odot_2 - \Pi) - \frac{\tau_1}{\tau_3}(\tau_1^2 - \tau_3^2) R_1 \sin(\odot_1 - \Pi)\right).$$

Berücksichtigt man, dass man entwickeln kann

$$\odot_1 = \odot_2 - \alpha\tau_3 + \beta\tau_3^2 \ldots\ldots$$
$$\odot_3 = \odot_2 + \alpha\tau_1 + \beta\tau_1^2 \ldots\ldots$$

und dass

$$\tau_2(\tau_2^2 - \tau_3^2) - \tau_1(\tau_1^2 - \tau_3^2) = 3\tau_1\tau_2\tau_3$$

ist, so wird

$$m = \frac{4 \sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}\left(\frac{1}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{1}{(R_1 + R_3)^3}\right)$$
$$\left(\tau_1\tau_2 R_2 \sin(\odot_2 - \Pi) + \frac{1}{3}\alpha\tau_1\tau_2(\tau_1 - \tau_3)\right).$$

Das zweite Glied im letzten Faktor kann, weil es dritter Ordnung ist, vernachlässigt werden, und man erhält

$$m = \frac{4 \sin J}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \sin J - \sin\beta_3 \cos J}\left[\frac{1}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{1}{(R_1 + R_3)^3}\right]\cdot$$
$$\cdot\,\tau_1\tau_2 R_2 \sin(\odot_2 - \Pi).$$

Setzt man also

$$M = \frac{\tau_1}{\tau_3}\,\frac{\sin\beta_1 \operatorname{cotang} J - \sin(\lambda_1 - \Pi)\cos\beta_1}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 - \sin\beta_3 \operatorname{cotang} J}$$

$$F = 4\tau_1\tau_2\,\frac{R_2 \sin(\odot_2 - \Pi)}{\sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 - \sin\beta_3 \operatorname{cotang} J}$$

$$C = -\frac{F}{(R_1 + R_3)^3},$$

so ist

$$m = C + \frac{F}{(r_1 + r_3)^3} \quad \text{und} \quad \rho_3 = M\rho_1 + m.$$

Auch hier lassen sich noch zweckmässige Umformungen zum leichteren rechnerischen Gebrauche angeben. Indessen wird man die OPPOLZER'sche Methode der bedeutenden Mehrarbeit wegen (sie erfordert etwa die doppelte Zeit der OLBERS'schen Methode) nur in den dringendsten Fällen in Anwendung bringen; man wird vielmehr entweder nach der OLBERS'schen Methode die Bahnbestimmung durchführen und mit Hilfe der gerechneten Elemente die Grösse M verbessern oder durch irgend eine der später angegebenen Methoden die Grösse M der Wahrheit näher bringen. (Eine Zusammenstellung der Formeln nach OPPOLZER's Methode findet sich bei dem Rechenbeispiele.)

d) Mehrfache Lösungen des Problemes.

Obgleich die Möglichkeit einer mehrfachen Lösung des Kometenproblemes schon aus den Grundgleichungen ersichtlich ist und um so mehr vermuthet werden kann, als ja eigentlich die GAUSS'sche Methode, welche mehrfache Lösungen zulässt, das parabolische Bahnbestimmungsproblem in sich enthält, so war OPPOLZER doch der erste, der in seinem »Lehrbuch der Bahnbestimmungen« I. Bd., 2. Aufl. (1882), pag. 308 ff., die Untersuchung für die Parabel in Angrift nahm.

Aus der EULER'schen Gleichung I folgt genähert

$$s_2 = \frac{2k(t_3 - t_1)}{\sqrt{2r_2}}$$

und ferner ist

$$r_2^2 = (\rho_2 - R_2 \cos\psi_2)^2 + R_2^2 \sin^2\psi_2$$

$$s_2^2 = (h\rho_2 - g\cos\varphi)^2 + g\sin^2\varphi = \frac{2k^2(t_3 - t_1)^2}{r_2},$$

wo die Hilfsgrössen eine ähnliche Bedeutung für den zweiten Ort haben, wie die früher abgeleiteten für den ersten und dritten Ort. Aus dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit eines Himmelskörpers in seiner Bahn [Gleichung (18)], ergiebt sich genähert die Sehne der Erdbahn

$$g = k(t_3 - t_1)\sqrt{\frac{1}{2R_3} - 1},$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung der Erdbahnexcentricität

$$g = \frac{k(t_3 - t_1)}{R_2}.$$

Es ist daher

$$s_2^2 = \frac{2g^2R_2^2}{r_2}$$

oder

$$(h\rho_2 - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi = \frac{2g^2R_2^2}{\sqrt{\rho_2^2 - 2R_2\rho_2\cos\psi_2 + R_2^2}}.$$

Setzt man

$$\frac{\rho_2}{R_2} = x \qquad R_2^2\frac{h^2}{g^2} = \alpha^2,$$

so wird

$$(\alpha^2x^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x + 1)^2(x^2 - 2\cos\psi_2\,x + 1) = 4R_2^2. \tag{A}$$

Diese Gleichung sechsten Grades hat immer zwei imaginäre Wurzeln; denn differenziirt man den Ausdruck und setzt denselben gleich Null, so wird der Faktor

$$\alpha^2x^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x + 1 = 0,$$

der, so lange x reell und $\cos\varphi < \pm 1$ ist, niemals Null werden kann; man erhält dann die folgende Gleichung dritten Grades[1])

$$\begin{aligned} 2(\alpha^2x - \alpha\cos\varphi)(x^2 - 2\cos\psi_2 x + 1) + \\ + (\alpha^2x^2 - 2\cos\varphi\alpha x + 1)(x - \cos\psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{B}$$

Um die Möglichkeit positiver Lösungen von x (denn dasselbe ist gleich $\frac{\rho_2}{R_2}$, also nothwendig positiv) besser zu übersehen, construiren wir den Ausdruck

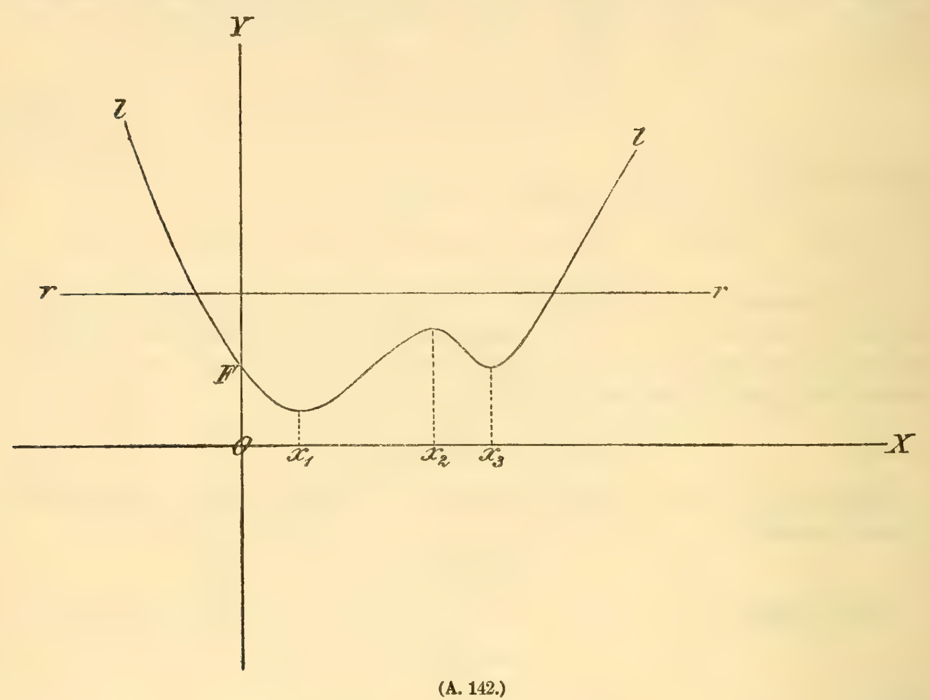
---

[1]) OPPOLZER, Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenprobleme. Sitzungsber. d. K. Akademie der Wissenschaften (Math.-naturwiss. Classe), Jahrg. 1882, pag. 885 ff.

linker Hand in der Gleichung 6. Grades als Curve, indem wir x als Abscisse, den Functionswerth als Ordinate betrachten, also die Curve, deren Gleichung

$$y = (\alpha^2 x^2 - 2\cos\varphi\alpha x + 1)^2 (x^2 - 2\cos\psi_2 x + 1)$$

ist; für den Fall $\cos\psi_2$ nahe gleich 1 und $\alpha \sin\psi_2$ sehr klein im Verhältniss zu $\alpha\cos\psi_2 - \cos\varphi$, denn nur unter dieser Bedingung findet wie bei dem Planetenprobleme (geringe Elongation von der Sonne) eine mehrfache Lösung statt.



(A. 142.)

Der ungefähre Verlauf der Curve wird durch ll (Fig. 142) dargestellt, während dem Ausdrucke rechter Hand in der Gleichung 6. Grades

$$y = 4 R_2^2$$

die Gerade rr entspricht. Man sieht sofort, dass drei positive und eine negative Wurzel, also vier reelle Wurzeln möglich sind.

Hat die Gleichung (B) nur eine reelle Wurzel, so ist überhaupt nur ein Minimum vorhanden, und die Gleichung (A) hat dann zwei reelle Wurzeln; da aber für $x = 0$

$$OF = 1$$

die Entfernung der Geraden rr von der Ordinatenaxe aber nahe 4 wird, so wird ein negatives (unbrauchbares) und ein positives x resultiren. Hat aber die Gleichung (B) drei reelle Wurzeln, so gestaltet sich die Curve wie in Fig. 142 und hat zwei Minima und ein Maximum. Dann können entweder zwei Durchschnittspunkte der Curve mit rr stattfinden, die einem positiven und einem negativen x entsprechen, oder vier Durchschnitte, die wegen der constanten Lage von F entweder drei positiven und einer negativen Wurzel oder umgekehrt drei negativen und einer positiven Wurzel entsprechen. Die Curve hat in dem zweiten Falle eine symmetrische Lage gegen den ersten.

Sollen aber vier Schnitte vorhanden sein, so müssen die folgenden Ungleichungen mit Rücksicht auf die Minimalwerthe und den Maximalwerth der Curve folgen; es muss

$$\begin{aligned}
(\alpha^2 x_1^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x_1 + 1)^2 (x_1^2 - 2\cos\psi_2 x_1 + 1) &< 4R_2^2 \\
(\alpha^2 x_2^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x_2 + 1)^2 (x_2^2 - 2\cos\psi_2 x_2 + 1) &> 4R_2^2 \qquad \text{(C)} \\
(\alpha^2 x_3^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x_3 + 1)^2 (x_3^2 - 2\cos\psi_2 x_3 + 1) &< 4R_2^2.
\end{aligned}$$

Ist x_1 die kleinste Wurzel dem Werthe nach, und beschränkt man sich auf positive Lösungen, so genügt es vollständig, wenn die beiden letzten Ungleichungen erfüllt sind; im Falle dreier negativer Lösungen entscheiden dagegen die beiden ersten Ungleichungen.

Löst man also die cubische Gleichung (B) auf, so findet man nach den bekannten trigonometrischen Formeln im Falle dreier reeller Wurzeln

$$y^3 - py + q = 0,$$

worin bedeuten

$$y = x - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right)$$

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right)^2 - \\ - \left(\frac{2}{3} + 2\cos\psi_2\frac{\cos\varphi}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^2}\right)$$

$$q = -\frac{2}{27}\left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 2\cos\psi_2\frac{\cos\varphi}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^2}\right)\cdot \\ \left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right) - \left(\frac{\cos\psi_2}{3\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right)$$

$$r^2 = \frac{4}{3}p \qquad \sin 3\omega = \frac{4q}{r^3},$$

r stets positiv und 3ω im ersten Quadranten mit dem Vorzeichen von q (also $\omega < \pm 30°$), so werden die Wurzeln der Grösse nach geordnet sein:

$$y_1 = -r\sin(60° + \omega) \qquad y_2 = r\sin\omega \qquad y_3 = r\sin(60° + \omega)$$

und

$$x_2 = r\sin\omega + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right)$$

$$x_3 = r\sin(60° - \omega) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\cos\psi_2 + \frac{4}{3}\frac{\cos\varphi}{\alpha}\right),$$

x_2 muss positiv sein, wenn drei positive Lösungen existiren sollen und gleichzeitig muss gelten:

$$\begin{aligned}
(\alpha^2 x_2^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x_2 + 1)^2 (x_2^2 - 2\cos\psi_2 x_2 + 1) &> 4R_2^2 \\
(\alpha^2 x_3^2 - 2\cos\varphi\,\alpha x_3 + 1)^2 (x_3^2 - 2\cos\psi_2 x_3 + 1) &< 4R_2^2.
\end{aligned}$$

Ein Beispiel bildet die Bahn des grossen Septemberkometen 1882, dessen in Coimbra angestellte Tagbeobachtungen lauten:

1882 Sept.	18·04782 m. Zt. Berl.	λ = 172° 46′ 57″·6	β = — 1° 37′ 14″·6
„ „	19·03886 „ „ „	= 171° 5′ 47″·9	= — 3° 23′ 26″·1
„ „	20·03157 „ „ „	= 169° 54′ 29″·1	= — 4° 48′ 20″·3.

Die bezüglichen Sonnenorte sind:

☉ = 175° 27′ 4″·9	$\log R$ = 0·001827
176° 25′ 12″·7	= 0·001706
177° 23′ 28″·1	= 0·001583.

Daraus ergeben sich

$$\log M = 0{\cdot}022803,$$

$$G = 267^\circ\, 22'\, 22''{\cdot}0$$
$$\log g = 8{\cdot}531373$$
$$H = 125^\circ\, 52'\, 49''{\cdot}6 \qquad \log \sin \psi_1 = 8{\cdot}736093$$
$$\log \cos \zeta = 9{\cdot}885777 \qquad \log \cos \psi_1 = 9{\cdot}999355$$
$$\log \sin \zeta = 9{\cdot}805885\, n \qquad \log \sin \psi_3 = 9{\cdot}188835$$
$$\log h = 8{\cdot}972331 \qquad \log \cos \psi_3 = 9{\cdot}994756$$
$$\log \sin \varphi = 9{\cdot}902454$$
$$\log \cos \varphi = 9{\cdot}779275\, n.$$

Mit diesen Hilfsgrössen fanden sich als Auflösungen

$\log \rho_1 =$	9·548488	9·869946	0·032510
$\log \rho_3 =$	9·571291	9·892749	0·055313
$\log r_1 =$	9·813878	9·426780	8·967674
$\log r_3 =$	9·804879	9·417259	9·325808

und damit die drei Elementensysteme

$T =$ 1895 Sept.	28·18658	19·72362	17·12868 m. Zt. Berl.
$\pi =$	25° 20′ 41″·5	21° 21′ 31″·0	64° 46′ 5″·5
☊ $=$	174° 41′ 42″·4	175° 18′ 34″·8	347° 57′ 48″·3
$i =$	21° 45′ 46″·9	30° 48′ 42″·5	142° 56′ 18″·9
$\log q =$	9·787160	9·416916	8·110866.

Der mittlere Ort wurde dargestellt (Beobachtung — Rechnung):

$\Delta\lambda =$	— 12′ 32″·4	— 9′ 38″·1	— 1′ 27″·0
$\Delta\beta =$	— 7′ 56″·6	— 6′ 6″·3	— 0′ 59″·1.

Schon der blosse Anblick ergiebt, dass die letzte Wurzel die brauchbare ist; dies geht übrigens auch daraus hervor, dass der Werth der Olbers'schen Methode

$$\log \operatorname{cotang} J_0 = 0{\cdot}194795$$

gefunden wurde, während aus den berechneten Grössen folgt:

$$\log \operatorname{cotang} J = 0{\cdot}194785 \qquad 0{\cdot}194792 \qquad 0{\cdot}194937,$$

so dass nur für den dritten Werth die Grösse M verbesserungsfähig erscheint, und man hoffen darf, den Fehler der mittleren Beobachtung durch Variation dieser Grösse herabzubringen.

Für die Auflösung der cubischen Gleichung ist also zu rechnen:

$$\log \alpha = 0{\cdot}4427 \qquad \log \cos \psi_2 = 9{\cdot}9974 \qquad \log \cos \varphi = 9{\cdot}7793\, n$$
$$\log R_2 = 0{\cdot}0017,$$

womit

$$A_1{}^{1)} = -1{\cdot}3674 \qquad A_2 = +0{\cdot}2786 \qquad A_3 = +0{\cdot}1016$$
$$p = +0{\cdot}3447 \qquad q = +0{\cdot}0393 \qquad \log r = 9{\cdot}8312$$
$$\omega = 10^\circ\, 6' \qquad x_2 = +0{\cdot}5747 \qquad x_3 = +0{\cdot}9743$$

sich ergeben. Es wird ferner

[1] Die Werthe A_1, A_2, A_3 sind bezüglich

$$A_1 = -\frac{5}{3}\cos\psi_2 - \frac{4}{3}\,\frac{\cos\varphi}{\alpha}$$
$$A_2 = \frac{2}{3} + 2\cos\psi_2\,\frac{\cos\varphi}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^2}$$
$$A_3 = -\frac{\cos\psi_2}{3\alpha^2} - \frac{2}{3}\,\frac{\cos\varphi}{\alpha}.$$

$$(\alpha^2 x_2^2 - 2\cos\varphi\alpha x_2 + 1)^2 (x_2^2 - 2\cos\psi_2 x_2 + 1) = + 5{\cdot}6$$
$$(\alpha^2 x_3^2 - 2\cos\varphi\alpha x_3 + 1)^2 (x_3^2 - 2\cos\psi_2 x_3 + 1) = + 1{\cdot}7,$$

während

$$4 R_2^2 = + 4{\cdot}0$$

ist, so dass in der That die geforderten Ungleichungen erfüllt sind.

e) Genauigkeit der parabolischen Bahnbestimmungsmethoden.

Es galt in früheren Zeiten als ausgemacht, dass die Genauigkeit der OLBERSschen Grösse M auch die Genauigkeit der Werthe ρ_1 und ρ_3 und der aus denselben abgeleiteten Elemente in gleicher Grössenordnung bestimme. Es hat aber CLAUSEN[1]) nachgewiesen, dass dies nicht der Fall sei, dass vielmehr die Fehler von M um eine Ordnung vergrössert auf ρ_1, ρ_3 und die Elemente übergehen. Ist also M bei ungleichen Zwischenzeiten genau bis auf Grössen zweiter Ordnung, so werden die unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Elemente bis auf Grössen erster Ordnung genau sein; bei gleichen Zwischenzeiten reducirt sich bekanntlich der Fehler von M bis auf Grössen dritter Ordnung, die Fehler der Bahnelemente werden dann von zweiter Ordnung sein. Es soll zunächst der Beweis für diese Behauptung erbracht werden.

Da die Zwischenzeit zwischen den äusseren Orten streng dargestellt wird, so gilt die Bedingung

$$\frac{dT}{d\rho_1} d\rho_1 + \frac{dT}{d\rho_3} d\rho_3 = 0,$$

wenn T die Zwischenzeit bedeutet. Andererseits ergiebt sich aus der Gleichung

$$\rho_3 = M\rho_1 + m,$$

also

$$d\rho_3 = dm + \rho_1 dM + M d\rho_1,$$

führt man den Werth von $d\rho_3$ in obige Gleichung ein, so folgt:

$$d\rho_1 = - \frac{\frac{dT}{d\rho_3}\left(dm + \rho_1 dM\right)}{\frac{dT}{d\rho_1} + M\frac{dT}{d\rho_3}} \qquad (\alpha)$$

Die Gleichung für die Sehne ist

$$s = \frac{2kt\mu}{\sqrt{r_1 + r_3}},$$

also erster Ordnung, wenn die Zwischenzeit eine Grösse erster Ordnung ist; andererseits ist

$$s^2 = a + b\rho + c\rho^2,$$

da die Zwischenzeit bei kleiner heliocentrischer Bewegung der Sehne gleichgesetzt werden kann, so folgt hieraus, dass

$$\frac{dT}{d\rho_1} \quad \text{und} \quad \frac{dT}{d\rho_3}$$

nullter Ordnung sind; entwickelt man nach Potenzen der Zeit, so wird

$$\frac{dT}{d\rho_1} = a_1 + b_1\tau + c_1\tau^2 \ldots$$
$$\frac{dT}{d\rho_3} = a_3 + b_3\tau + c_3\tau^2 \ldots$$

und

$$M = 1 + \beta_2\tau + \gamma_2\tau^2 \ldots$$

[1]) Bulletin de la classe phys. math. de l'académie de St. Petersbourg sér. I. tom. X pag. 175.

Das erste Glied der Reihe von M muss $= 1$ sein, da für unendlich kleine Zwischenzeiten $\rho_1 = \rho_3$ wird. Für denselben Fall wird aber auch

$$a_1 = -a_3$$

und daher

$$\frac{dT}{d\rho_1} + M\frac{dT}{d\rho_3} = \gamma\tau + \delta\tau^2 \ldots\ldots$$

Der Nenner der Gleichung (α) wird also erster Ordnung, während $\frac{dT}{d\rho_3}$ nullter Ordnung ist, es sind also die Elemente mit einem Fehler behaftet, der um eine Ordnung grösser ist, als der in M begangene.

Im weiteren Verlaufe betrachtet OPPOLZER, dem diese Darstellung entnommen ist, auch die Ordnung der Grösse m nach der OLBERS'schen und seiner Methode und findet, dass, wenn man nach OLBERS

$$\Pi = \odot_2$$

setzt, die Werthe von ρ_1 und ρ_3 bedeutender durch die Vernachlässigung beeinflusst sein können.

Man wird indessen ohne die dringendste Nöthigung OLBERS' Methode schon ihrer grossen Einfachheit und Kürze wegen nicht verlassen, da die Rechnung nach OPPOLZER ungefähr den doppelten Zeitaufwand in Anspruch nimmt, und wird es vorziehen, durch Heranziehen späterer Beobachtungen die OLBERS'schen Elemente zu verbessern.

Die Entscheidung, wann die OLBERS'sche Methode zu verlassen wäre, wird folgendermaassen getroffen. Man berechne nach OLBERS und OPPOLZER

$$tang\, i_0 = tang\,(\lambda_2 - \odot_2)\, cosec\, \beta_2$$

$$tang\, i = -\frac{\beta_3 - \beta_1}{\lambda_3 - \lambda_1}\, sec\, \beta_2,$$

worin i_0 und i stets kleiner als $180°$ angenommen werden; OLBERS Methode ist dann anwendbar, wenn

$$i - i_0 < \pm 30°,$$

im anderen Falle wäre OPPOLZER's Methode vorzuziehen.

Es ist aber leicht einzusehen, dass die Winkel

$$i_0 \text{ und } i$$

der erstere streng, der andere genähert, die Winkel der nach OLBERS und OPPOLZER gewählten grössten Kreise durch die mittlere Beobachtung mit dem Breitenkreise durch dieselbe Beobachtung bedeuten.

IV. Bahnbestimmung eines Himmelskörpers, wenn die Excentricität = 1 ist (Kreisbahn).

In diesem Falle ist die Zahl der Bestimmungsstücke nur vier; nämlich der Knoten, die Neigung, das zu einer bestimmten Epoche gehörige Argument der Breite und der Radius des Kreises. Es sind also im Ganzen zwei Beobachtungen ausreichend; nennen wir die beobachteten und der Sonnenephemeride entnommenen Grössen conform unseren Festsetzungen für den

$$\begin{array}{lccccc} 1.\ \text{Ort} & t_1 & \lambda_1 & \beta_1 & \odot_1 & R_1 \\ 2.\ \text{Ort} & t_2 & \lambda_2 & \beta_2 & \odot_2 & R_2, \end{array}$$

so ergeben sich die bekannten Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} cos\,\psi_1 = cos\,\beta_1\, cos\,(\lambda_1 - \odot_1) & cos\,\psi_2 = cos\,\beta_2\, cos\,(\lambda_2 - \odot_2) \\ cos\,P_1\, sin\,\psi_1 = cos\,\beta_1\, sin\,(\lambda_1 - \odot_1) & cos\,P_2\, sin\,\psi_2 = cos\,\beta_2\, sin\,(\lambda_2 - \odot_2) \\ sin\,P_1\, sin\,\psi_1 = sin\,\beta_1 & sin\,P_2\, sin\,\psi_2 = sin\,\beta_2. \end{array}$$

Nennt man den Winkel am Himmelskörper in dem Dreiecke Himmelskörper, Erde, Sonne z, so wird

$$\rho_1 = \frac{a \sin(\psi_1 + z_1)}{\sin \psi_1} \qquad R_1 = \frac{a \sin z_1}{\sin \psi_1}$$
$$\rho_2 = \frac{a \sin(\psi_2 + z_2)}{\sin \psi_2} \qquad R_2 = \frac{a \sin z_2}{\sin \psi_2}$$

Nach den Elementen der analytischen Geometrie ist der von den beiden Radienvectoren eingeschlossene Winkel

$$2f = u_2 - u_1$$

gegeben durch

$$\cos 2f = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{a^2} = \cos(u_2 - u_1),$$

Da aber bei ersten Bahnbestimmungen $2f$ eine kleine Grösse ist, so wird man bequemer setzen:

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{2a^2}.$$

Es ist aber

$$x_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 - R_1 \cos\odot_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \cos[(\lambda_1 - \odot_1) + \odot_1] - R_1 \cos\odot_1$$
$$x_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1)\cos\odot_1 - \rho_1 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1)\sin\odot_1 - R_1 \cos\odot_1$$
$$x_1 = \rho_1 \cos\psi_1 \cos\odot_1 - \rho_1 \sin\psi_1 \sin\odot_1 \cos P_1 - R_1 \cos\odot_1.$$

Führt man statt ρ_1 und R_1 obige Ausdrücke ein, so wird

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\sin(\psi_1 + z_1)}{\sin\psi_1}\cos\psi_1 \cos\odot_1 - \sin(\psi_1 + z_1)\cos P_1 \sin\odot_1 - \frac{\sin z_1 \cos\odot_1}{\sin\psi_1}$$
$$\frac{x_1}{a} = \cos(\psi_1 + z_1)\cos\odot_1 - \sin(\psi_1 + z_1)\cos P_1 \sin\odot_1$$
$$\frac{x_2}{a} = \cos(\psi_2 + z_2)\cos\odot_2 - \sin(\psi_2 + z_2)\cos P_2 \sin\odot_2,$$

so erhält man auch

$$\frac{y_1}{a} = \cos(z_1 + \psi_1)\sin\odot_1 + \sin(z_1 + \psi_1)\cos P_1 \cos\odot_1$$
$$\frac{y_2}{a} = \cos(z_2 + \psi_2)\sin\odot_2 + \sin(_2 + \psi_2)\cos P_2 \cos\odot_2$$

und endlich

$$\frac{z_1}{a} = \sin(z_1 + \psi_1)\sin P_1$$
$$\frac{z_2}{a} = \sin(z_2 + \psi_2)\sin P_2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(z_1 + \psi_1) + (z_2 + \psi_2) = \Sigma$$
$$(z_1 + \psi_1) - (z_2 + \psi_2) = \Delta,$$

so wird

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{a^2} = \frac{1}{2}\cos\Sigma[\cos(\odot_2 - \odot_1)(1 - \cos P_1 \cos P_2) - \sin P_1 \sin P_2] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sin\Sigma \sin(\odot_2 - \odot_1)(\cos P_1 - \cos P_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\cos\Delta[\cos(\odot_2 - \odot_1)(1 + \cos P_1 \cos P_2) + \sin P_1 \sin P_2] +$$
$$\frac{1}{2}\sin\Delta \sin(\odot_2 - \odot_1)(\cos P_1 + \cos P_2).$$

Es ist aber

$$1 - \cos P_1 \cos P_2 = \sin^2 \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2)$$
$$1 + \cos P_1 \cos P_2 = \cos^2 \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) + \cos^2 \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2)$$
$$- \sin P_1 \sin P_2 = \sin^2 \tfrac{1}{2}(P_2 - P_1) - \sin^2 \tfrac{1}{2}(P_2 + P_1)$$
$$+ \sin P_1 \sin P_2 = \cos^2 \tfrac{1}{2}(P_2 - P_1) - \cos^2 \tfrac{1}{2}(P_2 + P_1)$$
$$\sin(\odot_2 - \odot_1) = 2 \sin \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \cos \frac{\odot_2 - \odot_1}{2}$$
$$\cos(\odot_2 - \odot_1) = \cos^2 \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} - \sin^2 \frac{\odot_2 - \odot_1}{2}.$$

Führt man der Kürze wegen ein

$$w \sin W = \sin \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \sin \frac{P_2 + P_1}{2}$$
$$w \cos W = \cos \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \sin \frac{P_2 - P_1}{2}$$
$$h \sin H = \sin \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \cos \frac{P_2 + P_1}{2}$$
$$h \cos H = \sin \frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \cos \frac{P_2 - P_1}{2},$$

wobei als Probe gilt

$$w^2 + h^2 = 1$$

und substituirt diese Werthe, so hat man

$$\sin^2 f = w^2 \sin^2 [W' - \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1)] + h^2 \sin^2 [H' - \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)],$$

worin abkürzend gesetzt ist

$$W' = W - \tfrac{1}{2}(\psi_2 + \psi_1) \qquad H' = H + \tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1).$$

Andrerseits ist in Folge des KEPLER'schen Gesetzes

$$f = \frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}} 2 \sin 1''} \qquad \log \frac{k}{2 \sin 1''} = 3{\cdot}248977.$$

Dann stellt sich die Rechnung folgendermaassen: Man nimmt einen willkürlichen Werth von a an und erhält aus den Gleichungen

$$\sin z_1 = \frac{R_1 \sin \psi_1}{a} \qquad \sin z_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{a}$$

die Grössen z_1 und z_2 und aus diesen mit Hilfe von W', H', w und h die Grösse f, welche mit der aus den KEPLER'schen Gesetzen ermittelten übereinstimmen muss; ist dies nicht der Fall, so muss die Uebereinstimmung durch Variation von a erzielt werden. Man erhält dann die heliocentrischen Coordinaten a, l_1, b_1, l_2 und b_2 aus den bekannten Gleichungen; ebenso die Länge des aufsteigenden Knotens, die Neigung und die Argumente der Breite. Die Gleichung

$$u_2 - u_1 = 2f$$

giebt dann eine Probe ab. Da Kreisbahnelemente nur zu provisorischen Zwecken berechnet werden (Construction einer Aufsuchungsephemeride, Untersuchung der Grösse der Neigung der Bahn etc.), so wäre es überflüssig, eine allzu genaue Reduction der Beobachtungen vorzunehmen. Man wird sich begnügen, die beobachteten Aequatoreal-Polarcoordinaten mit Hilfe der scheinbaren Schiefe der Ekliptik in die entsprechenden Ekliptikalcoordinaten zu verwandeln und mit Hilfe der scheinbaren Sonnenlängen Elemente abzuleiten, die dann beiläufig für das scheinbare Aequinoctium der Mitte der Beobachtungszeiten gelten. Bezeichnet man die bekannten GAUSS'schen Grössen $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ mit dem Bahnhalbmesser (a) multiplicirt, mit α, β und γ, also

$$(a)\, sin\, a = \alpha$$
$$(a)\, sin\, b = \beta$$
$$(a)\, sin\, c = \gamma$$

und setzt

$$A + u_1 = A'$$
$$B + u_1 = B'$$
$$C + u_1 = C',$$

so wird, wenn

$$\mu = \frac{k''}{(a)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{wo} \quad log\, k'' = 3{\cdot}550007,$$

die mittlere tägliche Bewegung bezeichnet, und man die Zeit t von der ersten Beobachtung als Epoche zählt, sein

$$x = \alpha\, sin\,(A' + \mu t)$$
$$y = \beta\, sin\,(B' + \mu t)$$
$$z = \gamma\, sin\,(C' + \mu t),$$

womit die Ephemeride berechnet werden kann.

Obwohl es auf den ersten Blick scheint, dass zwei wirklich beobachtete Orte eines kleinen Planeten eine Kreisbahn ergeben müssen, so ist dies doch nicht nothwendig der Fall, wie die folgende Thatsache beweist:

Wolf in Heidelberg entdeckte am 1. November 1894 photographisch einen Planeten, der die Bezeichnung *BE* erhielt und sich insbesondere durch rasche tägliche Bewegung in Deklination von etwa $\frac{1}{2}^{\circ}$ auszeichnete. Schulhof in Paris versuchte eine Kreisbahn aus zwei Orten abzuleiten, um sich über die Bahnverhältnisse zu orientiren; allein die Versuche ergaben keinen reellen brauchbaren Werth für den Bahnhalbmesser a. Dies veranlasste F. Tisserand[1]), das Vorkommen von imaginären Wurzeln in dem Probleme nachzuweisen. Es seien für die Zeiten t_1 und t_2 die beobachteten und gerechneten Grössen

$$t_1\, \lambda_1\, \beta_1\, \rho_1\, x_1 y_1 z_1\, L_1$$
$$t_2\, \lambda_2\, \beta_2\, \rho_2\, x_2 y_2 z_2\, L_2,$$

worin L_1 und L_2 die Erdlängen in der ersten und zweiten Beobachtung bedeuten, und die Radienvectoren der Erde

$$R_1 = R_2 = 1$$

gesetzt wurden. Es ist bekanntlich

$$x_1 = cos\, L_1 + \rho_1 cos\, \beta_1 cos\, \lambda_1 \qquad x_2 = cos\, L_2 + \rho_2 cos\, \beta_2 cos\, \lambda_2$$
$$y_1 = sin\, L_1 + \rho_1 cos\, \beta_1 sin\, \lambda_1 \qquad y_2 = sin\, L_2 + \rho_2 cos\, \beta_2 sin\, \lambda_2$$
$$z_1 = \rho_1 sin\, \beta_1 \qquad z_2 = \rho_2 sin\, \beta_2.$$

Ist a der Radius der Bahn und $2f$ der Winkel, den die Radienvectoren des Planeten in der ersten und zweiten Beobachtung einschliessen, so gilt

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = a^2$$
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = a^2 cos\, 2f.$$

Man findet leicht den folgenden Ausdruck:

$$a^2 cos\, 2f = cos\, 2f_0 + A\rho_1 + A'\rho_2 + B\rho_1 \rho_2, \tag{1}$$

worin

$$2f_0 = L_2 - L_1$$
$$A = cos\, \beta_1 cos\,(L_2 - \lambda_1) \qquad A' = cos\, \beta_2 cos(L_1 - \lambda_2)$$
$$\rho_1 = \sqrt{a^2 - sin^2 \psi_1} - cos\, \psi_1 \qquad \rho_2 = \sqrt{a^2 - sin^2 \psi_2} - cos\, \psi_2 \tag{2}$$
$$cos\, \psi_1 = cos\,(L_1 - \lambda_1)\, cos\, \beta_1 \qquad cos\, \psi_2 = cos\,(L_2 - \lambda_2)\, cos\, \beta_2$$
$$B = cos\, \beta_1 cos\, \beta_2 cos\,(\lambda_2 - \lambda_1) + sin\, \beta_1 sin\, \beta_2.$$

[1]) Comp. rend. hebdomadaires, tome 119. Paris 1894, pag. 881.

Nach dem KEPLER'schen Gesetze ist

$$2f = \frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad 2f_0 = k(t_2 - t_1),$$

mithin

$$\begin{aligned} f(a) = a^2 \cos \frac{2f_0}{a^{\frac{3}{2}}} - \cos 2f_0 - \\ - A(\sqrt{a^2 - \sin^2\psi_1} - \cos\psi_1) - A'(\sqrt{a^2 - \sin^2\psi_2} - \cos\psi_2) \\ - B(\sqrt{a^2 - \sin^2\psi_1} - \cos\psi_1)(\sqrt{a^2 - \sin^2\psi_2} - \cos\psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichung giebt $a = 1$ die bekannte Lösung für die Erdbahn. Wir wollen nun die Gleichung (3) für solche Fälle discutiren, wie dieselben bei Planet 1894 *BE* WOLF stattfanden. Es waren nämlich die Grössen

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \sin^2\beta_1,\ \sin^2\beta_2 \quad \text{und} \quad \sin^2(L_1 - \lambda_1),\ \sin^2(L_2 - \lambda_2)$$

sehr klein. Wir dürfen uns daher erlauben, die Wurzeln mit Vernachlässigung von

$$\sin^4\psi_1 \quad \text{und} \quad \sin^4\psi_2$$

zu ermitteln; es wird

$$\sqrt{a^2 - \sin^2\psi_1} = a - \frac{1}{2a}\sin^2\psi_1 \qquad \sqrt{a^2 - \sin^2\psi_2} = a - \frac{1}{2a}\sin^2\psi_2$$

$$\cos\psi_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\psi_1 \qquad \cos\psi_2 = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\psi_2$$

$$\cos\frac{2f_0}{a^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{(2f_0)^2}{2a^3}$$

und die Gleichung (3) wird

$$\begin{aligned} (a^2 - 1) + (2f_0)^2 \frac{a-1}{2a} - A(a-1)\left(1 + \frac{\sin^2\psi_1}{2a}\right) - \\ - A'(a-1)\left(1 + \frac{\sin^2\psi_2}{2a}\right) - B(a-1)^2\left(1 + \frac{\sin^2\psi_1 + \sin^2\psi_2}{2a}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dividirt man durch $a - 1$ und setzt

$$\begin{aligned} p &= (2f_0)^2 + (B - A)\sin^2\psi_1 + (B - A')\sin^2\psi_2, \\ q &= A + A' - B - 1 + \frac{B}{2}(\sin^2\psi_1 + \sin^2\psi_2), \end{aligned} \tag{4}$$

so wird

$$(1 - B)\,a + \frac{p}{2a} = q; \tag{5}$$

allein die Grössen

$$B - A, \quad B - A', \quad 1 - B$$

sind klein; man kann also setzen

$$p = (2f_0)^2 \tag{6}$$

$$q = A + A' - B - 1 + \tfrac{1}{2}(\sin^2\psi_1 + \sin^2\psi_2) = A + A' + 1 - B - \cos\psi_1 - \cos\psi_2.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (2), so ist

$$\begin{aligned} q = 1 - B + \cos\beta_1[\cos(L_2 - \lambda_1) - \cos(L_1 - \lambda_1)] + \\ + \cos\beta_2[\cos(L_1 - \lambda_2) - \cos(L_2 - \lambda_2)] \end{aligned}$$

oder

$$q = 1 - B + 2\sin f_0\left[\cos\beta_2 \sin\left(\frac{L_1 + L_2}{2} - \lambda_2\right) - \cos\beta_1 \sin\left(\frac{L_1 + L_2}{2} - \lambda_1\right)\right].$$

Setzt man

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = 1 \quad \text{und} \quad \sin f_0 = f_0,$$

so wird

$$q = 1 - B + 4f_0 \cos\left(\frac{L_1 - \lambda_1}{2} + \frac{L_2 - \lambda_2}{2}\right)\sin\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Ersetzt man

$$\lambda_2 - \lambda_1 = m \qquad \beta_2 - \beta_1 = n,$$

so ergiebt sich

$$q = 1 - B - 2f_0 m.$$

Aus der Gleichung (2) findet man

$$B = 1 - \frac{m^2 \cos^2 \beta + n^2}{2},$$

daher (7)

$$q = \frac{m^2 + n^2 - 4 f_0 m}{2}.$$

Aus der Gleichung (5) findet man a durch eine quadratische Gleichung; die Bedingung, dass ihre beiden Wurzeln imaginär werden, ist

$$q^2 - 2p(1 - B) < 0. \tag{8}$$

Ersetzt man hierin die Grössen aus Gleichungen (6) und (7), so wird

$$(m^2 + n^2 - 4 m f_0)^2 - 4(m^2 + n^2) 4 f_0^2 < 0$$

oder

$$(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) < 0, \tag{9}$$

wenn man setzt

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{m}{2 f_0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{L_2 - L_1} \\ \beta &= -\frac{n}{2 f_0} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{L_2 - L_1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Es sind also $-\alpha$ und $-\beta$ die Verhältnisse der täglichen Bewegung in Länge und Breite des Planeten zu der täglichen Bewegung der Erde in Länge. Die Gleichung (9) giebt

$$\beta^2 < 2 - \alpha^2 - 2\alpha + 2\sqrt{1 - 2\alpha} \tag{11}$$

$$\beta^2 > 2 - \alpha^2 - 2\alpha - 2\sqrt{1 - 2\alpha}. \tag{12}$$

Da α zwischen den Grenzen 0·15 und 0·35 (tägliche Bewegung 9′ und 21′) eingeschlossen ist, so wird der Ungleichung (11) immer Genüge geleistet; aus der Ungleichung (12) aber folgt:

$\alpha = 0{\cdot}15$	$\beta > 0{\cdot}06$	$\beta_1 - \beta_2 > 4'$
$\alpha = 0{\cdot}20$	$\beta > 0{\cdot}10$	$\beta_1 - \beta_2 > 6'$
$\alpha = 0{\cdot}25$	$\beta > 0{\cdot}15$	$\beta_1 - \beta_2 > 9'$
$\alpha = 0{\cdot}30$	$\beta > 0{\cdot}21$	$\beta_1 - \beta_2 > 13'$
$\alpha = 0{\cdot}35$	$\beta > 0{\cdot}29$	$\beta_1 - \beta_2 > 17'$.

Man hat also für starke Bewegungen in Breite keine Kreisbahn. Für den Planeten BE war

$$\alpha = 0{\cdot}30 \qquad \beta_1 - \beta_2 = 24',$$

so dass die Bedingung zweier imaginärer Wurzeln reichlich erfüllt ist; wird β kleiner als die Grenze, so erhält man zwei reelle Wurzeln, die grösser als 1 sind.

Es ist wahrscheinlich, dass auch unter anderen als den betrachteten Bedingungen eine Kreisbahn unmöglich ist; um diese aufzufinden, müsste man die Gleichung (3) untersuchen, was indessen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte.

V. Erste Verbesserung der gefundenen Bahn.

a) Elliptische Bahnen.

Hat man aus einem Bogen von etwa 20 Tagen die elliptischen Elemente eines Planeten gerechnet, und ist derselbe in seiner Opposition während eines längeren Zeitraumes beobachtet worden, so wird man die Verbesserung der Bahn behufs Auffindung des Planeten in einer der nächsten Oppositionen auf die folgende Weise durchführen:

Mit den gegebenen Elementen wird eine Ephemeride (sechsstellige logarithmische Rechnung ist vollständig ausreichend) über den ganzen Zeitraum, auf den

sich die Beobachtungen vertheilen, berechnet. Die Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride geschieht nach dem angegebenen Verfahren; es werden dann im Allgemeinen Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen auftreten, die theils in den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, theils in der Abweichung der ersten gerechneten Bahn von der wahren ihren Grund haben. Dieselben werden sich indessen innerhalb bestimmter Grenzen halten, wenn der ersten Bahnbestimmung keine wesentlich entstellten Beobachtungen zu Grunde liegen. Sind also diese Ephemeridencorrectionen entsprechend klein und zeigt sich in denselben kein Gang[1]), so theilt man die Beobachtungen in drei Gruppen, so dass die arithmetischen Mittel der Beobachtungszeiten in jeder Gruppe, wenn möglich, gleich weit abstehen, also wenn das Mittel der Zeit in der ersten, zweiten und dritten Gruppe mit bezüglich t_1, t_2 und t_3 bezeichnet werden, nahezu die Gleichung gilt

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2.$$

Diesem Mittel der Zeiten wird das arithmetische Mittel der Ephemeridencorrection in den drei Gruppen im Sinne Beobachtung weniger Rechnung entsprechen, also für

$$\begin{array}{ccc} t_1 & \Delta\alpha_1 & \Delta\delta_1 \\ t_2 & \Delta\alpha_2 & \Delta\delta_2 \\ t_3 & \Delta\alpha_3 & \Delta\delta_3. \end{array}$$

Bringt man die so ermittelten Correctionen mit ihrem Zeichen an die den Zeiten t_1, t_2 und t_3 entsprechenden Ephemeridenorte an, so erhält man drei sogen. Normalorte, die bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungen als von zufälligen Fehlern frei angesehen werden können. Aus diesen drei Normalorten rechnet man nach GAUSS' Methode eine neue Bahn, wobei indessen die Dreiecksflächen aus den ersten Bahnelementen gerechnet werden, also im ersten Versuche gesetzt wird

$$P_1 = \frac{n_3}{n_1} \qquad Q = (n_1 + n_3 - 1) 2 r_2^3.$$

Die Normalorte müssen streng dargestellt werden, wenn aus den definitiven P und Q die Elemente gerechnet werden.

Wird der Planet in der nächsten Opposition wieder entdeckt, so werden zwischen den beobachteten Längen und Breiten und den berechneten namhaftere Differenzen eintreten (hauptsächlich wegen Vernachlässigung der Störungen durch die grossen Planeten in der Zwischenzeit). Bezeichnet man dieselben im Sinne Beobachtung weniger Rechnung, mit

$$\Delta\lambda \quad \text{und} \quad \Delta\beta$$

und bezeichnet man die geocentrischen Distanzen der Normalorte in der ersten Opposition mit

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3,$$

die aus denselben Elementen berechnete Distanz des neuen Ortes mit

$$\rho_4,$$

so ist das weitere Verfahren das folgende:

Zunächst rechnet man mit den Werthen aus dem 1. und 4. Orte

$$\rho_1 \quad \text{und} \quad \rho_4$$

[1]) Die Correctionen müssen sich in diesem Falle sprungweise ändern, d. h. ebenso oft negativ als positiv werden; doch wird stets ein kleiner Gang beobachtet werden, wenn man sich zeitlich von dem 3. Orte der ersten Bahnbestimmung entfernt, der aber, wenn klein, bedeutungslos ist.

und mit der bekannten heliocentrischen Bewegung Elemente. Diese werden die äussersten Orte genau darstellen, in den mittleren aber die Fehler

$$\Delta\lambda_2' \qquad \Delta\lambda_3'$$
$$\Delta\beta_2' \qquad \Delta\beta_3'.$$

übrig lassen.

Hierauf ändert man den $\log \rho_1$ um a Einheiten der letzten Stelle (etwa 1000 bei sechsstelliger Rechnung) und erhält abermals Elemente, welche die äussersten Orte genau darstellen, in den mittleren aber die Fehler

$$\Delta\lambda_2'' \qquad \Delta\lambda_3''$$
$$\Delta\beta_2'' \qquad \Delta\beta_3''$$

zurücklassen.

Endlich lässt man $\log \rho_1$ ungeändert und ändert $\log \rho_4$ um b Einheiten der letzten Stelle, etwa wieder 1000 Einheiten der sechsten Stelle; die mit diesen Werthen berechneten Elemente mögen in dem mittleren Orte die Fehler

$$\Delta\lambda_2''' \qquad \Delta\lambda_3'''$$
$$\Delta\beta_2''' \qquad \Delta\beta_3'''$$

übrig lassen. Man bildet dann die Bedingungsgleichungen, die natürlich in beliebiger Anzahl vorhanden sein können und die folgende Form haben

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_2' \cos\beta_2 &= (\Delta\lambda_2' - \Delta\lambda_2'')\cos\beta_2 x + (\Delta\lambda_2' - \Delta\lambda_2''')\cos\beta_2 y \\ \Delta\lambda_3' \cos\beta_3 &= (\Delta\lambda_3' - \Delta\lambda_3'')\cos\beta_3 x + (\Delta\lambda_3' - \Delta\lambda_3''')\cos\beta_3 y \\ \Delta\beta_2' &= (\Delta\beta_2' - \Delta\beta_2'')x + (\Delta\beta_2' - \Delta\beta_2''')y \\ \Delta\beta_3' &= (\Delta\beta_3' - \Delta\beta_3'')x + (\Delta\beta_3' - \Delta\beta_3''')y. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Löst man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so erhält man die Werthe x und y; nennt man die Werthe der Elemente aus

$$\begin{array}{lll} \log\rho_1 & \log\rho_4 & E' \\ \log\rho_1 + a & \log\rho_4 & E'' \\ \log\rho_1 & \log\rho_4 + b & E''' \end{array}$$

so sind die definitiven Elemente, die in den mittleren Orten die kleinsten Fehler zurücklassen

$$E = E' + (E'' - E')x + (E''' - E')y.$$

Sollten die Aenderungen der Elemente nicht linear sein, was man am besten durch die direkte Darstellung der mittleren Orte erfährt, indem die so ermittelten Fehler mit den aus den Gleichungen (α) berechneten innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung übereinstimmen müssen, so wird man aus

$$\log\rho_1 + xa \qquad \log\rho_4 + yb$$

neue Elemente rechnen, die dann der Bedingung im Allgemeinen genügen werden.

Im Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, dass die Elemente aus der ersten Opposition von den drei Systemen die mittleren Orte am besten darstellen; dies ist natürlich nicht nothwendig, nur muss man trachten (was durch Aenderung der Indices leicht zu erreichen ist), dass die Werthe

$$\Delta\lambda_2' \qquad \Delta\lambda_3'$$
$$\Delta\beta_2' \qquad \Delta\beta_3'$$

jedesmal die kleinsten sind.

Mit Vortheil wird diese Methode auf die kleinen Planeten angewendet, die in zwei oder drei Oppositionen beobachtet sind, wenn namhafte Fehler zwischen der Rechnung aus einer Opposition und der Beobachtung existieren, so dass man auf diese Weise hoffen kann, sehr genäherte Elemente zur Rechnung der Differentialquotienten bei definitiver Ausgleichung zu erhalten. Im Grunde stimmt dieses

Verfahren mit einer Art numerischer Bestimmung der Differentialquotienten überein.

b) Parabolische Bahnen.

1) Methode.

Bei parabolischen Bahnen stellt sich die Sache etwas anders. Die ersten Bahnbestimmungen werden heut zu Tage aus einem sehr kleinen geocentrischen Bogen gerechnet, um den scheinbaren Lauf des Kometen genähert zu erhalten.

Hat man über einen grösseren Zeitraum vertheilte Beobachtungen, so wird man zunächst die äussersten Orte um den Betrag der Präcession und Nutation auf den mittleren Ort reduciren und hierauf mit Hilfe der ersten Elemente die Beobachtungszeiten von der Aberration, Rectascension und Deklination von der Parallaxe befreien. Ferner erhält man aus den ersten Elementen ρ_1 und ρ_3 für die äussersten Orte und damit

$$M = \frac{\rho_3}{\rho_1}$$

Man rechnet darauf aus den äussersten geocentrischen Orten und den Werthen ρ_1 und ρ_3 parabolische Elemente, welche die zwischenliegende Beobachtung (oder Beobachtungen) im Allgemeinen nicht genau darstellen werden. Man ändert hierauf den Werth

$$\log M$$

um a Einheiten der letzten Stelle (a etwa 1000 Einheiten bei sechsstellige Rechnung). Nennt man

$$\log M_1 = \log M + a,$$

so wird

$$\rho_3 = M_1 \rho_1$$

und mit diesem Werthe sowie den geocentrischen Beobachtungen der äussersten Orte werden neuerdings Elemente gerechnet. Stellen die ersten Elemente den mittleren Ort (oder die mittleren Orte) mit dem Fehler

$$\Delta\lambda_2' \qquad \Delta\beta_2'$$

die zweiten Elemente mit dem Fehler

$$\Delta\lambda_2'' \qquad \Delta\beta_2''$$

immer im Sinne Beobachtung weniger Rechnung dar, so müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_2' \cos\beta_2 &= (\Delta\lambda_2' - \Delta\lambda_2'') \cos\beta_2\, x \\ \Delta\beta_2' &= (\Delta\beta_2' - \Delta\beta_2'')\, x \end{aligned}$$

und ähnliche Gleichungen für mehrere mittlere Orte in Bezug auf x nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden. Im übrigen verfährt man ebenso wie bei der Planetenbahn und interpolirt entweder die Elemente, oder, falls deren Aenderungen nicht linear sein sollten, $\log M$, indem man für die definitive Rechnung setzt

$$\log M_2 = \log M + ax;$$

diese Art der Verbesserung der Bahnelemente durch Variation der Grösse M verdankt man dem Sohne Bessel's (Astr. Nachrichten 13, pag. 391. (1835).

2) Methode.

In den »Astronomischen Abhandlungen« herausgegeben von Schumacher (2. Heft, pag. 1 ff. 1823) hat Bessel Formeln gegeben, mit deren Hilfe man unmittelbar nach der Beendigung der Versuche M verbessern kann. In dem strengen Ausdrucke von Olbers hat die Gleichung für das Verhältniss der geocentrischen Distanzen die Form

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = M + \frac{m}{\rho_1} = M_0,$$

Da nun m im Allgemeinen eine kleine Grösse ist, so wird man bei genäherter Kenntniss von ρ_1 die Grösse M_0 bestimmen können. In dem Ausdruck von m kommt aber $\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}$ vor, eine Grösse, die vor Ermittlung der Elemente unbekannt ist, die man aber aus r_1, r_3 und den Zwischenzeiten bestimmen kann. Es ist

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{r_3 \sin(v_3 - v_2)};$$

löst man die Sinus der Winkeldifferenzen auf, ersetzt die ganzen Winkel durch die halben und berücksichtigt, dass

$$r_1 = q \sec^2 \frac{v_1}{2}, \qquad r_2 = q \sec^2 \frac{v_2}{2}, \qquad r_3 = q \sec^2 \frac{v_3}{2}$$

ist, so wird

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi_3 - \psi_2} \, \frac{1 + \psi_1 \psi_2}{1 + \psi_2 \psi_3},$$

worin

$$\psi_1 = \operatorname{tang} \frac{v_1}{2}, \qquad \psi_2 = \operatorname{tang} \frac{v_2}{2} \quad \text{und} \quad \psi_3 = \operatorname{tang} \frac{v_3}{2}$$

bedeuten. Aus den Gleichungen für die Bewegung in der Parabel folgt

$$T''' = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_3 = q^{\frac{3}{2}}(\psi_2 - \psi_1)(3 + \psi_1^2 + \psi_1 \psi_2 + \psi_2^2)$$

$$T' = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_1 = q^{\frac{3}{2}}(\psi_3 - \psi_2)(3 + \psi_2^2 + \psi_2 \psi_3 + \psi_3^2),$$

daher

$$T''' - q^{\frac{3}{2}}(\psi_2 - \psi_1)^3 = 3 q^{\frac{3}{2}}(\psi_2 - \psi_1)(1 + \psi_1 \psi_2)$$
$$T' - q^{\frac{3}{2}}(\psi_3 - \psi_2)^3 = 3 q^{\frac{3}{2}}(\psi_3 - \psi_2)(1 + \psi_2 \psi_3)$$

nnd

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{T''' - q^{\frac{3}{2}}(\psi_2 - \psi_1)^3}{T' - q^{\frac{3}{2}}(\psi_3 - \psi_2)^3} = \frac{T''' - u_3^3}{T' - u_1^3},$$

worin

$$u_1 = q^{\frac{1}{2}}(\psi_3 - \psi_2) \quad \text{und} \quad u_3 = q^{\frac{1}{2}}(\psi_2 - \psi_1)$$

bedeuten. Es ist aber

$$\psi_1^2 = \frac{r_1}{q} - 1 \qquad \psi_2^2 = \frac{r_2}{q} - 1 \qquad \psi_3^2 = \frac{r_3}{q} - 1$$

und ferner

$$\psi_2 = \frac{u_3}{q^{\frac{1}{2}}} + \psi_1 = -\frac{u_1}{q^{\frac{1}{2}}} + \psi_3,$$

daher

$$T''' = u_3 (3 r_1 + 3 u_3 \psi_1 q^{\frac{1}{2}} + u_3^2)$$
$$T' = u_1 (3 r_3 + 3 u_1 \psi_3 q^{\frac{1}{2}} + u_1^2).$$

Es ergiebt sich aber aus den obigen Gleichungen

$$u_3 + u_1 = q^{\frac{1}{2}}(\psi_3 - \psi_1)$$
$$r_3 - r_1 = q(\psi_3^2 - \psi_1^2),$$

es wird also

$$\frac{r_3 - r_1}{u_3 + u_1} = q^{\frac{1}{2}}(\psi_3 + \psi_1)$$

und damit

$$2 \psi_1 q^{\frac{1}{2}} = \frac{r_3 - r_1}{u_3 + u_1} - (u_3 + u_1)$$

$$2 \psi_3 q^{\frac{1}{2}} = \frac{r_3 - r_1}{u_3 + u_1} + (u_3 + u_1).$$

Endlich wird

$$2T''' = u_3\left(6r_1 + 3u_3\,\frac{r_3 - r_1}{u_3 + u_1} - 3u_1u_3 - u_3^2\right)$$
$$2T' = u_1\left(6r_3 - 3u_1\,\frac{r_3 - r_1}{u_3 + u_1} - 3u_1u_3 - u_1^2\right).$$

Setzt man noch

$$u_1 + u_3 = 2z \qquad u_1 - u_3 = 2z_1$$

und combinirt die Gleichungen für T''' und T', so findet man

$$T' + T''' = 3(r_1 + r_3)z - 4z^3$$
$$2(T' - T''')z - 2(T' + T''')z_1 = (z^2 - z_1^2)[3(r_3 - r_1) - 4zz_1].$$

Damit ist das Problem auf zwei Gleichungen dritten Grades reducirt; man wird sich indessen begnügen, die aus Reihenentwicklungen folgenden Werthe anzunehmen, da dieselben im Allgemeinen genügen werden.

Es wird

$$z = \frac{T' + T'''}{3(r_1 + r_3)} \qquad z_1 = \frac{T' - T'''}{3(r_1 + r_3)} - \frac{2}{3}\,\frac{T'T'''}{T' + T'''}\,\frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^2}$$

und damit

$$u_3 = \frac{2T'''}{3(r_1 + r_3)} + \frac{2}{3}\,\frac{T'T'''}{T' + T'''}\,\frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^2}$$
$$u_1 = \frac{2T'}{3(r_1 + r_3)} - \frac{2}{3}\,\frac{T'T'''}{T' + T'''}\,\frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^2},$$

woraus endlich

$$\frac{[r_1r_2]}{[r_2r_3]} = \frac{T'''}{T'}\,\frac{1 - \dfrac{u_3^3}{T'''}}{1 - \dfrac{u_1^3}{T'}}.$$

Der Grund, warum diese so einfache Methode fast nie zur Anwendung kommt und daher beinahe der Vergessenheit anheimgefallen ist, liegt wohl darin, dass man heut zu Tage die ersten Bahnelemente schon aus kleinen heliocentrischen Bogen berechnet; aus denselben wird dann entweder ein genähertes M entlehnt, und nach der 1. Methode durch Variation desselben werden dann verbesserte Elemente berechnet, oder es werden nach der folgenden 3. Methode die Werthe der Dreiecksflächen aus den ersten Elementen mit jener Genauigkeit bestimmt, welche diese zulassen.

3) Methode.

Der früher ermittelte Werth von m lässt sich unter der Voraussetzung der Olbers'schen Methode

$$\Pi = \odot_2$$

schreiben

$$m = \frac{\sin J}{\sin(\lambda_3 - \odot_2)\cos\beta_3\sin J - \sin\beta_3\cos J}\left[\frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]}R_1\sin(\odot_1 - \odot_2) + R_3\sin(\odot_3 - \odot_2)\right].$$

Rechnet man also

$$\operatorname{cotang} J = \frac{\sin(\lambda_2 - \odot_2)}{\operatorname{tang}\beta_2}$$
$$Z = \sin\beta_1\operatorname{cotang} J - \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - \odot_2)$$
$$N = \cos\beta_3\sin(\lambda_3 - \odot_2) - \sin\beta_3\operatorname{cotang} J$$

und aus den genäherten Elementen

$$\frac{[r_2r_3]}{[r_1r_2]} = \frac{r_3\sin(v_3 - v_2)}{r_1\sin(v_2 - v_1)},$$

so wird

$$M_0 = \frac{1}{N\rho_1}\left[\frac{r_3 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)} R_1 \sin(\odot_1 - \odot_2) + R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)\right] + \frac{r_3 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)} \cdot \frac{Z}{N},$$

worin ρ_1 auch aus den genäherten Elementen zu nehmen ist.

Diese Methode hat den Vortheil, dass man die neuen Elemente ganz wie nach OLBERS aus

$$\rho_3 = M_0 \rho_1$$

berechnet.

VI. Uebergang von der Parabel auf stark excentrische Ellipsen oder Hyperbeln.

(Methode von HORNSTEIN.)

Es geschieht nicht selten, namentlich bei Kometen, die eine lange Zeit hindurch beobachtet wurden, dass sich die Gesammtheit der Beobachtungen nicht auf befriedigende Weise durch eine Parabel darstellen lässt. In diesem Falle wird man einen anderen Kegelschnitt durch die beobachteten Orte legen. Sind indessen die Abweichungen nicht allzu beträchtlich, so wird man es vermeiden, nach den Methoden der »Theoria motus« zu rechnen, da in diesem Falle die Convergenz eine ausserordentlich geringe ist. Ein sehr praktisches Verfahren hat für diesen Zweck C. HORNSTEIN (Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien 1854) angegeben.

Man wird zunächst mit einer nach OLBERS' Methode gerechneten Bahn die Beobachtungen vergleichen und die Fehler finden

$$\Delta\lambda_1', \ \Delta\beta_1', \ \Delta\lambda_2', \ \Delta\beta_2' \text{ etc.}$$

Hierauf ändert man $\log M$ um m Einheiten (m etwa 1000 Einheiten der sechsten Stelle) und rechnet aus

$$\log M + m$$

eine neue Parabel, die in den mittleren Orten (die äussersten Orte werden bekanntlich immer genau dargestellt), die Fehler

$$\Delta\lambda_1'', \ \Delta\beta_1'', \ \Delta\lambda_2'', \ \Delta\beta_2'' \text{ etc.}$$

übrig lässt.

Endlich macht man eine bestimmte Annahme über den Werth der grossen Halbbahnaxe a; für die hier praktisch vorkommenden Fälle wird a immer ziemlich gross sein, man wird also setzen

$$\frac{1}{a} = 0{\cdot}01, \quad 0{\cdot}02 \quad 0{\cdot}03 \ldots .$$

Häufig wird die Aehnlichkeit mit den Elementen eines älteren Kometen zu einer bestimmten Annahme über a führen; doch darf man auf die nahe Uebereinstimmung der Elemente keinen grossen Werth legen, da mitunter die Bahnen älterer Kometen nicht viel Vertrauen verdienen und überdies die nahe Uebereinstimmung bei ganz differenten Objecten nicht allzu selten ist; ich erinnere in dieser Beziehung an die Bahnen der grossen Kometen von 1843, 1880 und 1882.

Man kann aber nach OPPOLZER's Vorschlag auf folgende Weise zur genäherten Kenntnis von a kommen.

Die EULER'sche Gleichung in der Parabel wurde, wie schon früher erwähnt ist, von LAMBERT auch auf die anderen Kegelschnitte ausgedehnt.

In diesem Falle lautet sie für die Ellipse

$$k(t_3 - t_1) = \frac{1}{6}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{3}{2}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{5}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{5}{2}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^5}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{7}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{7}{2}}\right] +$$
$$+ \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 1}{9\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^7}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{9}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{9}{2}}\right] + \ldots$$

das obere Zeichen gilt natürlich für heliocentrische Bewegungen kleiner als 180°, das untere für heliocentrische Bewegungen grösser als 180°.

Kehrt man diese Reihe um, so wird

$$\frac{1}{a} = \frac{A}{B} - \frac{A^2}{B^2}\frac{C}{B} + \frac{A^3}{B^3}\left[2\left(\frac{C}{B}\right)^2 - \frac{D}{B}\right] + \frac{A^4}{B^4}\left[-5\left(\frac{C}{B}\right)^3 + 5\frac{CD}{B^2} - \frac{E}{B}\right] + \ldots,$$

darin haben die Grössen folgende Bedeutungen

$$A = 80\left[k(t_3 - t_1) - \tfrac{1}{6}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{3}{2}}\right]\right]$$
$$B = \left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{5}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{5}{2}}\right]$$
$$C = \frac{15}{112}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{7}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{7}{2}}\right]$$
$$D = \frac{25}{1152}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{9}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{9}{2}}\right]$$
$$E = \frac{175}{45056}\left[(r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{11}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{11}{2}}\right] \text{ etc.}$$

Für die HORNSTEIN'sche Methode werden die ersten beiden Glieder vollkommen ausreichen. Die weitere Anführung geschah hier nur für event. Gebrauch.

Mit diesem a, mag es nun willkürlich geschätzt oder nach obiger Formel berechnet sein, bestimmt man aus dem ersten M und den äussersten Beobachtungen Elemente, welche in den mittleren Orten die Fehler

$$\Delta\lambda_1''',\ \Delta\beta_1''',\ \Delta\lambda_2''',\ \Delta\beta_2''' \ldots$$

übrig lassen. Dann erhält man ein System von Bedingungsgleichungen von der Form

$$\Delta\lambda_1' \cos\beta_1 = (\Delta\lambda_1' - \Delta\lambda_1'')\cos\beta_1\, x + (\Delta\lambda_1' - \Delta\lambda_1''')\cos\beta_1\, y$$
$$\Delta\beta'_1 = (\Delta\beta_1' - \Delta\beta_1'')\, x + (\Delta\beta_1' - \Delta\beta_1''')\, y$$

u. s. w.,

welche nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst die Werthe

$$\log M_0 = \log M + mx \qquad \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a}\cdot y$$

ergeben.

Sind die Elementenänderungen linear, so wird man als wahrscheinlichste Elemente

$$E_0 = E' + (E'' - E')\,x + (E''' - E')\,y$$

wählen, anderenfalls muss man aus M_0 und $\frac{1}{a_0}$ neue Elemente rechnen.

Es erübrigt noch anzugeben, wie man aus M und a die Radienvectoren und Elemente findet. Denn obwohl die Reihenentwicklung der LAMBERT'schen Gleichung, wie dieselbe oben gegeben wurde, der Berechnung der Zwischenzeiten keine Schwierigkeiten entgegensetzt, so ist sie für die Berechnung nicht sehr bequem.

Setzt man nach der »Theoria motus« Art. 106

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1 + r_3 + s_2}{2}}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \pm\sqrt{\frac{r_1 + r_3 - s_2}{2}} \qquad (\alpha)$$

und nennt die Grössen

$$\frac{\varepsilon - \sin\varepsilon}{8\sin^3\frac{\varepsilon}{2}} = Q_s \qquad \frac{\delta - \sin\delta}{8\sin^3\frac{\delta}{2}} = Q_d,$$

so wird der Ausdruck für die Zwischenzeit

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s_2)^{\frac{3}{2}} Q_s \mp (r_1 + r_3 - s_2)^{\frac{3}{2}} Q_d.$$

In Bezug auf die Gleichungen (α) sagt GAUSS, dass wegen der Bestimmung der Grössen $\frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$ aus ihrem Sinus immer eine gewisse Zweideutigkeit übrig bleibt. Zunächst ist klar, dass δ innerhalb $-180°$ und $+180°$ liegen muss und ε zwischen $0°$ und $360°$; es ist aber aus einer leicht zu beweisenden Relation (»Theoria motus«, Art. 88)

$$\cos f_2 \sqrt{r_1 r_3} = 2a \sin\frac{\delta}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

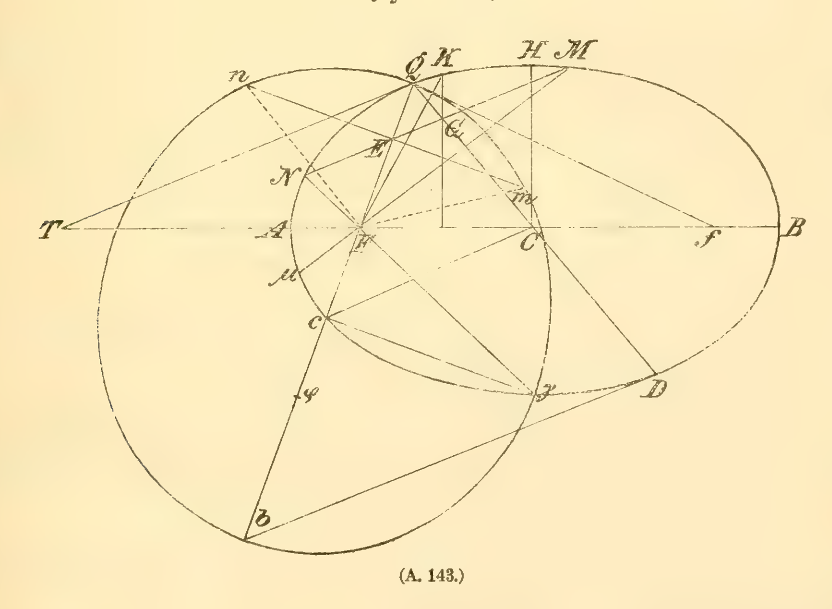
Da nun $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ nothwendig positiv sein muss, so hängt das Vorzeichen von $\sin\frac{\delta}{2}$ nur von dem von f_2 ab und ist positiv, wenn

$$2f_2 < 180°$$

negativ, wenn

$$2f_2 > 180°,$$

ist.



(A. 143.)

Indessen bleibt die Bestimmung von ε zweideutig, und in der That hat schon LAMBERT (»Insigniores orbitæ cometarum proprietates« 1761) diese doppelte Lösung gekannt. Nachdem er § 173 seines citirten Werkes nachgewiesen hatte, dass es (Fig. 143) zwei Ellipsen

$$AQBD \quad \text{und} \quad bnQm$$

giebt, welche bei demselben Brennpunkte F (Sonnenmittelpunkt) eine gleich grosse Bahnaxe

$$AB = Qb$$

besitzen, beweist er im § 177, dass für gleiche Sehnen

$$MN = mn = s_2$$

in den beiden Ellipsen die Summe der Radienvectoren gleich ist, also

$$NF + MF = nF + mF$$

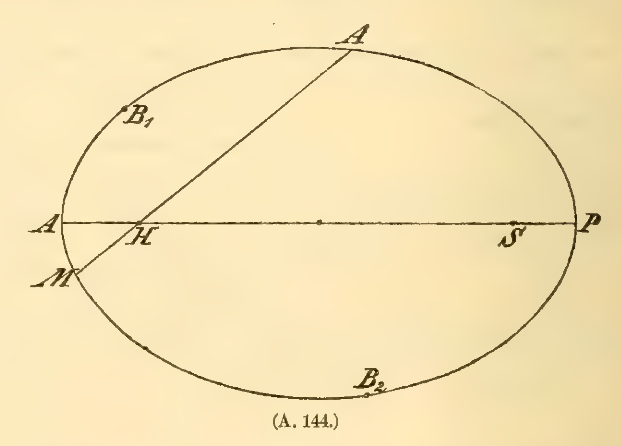
oder

$$r_1 + r_3 = r_1' + r_3'$$

und endlich in § 183, dass die Umlaufszeiten in beiden Ellipsen dieselben sind. Einfacher hat GAUSS in einer Anmerkung zu dem Art. 106 die Sache erledigt, er sagt:

»Beschreibt man aus dem ersten Orte mit dem Radiusvector $2a - r^1$ einen Kreis und ebenso aus dem dritten Orte mit dem Radiusvector $2a - r_3$, so giebt der Durchschnitt dieser beiden Kreise den zweiten Brennpunkt der Ellipse, welcher den Sonnenmittelpunkt nicht enthält; da aber im Allgemeinen zwei Kreise zwei Durchschnittspunkte haben, so muss für jeden der zwei Durchschnittspunkte und den Sonnenmittelpunkt eine Ellipse möglich sein.

Endlich hat A. CAYLEY, »Note on LAMBERT's theorem for elliptic motion« (»Monthly notices of the Roy. Astron. Society«, vol. XXIX (1869), pag. 318—320), bemerkt, dass für eine gegebene Ellipse diese Zweideutigkeit nothwendig wegfallen müsse und formulirt die Bedingung folgendermaassen: Es sei in der Ellipse (Fig. 144) S die Sonne und H der andere Brennpunkt; ferner seien A und B (B_1 oder B_2) die zwei Beobachtungen des Planeten, so verbinde man A mit dem Brennpunkte H durch eine Sehne (Separator); trennt diese Sehne AM, wie z. B. im Falle B_1, diesen Ort von der Sonne, so ist $\varepsilon < 180°$; liegen dagegen der Punkt B_2 und S auf derselben Seite, so ist $\varepsilon > 180°$; die Bewegung ist vom Perihel P zum Aphel A gerichtet; die Zeit immer positiv.



(A. 144.)

Nach diesem Excurse kehren wir wieder zur Bahnbestimmung zurück.

Die Hilfsgrössen zu den Versuchen zur Darstellung von r_1, r_3 und s_2 als Functionen von ρ_1 werden wie bei der parabolischen Hypothese gerechnet, mit einem aus den parabolischen Elementen entlehnten ρ_1 werden

$$r_1, \ r_3 \quad \text{und} \quad s_2$$

wie in der Parabel gerechnet und dann nach der LAMBERT'schen Gleichung mit Hilfe des angenommenen a die Zwischenzeit

$$t_3 - t_1$$

bestimmt; die Versuche müssen so lange fortgesetzt werden, bis die Uebereinstimmung des berechneten und beobachteten Werthes $t_3 - t_1$ erfolgt. Die Ermittlung der von der Bahnlage abhängigen Elemente sowie der Argumente

der Breite wird nach den bekannten Formeln ausgeführt. Was die Bestimmung der Perihelzeit anbelangt, so findet man unter Berücksichtigung von

$$p = q(1 + e) \qquad q = a(1 - e)$$

durch ein Verfahren, das dem bei der Parabel angewandten nachgebildet ist, die Grössen v_1 und q durch

$$\frac{\cos\frac{v_1}{2}}{\sqrt{q}} = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{r_1}} \qquad \frac{\sin\frac{v_1}{2}}{\sqrt{q}} = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{r_1}\, tang\frac{u_3 - u_1}{2}} - \frac{\vartheta_3}{\sqrt{r_3}\,\sin\frac{u_3 - u_1}{2}}.$$

Darin sind

$$\vartheta_1^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\frac{r_1}{q} - 1}{\frac{a}{q} - 1} \qquad \vartheta_3^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\frac{r_3}{q} - 1}{\frac{a}{q} - 1}.$$

Allerdings ist in ϑ_1 und ϑ_3 noch q enthalten, und dadurch wird die Rechnung eine indirekte. Allein einerseits ist aus der parabolischen Hypothese ein genäherter Werth von q bekannt, und andererseits sind ϑ_1 und ϑ_3 Werthe, die meist wenig von der Einheit verschieden sind, sodass die indirekte Rechnung kaum viel Zeit erfordert. Nach zwei Versuchen findet man mit Hilfe der Regula falsi fast immer den richtigen Werth.

Zieht man indessen die direkte Rechnung vor, so bedient man sich am besten der Formeln, welche zur Ermittlung der Elemente in elliptischen und hyperbolischen Bahnen an den betreffenden Stellen angeführt wurden.

Die Perihelzeiten müssen nach einem für nahezu parabolische Bahnen geltenden Verfahren bestimmt werden, ebenso werden die wahren Anomalien nach bestimmten Tafeln gerechnet, die in den verschiedenen Werken, je nach besonderer Vorliebe für einen oder den anderen Autor, enthalten sind (Gauss, Bessel, Brünnow etc.). Doch möchte das Gauss'sche Verfahren in allen Fällen vorzuziehen sein, nicht zum geringsten seiner Allgemeinheit wegen, da es für elliptische und hyperbolische Bahnen gleichmässig Geltung hat.

Das Gauss'sche Verfahren ist das folgende:

Aus der bekannten Gleichung (6) folgt

$$\int r^2\, dv = kt\sqrt{p},$$

da nun

$$p = q(1 + e)$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

oder wenn man

$$\delta = 1 - e$$

setzt, so wird

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}(1 + e)^{\frac{3}{2}}} = \int(1 + \cos v - \delta\cos v)^{-2} dv.$$

Entwickelt man den Klammerausdruck unter dem Integralzeichen und setzt

$$tang\frac{v}{2} = \tau,$$

daher

$$\cos v = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2},$$

so wird nach gehöriger Reduction

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(1+e)^2}{\left(1+e\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Setzt man endlich noch abkürzend

$$i = \frac{1-e}{1+e},$$

so wird

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \int (1+\tau^2)(1+i\tau^2)^{-2} d\tau.$$

Wird unter dem Integralzeichen die Substitution

$$tang^2 \frac{v}{2} = \frac{\theta}{i}$$

gemacht, so ergiebt sich

$$\frac{kt(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}(1+e)} = \int \frac{(i+\theta)(1+\theta)^{-2}}{\sqrt{\theta}} d\theta,$$

woraus durch Integration und Substitution von i

$$\frac{kt(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\theta}\left[(1-e) - \frac{1-3e}{3}\theta + \frac{1-5e}{5}\theta^2 - \ldots\ldots\right]$$

folgt.

Die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen kann zerfällt werden in

$$\alpha = 2\sqrt{\theta}[1 - \tfrac{1}{3}\theta + \tfrac{1}{5}\theta^2 - \ldots\ldots]$$
$$\beta = 2\sqrt{\theta}[1 - \theta + \theta^2 - \ldots\ldots],$$

sodass

$$\frac{kt(1-e)^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}} = \alpha - e\beta.$$

Diese Reihen würden sehr unbequem für die Berechnung sein, da sie in ihren ersten Werthen übereinstimmen. Man setzt daher mit GAUSS

$$\alpha - e\beta = \frac{1-e}{10}(9\alpha+\beta) + \frac{1+9e}{10}(\alpha-\beta).$$

Es wird

$$A = 15\frac{\alpha-\beta}{9\alpha+\beta}$$

gesetzt und erhalten

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{9\alpha+\beta}{10}\left(1 + \frac{1+9e}{1-e}\cdot\frac{A}{15}\right)$$

und durch Substitution von

$$B = \frac{9\alpha+\beta}{20\sqrt{A}}$$

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{2q^{\frac{3}{2}}} = B\left(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1+9e}{1-e}\,\frac{A^{\frac{3}{2}}}{15}\right).$$

Die Grösse B wurde von GAUSS deshalb eingeführt, weil ihr Unterschied von der Einheit nur eine Grösse zweiter Ordnung ist, also in der ersten Näherung des indirekten Verfahrens der Einheit gleich gesetzt werden kann und ausserdem ihre Werthänderung in der Nähe des Perihels ($\tau = \theta = 0$) sehr gering ist. Um die BARKER'sche Tafel nach OPPOLZER's Anordnung zur Auflösung benützen zu können, setze man

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e} \, tang^2 \frac{w}{2}$$

und es wird

$$\frac{kt}{2Bq^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1+9e}{5}} = tang \frac{w}{2} + \frac{1}{3} tang^3 \frac{w}{2}.$$

Es war aber früher angenommen worden

$$\theta = tang^2 \frac{v}{2} \, i,$$

also

$$tang^2 \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \theta;$$

setzt man noch

$$\theta = AC^2 = C^2 \frac{5(1-e)}{1+9e} \, tang^2 \frac{w}{2}$$

und daher

$$tang \frac{v}{2} = C \, tang \frac{w}{2} \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}$$

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e \cos v}.$$

Diese Formel lässt sich auch schreiben

$$r = \frac{q}{(1+AC^2)\cos^2 \frac{v}{2}}.$$

Die Reihenwerthe der hier nothwendigen Grössen sollen hier kurz zusammengestellt werden; es ist

$$A = \theta \left(1 - \frac{4}{5}\theta + \frac{24}{35}\theta^2 - \frac{1592}{2625}\theta^3 + \frac{78856}{144375}\theta^4 \ldots \right)$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{A}{\theta} = 1 - \frac{4}{5}A + \frac{8}{175}A^2 + \frac{8}{525}A^3 + \frac{1896}{336875}A^4 + \frac{28744}{13138125}A^5 \ldots$$

$$B = 1 + \frac{3}{175}A^2 + \frac{2}{525}A^3 + \frac{471}{336875}A^4 \ldots$$

Es wäre natürlich unzweckmässig, jede der Grössen von Fall zu Fall zu rechnen, weshalb man für jede halbwegs complicirtere Grösse ausser A und B Hilfstafeln construiren wird.

Stellt man die bezüglichen Formeln zusammen, so wird zu rechnen sein:

$$M = \frac{t}{Bq^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1+9e}{10}}. \qquad \text{(I)}$$

B ist im ersten Versuche $= 1$ zu setzen; mit dem Werthe M wird aus der Barker'schen Tafel ein genähertes w entnommen;

$$\gamma = \frac{5(1-e)}{1+9e} \qquad \text{(II)}$$

$$A = \gamma \, tang^2 \frac{w}{2}. \qquad \text{(III)}$$

Mit diesem A wird das zugehörige B gerechnet und das Formelsystem (I) — (III), so lange wiederholt, bis keine Aenderung von B eintritt; meist wird schon der aus obigem A berechnete Werth von B der definitive sein.

$$\delta = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \tag{IV}$$

$$tang\,\frac{v}{2} = \delta C\, tang\,\frac{w}{2} \tag{V}$$

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v} = \frac{q}{(1+AC^2)\cos^2\frac{v}{2}}. \tag{VI}$$

Für die Hyperbel wird A negativ; die Ausdrücke aber bleiben dieselben.

Ist die wahre Anomalie gegeben, und sucht man die Zeit des Perihels, so ergiebt sich aus dem eben Vorgetragenen unmittelbar die folgende Rechenvorschrift. Man rechnet

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\, tang^2\,\frac{v}{2} \tag{1}$$

und setzt in erster Näherung

$$A = \theta.$$

Damit erhält man C entweder aus Tafeln oder durch direkte Rechnung und dann

$$A = \gamma\left(\frac{tang\,\frac{v}{2}}{\delta C}\right)^2, \tag{2}$$

worin

$$\gamma = \frac{5(1-e)}{1+9e}$$

und

$$\delta = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \tag{4}$$

ist. Mit diesem genaueren Werthe von A berechnet man wieder C, bis keine Aenderung mehr in C eintritt. Dann wird

$$tang\,\frac{w}{2} = \frac{tang\,\frac{v}{2}}{\delta C} \tag{5}$$

und wenn man mit dem Argumente w die Grösse M aus der BARKER'schen Tafel nimmt, so wird

$$t = MBq^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{10}{1+9e}} \tag{6}$$

Ist die zugehörige Beobachtungszeit t_1, so wird die Perihelzeit T, je nachdem v positiv oder negativ ist

$$T = t_1 \mp t.$$

Will man die Correction B und den Unterschied von C und $1 + \frac{1}{5}A$ vernachlässigen, so hat man kürzer für die Ellipse

$$M = t\sqrt{\frac{1+9e}{10q^3}}$$

$$tang\,\frac{w}{2}\sqrt{\frac{4}{5}\gamma} = \sin\sigma$$

$$tang\,\frac{v}{2} = \frac{\delta\, tang\,\frac{w}{2}}{\cos\sigma}$$

und für die Hyperbel

$$tang \frac{w}{2} \sqrt{-\frac{4}{5}\gamma} = tang\, \sigma$$

$$tang \frac{v}{2} = \delta\, tang \frac{w}{2} \cos \sigma$$

Formeln, die vollkommen ausreichen, wenn e ziemlich bedeutend und v klein ist.

Um ein Rechenbeispiel behufs etwaiger Controlle anzuführen, setze ich die von OPPOLZER[1]) gerechneten Grössen in Zwischenresultaten hier an.

Für den Kometen 1862 III war

$$T = 1862 \text{ August } 22{\cdot}949139 \text{ m. Zt. Berlin}$$
$$\log q = 9{\cdot}9834650$$
$$e = 0{\cdot}9607588$$
$$\log e = 9{\cdot}9826144,$$

daraus wird nach den Formeln (I)—(II), pag. 537,

$$\gamma = 8{\cdot}3083277 \qquad \log \delta = 0{\cdot}0035048$$
$$\log \alpha = \sqrt{\frac{1+9e}{10q^3}} = 0{\cdot}0169948$$
$$\log q(1+e) = 0{\cdot}2758892.$$

Ist nun

$$T_1 = 1862 \text{ October } 23{\cdot}0$$
$$\log t_1 = 1{\cdot}7856918,$$

so ist

$$\log \alpha t_1 = 1{\cdot}8026866.$$

Setzt man $B = 1$, so giebt die BARKER'sche Tafel auf den ersten Blick

$$w = 67^\circ\, 45' \qquad A = 0{\cdot}00917$$
$$\log B = 0{\cdot}0000006$$

und damit

$$\log tang \frac{w^2}{2} = 9{\cdot}6540$$
$$\log A = 7{\cdot}9623.$$
$$\log M = 1{\cdot}8026860$$
$$w = 67^\circ\, 45'\, 8''{\cdot}78 \qquad \log C = 0{\cdot}0015976$$
$$\log(\delta C) = 0{\cdot}0051024$$
$$\log tang^2 \frac{w}{2} = 9{\cdot}6539236 \qquad \log tang \frac{v}{2} = 9{\cdot}8320642$$
$$\frac{v}{2} = 34^\circ\, 11'\, 18''{\cdot}345$$
$$\log A = 7{\cdot}9622513 \qquad v = 68^\circ\, 22'\, 36''{\cdot}69$$
$$\log r = \log \frac{q(1+e)}{1+e\cos v} = 0{\cdot}1442578.$$

Umgekehrt wird aus den Formeln (1)—(6), pag. 538,

$$\theta = 0{\cdot}00923$$
$$\log C = 0{\cdot}0016085 \qquad \log\left(\gamma\, tang^2 \frac{v}{2}\right) = 7{\cdot}9724561$$
$$\log(\delta C) = 0{\cdot}0051133$$
$$\log(\delta C)^2 = 0{\cdot}0102266 \qquad \log A = 7{\cdot}9622295$$
$$\log tang^2 \frac{v}{2} = 9{\cdot}6641284 \qquad A = 0{\cdot}0091670$$

[1]) Lehrbuch z. Bahnbestimmung I. Band 1. Aufl. 1870, pag. 63 ff.

$$\log C = 0{\cdot}0015975$$
$$\log A = 7{\cdot}9622515$$
$$A = 0{\cdot}0091675$$

$$\log C = 0{\cdot}0015976 \qquad \log B = 0{\cdot}0000006$$
$$\log (\delta C) = 0{\cdot}0051024 \qquad \log M = 1{\cdot}8026860$$
$$\frac{w}{2} = 33^\circ\ 52'\ 34''{\cdot}395 \qquad \log compl\, \alpha = 9{\cdot}9830052$$
$$\log t = 1{\cdot}7856918$$
$$w = 67^\circ\ 45'\ 8''{\cdot}79 \qquad t = +\ 61{\cdot}05086.$$

Wendet man das abgekürzte Verfahren an, so wird

$$M = t\sqrt{\frac{1+9e}{10q^3}}$$

$$w = 67^\circ\ 45'\ 8''{\cdot}99 \qquad \sqrt{\frac{4}{5}}\,\gamma = 9{\cdot}10571$$
$$\frac{w}{2} = 33^\circ\ 52'\ 34''{\cdot}49 \qquad \log \sin \sigma = 8{\cdot}93267$$
$$\log \cos \sigma = 9{\cdot}9984016$$
$$\log \delta \tang \frac{w}{2} = 9{\cdot}8304670 \qquad \log \tang \frac{v}{2} = 9{\cdot}8320654.$$

$$v = 68^\circ\ 22'\ 37''{\cdot}22,$$

während die strenge Rechnung gab:

$$v = 68^\circ\ 22'\ 36''{\cdot}69$$

also eine ziemlich gute Uebereinstimmung.

VII. Ausgleichung der Beobachtungen durch Differentialquotienten.

Bisher wurde der differentiellen Aenderung der Elemente auf eine mehr empirische Weise Rechnung getragen; man wird diese Form namentlich bei den älteren Kometen bis in die ersten Jahre des 19. Jahrhunderts bevorzugen, da die Beobachtungen meistens wegen der ungleich grösseren Beobachtungsfehler gegen die modernen zurückstehen, sowie häufig auch wegen Unkenntniss der benützten Vergleichsterne eine genaue Reduction nicht gestatten.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen wird wieder der doppelte Fall einer kleinen Excentricität (Planeten) und einer grossen Excentricität (Kometen) gesondert betrachtet werden. Ich werde mich dabei wie bisher im Allgemeinen des Weges bedienen, den OPPOLZER in seinem mehrfach citirten Lehrbuche eingeschlagen hat, kann aber nicht umhin, auf die kleine Schrift von G. D. E. WEYER, »Ueber die Differentialformeln für Kometenbahnen von grosser Excentricität« (Berlin 1852) hinzuweisen, die durch die grosse Klarheit ihrer Darstellung, namentlich Anfängern zum Studium sehr zu empfehlen ist.

Die heliocentrischen Coordinaten des Himmelskörpers, auf die Ekliptik als Grundebene bezogen, fanden sich (pag. 471)

$$x = r\,(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$
$$y = r\,(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i)$$
$$z = r \sin u \sin i,$$

darin ist

$$u = (v + \pi) - \Omega.$$

Führt man die Differentiation der Coordinaten nach u, r, Ω und i aus und zählt alle Längen vom Punkte Ω, also $\Omega = 0$, aus, so werden die differentiellen Aenderungen,

$$du = d(v + \pi)$$

gesetzt,

$$\frac{\partial x}{\partial(v+\pi)} = -r \sin u \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos u$$
$$\frac{\partial y}{\partial(v+\pi)} = r \cos u \cos i \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin u \cos i$$
$$\frac{\partial z}{\partial(v+\pi)} = r \cos u \sin i \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin u \sin i$$
$$\frac{\partial x}{\sin i\, \partial \Omega} = r \sin u \operatorname{tang} \frac{i}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial i} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\sin i\, \partial \Omega} = r \cos u \operatorname{tang} \frac{i}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial i} = -r \sin u \sin i$$
$$\frac{\partial z}{\sin i\, \partial \Omega} = -r \cos u \qquad \frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos i$$

Vermöge der Bedeutung von x, y, z

$$x = \xi - X$$
$$y = \eta - Y$$
$$z = \zeta - Z$$

findet man

$$\partial \alpha \cos \delta = -\frac{\sin(\alpha - \Omega)}{\rho} \partial x + \frac{\cos(\alpha - \Omega)}{\rho} \partial y$$
$$\partial \delta = -\frac{\cos(\alpha - \Omega) \sin \delta}{\rho} \partial x - \frac{\sin(\alpha - \Omega) \sin \delta}{\rho} \partial y + \frac{\cos \delta}{\rho} \partial z$$

und damit

$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\partial(v+\pi)} = \frac{r}{\rho} [\sin(\alpha - \Omega) \sin u + \cos(\alpha - \Omega) \cos u \cos i]$$
$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\partial r} = \frac{1}{\rho} [-\sin(\alpha - \Omega) \cos u + \cos(\alpha - \Omega) \sin u \cos i]$$
$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\sin i\, \partial \Omega} = \frac{r}{\rho} \operatorname{tang} \frac{i}{2} \cos(\alpha - \Omega + u)$$
$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\partial i} = -\frac{r}{\rho} \sin u \cos(\alpha - \Omega) \sin i$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial(v+\pi)} = \frac{r}{\rho} [\cos(\alpha - \Omega) \sin u \sin \delta - \sin(\alpha - \Omega) \cos i \sin \delta + \cos u \sin i \cos \delta]$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = \frac{1}{\rho} [-\cos(\alpha - \Omega) \cos u \sin \delta - \sin(\alpha - \Omega) \sin u \cos i \sin \delta + \sin u \sin i \cos \delta]$$
$$\frac{\partial \delta}{\sin i\, \partial \Omega} = -\frac{r}{\rho} [\sin(\alpha - \Omega + u) \sin \delta \operatorname{tang} \frac{i}{2} + \cos u \cos \delta]$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial i} = \frac{r}{\rho} [\sin(\alpha - \Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i] \sin u.$$

Führt man Hilfswinkel durch die folgenden Relationen ein:

$$A \sin A' = \cos(\alpha - \Omega) \cos i; \qquad m \sin M = \sin i$$
$$A \cos A' = \sin(\alpha - \Omega); \qquad m \cos M = -\sin(\alpha - \Omega) \cos i$$
$$B \sin B' = m \sin(M + \delta)$$
$$B \cos B' = \cos(\alpha - \Omega) \sin \delta,$$

so wird

$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\partial(v+\pi)} = \frac{r}{\rho} A \sin(A' + u) \qquad \frac{\partial \delta}{\partial(v+\pi)} = \frac{r}{\rho} B \sin(B' + u)$$
$$\frac{\cos \delta\, \partial \alpha}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} A \cos(A' + u) \qquad \frac{\partial \delta}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} B \cos(B' + u).$$

Der Vortheil der angegebenen Substitutionen ergiebt sich aus dem Folgenden:

Denkt man sich die Variation von $(v + \pi)$ und r nach irgend einem Elemente dargestellt durch

$$\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\varepsilon} = V \qquad \frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = R$$

und setzt man

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = -\frac{R}{r} = N \sin N'; \qquad V = N \cos N',$$

so werden unter Berücksichtigung

$$\frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = \left[\frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial(v+\pi)}\right]\left[\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\varepsilon}\right] + \left(\frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \left[\frac{\partial\delta}{\partial(v+\pi)}\right]\left[\frac{\partial(v+\pi)}{\partial\varepsilon}\right] + \left(\frac{\partial\delta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = \frac{r}{\rho} A N \sin(N' + A' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \frac{r}{\rho} B N \sin(N' + B' + u)$$

für die logarithmische Rechnung bequeme Formeln.

Mit Hilfe dieser Formeln ist man im Stande, auch die Differentialquotienten für die übrigen vier Elemente herzustellen. Trennt man Bahnen von kleiner Excentricität und nahezu parabolische Bahnen und macht man bei den ersteren noch den Unterschied zwischen Planeten und Kometen von kurzer Umlaufszeit, so erhält man die folgenden drei Formelsysteme bereits in der für die Rechnung brauchbarsten Form. Für nahezu parabolische Bahnen habe ich statt der Formeln des Lehrbuches jene vorgezogen, welche OPPOLZER in den Sitzungsberichten der k. Akademie d. Wissensch. in Wien (Band 49 2. Abth., pag. 271) gegeben hat, weil dieselben die Benützung von Hilfstafeln nicht erfordern.

a) Planetenbahnen.

Man berechnet für jeden Ort höchstens fünfstellig

$$A \sin A' = \cos(\alpha - \Omega)\cos i$$
$$A \cos A' = \sin(\alpha - \Omega)$$
$$m \sin M = \sin i$$
$$m \cos M = -\sin(\alpha - \Omega)\cos i$$
$$B \sin B' = m \sin(M + \delta)$$
$$B \cos B' = \cos(\alpha - \Omega)\sin\delta$$
$$u = v + \omega$$

$$F \sin F' = -\frac{a}{r}\, tang\, \varphi \sin v$$

$$F \cos F' = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi$$

$$G \sin G' = t \cdot F \sin F' + \frac{2}{3\mu \sin 1''}$$ t (ist die seit der Epoche verflossene Zeit in mittleren Sonnentagen)

$$G \cos G' = t F \cos F'$$

$$\Phi = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\pi \qquad \Psi = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos\pi$$

$$\frac{\Psi \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = l, \quad \frac{\Psi \sin 1''}{\cos^2 \varphi} = n, \quad \frac{2 + \sin \varphi \cos v}{\cos^2 \varphi} = d$$

$$\frac{\Phi \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = m, \quad \frac{\Phi \sin 1''}{\cos^2 \varphi} = q, \quad 1 + \frac{(1 + \sin \varphi \cos v)^2}{2 \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = f$$

$$H \sin H' = \frac{a}{r} [\sin (v + \pi) + l \sin v]$$
$$H \cos H' = - [d \cos (v + \pi) + nf]$$
$$K \sin K' = \frac{a}{r} [\cos (v + \pi) - m\, siu\, v]$$
$$K \cos K' = [d \sin (v + \pi) + qf]$$
$$L_0 = M_0 + \pi.$$

Dann ist

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial L_0} = \frac{r}{\rho} AF \sin(F' + A' + u)$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial L_\theta} = \frac{r}{\rho} BF \sin(F' + B' + u)$$
$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \mu} = \frac{r}{\rho} AG \sin(G' + A' + u)$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial \mu} = \frac{r}{\rho} BG \sin(G' + B' + u)$$
$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \Phi} = \frac{r}{\rho} AH \sin(H' + A' + u)$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial \Phi} = \frac{r}{\rho} BH \sin(H' + B' + u)$$
$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{d \Psi} = \frac{r}{\rho} AK \sin(K' + A' + u)$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial \Psi} = \frac{r}{\rho} BK \sin(K' + B' + u)$$
$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega} = \frac{r}{\rho} \operatorname{tang} \frac{i}{2} \cos (\alpha - \Omega + u)$$
$$\frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega} = - \frac{r}{\rho} \left[\sin (\alpha - \Omega + u) \sin \delta \operatorname{tang} \frac{i}{2} + \cos u \cos \delta\right]$$
$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial i} = - \frac{r}{\rho} \sin u \cos (\alpha - \Omega) \sin i$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial i} = \frac{r}{\rho} [\sin (\alpha - \Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i] \sin u.$$

b) Kometenbahnen von kurzer Umlaufszeit.

Die vorhergehenden Formeln gelten auch hier bis zu der Gleichung

$$u = v + w$$

wie natürlich, da sich dieselben nur auf die Bahnlage beziehen; man setze dann

$$P \sin P' = \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v$$
$$P \cos P' = \frac{\sin v}{\cos \varphi} (2 + e \cos v),$$

so wird

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial M_0} = \frac{r}{\rho} AF \sin(F' + A' + u)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial M_0} = \frac{r}{\rho} BF \sin(F' + B' + u)$$
$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\mu} = \frac{r}{\rho} AG \sin(G' + A' + u)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\mu} = \frac{r}{\rho} BG \sin(G' + B' + u)$$
$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\varphi} = \frac{r}{\rho} AP \sin(P' + A' + u)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\varphi} = \frac{r}{\rho} BP \sin(P' + B' + u)$$
$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial\pi} = \frac{r}{\rho} A \sin(A' + u)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\pi} = \frac{r}{\rho} B \sin(B' + u)$$

Will man in den Formeln für Planetenbahnen die Aenderungen von Ψ und Φ auf die Elemente π und φ übertragen, so wird man anstatt der differentiellen Aenderungen, die wegen der geringen Excentricität unsicher werden, setzen

$$\partial\Phi = n \sin N$$
$$\partial\Psi = n \cos N,$$

woraus

$$\operatorname{tang}(\pi - \pi_0) = \operatorname{tang}\partial\pi = \frac{n \sin(N - \pi_0)}{e_0 + n \cos(N - \pi_0)}$$

folgt; setzt man

$$\frac{n}{\sin\varphi_0} = p,$$

so ergiebt sich durch Reihenentwicklung

$$\partial\pi = p \sin(N - \pi_0) - \tfrac{1}{2}p^2 \sin 1'' \sin 2(N - \pi_0) + \tfrac{1}{3}p^3 (\sin 1'')^2 \sin 3(N - \pi_0) \ldots .$$

und

$$\partial e = \frac{n \cos\left(N - \frac{\pi + \pi_0}{2}\right)}{\cos\frac{\pi - \pi_0}{2}}$$
$$\partial\varphi = \frac{\partial e}{\cos\varphi_0}.$$

c) Nahe parabolische Bahnen.

Bedienen wir uns der früher angewendeten Bezeichnungen, so können die Formeln für Knoten, Neigung und Länge des Perihels unmittelbar benützt werden; führt man die Hilfsgrössen Q, Q', R, R' so ein, dass

$$sq \cos v = Q \sin Q' \qquad \log s = 5{\cdot}31443$$
$$\frac{3k(t - T)\sqrt{q}}{r\sqrt{2}} = Q \cos Q' \qquad \log k = 3{\cdot}55001$$
$$-\operatorname{tang}\frac{v}{2}(6q^2 + 3rq + r^2) = R \sin R'$$
$$6q^2 + 3rq - 4r^2 = R \cos R'$$

gelten, so werden

$$\frac{\cos\delta\cdot\partial\alpha}{dT} = -\frac{k\sqrt{2}}{\rho\sqrt{r}} A \sin\left(A' + u - \frac{v}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial T} = -\frac{k\sqrt{2}}{\rho\sqrt{r}} B \sin\left(B' + u - \frac{v}{2}\right)$$

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial \log q} = -\frac{nG}{\rho} A \sin(A' + Q' + u) \qquad \log n = 0{\cdot}36222$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial \log q} = -\frac{nG}{\rho} B \sin(B' + Q' + u)$$

$$\frac{\cos\delta\,\partial\alpha}{\partial c} = \frac{s \tang \frac{v}{2} R}{10 r\rho} A \sin(A' + R' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial e} = \frac{s \tang \frac{v}{2} R}{10 r\rho} B \sin(B' + R' + u).$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass T die Zeit des Periheldurchganges, q die Periheldistanz vorstellen und alle Gleichungen so angeordnet sind, dass für die in Bogen gegebenen Elemente die Einheit die Bogensecunde ist, während für dT, $d \log q$ und de der Radius als Einheit zu Grunde liegt, daher die vollkommene Willkür vorliegt, die 5., 6. oder 7. Decimale als Einheit zu nehmen.

Die Elemente, welche man vor Berechnung der Differentialquotienten ermittelte, sind meist auf die Ekliptik als Grundebene bezogen, während die Berechnung der Differentialquotienten äquatoreale Elemente erfordert; bezeichnet man letztere mit i, Ω, π und nennt ε die mittlere Schiefe der Ekliptik, sowie σ die Seite, welche dem Winkel ε gegenüberliegt, so erhält man die Grössen i, Ω, π aus den Ekliptikalelementen i', Ω', π' durch das folgende Gleichungssystem:

$$\sin\frac{(\Omega + \sigma)}{2} \cos\frac{i}{2} = \cos\frac{i' - \varepsilon}{2} \sin\frac{\Omega'}{2}$$

$$\cos\frac{(\Omega + \sigma)}{2} \cos\frac{i}{2} = \cos\frac{i' + \varepsilon}{2} \cos\frac{\Omega'}{2}$$

$$\sin\frac{(\Omega - \sigma)}{2} \sin\frac{i}{2} = \sin\frac{i' - \varepsilon}{2} \sin\frac{\Omega'}{2}$$

$$\cos\frac{(\Omega - \sigma)}{2} \sin\frac{i}{2} = \sin\frac{i' + \varepsilon}{2} \cos\frac{\Omega'}{2}$$

$$\pi = (\pi' + \sigma) - (\Omega' - \Omega).$$

Hat man die Aenderungen der Aequatorealelemente ermittelt, so wird es nicht nothwendig sein, wieder auf die Ekliptikalelemente überzugehen; vielmehr wird man die Aenderungen der ursprünglichen Ekliptikalelemente durch folgende Differentialformeln erhalten

$$\partial\Omega' = \frac{\sin\Omega'}{\sin\Omega} \cos\sigma\,\partial\Omega - \frac{\sin\sigma}{\sin i'} \partial i$$

$$\partial\sigma = \frac{\sin\sigma}{\sin\Omega} \cos\Omega'\,\partial\Omega - \frac{\sin\sigma}{\sin i'} \cos i'\,\partial i$$

$$\partial i' = \sin i \sin\sigma\,\partial\Omega + \cos\sigma\,\partial i$$

$$\partial\omega' = \partial\omega - \partial\sigma.$$

Führt man endlich die Hilfsgrössen p und P durch die Relation ein

$$p \sin P = \sin i\,\partial\Omega$$

$$p \cos P = \partial i,$$

so ergiebt sich auch

$$\partial i' = p \cos(P - \sigma)$$
$$\partial \Omega' = \frac{p}{\sin i'} \sin(P - \sigma)$$
$$\Delta\pi' = p \tan\frac{i'}{2} \sin(P - \sigma) - \tan\frac{i}{2} \sin i \, d\Omega$$
$$\partial\pi' = \partial\pi + \Delta\pi' \qquad \partial L' = \partial L + \Delta\pi.$$

Will man die Beobachtungen nur in einer Parabel ausgleichen, so werden naturgemäss die Gleichungen für de wegzulassen sein, und man erhält ein System Gleichungen von der Form:

$$\cos\delta\Delta\alpha = \frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial T} dT + \frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial \log q} d\log q + \frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial\pi} d\pi + \frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial\Omega} d\Omega + \frac{\cos\delta\partial\alpha}{\partial i} di.$$
$$\Delta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial T} dT + \frac{\partial\delta}{\partial \log q} d\log q + \frac{\partial\delta}{\partial\pi} d\pi + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega} d\Omega + \frac{\partial\delta}{\partial i} di.$$

$\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sind wieder die im Sinne Beobachtung weniger Rechnung übrig bleibenden Fehler, dT, $d\log q$, $d\pi$, $d\Omega$ und di die nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmenden Unbekannten. Die resultirenden Normalgleichungen werden immer so aufgelöst, dass man nicht alle Unbekannte selbstständig bestimmt, sondern die Aenderungen der Elemente als Function jener Grösse ausdrückt, welche am unsichersten bestimmt erscheint.

VIII. Zusammenstellung der Formeln und Rechenbeispiele für erste Bahnbestimmungen.

a) Elliptische Bahnen.

Als Rechenbeispiel habe ich das von ENCKE im Berliner Jahrbuch für 1854 (Berlin 1851) ausgeführte vollständig beibehalten, wiewohl es mit den älteren Reductionselementen (ENCKE'sche Parallaxe der Sonne, DELAMBRE'sche Constante der Aberrationszeit etc.) berechnet ist, da es sich hier vorwiegend nur um Darlegung des Rechenmechanismus handelt und die Resultate sich nur um einige Zehntel der Bogensecunde unterscheiden würden. Ausserdem weiss jeder mit der Geschichte der astronomischen Constanten Vertraute, dass wir heute noch nicht in der Lage sind, diese oder jene Angabe als die definitive zu betrachten, wie dies am besten die Sonnenparallaxe beweist[1]). Als Grundlagen der Rechnung dienen die folgenden Berliner Beobachtungen des Planeten Hebe (6):

Mittl. Zeit Berl.	Beob. α	Beob. δ	Scheinbare Schiefe d. Ekliptik.
1847 Juli 5 10^h 14^m 27^s·8	256° 51′ 34″·5	−4° 8′ 27″·8	23° 27′ 23″.80
„ 10 9 51 5·2	255 55 36·3	−4 40 15·2	23·83
„ 16 9 23 46·0	254 59 55·4	−5 23 1·3	23·88.

Die Verwandlung in Länge und Breite nach den Formeln

$$\sin N = \frac{\tan\delta}{\sin\alpha}$$
$$\tan\lambda = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} \tan\alpha$$
$$\tan\beta = \tan(N - \varepsilon) \sin\lambda.$$
$$\text{Probe: } \frac{\cos\beta \sin\lambda}{\cos\delta \sin\alpha} = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N}$$

---

[1]) NEWCOMB fand bekanntlich (»Washington Observations«. 1865, app. II.) für die Sonnenparallaxe als wahrscheinlichsten Werth

8″·848,

heute ist derselbe schon längst als zu gross erkannt.

ergiebt die folgenden scheinbaren Ekliptikalorte, wozu noch die entsprechenden scheinbaren Sonnenorte hinzugefügt sind, welche aus irgend einer Ephemeride (Berliner Jahrbuch, Nautical almanac etc.) für die betreffenden Beobachtungszeiten entnommen werden:

t	λ_0	β_0	$\odot_0$	B_0	$\log R_0$
Juli 5·42671	256° 9′ 4″·14	+18° 41′ 8″·20	103° 9′ 14″·5	−0″·11	0·0071991
„ 10·41048	255 13 51·49	+18 3 59·75	107 54 24·8	−0·57	0·0071551
„ 16·39150	254 20 40·40	+17 15 38·87	113 36 50·5	−0·34	0·0070205

Für Berlin ist ferner

die geocentrische Breite φ' 52° 19′·2

die geocentrische Entfernung $[\rho]$ 9·99909

und damit, sowie mit Hilfe der Sternzeiten

$$\theta^\circ = 256^\circ\, 51'{\cdot}6,\ 255^\circ\, 55'{\cdot}6,\ 255^\circ\, 0'{\cdot}0,$$

ergeben sich nach den Formeln

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin\varphi' \\ m \cos M &= \cos\varphi' \sin\theta \\ \cos b^0 \cos l^0 &= \cos\varphi' \cos\theta \\ \cos b^0 \sin l^0 &= m \cos(M - \varepsilon) \\ \sin b^0 &= m \sin(M - \varepsilon) \end{aligned}$$

die Längen und Breiten des geocentrischen Zeniths

l^0	b^0
238° 58′·1	+ 74° 21′·7
236° 59′·6	+ 74° 10′·0
235° 4′ 7	+ 73° 57′·5.

Für die Correction wegen Präcession, Nutation und Aberration der Fixsterne findet Encke nach den Formeln

$$\lambda = \lambda_0 - \pi_0 (t - T) - \Delta\lambda_0 + 20''{\cdot}255 \cos(\lambda_0 - \odot_0) \sec\beta_0$$
$$\beta = \beta_0 - 20''{\cdot}255 \sin(\lambda_0 - \odot_0) \sin\beta_0,$$

worin π_0 die jährliche Präcession, T die angenommene Epoche (Juli 10·41048), $\Delta\lambda_0$ die Nutation und 20″·255 die Constante der Aberration bedeuten, die Werthe

$-\pi_0 (t - T)$	$-\Delta\lambda_0$	$+20''{\cdot}255 \cos(\lambda_0 - \odot_0) \sec\beta_0$	$-20''{\cdot}255 \sin(\lambda_0 - \odot_0) \sin\beta_0$
− 4″·88	+ 0·69	− 19″·05	− 2″·95
− 4·99	0·00	− 17·93	− 3·39
− 5·09	− 0·82	− 16·42	− 3·80

und für die Erdlänge L und den Radiusvector der Sonne dieselben Grössen ohne Aberration sammt der Reduction auf den *Locus fictus* nach den Formeln (pag. 468)

ΔL	$\Delta \log R$	
+ 9″·44	− 421	
+ 12·56	− 440	Einheiten der 7. Stelle.
+ 15·19	− 417	

Man hat also die der Bahnbestimmung zu Grunde liegenden Werthe:

t	λ	β	L	$\log R$
1847 Juli 5·42671	256° 8′ 40″·9	+ 18° 41′ 5″·3	283° 9′ 19″·7	0·0071570
„ 10·41048	255 13 28·6	+ 18 3 56·4	287 54 32·4	0·0071111
„ 16·39150	254 20 18·1	+ 17 15 35·1	293 36 59·8	0·0069788.

Es werden nun zunächst die folgenden Grössen gerechnet

$$\text{I.} \qquad \tau_3 = k\,(t_2 - t_1)$$
$$\tau_2 = k\,(t_3 - t_1) \quad \log k = 8{\cdot}2355814$$
$$\tau_1 = k\,(t_3 - t_2)$$
$$N_3 = \frac{R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}$$
$$N_1 = \frac{R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}$$
$$\operatorname{tang} w_2 = \frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$
$$\operatorname{tang} \delta_2' = \frac{\operatorname{tang}(\lambda_2 - L_2)}{\cos w_2}.$$

δ_2' ist immer $< 180°$ und $\cos \delta_2'$ muss wegen der Relation

$$\cos \delta_2' = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$

mit

$$\cos(\lambda_2 - L_2)$$

gleich bezeichnet sein.

Die Rechnung giebt

$$\log \tau_3 = 8{\cdot}9331394$$
$$\log \tau_2 = 9{\cdot}2755817$$
$$\log \tau_1 = 9{\cdot}0123567$$
$$\log N_3 = 9{\cdot}6594867$$
$$\log N_1 = 9{\cdot}7385266$$
$$\delta_2' = 36°\ 51'\ 14''{\cdot}67$$
$$\log(R_2 \cos \delta_2') = 9{\cdot}9102910$$
$$\log(R_2 \sin \delta_2') = 9{\cdot}7851024.$$

II. Die Coëfficienten der Hauptgleichung für Δ_2

$$\sin\left(\frac{\lambda_3 + \lambda_1}{2} - K\right) \operatorname{tang} J = \frac{\sin(\beta_3 + \beta_1)}{2 \cos \beta_3 \cos \beta_1} \sec \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\lambda_3 + \lambda_1}{2} - K\right) \operatorname{tang} J = \frac{\sin(\beta_3 - \beta_1)}{2 \cos \beta_3 \cos \beta_1} \operatorname{cosec} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2}$$
$$J < 90°$$
$$\operatorname{tang} \beta_0 = \sin(\lambda_2 - K) \operatorname{tang} J$$
$$a_0 = \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\cos \beta_0 \operatorname{tang} J}$$
$$b = \frac{R_1 \sin(L_1 - K)}{a_0}$$
$$c = \frac{R_2 \sin(L_2 - K)}{a_0}$$
$$d = \frac{R_3 \sin(L_3 - K)}{a_0}$$

liefern

$$K = 234°\ 49'\ 53''{\cdot}15$$
$$\log \operatorname{tang} J = 9{\cdot}9686905$$
$$\beta_0 = 17°\ 57'\ 50''{\cdot}014$$
$$\log a_0 = 7{\cdot}3025279$$
$$\log b = 2{\cdot}5779016$$
$$\log c = 2{\cdot}6073742$$
$$\log d = 2{\cdot}6365339.$$

III. Die Coëfficienten der Gleichungen zwischen Δ_3 und Δ_2 einerseits und Δ_1 und Δ_2 andererseits sind:

$$f = \frac{sec\,\beta_2}{sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

$$h = \frac{R_1 R_3\, sin\,(L_3 - L_1)}{a_0\, sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

$$M_1' = \frac{sin\,(\lambda_3 - \lambda_2)}{sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)} + f\frac{R_3\, sin\,(\lambda_3 - L_3)}{d}$$

$$M_1''' = \frac{sin\,(\lambda_2 - \lambda_1)}{sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)} - f\frac{R_1\, sin\,(\lambda_1 - L_1)}{b}$$

$$M_2' = h\frac{sin\,(\lambda_3 - K)}{d}$$

$$M_2''' = h\frac{sin\,(\lambda_1 - K)}{b}.$$

Daraus findet man:

$$\log M_1' = 9{\cdot}7326119$$
$$\log M_1''' = 9{\cdot}6709014$$
$$\log M_2' = 0{\cdot}3591550_n$$
$$\log M_2''' = 0{\cdot}4546085_n.$$

Bis hierher sind die Grössen mit Ausnahme der τ_3, τ_2, τ_1 constant.

Es folgt nun die erste Hypothese, man setze

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \qquad Q = \tau_1 \tau_3$$

und rechne mit diesen Werthen.

IV.

$$\frac{b + Pd}{1 + P} = c_0 \qquad \mu\, sin\, q = R_2\, sin\, \delta_2'$$

$$k_0 = c - c_0 \qquad \mu\, cos\, q = k_0 + R_2\, cos\, \delta_2'$$

$$l_0 = \frac{1}{2} c_0 Q \qquad m = \frac{l_0}{\mu\, R_2^3\, sin\, \delta_2'^3}.$$

Der Quadrant von q wird so gewählt, dass μ und l_0 gleich bezeichnet sind. Es wird dann die Gleichung

$$sin\,(z - q) = m\, sin^4 z$$

durch Versuche aufgelöst; in dem ersten Versuche wird, wenn sonst kein Näherungswerth vorliegt[1]), rechts vom Gleichheitszeichen $z = q$ gesetzt werden können, also z aus der Gleichung zu rechnen sein

$$sin\,(z - q) = m\, sin^4 q$$

und mit diesem Werthe durch Versuche und Anwendung der *Regula falsi* das richtige z zu ermitteln sein. Hierauf wird untersucht, ob wegen $sin\, z$ positiv und $z < \delta_2'$ eine oder zwei Lösungen stattfinden, wobei die früher angeführte Tafel einige Andeutung geben wird.

---

[1]) Bei Kometen wird man wegen

$$sin\, z = \frac{R_2\, sin\, \delta_2'}{r_2}$$

meist einen genäherten Werth von r_2 aus den parabolischen Elementen kennen und damit z in erster Näherung rechnen.

In unserem Beispiel findet man

$$\begin{aligned}
\log P &= 9{\cdot}9207827\\
\log Q &= 7{\cdot}9459961\\
\log c_0 &= 2{\cdot}6055360\\
\log k_0 &= 0{\cdot}2336042\\
\log l_0 &= 0{\cdot}2500021\\
\log m &= 0{\cdot}4803493\\
q &= +\,13^\circ\ 34'\ 54''{\cdot}13
\end{aligned}$$

und damit als einzige mögliche Lösung

$$z = 14^\circ\ 12'\ 38''{\cdot}24.$$

Mit diesem Werthe von z ergeben sich:

V.

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{R_2 \sin \delta_2'}{\sin z}\\
\Delta_2 &= \frac{R_2 \sin(\delta_2' - z)}{\sin z} \cos \beta_2\\
n_1 &= \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right) \frac{1}{1+P}\\
n_3 &= n_1 P\\
\Delta_1 &= M_1' \frac{\Delta_2}{n_1} + \left(\frac{N_1}{n_1} - 1\right) M_2'\\
\Delta_3 &= M_1''' \frac{\Delta_2}{n_3} + \left(\frac{N_3}{n_3} - 1\right) M_2'''.
\end{aligned}$$

Für unseren Fall ist

$$\begin{aligned}
\log r_2 &= 0{\cdot}3950737\\
\log \Delta_2 &= 0{\cdot}1805822\\
\log n_1 &= 9{\cdot}7369000\\
\log n_3 &= 9{\cdot}6576827\\
\log \Delta_1 &= 0{\cdot}1738041\\
\log \Delta_3 &= 0{\cdot}1904926.
\end{aligned}$$

Der Uebergang auf den heliocentrischen Ort und die Elemente der Bahnlage erhält man mit Hilfe der Formeln:

VI.

$$\begin{aligned}
r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) &= \Delta_1 \sin(\lambda_1 - L_1)\\
r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) &= \Delta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1\\
r_1 \sin b_1 &= \Delta_1 \operatorname{tang} \beta_1\\
r_2 \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) &= \Delta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)\\
r_2 \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) &= \Delta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) + R_2\\
r_2 \sin b_2 &= \Delta_2 \operatorname{tang} \beta_2\\
r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3) &= \Delta_3 \sin(\lambda_3 - L_3)\\
r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3) &= \Delta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3\\
r_3 \sin b_3 &= \Delta_3 \operatorname{tang} \beta_3\\
\operatorname{tang} i \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b_3 - \operatorname{tang} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}\\
\operatorname{tang} i \sin(l_1 - \Omega) &= \operatorname{tang} b_1.
\end{aligned}$$

Der zuletzt ermittelte Werth von r_2 muss mit dem früher gefundenen innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung übereinstimmen. Ausserdem muss

$$\operatorname{tang} b_2 = \sin(l_2 - \Omega) \operatorname{tang} i$$

sein. Dieses ist die erste und zweite Probe, sie ist aber wenig durchgreifend,

weil sie nur die Werthe prüft, durch welche die Grössen r als Functionen von Δ dargestellt werden[1]). Die Argumente der Breite folgen aus

$$tang\, u_1 = tang\,(l_1 - \Omega)\, sec\, i$$
$$tang\, u_2 = tang\,(l_2 - \Omega)\, sec\, i$$
$$tang\, u_3 = tang\,(l_3 - \Omega)\, sec\, i.$$

Man findet mit Hilfe derselben als dritte Probe

$$n_1 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}$$
$$n_3 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}.$$

Tritt zwischen diesen Werthen und den früher berechneten eine Differenz auf, so untersucht man, ob sich dieselbe durch eine kleine Aenderung des Werthes u_2 beseitigen lässt; für eine Einheit des 7stelligen Logarithmus folgt

$$d\log n_1 = -\,21{\cdot}055\, cotang\,(u_3 - u_2)\, du_2$$
$$d\log n_3 = +\,21{\cdot}055\, cotang\,(u_2 - u_1)\, du_2.$$

Hier ist

$l_1 = 267°\,2'\,36''{\cdot}93$ $\quad l_2 = 268°\,15'\,32''{\cdot}79$ $\quad l_3 = 269°\,43'\,42''{\cdot}98$

$\log tang\, b_1 = 9{\cdot}3152330$ $\quad \log tang\, b_2 = 9{\cdot}3077546$ $\quad \log tang\, b_3 = 9{\cdot}2982722$

$\log r_1 = 0{\cdot}3968069$ $\quad \log r_2 = 9{\cdot}3950738$ $\quad \log r_3 = 0{\cdot}3929656$

$\Omega = 138°\,35'\,16''{\cdot}85$ $\quad i = 14°\,46'\,57''{\cdot}81$

$u_1 = 127°\,31'\,12''{\cdot}29$ $\quad u_2 = 128°\,43'\,35''{\cdot}60$ $\quad u_3 = 130°\,11'\,14''{\cdot}57$

woraus

$$\log tang\, b_2 = 9{\cdot}3077548.$$

folgt.

Die erste Probe stimmt auf eine, die zweite auf zwei Einheiten der siebenten Decimalstelle. Endlich wird

$$\log n_3 = 9{\cdot}6576794 + 999{\cdot}7\, du_2$$
$$\log n_1 = 9{\cdot}7369030 - 825{\cdot}6\, du_2.$$

Die mit den früheren Werthen auftretenden Differenzen von 33 und 30 Einheiten der letzten Stelle lassen sich durch

$$du_2 = +\,0''{\cdot}035,$$

also befriedigend, wegschaffen.

Es werden nun die Zwischenzeiten wegen Aberration verbessert, indem man setzt

$$\text{VII.}\qquad \begin{aligned} t_1' &= t_1 - \varkappa\,\Delta_1\, sec\,\beta_1 \\ t_2' &= t_2 - \varkappa\,\Delta_2\, sec\,\beta_2 \\ t_3' &= t_3 - \varkappa\,\Delta_3\, sec\,\beta_3 \end{aligned}$$

$\log \varkappa = 7{\cdot}75647$ (nach ENCKE) in Einheiten des Tages.

---

[1]) ENCKE führt zur Bestimmung von Knoten und Neigung folgende ebenfalls leicht zu beweisende Relationen ein

$$\sin\left(\frac{l_3 + l_1}{2} - \Omega\right) tang\, i = \frac{1}{2}\,(tang\, b_3 + tang\, b_1)\, sec\, \frac{l_3 - l_1}{2}$$
$$\sin\left(\frac{l_3 + l_1}{2} - \Omega\right) tang\, i = \frac{1}{2}\,(tang\, b_3 - tang\, b_1)\, cosec\, \frac{l_3 - l_1}{3},$$

aus welchen die obigen numerischen Werthe ermittelt wurden.

Hierauf wird mit den verbesserten Zwischenzeiten gerechnet

$$m_1 = \frac{\tau'^2_1}{\left(2\sqrt{r_2 r_3}\, cos\,\frac{u_3 - u_2}{2}\right)^3} \qquad m_3 = \frac{\tau'^2_3}{\left(2\sqrt{r_1 r_2}\, cos\,\frac{u_2 - u_1}{2}\right)^3}$$

$$tang\,(45^\circ + \omega_1) = \sqrt[4]{\frac{r_3}{r_2}} \qquad tang\,(45^\circ + \omega_3) = \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}}$$

[1]
$$l_1 = \frac{sin^2\,\frac{u_3 - u_2}{4} + tang^2 2\,\omega_1}{cos\,\frac{u_3 - u_2}{2}} \qquad l_3 = \frac{sin^2\,\frac{u_2 - u_1}{4} + tang^2 2\,\omega_3}{cos\,\frac{u_2 - u_1}{2}}$$

$$h_1 = \frac{m_1}{l_1 + \frac{5}{6}} \qquad h_3 = \frac{m_3}{l_3 + \frac{5}{6}}$$

$$y' - 1 = \frac{10}{11}\,\cfrac{\frac{11}{9}h_1}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_1}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_1}{1\,\ldots}}} \qquad y''' - 1 = \frac{10}{11}\cdot\cfrac{\frac{11}{9}h_3}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_3}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_3}{1 + \ldots}}}$$

Man erhält hier

$$y''' = 0{\cdot}0000346 \qquad y' = 0{\cdot}0000504,$$

gegen die ENCKE'schen auf anderem Wege ermittelten Werthe

$$y''' = 0{\cdot}0000345 \qquad y' = 0{\cdot}0000504,$$

$$log\,\tau_3' = 8{\cdot}9331298 \qquad log\,\tau_2' = 9{\cdot}2755706 \qquad log\,\tau_1' = 9{\cdot}0123443$$

und damit für die II. Hypothese aus

$$P_1 = \frac{\tau_3'}{\tau_1'}\,\frac{y'}{y'''}$$

$$Q_1 = \frac{\tau_3'\tau_1'}{y'y'''}\,\frac{r_2^2}{r_1 r_3\, cos\,\frac{u_3 - u_1}{2}\; cos\,\frac{u_2 - u_1}{2}\; cos\,\frac{u_3 - u_2}{2}}$$

für unseren Fall

$$log\,P_1 = 9{\cdot}9208014$$
$$log\,Q_1 = 7{\cdot}9459413$$

und damit

$$\begin{aligned} log\,c_0 &= 2{\cdot}6055366 & log\,r_2 &= 0{\cdot}3949410 \\ log\,k_0 &= 0{\cdot}2329228 & log\,\Delta_2 &= 0{\cdot}1803690 \\ log\,l_0 &= 0{\cdot}2504479 & log\,n_1 &= 9{\cdot}7368917 \\ log\,\mu &= 0{\cdot}4142551 & log\,n_3 &= 9{\cdot}6576931 \\ log\,m &= 0{\cdot}4808856 & log\,\Delta_1 &= 0{\cdot}1735852 \\ q &= +\,13^\circ\,35'\,4''{\cdot}52 & log\,\Delta_3 &= 0{\cdot}1902865 \end{aligned}$$
$$z = +\,14^\circ\,12'\,54''{\cdot}20$$

---

[1]) Auf pag. 492 ist die Formel für l zu corrigiren in

$$l = \frac{sin^2\,\frac{u_3 - u_1}{4} + tang^2\,2\omega}{cos\,\frac{u_3 - u_1}{2}}.$$

$$l_1 = 267^\circ\, 2'\, 48''\cdot 95 \qquad l_2 = 268^\circ\, 15' 47''\cdot 02 \qquad l_3 = 269^\circ\, 43'\, 59''\cdot 59$$
$$log\, tang\, b_1 = 9\cdot 3151454 \qquad log\, tang\, b_2 = 9\cdot 3076709 \qquad log\, tang\, b_3 = 9\cdot 2981931$$
$$log\, r_1 = 0\cdot 3966720 \qquad log\, r_2 = 0\cdot 3949410 \qquad log\, r_3 = 0\cdot 3928356$$
$$\Omega = 138^\circ\, 37'\, 19''\cdot 64 \qquad i = 14^\circ\, 46'\, 25''\cdot 77$$
$$u_1 = 127^\circ\, 29'\, 26''\cdot 51 \qquad u_2 = 128^\circ\, 41'\, 51''\cdot 93 \qquad u_3 = 130^\circ\, 9'\, 33''\cdot 09.$$

Die Proben stimmen hier fast vollkommen. Die Werthe von n_1 und n_3 werden

$$log\, n_1 = 9\cdot 7368917 \qquad log\, n_3 = 9\cdot 6576933$$

ferner werden

$$log\, y''' = 0\cdot 0000346 \qquad log\, y' = 0\cdot 0000504$$

und damit

$$log\, P_2 = 9\cdot 9208013 \qquad log\, Q_2 = 7\cdot 9459407.$$

Damit sind die Versuche beendet; rechnet man nun auf ähnliche Weise wie früher den Werth von y'' aus r_1, r_3 etc., so ergiebt die Uebereinstimmung der Werthe

$$p = \left[\frac{y'' r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2'}\right]^2 = \left[\frac{y' r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1'}\right]^2 = \left[\frac{y''' r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3'}\right]^2$$

eine neue Probe. Weiter wird durch

$$e \sin\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \frac{p}{tang\, 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}} \frac{1}{\sin \frac{u_3 - u_1}{2}}$$

$$e \cos\left(\omega - \frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \left(\frac{p}{\sin 2\psi_2 \sqrt{r_1 r_3}} - 1\right) \frac{1}{\cos \frac{u_3 - u_1}{2}}$$

$$tang\, \psi_2 = \sqrt{\frac{r_3}{r_1}}$$

die Excentricität e und der Winkelabstand des Perihels vom Knoten ω gefunden. Es ist aber

$$v_1 = u_1 - \omega \qquad v_2 = u_2 - \omega \qquad v_3 = u_3 - \omega$$
$$tang\, \frac{E_1}{2} = tang\, \frac{v_1}{2}\, tang\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$tang\, \frac{E_2}{2} = tang\, \frac{v_2}{2}\, tang\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$tang\, \frac{E_3}{2} = tang\, \frac{v_3}{2}\, tang\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$a = p \sec^2 \varphi.$$

Bei Kometen kann die Berechnung des Winkels φ aus e, also auch die von a unsicher werden; man rechne dann

$$\cos \gamma_2 = \frac{2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{u_3 - u_1}{2}}{r_1 + r_3}$$

$$\sin^2 \frac{E_3 - E_1}{4} = \frac{\tau'^2_2}{y''^2} \left[\frac{1}{(r_1 + r_3) \cos \gamma_2}\right]^3 - \frac{\sin^2 \frac{\gamma_2}{2}}{\cos \gamma_2}$$

$$a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = \frac{\sin \frac{u_3 - u_1}{2}}{\sin \frac{E_3 - E_1}{2}} \sqrt{r_1 r_3}.$$

Bei Planetenbahnen kann die Ermittelung von $\cos \varphi$ aus der letzten Gleichung als weitere Probe dienen.

Hat man die Werthe E_1, E_2 und E_3 bestimmt, so ist

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1$$
$$M_2 = E_2 - e \sin E_2 \qquad e = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}$$
$$M_3 = E_3 - e \sin E_3$$

und da

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \log k'' = 3{\cdot}5500066$$

ist, so müssen die Gleichungen

$$\mu = \frac{M_0 - M_1}{T_0 - t_1'} = \frac{M_0 - M_2}{T_0 - t_2'} = \frac{M_0 - M_3}{T_0 - t_3'}$$

erfüllt werden, worin T_0 die Epoche, M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche vorstellen.

Für das gewählte Rechenbeispiel findet man

$$\gamma_2 = 1^\circ\ 21'\ 28''{\cdot}91 \qquad \log y'' = 0{\cdot}0001685$$
$$\log p = 0{\cdot}3641846, \qquad 0{\cdot}3641842, \qquad 0{\cdot}3641840$$
$$\frac{E_3 - E_1}{2} = 1^\circ\ 24'\ 20''{\cdot}33 \qquad \log a \cos\varphi = 0{\cdot}3721181$$
$$\omega = 239^\circ\ 51'\ 26''{\cdot}12 \qquad \log e = 9{\cdot}2774038.$$

Aus $e = \sin\varphi$ wird $\log\cos\varphi = 9{\cdot}9920664$, aus obiger Gleichung $\log\cos\varphi = 9{\cdot}9920661$ gefunden. Man wird den ersteren Werth vorziehen, da der letztere durch seine Bestimmung aus kleinen Winkeln in der letzten Stelle unsicher wird.

Man erhält dann

$$\log a = 0{\cdot}3800514 \qquad \mu = 954''{\cdot}83756$$
$$E_1 = 258^\circ\ 6'\ 50''{\cdot}28 \quad M_1 = 268^\circ\ 44'\ 1''{\cdot}31$$
$$E_2 = 259\ \ 23\ \ 19{\cdot}30 \quad M_2 = 270\ \ 3\ \ 19{\cdot}88$$
$$E_3 = 260\ \ 55\ \ 30{\cdot}96 \quad M_3 = 271\ \ 38\ \ 30{\cdot}65.$$

Es ergiebt sich für T_0 = Juli 10·40138

$$M_0 = 270^\circ\ 3'\ 19''{\cdot}89$$
$$19{\cdot}88$$
$$19{\cdot}91$$

Die Elemente lauten dann

Epoche	$T_0 =$	1847 Juli 10·40138 m. Zt. Berlin	
Mittlere Anomalie	$M_0 =$	270° 3′ 19″·89	
Mittlere Länge . .	$\pi + M_0 = L =$	288 32 5·65	
Länge des Perihels . .	$\omega + \Omega = \pi =$	18 28 45·76	Mittleres Aequinoctium 1847 Juli 10
Knoten	$\Omega =$	138 37 19·64	
Neigung	$i =$	14 46 25·77	
Excentricität (optisch)	$\varphi =$	10 55 6·16	
Excentricität (numerisch)	$e =$	0·1894104	
Grosse Halbbahnaxe . . .	$\log a =$	0·3800514	
Mittl. tägl. sid. Beweg. . . .	$\mu =$	954″·8376.	

Die durchgreifendste und letzte Probe findet durch Darstellung der Beobachtungen aus obigen Elementen statt.

Man hat dann zunächst mit den corrigirten Zwischenzeiten die scheinbaren Sonnenlängen, Sonnenbreiten und Radienvectoren der Sonne aus den Ephemeriden zu entlehnen, die Sonnenlängen durch Anbringung der Präcession und Nutation auf das mittlere Aequinoctium der Elemente zu bringen und mit Hilfe dieser Grössen die geocentrischen rechtwinkligen Coordinaten der Sonne

abzuleiten. Ebenso findet man aus den bekannten Formeln die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des Himmelskörpers. Nennt man die geocentrischen Sonnencoordinaten

$$X, Y, Z,$$

die heliocentrischen Planetencoordinaten

$$x, y, z,$$

so sind die rechtwinkligen geocentrischen Planetencoordinaten

$$\xi = X + x = \rho \cos\alpha \cos\delta$$
$$\eta = Y + y = \rho \sin\alpha \cos\delta$$
$$\zeta = Z + z = \rho \sin\delta.$$

Die auf diese Weise erlangten Grössen α und δ müssen noch mit der Präcession, Nutation, Aberration und Parallaxe behaftet werden, um direkt mit den Beobachtungen vergleichbar zu sein. Führt man alle diese Operationen durch, so ergiebt sich im Sinne Beobachtung weniger Rechnung

$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
0·″0	− 0·″1
0·0	0·0
− 0·1	+ 0·1

also eine vollkommen befriedigende Uebereinstimmung.

b) Parabolische Bahnen.

α) Olbers' Methode.

Um sich sofort zu überzeugen, ob die Methode von Olbers noch mit Vortheil anzuwenden ist, oder der Ausnahmefall nahezu eintritt, verzeichnet man auf einem Globus oder einer Sternkarte den ersten und dritten Kometenort sowie den mittleren Sonnenort. Geht nun der durch die äusseren Kometenorte gelegte grösste Kreis auch durch den zweiten Sonnenort nahezu, so ist Olbers' Methode zu verlassen.

Die der Rechnung zu Grunde gelegten Beobachtungen gehören dem von Barnard am 30. October 1888 entdeckten Kometen an und lauten

Ort	1888	Ortszeit	app. α ☄	app. δ ☄
Mount Hamilton . .	October 30	$16^h\ 50^m\ 54^s$	$9^h\ 43^m\ 22^s{\cdot}20$	−15° 18′ 52″·0
Wien	November 2	16 18 3	9 47 21·00	−14 54 45·0
Hamburg	„ 5	17 11 12	9 51 49·52	−14 24 59·1

Die Beobachtungszeiten wurden zunächst mit Hilfe der Meridiandifferenzen gegen Berlin auf diesen Meridian reducirt. Die scheinbaren Rectascensionen und Deklinationen des Kometen von den kleinen Correctionen, Präcession, Nutation und Aberration befreit (letztere wurde mitgenommen, um theilweise die Planetenaberration zu compensiren). Am einfachsten ist es, die Differenz Komet weniger Stern direkt an den mittleren Ort des Vergleichsternes anzubringen, wenn die Beobachtungen Differentialbeobachtungen sind und diese Grössen vom Beobachter, wie dies allgemein üblich ist, angegeben werden. Diese Correctionen sind

$\Delta\alpha$	− 16″·8	− 17″·7	− 18″·8
$\Delta\delta$	− 0·8	− 0·4	+ 0·2.

Sie wurden mit ihren Zeichen an die Beobachtungen angebracht und diese mit Hilfe der mittleren Schiefe der Ekliptik für den Jahresanfang $\varepsilon = 23°\ 27'\ 13''{\cdot}7$ in Länge und Breite verwandelt; die mittleren Sonnenlängen und Radienvectoren wurden aus dem Berliner Jahrbuch interpolirt. Dies giebt

t (Mittlere Zeit Berlin)	λ	β	$\odot$	$\log R$
1888 Octob. 31·077118	153° 51′ 21″·7	—27° 14′ 56″·5	218° 33′ 23″·5	9·996522
Nov. 2·671026	154 41 17·8	—26 31 8·7	221 9 24·7	9·996238
„ 5·725612	155 35 59·3	—25 39 16·8	224 13 24·3	9·995907.

Es wird gerechnet

$$cotang\, J = \frac{sin(\lambda_2 - \odot_2)}{tang\, \beta_2}$$

$$M = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{sin\, \beta_1\, cotang\, J - cos\, \beta_1\, sin\, (\lambda_1 - \odot_2)}{cos\, \beta_3\, sin\, (\lambda_3 - \odot_2) - sin\, \beta_3\, cotang\, J}$$

$$log\, cotang\, J = 0{\cdot}264196 \qquad log\, M = 9{\cdot}994613$$

$$\left. \begin{aligned} g\, sin(G - \odot_1) &= R_3\, sin(\odot_3 - \odot_1) \\ g\, cos(G - \odot_1) &= R_3\, cos(\odot_3 - \odot_1) - R_1 \end{aligned} \right\} g \text{ positiv}$$

$$cos\, \psi_1 = cos(\lambda_1 - \odot_1) cos\, \beta_1 \qquad cos\, \psi_3 = cos(\lambda_3 - \odot_3) cos\, \beta_3$$

$$sin\, \psi_1\, cos\, P_1 = sin\, (\lambda_1 - \odot_1) cos\, \beta_1 \qquad sin\, \psi_3\, cos\, P_3 = sin(\lambda_3 - \odot_3) cos\, \beta_3$$

$$sin\, \psi_1\, sin\, P_1 = sin\, \beta_1 \qquad sin\, \psi_3\, sin\, P_3 = sin\, \beta_3$$

da die Winkel P_1 und P_3 weiter nicht gebraucht werden, so genügt die Berechnung von $sin\, \psi_1$ und $sin\, \psi_3$ aus $cos\, \psi_1$ und $cos\, \psi_3$, wenn diese hinreichend sichere Resultate giebt.

Hier wird

$$G = 312°\, 12'\, 36''{\cdot}3$$

$$log\, g = 8{\cdot}991305$$

$$log\, cos\, \psi_1 = 9{\cdot}579699 \qquad log\, cos\, \psi_3 = 9{\cdot}516616$$

$$log\, sin\, \psi_1 = 9{\cdot}966151 \qquad log\, sin\, \psi_3 = 9{\cdot}975194.$$

Dann bestimmt man die folgenden Grössen, welche die Abhängigkeit der Werthe r_1 und r_3 von ρ_1 vermitteln:

$$f_1 = R_1\, cos\, \psi_1 \qquad B_1 = R_1\, sin\, \psi_1$$

$$f_3 = \frac{R_3\, cos\, \psi_3}{M} \qquad B_3 = \frac{R_3\, sin\, \psi_3}{M}$$

$$f_1 = 0{\cdot}376895 \qquad log\, B_1 = 9{\cdot}962673$$

$$f_3 = 0{\cdot}329542 \qquad log\, B_3 = 9{\cdot}976488.$$

$$log\, (R_3\, cos\, \psi_3) = 9{\cdot}971101.$$

Die Hilfsgrössen zur Berechnung der Sehne der Kometenbahn s_2 sind

$$h\, cos\, \zeta\, cos(H - \lambda_3) = M\, cos\, \beta_3 - cos(\lambda_3 - \lambda_1)\, cos\, \beta_1$$

$$h\, cos\, \zeta\, sin(H - \lambda_3) = sin\, (\lambda_3 - \lambda_1)\, cos\, \beta_1$$

$$h\, sin\, \zeta = M\, sin\, \beta_3 - sin\, \beta_1$$

h und $cos\, \zeta$ sind vermöge ihrer Bedeutung stets positiv.

$$cos\, \varphi = cos\, \zeta\, cos\, (G - H)$$

$$sin\, \varphi\, cos\, Q = cos\, \zeta\, sin\, (G - H)$$

$$sin\, \varphi\, sin\, Q = sin\, \zeta.$$

Da die Grösse Q nicht gebraucht wird, so genügt die Bestimmung von $sin\, \varphi$ aus $cos\, \varphi$, wenn dieselbe hinreichend sicher ist.

Damit wird

$$\gamma = \frac{g}{h} cos\, \varphi \qquad \Gamma = \frac{g}{h} sin\, \varphi \qquad A = \frac{g\, sin\, \varphi}{\tau_2'}$$

$$\tau_2' = 2k(t_3 - t_1) \qquad log\, 2k = 8{\cdot}536611.$$

Hier werden

$$H = 242° \; 1' \; 15''{\cdot}5 \qquad \log \sin \zeta = 9{\cdot}872017 \qquad \log h = 8{\cdot}608723$$
$$\log \cos \zeta = 9{\cdot}424341$$
$$\log \cos \varphi = 9{\cdot}354434,$$

daher

$$\log \sin \varphi = 9{\cdot}988598$$
$$\log \Gamma = 0{\cdot}371180 \qquad \log A = 9{\cdot}691359$$
$$\gamma = + \, 0{\cdot}545778.$$

Dann ist

$$\rho_1 = \Gamma \, cotang \, \vartheta + \gamma \qquad s_2 = g \sin \varphi \, cosec \, \vartheta,$$

wenn

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{r_1 + r_3}}{\mu} A.$$

und μ die ENCKE'sche Hilfsgrösse ist. Hat man für dieselbe keine Tafel, so rechnet man

$$\eta = \frac{\tau_2'}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \qquad \sin \theta = \frac{3\eta}{\sqrt{8}} \qquad \mu = \frac{3 \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \theta} \sqrt{\cos \frac{2\theta}{3}}$$
$$\log \frac{3}{\sqrt{8}} = 0{\cdot}025576.$$

Versuche.

Mit einer bestimmten Annahme über $(r_1 + r_3)_a$ (am besten $r_1 = r_3 = 1$, wenn keine andere Näherung vorliegt) rechnet man das folgende Formelsystem durch

$$\eta = \frac{\tau_2'}{(r_1 + r_3)_a^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sin \theta = \frac{3\eta}{\sqrt{8}} \qquad \log \frac{3}{\sqrt{8}} = 0{\cdot}025576$$
$$\mu = \frac{3 \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \theta} \cdot \sqrt{\cos \frac{2\theta}{3}}$$
$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{(r_1 + r_3)_a}}{\mu} A$$
$$\rho_1 = \Gamma \, cotang \, \vartheta + \gamma$$
$$tang \, \theta_1 = \frac{\rho_1 - f_1}{B_1}$$
$$tang \, \theta_3 = \frac{\rho_1 - f_3}{B_3}$$
$$r_1 = R_1 \sin \psi_1 \sec \theta_1$$
$$r_3 = R_3 \sin \psi_3 \sec \theta_3.$$

Daraus wird ein Endwerth $(r_1 + r_3)_e$ erhalten, stimmt derselbe mit dem Anfangswerth überein, so ist die Rechnung als beendet anzusehen; wenn dies jedoch nicht der Fall ist, was am häufigsten eintritt, so wird man mit Hilfe des gefundenen Endwerthes $(r_1 + r_3)_e$ das Formelsystem nochmals durchrechnen und aus beiden Rechnungen ein genähertes $(r_1 + r_3)$ durch die *Regula falsi* ermitteln; dies wird so lange fortgesetzt, bis genügende Uebereinstimmung zwischen Anfangs- und Endwerth erzielt ist.

Oppolzer giebt Differentialformeln an, die ich der Vollständigkeit wegen hersetze; nennt man

$$log(r_1 + r_3)_a = x \qquad log(r_1 + r_3)_e = y,$$

so wird gerechnet (vierstellig)

$$n = 1 + (sin\,\theta + M\,sin\,\theta_3)\frac{tang\,\frac{\gamma}{2}}{h\,cos\,\vartheta}\,\frac{10^x}{10^y}$$
$$sin\,\gamma = \eta\mu$$

der Anfangswerth für den zweiten Versuch ist dann

$$x' = x + \frac{y - x}{n}.$$

Unter der Annahme $log(r_1 + r_3)_a = 0{\cdot}3000$ fand sich durch vierstellige Rechnung $log(r_1 + r_3) = 0{\cdot}7435$ und $n = 1{\cdot}807$, daher der neue Anfangswerth

$$log(r_1 + r_3) = 0{\cdot}54.$$

Als definitive Werthe ergaben sich nach einigen Versuchen,

$$\begin{aligned} log\,r_1 &= 0{\cdot}213458 \\ log\,r_3 &= 0{\cdot}222658 \\ log\,\rho_1 &= 0{\cdot}238003 \\ log\,\rho_3 = log(M\rho_1) &= 0{\cdot}236616. \end{aligned}$$

Berechnung der Elemente aus ρ_1 und ρ_3.

Aus den bekannten Formeln

$$\begin{aligned} r_1\,cos\,b_1\,cos(l_1 - \odot_1) &= \rho_1\,cos\,\beta_1\,cos(\lambda_1 - \odot_1) - R_1 \\ r_1\,cos\,b_1\,sin(l_1 - \odot_1) &= \rho_1\,cos\,\beta_1\,sin(\lambda_1 - \odot_1) \\ r_1\,sin\,b_1 &= \rho_1\,sin\,\beta_1 \\ r_3\,cos\,b_3\,cos(l_3 - \odot_3) &= \rho_3\,cos\,\beta_3\,cos(\lambda_3 - \odot_3) - R_3 \\ r_3\,cos\,b_3\,sin(l_3 - \odot_3) &= \rho_3\,cos\,\beta_3\,sin(\lambda_3 - \odot_3) \\ r_3\,sin\,b_3 &= \rho_3\,sin\,\beta_3 \end{aligned}$$

wurde gefunden

$$\begin{aligned} l_1 &= 115°\,1'\,0''{\cdot}5 & l_3 &= 117°\,33'\,34''{\cdot}7 \\ log\,tang\,b_1 &= 9{\cdot}743368\,n & log\,tang\,b_3 &= 9{\cdot}693828\,n \\ log\,r_1 &= 0{\cdot}213458 & log\,r_3 &= 0{\cdot}222658. \end{aligned}$$

Die Uebereinstimmung von r_1 und r_3 mit den aus den Versuchen ermittelten ist vollständig; doch prüft diese Rechnung nur jene Grössen, durch welche r_1 und r_3 aus ρ_1 abgeleitet werden.

Neigung und Knoten findet man aus

$$tang\,i\,sin(l_1 - \Omega) = tang\,b_1$$
$$tang\,i\,cos(l_1 - \Omega) = \frac{tang\,b_3 - tang\,b_1\,cos(l_3 - l_1)}{sin(l_3 - l_1)}.$$

Nehmen die heliocentrischen Längen ab, ($l_3 - l_1$ negativ), so ist *tang i* negativ; nehmen dieselben zu, ($l_3 - l_1$ positiv), so ist *tang i* positiv,

i immer zwischen 0° und 180°.

Hier ist *tang i* positiv und

$$\begin{aligned} \Omega &= 137°\,34°\,16''{\cdot}9 \\ i &= 55°\,17°\,39''{\cdot}8. \end{aligned}$$

Die Argumente der Breite ergeben sich für

$$tang\, i < \pm 1$$

aus

$$tang\, u_1 = tang\,(l_1 - \Omega)\, sec\, i \qquad tang\, u_3 = tang\,(l_3 - \Omega)\, sec\, i,$$

für

$$tang\, i > \pm 1$$

aus

$$tang\, u_1 = \frac{tang\, b_1}{cos(l_1 - \Omega)\, sin\, i} \qquad tang\, u_3 = \frac{tang\, b_3}{cos(l_3 - \Omega)\, sin\, i}.$$

Der Quadrant von u_1 und u_3 wird so bestimmt, dass

$$sin\, b_1 \text{ und } sin\, u_1 \qquad sin\, b_3 \text{ und } sin\, u_3$$

gleiche Vorzeichen besitzen. Man kann aber auch beide Formeln in eine vereinigen, indem man sich der Gleichungen

$$\begin{aligned} cos\,(l - \Omega)\, cos\, b &= cos\, u \\ sin\,(l - \Omega)\, cos\, b &= sin\, u\, cos\, i \\ sin\, b &= sin\, u\, sin\, i \end{aligned}$$

bedient. Multiplicirt man die letzten zwei Gleichungen bezüglich mit $cos\, i$ und $sin\, i$, addirt die Resultate und dividirt durch die erste Gleichung, so wird

$$tang\, u = \frac{sin(l - \Omega) cos\, i + tang\, b\, sin\, i}{cos\,(l - \Omega)}.$$

$sin\, u$ hat dann das Vorzeichen des Zählers, $cos\, u$ das des Nenners; die Formel ist für jedes i brauchbar und hat noch den Vortheil, dass beim Gebrauche von Additionslogarithmen zur Berechnung des Zählers das Argument $tang^2 i$ oder $cotang^2 i$ zum Eingange in die Tafel dient, welches natürlich für u_1 und u_3 dasselbe ist.

Hier findet abermals eine Probe statt, die schon durchgreifender ist, da sie die Auflösung der EULER'schen Gleichung und somit alle Hilfsgrössen prüft. Ist

$$s_2 = \frac{\tau_2' \mu}{\sqrt{r_1 + r_3}},$$

und setzt man

$$2\, \Sigma = r_1 + r_3 + s_2,$$

so ist bekanntlich

$$tang\, \frac{u_3 - u_1}{2} = \sqrt{\frac{(\Sigma - r_1)(\Sigma - r_3)}{\Sigma(\Sigma - s_2)}}$$

Dieser Werth sollte mit dem aus den Gleichungen für $tang\, u$ ermittelten übereinstimmen; dies wird bei ersten Bahnbestimmungen sehr selten der Fall sein, da die Grössen unter dem Wurzelzeichen sehr unsicher werden; man hat dann nur zu untersuchen, ob sich der Fehler durch zulässige Aenderung in den letzten Stellen der Werthe von $log\, r_1$ und $log\, r_3$ wegbringen lässt. Zur weiteren Rechnung verwendet man besser die aus obigen Tangenten ermittelte Differenz. Hier wurde gefunden

$$u_1 = -\,36°\, 6'\, 34''\cdot 3 \qquad u_3 = -\,32°\, 36'\, 20''\cdot 9$$

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = 1°\, 45'\, 6''\cdot 7,$$

während aus der Probe folgte

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = 1°\, 45'\, 9''\cdot 4.$$

Diese Differenz ist ohne Belang, da sie sich durch Aenderung von einer Einheit in $log\, r_1$ und $log\, r_3$ wegbringen lässt.

Die wahre Anomalie und die Periheldistanz findet man aus

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{v_1}{2} = \frac{cotang \frac{u_3 - u_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \frac{cosec \frac{u_3 - u_1}{2}}{\sqrt{r_3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{v_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

Für das vorliegende Beispiel wird

$$v_1 = 36° \, 27' \, 31''\cdot 0 \qquad v_3 = v_1 + (u_3 - u_1) = 39° \, 57' \, 44''\cdot 4$$

$$\omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3 = 287° \, 25' \, 54''\cdot 7$$

$$\log q = 0\cdot 168734.$$

Entlehnt man aus der BARKER'schen Tafel nach OPPOLZER die Grössen M_1, M_3 mit den Argumenten v_1 und v_3 und nimmt M_1, M_3 positiv oder negativ, je nachdem es v_1, v_3 ist, so erhält man die Zeit des Durchganges durch das Perihel (Perihelzeit) T

$$T = t_1 \mp M_1 q^{\frac{3}{2}} = t_3 \mp M_3 q^{\frac{3}{2}}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Rechnung prüft die Auflösung der EULER'schen Gleichung. Hier wurde erhalten:

$$T = 1888 \text{ Sept. } 10\cdot 82911 \text{ m. Zt. Berlin}$$

unter genügender Uebereinstimmung der Werthe $t_1 - M_1 q^{\frac{3}{2}}$ und $t_3 - M_3 q^{\frac{3}{2}}$. Die Elemente lauten also:

$$T = 1888 \text{ Sept. } 10\cdot 82911$$

$$\left.\begin{aligned} \pi = \Omega + \omega &= \;\; 65° \;\; 0' \, 12'' \\ \Omega &= 137° \, 34' \, 17'' \\ i &= \;\; 55° \, 17' \, 40'' \\ \log q &= 0\cdot 168734 \end{aligned}\right\} \text{ m. Aequinoct. } 1888\cdot 0.$$

Die letzte und durchgreifendste Probe ist die Darstellung des mittleren Ortes nach den Formeln:

$$u_2 = v_2 + \omega$$

$$r_2 = q \sec^2 \frac{v_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \Omega) &= r_2 \cos u_2 + R_2 \cos (\odot_2 - \Omega) \\ \rho_2 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \Omega) &= r_2 \sin u_2 \cos i + R_2 \sin (\odot_2 - \Omega) \\ \rho_2 \sin \beta_2 &= r_2 \sin u_2 \sin i. \end{aligned}$$

Man erhält hier

$$\lambda_2' = \;\; 154° \, 41' \, 23''\cdot 0$$

$$\beta_2' = -\, 26° \, 31' \;\; 8''\cdot 1$$

und daher im Sinne Beobachtung weniger Rechnung

$$\Delta\lambda_2 = -\, 5''\cdot 2$$

$$\Delta\beta_2 = -\, 0''\cdot 6.$$

Rechnet man mit den zuletzt erhaltenen Werthen

$$cotang \, J_0 = \frac{\sin(\lambda_2' - \odot_2)}{tang \, \beta_2'},$$

so wird

$$\log cotang \, J_0 = 0\cdot 264195,$$

gegen den Werth aus den Beobachtungen

$$\log cotang \, J = 0\cdot 264196,$$

so dass also M nicht verbesserungsfähig erscheint.

β) OPPOLZER's Methode.

Der Ausnahmsfall traf unter anderen auch bei dem am 31. August 1885 von BROOKS entdeckten Kometen ein. Die Beobachtungen ergaben die folgenden bereits auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen Längen und Breiten[1]); die Daten sind:

t mittl. Zt. Berlin	λ	β	⊙	*log R*
1885 Sept. 2·61570	186° 21′ 51″·9	+43° 16′ 25″·8	160° 41′ 26″·0	0·003550
„ 5·38462	189 9 10·1	45 54 32·3	163 22 38·9	0·003256
7·35766	191 20 21·1	47 45 57·4	165 17 40·8	0·003039.

Man rechnet zunächst

$$tang\,J\,sin(\lambda_2 - \Pi) = tang\,\beta_2$$
$$tang\,J\,cos(\lambda_2 - \Pi) = -\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\beta_3 - \beta_1}$$
$$J < 90^\circ$$
$$Z = sin\,\beta_1\,cotang\,J - sin\,(\lambda_1 - \Pi)\,cos\,\beta_1$$
$$N = sin\,(\lambda_3 - \Pi)\,cos\,\beta_3 - sin\,\beta_3\,cotang\,J$$
$$\odot'' = R_2\,sin\,(\odot_2 - \Pi)$$
$$\tau_3' = 2k(t_2 - t_1) \qquad M = \frac{Z}{N}\frac{\tau_1'}{\tau_3'}$$
$$\tau_2' = 2k(t_3 - t_1)$$
$$\tau_1' = 2k(t_3 - t_2) \qquad F = \tau_1'\tau_2'\frac{\odot''}{N}$$
$$log\,2k = 8{\cdot}536611$$
$$C = -\frac{F}{(R_1 + R_3)^3}.$$

Man findet hier:

$$log\,cotang\,J = 9{\cdot}819896 \qquad log\,Z = 8{\cdot}838633n\text{[2])}$$
$$\Pi = 52^\circ\,8'\,23''{\cdot}4 \qquad log\,N = 8{\cdot}697692n$$
$$log\,\tau_3' = 8{\cdot}978921 \qquad log\,\odot'' = 9{\cdot}972712$$
$$log\,\tau_2' = 9{\cdot}212569 \qquad log\,M = 9{\cdot}993767$$
$$log\,\tau_1' = 8{\cdot}831747 \qquad log\,F = 9{\cdot}319336n$$
$$C = +\,0{\cdot}0254896.$$

Die Bestimmung der Werthe: ψ_1, ψ_3 ist genau so wie bei OLBERS. Die Werthe f_1, f_3 und B_1, B_3 werden

$$f_1 = R_1\,cos\,\psi_1 \qquad B_1 = R_1\,sin\,\psi_1$$
$$f_3 = R_3\,cos\,\psi_3 \qquad B_3 = R_3\,sin\,\psi_3,$$

also hier:

$$f_1 = +\,0{\cdot}661590 \qquad log\,B_1 = 9{\cdot}881257$$
$$f_3 = +\,0{\cdot}608146 \qquad log\,B_3 = 9{\cdot}904528,$$

g und G, h, ζ und H, endlich φ und Q werden wie bei OLBERS gerechnet; sie sind:

$$log\,g = 8{\cdot}908248 \qquad log\,sin\,\zeta = 9{\cdot}649388$$
$$G = 253^\circ\,49'\,55''{\cdot}1 \qquad log\,cos\,\zeta = 9{\cdot}951826$$
$$log\,h = 8{\cdot}997678 \qquad log\,sin\,\varphi = 9{\cdot}983363$$
$$H = 226^\circ\,10'\,3''{\cdot}0 \qquad log\,cos\,\varphi = 9{\cdot}433902.$$

---

[1]) Sollten zufälliger Weise die Beobachtungen so vertheilt sein, dass der Jahresanfang dazwischen liegt, so wird man natürlich alles auf diesen Zeitpunkt reduciren.

[2]) Hätte man nach OLBERS gerechnet, so hätte man für Z und N Werthe erhalten, die nur etwa $\frac{1}{15}$ der obigen betragen.

Hier sind noch zu bestimmen:

$$\nu = \cos\beta_3 \cos\zeta \cos(H - \lambda_3) + \sin\beta_3 \sin\zeta$$
$$\xi = 2g[\nu \cos\varphi - \cos\beta_3 \cos(G - \lambda_3)]$$
$$\gamma_1 = \frac{g}{h}\cos\varphi \qquad A = g\sin\varphi$$
$$\gamma_2 = -\frac{\nu}{h} \qquad \Phi = \frac{\xi}{A^2} \qquad \Psi = \frac{1-\nu^2}{\xi}$$

also für die vorliegenden Werthe:

$$\log\nu = 8{\cdot}972434n \qquad \gamma_1 = +\,0{\cdot}221040 \qquad \log A = 8{\cdot}891611$$
$$\log\zeta = 8{\cdot}735530n \qquad \log\gamma_2 = 9{\cdot}974756 \qquad \log\Phi = 0{\cdot}952308n$$
$$\log\Psi = 1{\cdot}260628n.$$

Versuche.

Man beginnt mit dem Werthe:

$$x = \log(R_1 + R_3) = \log(r_1 + r_3),$$

weil dadurch m im ersten Versuche $= 0$ wird, was die Rechnung bedeutend vereinfacht, und rechnet

$$\eta = \frac{\tau_2'}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sin\theta = \frac{3\eta}{\sqrt{8}} \qquad \mu = \frac{3\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\theta}\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta} \qquad \log\frac{3}{\sqrt{8}} = 0{\cdot}025576$$
$$s_2 = \frac{\tau_2'\mu}{\sqrt{r_1 + r_3}}$$
$$m = C + \frac{F}{(r_1 + r_3)^3}$$
$$\chi = m\Phi(1 + m\Psi)$$
$$\cos\vartheta = \frac{A}{s_2}\sqrt{1+\chi}$$
$$\rho_1 = \frac{s}{h}\sin\vartheta + \gamma_1 + \gamma_2 m$$
$$\rho_3 = M\rho_1 + m$$
$$\tan\theta_1 = \frac{\rho_1 - f_1}{B_1} \qquad \tan\theta_3 = \frac{\rho_3 - f_3}{B_3}$$
$$r_1 = B_1 \sec\theta_1$$
$$r_3 = B_3 \sec\theta_3$$
$$\log(r_1 + r_3) = y.$$

Ist $y = x$, so war die Annahme von x richtig; dies wird jedoch meistens nicht der Fall sein; man wird mit dem Werthe y die Formeln wiederholen und nach der *Regula falsi* aus dem neuerdings gefundenen x' einen Werth ableiten oder sich der von Oppolzer gegebenen Differentialformeln bedienen:

$$\log(r_1 + r_3)^2 = x + y \quad \sin\gamma = \eta\mu \quad Q = \frac{\tan\frac{\gamma}{2}}{\sin\vartheta} - \frac{3F}{(r_1 + r_3)^4}\left[\frac{\xi(1 + 2m\Psi)}{2s_2\sin\vartheta} + \nu\right]$$
$$P = (\sin\theta_1 + M\sin\theta_3)\frac{Q}{h} + \frac{3F}{(r_1 + r_3)^4}\sin\theta_3$$
$$n = 1 + P\frac{10^x}{10^y},$$

dann ist der neue Anfangswerth

$$x' = x + \frac{y - x}{n}.$$

Nach einigen Versuchen ergaben sich:

$$\begin{aligned} \log r_1 &= 9{\cdot}946250 \\ \log r_3 &= 9{\cdot}970383 \\ \log \rho_1 &= 0{\cdot}045704 \\ \log \rho_3 &= 0{\cdot}035789 \end{aligned}$$

und damit die heliocentrischen Polarcoordinaten

$$\begin{aligned} l_1 &= 289^\circ\ 13'\ 58''{\cdot}5 & l_3 &= 302^\circ\ 55'\ 1''{\cdot}7 \\ \log\operatorname{tang} b_1 &= 0{\cdot}230370 & \log\operatorname{tang} b_3 &= 0{\cdot}228131 \\ \log r_1 &= 9{\cdot}946249 & \log r_3 &= 9{\cdot}970382. \end{aligned}$$

Ferner erhielt man Knoten, Neigung und die Argumente der Breite:

$$\begin{aligned} \Omega &= 204^\circ\ 50'\ 38''{\cdot}8 \\ i &= 59^\circ\ 39'\ 0''{\cdot}2 \end{aligned}$$

$$u_1 = 87^\circ\ 9'\ 28''{\cdot}8 \qquad u_3 = 94^\circ\ 5'\ 57''{\cdot}6$$

und daraus

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = 3^\circ\ 28'\ 14''{\cdot}4,$$

während die Probe fast genau übereinstimmend ergab

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = 3^\circ\ 28'\ 14''{\cdot}5.$$

Endlich fand sich noch:

$$\begin{aligned} v_1 &= 45^\circ\ 47'\ 34''{\cdot}2 \\ \log q &= 9{\cdot}874968 \\ \omega &= 41^\circ\ 21'\ 54''{\cdot}5, \end{aligned}$$

so dass die Elemente lauten:

$$T = 1885 \text{ August } 9{\cdot}7302 \text{ m. Zt. Berlin}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi = \omega + \Omega &= 246^\circ\ 12'\ 33'' \\ \Omega &= 204^\circ\ 50'\ 39'' \\ i &= 59^\circ\ 39'\ 0'' \\ \log q &= 9{\cdot}874968 \end{aligned}\right\} \text{m. Aequinoct. } 1885{\cdot}0$$

und damit die Darstellung des mittleren Ortes

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_2 &= -\ 0''{\cdot}8 \\ \Delta\beta_2 &= +\ 3''{\cdot}7. \end{aligned}$$

Zum Schlusse mag hier noch einer Anwendung der Methode von OPPOLZER Erwähnung geschehen. Dieselbe leistet nämlich wegen Mitnahme der höheren Glieder dann gute Dienste, wenn von drei Beobachtungen eines Kometen eine unvollständig ist; dabei ist es nicht nothwendig, dass die unvollständige Beobachtung gerade die mittlere ist; man wird sie nur dazu machen, indem man dieselbe mit dem Index »2« versieht, wobei naturgemäss negative Zwischenzeiten auftreten. Ist die unvollständig beobachtete Coordinate die Rectascension, so setze man

$$\begin{aligned} \Pi &= \alpha_2 - 90^\circ \\ J &= \delta_2, \end{aligned}$$

wobei eine rohe Näherung von α_2 ausreicht; ist dagegen die Deklination unbekannt, so nimmt man an,

$$\begin{aligned} \Pi &= \alpha_2 \\ J &= 90^\circ. \end{aligned}$$

c) Berechnung einer Kreisbahn.

Als Beispiel nehme ich das von OPPOLZER in seinem Lehrbuche, Bd. I, 2. Aufl., pag. 450 ff. gerechnete für den Planeten »Angelina«, und setze die Rechnung in ihren Hauptpunkten an.

Die Beobachtungen sind durch Anbringung der Fixsternaberration auf das wahre Aequinoctium 1861 März 9·5 bezogen und lauten:

t mittl. Zeit Berl.	λ	β	$\odot$	$\log R$
1861 März 9·5	180° 42′ 36″	− 1° 34′ 28″	349° 24′ 10″	9·99727
18·5	178 39 25	− 1 39 2	358 21 53	9·99835

Die Rechnung wird ausreichend fünfstellig geführt. Aus den bekannten Formeln erhält man

$$\psi_1 = 168^\circ\, 35'\, 6'' \qquad \psi_2 = 178^\circ\, 19'\, 26''$$
$$P_1 = 187\;\, 58\;\, 48 \qquad P_2 = 259\;\, 57\;\, 47.$$

Man rechnet dann

$$w \sin W = \sin\frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \sin\frac{P_2 + P_1}{2}$$
$$w \cos W = \cos\frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \sin\frac{P_2 - P_1}{2}$$
$$h \sin H = \sin\frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \cos\frac{P_2 + P_1}{2}$$
$$h \cos H = \cos\frac{\odot_2 - \odot_1}{2} \cos\frac{P_2 - P_1}{2}$$

w und h stets positiv; $w^2 + h^2 = 1$, Probe.

Setzt man

$$W' = W - \tfrac{1}{2}(\psi_2 + \psi_1) \qquad H' = H + \tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1),$$

so wird

$$\sin z_1 = \frac{R_1 \sin\psi_1}{a} \qquad \sin z_2 = \frac{R_2 \sin\psi_2}{a}$$

$$\sin^2 f = w^2 \sin^2[W' - \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1)] + h^2 \sin^2[H' + \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)].$$

Es wurde gefunden

$$W' = 181^\circ\, 15'\, 21'' \qquad \log w^2 = 9{\cdot}53930$$
$$H' = \;\;0\;\, 52\;\, 55 \qquad \log h^2 = 9{\cdot}81544.$$

Nun macht man eine schickliche Annahme über a, rechnet z_1, z_2 und aus der obigen Formel f; der so ermittelte Werth f ist mit dem aus dem KEPLER'schen Gesetze folgenden

$$f = \frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}\, 2 \sin 1''} \qquad \log = \frac{k}{2 \sin 1''} = 3{\cdot}24898$$

zu vergleichen, und a so lange zu variiren, bis genügende Uebereinstimmung erfolgt. Hier fand man aus

$$a = 2{\cdot}5$$
$$f_1 - f_2 = +\, 1'\, 43'',$$

aus

$$a = 2{\cdot}65$$
$$f_1 - f_2 = -\, 0'\, 4'',$$

also nach der *Regula falsi*

$$a = 2{\cdot}6444.$$

Aus den Formeln

$$\rho_1 = R_1 \cos\psi_1 + a \cos z_1 \qquad \rho_2 = R_2 \cos\psi_2 + a \cos z_2,$$

die sich aus dem Dreiecke Erde, Sonne, Planet unmittelbar ergeben, findet man

$$\log \rho_1 = 0{\cdot}22088 \qquad \log \rho_2 = 0{\cdot}21708$$

und damit aus den bekannten Formeln:

$$l_1 = 176°\,29'\,2'' \qquad l_2 = 178°\,32'\,49''$$
$$log\,tang\,b_1 = 8{\cdot}23758n \qquad log\,tang\,b_2 = 8{\cdot}25428n$$
$$log\,a = 0{\cdot}42232 \qquad log\,a = 0{\cdot}42232,$$

ferner

$$\Omega = 314°\,23'\,17''$$
$$i = \quad 1°\,28'\,36''$$
$$u_1 = 222°\,6'\,18'' \qquad u_2 = 224°\,10'\,5''$$

und

$$u_2 - u_1 = 2f = \quad 2°\;\;3'\,47''$$

gegen

$$2f = \quad 2°\;\;3'\,46''$$

als Probe. Endlich ist

$$\mu = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad log\,k'' = 3{\cdot}55001$$
$$\mu = 825''{\cdot}12.$$

Die Elemente lauten:

Epoche: 1861 März 9·5 m. Zt. Berlin

$$\left.\begin{aligned} u_1 = M &= 222°\;\;6'\,18'' \\ \Omega &= 314°\,23'\,17'' \\ i &= \quad 1°\,28'\,36'' \end{aligned}\right\}\text{ wahres Aequinoct. 1865 März 9·5.}$$
$$log\,a = 0{\cdot}42233$$

d) Erste Verbesserung einer parabolischen Bahn.

Da dieser Fall relativ häufig eintritt, so soll davon ein Beispiel folgen.

Die Verbesserung betrifft den Kometen Barnard, dessen Elemente oben nach Olbers's Methode gerechnet wurden.

Die Beobachtungszeiten wurden mit Hilfe der genäherten Elemente von der Aberration, die Beobachtungen vom Einflusse der Präcession, Nutation und Parallaxe befreit. Die Grundlagen lauten:

t mittl. Zt. Berl.	λ	β	$\odot$	$log\,R$
1888 Octob. 31·06713	153° 51′ 11″·7	−27° 14′ 48″·5	218° 32′ 47″·3	9·996523
Nov. 5·71575	155 35 50·9	−25 39 9·6	224 12 48·3	9·995908
„ 11·69745	157 10 4·1	−23 56 16·6	230 13 48·4	9·995281.

Die Verbesserung wurde nach der 3. Methode pag. 530 vorgenommen.

Aus den Formeln

$$cotang\,J = \frac{sin\,(\lambda_2 - \odot_2)}{tang\,\beta_2}$$
$$Z = sin\,\beta_1\,cotang\,J - cos\,\beta_1\,sin\,(\lambda_1 - \odot_2)$$
$$N = cos\,\beta_3\,sin\,(\lambda_3 - \odot_2) - sin\,\beta_3\,cotang\,J$$
$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{r_3}{r_1}\,\frac{sin\,(v_3 - v_2)}{sin\,(v_2 - v_1)}$$

und

$$M_0 = \frac{1}{N\rho_1}\left[\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\,R_1\,sin(\odot_1 - \odot_2) + R_3\,sin\,(\odot_3 - \odot_2)\right] + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]}\,\frac{Z}{N}$$

wurde gefunden

$$log\,cotang\,J = 0{\cdot}287555$$
$$log\,Z = 8{\cdot}702181_n$$
$$log\,N = 8{\cdot}739651_n$$
$$log\,\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = 0{\cdot}024855.$$

Setzt man

$$M = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} \frac{Z}{N}$$

$$m = \frac{\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} R_1 \sin(\odot_1 - \odot_2) + R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)}{N},$$

so wird

$$\log M = 9{\cdot}987385$$
$$\log m = 6{\cdot}893817$$

und

$$\log M_0 = 9{\cdot}987587.$$

Die Hilfsgrössen ergaben sich

$$\log \tau_2' = 9{\cdot}602203 \qquad f_1 = +\,0{\cdot}377004$$
$$\log A = 9{\cdot}690875 \qquad f_3 = +\,0{\cdot}281032$$
$$\log \Gamma = 0{\cdot}380814 \qquad \log B_1 = 9{\cdot}962652$$
$$\gamma = +\,0{\cdot}562205 \qquad \log B_3 = 9{\cdot}991725$$
$$\log (R_3 \sin \psi_3) = 9{\cdot}979312.$$

Die Versuche lieferten als definitive Werthe

$$\log r_1 = 0{\cdot}214801$$
$$\log r_3 = 0{\cdot}233895$$
$$\log \rho_1 = 0{\cdot}239570.$$

Daraus wurden die heliocentrischen Polarcoordinaten bestimmt:

$$l_1 = 115^\circ\, 9'\, 9''{\cdot}5 \qquad l_3 = 120^\circ\, 7'\, 33''{\cdot}8$$
$$\log \operatorname{tang} b_1 = 9{\cdot}743616\,n \qquad \log \operatorname{tang} b_3 = 9{\cdot}639272\,n$$
$$\log r_1 = 0{\cdot}214802 \qquad \log r_3 = 0{\cdot}233897$$

und endlich die Elemente:

$$T = 1888 \text{ Sept. } 10{\cdot}82264 \text{ m. Zt. Berl.}$$
$$\left.\begin{aligned} \pi = \omega + \Omega &= 65^\circ\, 17'\, 48''{\cdot}8 \\ \Omega &= 137^\circ\, 36'\, 10''{\cdot}0 \\ i &= 55^\circ\, 25'\, 39''{\cdot}3 \end{aligned}\right\} \text{m. Aequinoct. } 1888{\cdot}0,$$
$$\log q = 0{\cdot}170608$$

mit den Fehlern im mittleren Orte:

$$\Delta\lambda_2 \cos\beta_2 = +\,7''{\cdot}9$$
$$\Delta\beta_2 = -\,3''{\cdot}7.$$

Anhang.

Das Interpoliren der Werthe M aus der häufig erwähnten BARKER'schen Tafel mit dem Argumente v und umgekehrt, kann, da für $v = 180^\circ$ $M = \infty$ wird, schon in der Nähe dieses Werthes bei etwa 174° unbequem werden. Wiewohl dieser Fall nur bei Kometen mit sehr kleiner Periheldistanz vorkommt, so soll hier der Vollständigkeit wegen das Verfahren von BESSEL, »Astron. Nachr.«, Bd. 22. 1844, pag. 253 ff., angegeben werden.

Es ist bekanntlich

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{v}{2} = \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{v}{2}\left(1 + 3\operatorname{cotang}^2\frac{v}{2}\right).$$

Multiplicirt und dividirt man den Klammerausdruck mit

$$\left(1 + \operatorname{cotang}^2\frac{v}{2}\right)^3,$$

so wird, wenn man setzt

$$\frac{1 + 3\,cotang^2 \frac{v}{2}}{\left(1 + cotang^2 \frac{v}{2}\right)^3} = b$$

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\, tang^3 \frac{v}{2} \left(1 + cotang^2 \frac{v}{2}\right)^3 b.$$

Entwickelt man die Grösse b nach steigenden Potenzen von $cotang^2 \frac{v}{2}$, so ist

$$b = 1 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\, cotang^4 \frac{v}{2} \ldots.$$

Es ist also, wenn $cotang \frac{v}{2}$ als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird, b von der Einheit nur um eine Grösse vierter Ordnung verschieden. Weiter wird

$$tang^3 \frac{v}{2} \left(1 + cotang^2 \frac{v}{2}\right)^3 = \left(tang \frac{v}{2} + cotang \frac{v}{2}\right)^3 = \frac{8}{sin^3 v}.$$

Demnach ist

$$\frac{kt}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \frac{8b}{3\,sin^3 v}.$$

Da aber b nur wenig von der Einheit abweicht, so wird durch die Bestimmung von w aus

$$sin\, w = \frac{2\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{6kt}}$$

w sehr wenig von v verschieden sein, und, da w nahe bei 180° liegt, vor dem Perihel im dritten Quadranten, nach dem Perihel im zweiten Quadranten gelegen sein. Setzt man

$$v = w + \delta,$$

so wird

$$\frac{8}{sin^3 w} = 3\, tang \frac{w + \delta}{2} + tang^3 \frac{w + \delta}{2}$$

oder auch

$$\frac{8}{sin\, w^3} = tang^3 \frac{w}{2} \left(1 + cotang^2 \frac{w}{2}\right)^3 = \frac{\left(1 + tang^2 \frac{w}{2}\right)^3}{tang^3 \frac{w}{2}}.$$

Setzt man

$$tang \frac{w}{2} = \theta \qquad tang \frac{\delta}{2} = x,$$

so folgt

$$\left(\frac{1 + \theta^2}{\theta}\right)^3 = 3\, \frac{\theta + x}{1 - \theta x} + \left(\frac{\theta + x}{1 - \theta x}\right)^3.$$

Es ergiebt sich daher die Bestimmung von x aus einer Gleichung dritten Grades. Für die numerische Berechnung wird man x durch Reihenentwicklung bestimmen. Setzt man mit Bessel

$$\frac{1 + 3\theta^2}{3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} = y,$$

so wird

$$x = y + \theta y^2 + y^3 \frac{\theta^2}{3} \cdot \frac{4 + 18\theta^2 + 9\theta^4 + 5\theta^6}{1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6} + \ldots$$

oder

$$\delta = 2y + 2\theta y^2 + \ldots.$$

was für die Berechnung vollkommen ausreicht.

Die Berechnung von y ist immerhin nicht einfach genug, um in diesem Falle Hilfstafeln entbehren zu können; ich füge deshalb die Tafel aus BESSEL's Abhandlung hier an. Die Rechnung stellt sich wie folgt; man ermittelt

$$\sin w = \frac{2\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{6kt}}$$

sucht mit dem Argumente w aus der Tafel δ, so ist

$$v = w + \delta.$$

Es ist am besten, sich vorläufig um den Quadranten von w nicht zu kümmern, sondern einfach w nahe 180° anzunehmen und erst am Schlusse bei v die nöthige Entscheidung über v zu treffen. Die umgekehrte Aufgabe, M aus v zu bestimmen, ist direkt; weshalb von der Construction von Hilfstafeln abgesehen wurde.

BESSEL's Tafel zur Berechnung grosser wahrer Anomalien.

W	δ	Diff.	w	δ	Diff.	w	δ	Diff.	w	δ	Diff.	w	δ	Diff.
167° 0′	7″·75	−48	169° 0′	3″·36	−25	171° 0′	1″·23	−11	173° 0′	0″·35	−4	175° 0′	0″·07	−3
10	7·27	46	10	3·11	23	10	1·12	10	10	0·31	4	175 30	0·04	−2
20	6·81	44	20	2·88	22	20	1·02	9	20	0·27	3	176 0	0·02	−1
30	6·37	41	30	2·66	20	30	0·93	9	30	0·24	3	177 0	0·01	−1
40	5·96	39	40	2·46	19	40	0·84	8	40	0·21	2	180 0	0·00	
167 50	5·57	37	169 50	2·27	18	171 50	0·76	8	173 50	0·19	3			
168 0	5·20	36	170 0	2·09	17	172 0	0·68	7	174 0	0·16	2			
10	4·84	33	10	1·92	16	10	0·61	6	10	0·14	2			
20	4·51	31	20	1·76	14	20	0·55	6	20	0·12	2			
30	4·20	30	30	1·62	14	30	0·49	5	30	0·10	1			
40	3·90	28	40	1·48	13	40	0·44	5	40	0·09	1			
168 50	3·62	26	170 50	1·35	12	172 50	0·39	−4	174 50	0·08	1			
169 0	3·36		171 0	1·23		173 0	0·35		175 0	0·07				

Literatur.

Ich hatte ursprünglich nicht die Absicht, diesem Aufsatze ein Literaturverzeichniss beizugeben, sondern mich mit den gelegentlich in den Fussnoten angeführten Literaturangaben zu begnügen. Wenn ich trotzdem, einem geäusserten Wunsche zu Folge, eine Anzahl von Abhandlungen, das Bahnbestimmungsproblem betreffend, hier anfüge, so geschieht dies keineswegs in der Absicht, hierin eine gewisse Vollständigkeit zu erreichen; vielmehr sollen hier nur alle jene Abhandlungen angeführt werden, die ich aus blossem Interesse an der Sache einer gründlichen Durchsicht unterzog, und nur diesem Umstande dürfte das Literaturverzeichniss einiges Interesse verdanken.

NEWTON, J., Philosophiae naturalis principia mathematica. Londini, 1687. (Deutsche Ausgabe v. J. P. WOLFERS, Berlin 1872.) Darin III. Buch 5. Abschnitt die berühmte erste Constructionsmethode des Verfassers, welche von E. PLANTAMOUR (1839) (s. d.) in die analytische Zeichensprache übertragen wurde.

EULER, L., Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi, Berolini 1744. (Deutsche Ausgabe v. J. B. v. PACCASSI, Wien 1781). Ueber diese und die anderen in Zeitschriften vertheilten Abhandlungen v. EULER, s. d. Abhandlung v. W. OLBERS, 1797.

BOSCOVICH, R. J., Dissertatio de cometis, Romae 1744 (nach POGGENDORFF, Biographisch-Literarisches Handwörterbuch: »Romae 1746«) ist unter den älteren Constructionsmethoden die bequemste. BOSCOVICH findet:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} \qquad \Delta_3 = \Delta_2 = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

$$\rho_1 = \rho_2 m \qquad \rho_3 = \rho_2 n$$
$$s^2 = A\rho_2^2 + B\rho_2 + C$$
$$s = \frac{k(t_3 - t_1)}{\sqrt{r_2}} \sqrt{2 R_2}$$
$$r_2^2 = M\rho_2^2 + N\rho_2 + O,$$

woraus zur Auflösung

$$(A\rho_2^2 + B\rho_2 + C)^2(M\rho_2^2 + N\rho_2 + O) = k^4(t_3 - t_1)\, 4R_2^2$$

eine Gleichung sechsten Grades, deren sich auch OPPOLZER zur Entscheidung mehrfacher Lösungen des Kometenproblems (1882) bediente. (Die Ableitung stammt aus »C. SCHERFER, Institutiones astronomiae theoreticae, Wien 1777«.)

BARKER, T., An account of the discoveries concerning comets, with the way to find their orbits etc., London 1757. Darin die nach dem Autor benannte BARKER'sche Tafel.

LAMBERT, J. H., Insigniores orbitae cometarum proprietates. Augustae Vindelicorum 1761. Ein sehr werthvolles Buch nicht nur in Bezug auf parabolische, sondern auch elliptische Bahnen. Darin § 158 eine Methode, die der OLBERS'schen sehr nahe kommt. S. darüber W. OLBERS, 1797.

LAMBERT, J. H., Observations sur l'orbite apparente des comètes. Mém. de l'académie de Berlin 1771. Darin der Satz von der Abweichung der scheinbaren Bahn vom grössten Kreise.

LAMBERT, J. H., Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, Berlin 1772. Sind die Elemente einer Kometenbahn näherungsweise bekannt, so erhält man durch Einführung von differentiellen Aenderungen gewisser variabler Elemente eine verbesserte Bahn.

LAGRANGE, J. L., Sur le problème de la détermination des orbites des comètes, d'après trois observations. Nouveau mémoire de l'académie de Berlin 1778 et 1783. Darüber s. W. OLBERS, 1797.

CONDORCET, J. M. DE, TEMPELHOFF, G. F. DE, et HENNERT, J. F., Dissertations sur la théorie des comètes qui ont concouri au prix proposé par l'Académie de Prusse, Utrecht 1780. S. darüber W. OLBERS, 1797.

DU SÉJOUR, D., Nouvelles méthodes analytiques pour résoudre différents questions astronomiques. Mém. de l'académie des sciences 1779, Paris 1782. Darin eine Methode vollkommen mit der von OLBERS übereinstimmend s. a. W. FABRITIUS 1883.

KLÜGEL, G. S., Wie man aus zwei geocentrischen Oertern eines entfernten oberen Planeten seine Bahn nahe bestimmen könne. Berl. astr. Jahrb. f. 1785 (1782). Eine Gleichung dritten Grades wird für den Planeten Uranus gefunden.

HENNERT, J. F., Untersuchung über die Bahn des Uranus. Berl. astr. Jahrb. f. 1786 (1783). Für die Bewegung des Planeten von etwa 2° heliocentrisch wird die Elongation von der Sonne durch eine Gleichung zweiten Grades berechnet.

DU SÉJOUR, D., Traité des mouvemens apparens des corps célestes, Paris 1789.

OLBERS, W., Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen aus einigen Beobachtungen zu bestimmen. Weimar 1797. Einfache trigonometrische Methode; sehr werthvoll durch die Kritik anderer Methoden.

LAPLACE, P. S., Traité de mécanique céleste, tome I, prémière partie, livre II, Paris An VII (1799). Aus mehreren naheliegenden Beobachtungen werden die höheren Differentialquotienten in Länge und Breite abgeleitet, und mit Hilfe von Reihenentwicklungen nach der Zeit und dem Satze von der lebendigen Kraft statt des EULER'schen Theoremes Elemente construirt, welche keinen der benutzten Orte vollständig darstellen.

BURCKHARDT, J. C., Trigonometrische Methode zur genäherten Bestimmung der Elemente einer Cometenbahn. Monatl. Correspondenz v. ZACH, Bd. 4, 1801. Der OLBERS'schen Methode ähnlich, doch wegen Uebergang auf den heliocentrischen Ort bei jeder Hypothese weitläufiger.

BRINKLEY, J., An examination of various solutions of KEPLER's problem etc Transactions of the Roy. Irish Acad. vol. IX (1803). Eingehende Analyse der älteren Methoden etwa bis 1800.

BESSEL, F. W., Ueber die Berechnnng der wahren Anomalie in einer von der Parabel nicht sehr verschiedenen Bahn. Monatl. Correspond. v. ZACH, Bd. 12, 1805.

LEGENDRE, A. M., Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes Paris 1805. Suppl. 1806 et 1820.

GAUSS, C. F., Summarische Uebersicht der zur Bestimmung der Bahnen bei den neuen Hauptplaneten angewandten Methoden. Monatl. Correspond. v. ZACH, Bd. 20, 1809.

GAUSS, C. F., Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburgi 1809.

GAUSS, C. F., Einige Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen. Monatl. Correspond. v. ZACH, Bd. 28, 1813. Die bekannten Vereinfachungen der Versuche durch Einführung von Hilfswinkeln.

IVORY, J., A new methode of deducing a first approximation to the orbit of a comet from three observations. Philos. Transactions 1814. Darüber siehe die folgende Abhandlung von BURCKHARDT.

BURCKHARDT, J. K., Note sur la methode de determiner les orbites des comètes de M. IVORY. Conn. des tems, 1819. Paris 1816.

LITTROW, J. J., Theoret. u. praktische Astronomie, II. Theil, 1821.

LITTROW, J. J., Ueber die verschiedenen Methoden die Bahn eines Kometen oder Planeten aus geocentrischen Beobachtungen zu bestimmen. Berl. astr. Jahrb. für 1824 (1821) = Theoret. u. prakt. Astronomie, II. Bd.

BESSEL, F. W., Beitrag zur Kometentheorie. Astr. Abhandlungen, 2. Heft, 1823.

LUBBOCK, J. W., On the determination of the orbit of a comet. Mem. of the Astron. Society. vol. IV, 1831. Betrachtung der Methoden v. OLBERS u. LAPLACE nebst eigener analyt. Methode.

BINET, J. Ph. M., Sur la détermination des orbites des planètes et des comètes. Journal de l'école polytechnique. Tome XIII, 1831. Darin die Auflösung der Gleichung achten Grades im Planetenprobleme mit Hilfe der Curve

$$y = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

und einer Geraden, welche von KLINKERFUES (»Theoretische Astronomie«) WATERSTONE zugeschrieben wird.

HANSEN, P. A., Ueber die von PONTÉCOULANT in seiner »Theorie analytique du système du monde« vorgetragenen Methode Kometenbahnen zu berechnen im Vergleich mit der OLBERSschen. Astr. Nachrichten, Bd. 10, 1833. Die OLBERS'sche Methode ist die genauere.

NICOLAI, F. B. G., Leichtes Verfahren die sogen. LAMBERT'sche Gleichung bei dem Kometenproblem mittelst einer Hilfstafel zu lösen. Astr. Nachrichten, Bd. 10, 1833.

ENCKE, J. F., Ueber die OLBERS'sche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen. Berl. astr. Jahrb., 1833. Weitere Vereinfachungen in Bezug auf die LAMBERT'sche Gleichung.

VALZ, B., De la recherche immédiate des orbites des comètes. Conn. de tems, 1835. Reduction des Problemes auf eine Gleichung achten Grades (Hilfstafeln).

BESSEL, W., Ueber die Variation des OLBERS'schen M bei Verbesserung von Kometenbahnen. Astr. Nachrichten, Bd. 13, 1836.

PLANTAMOUR, E., Disquisitio de methodis traditis ad cometarum orbitas determinandas Regiomonti, 1839. Darin u. a. eine ausführliche analytische Darstellung der NEWTON'schen Methode in den Principien.

AIRY, G. B., On the determination of the orbits of comets from observations. Mem of the Astr. Society, vol. XI, 1840. Modifikation der LAPLACE'schen Methode.

BERGIUS, A. T., De orbitis cometarum ex observationibus determinandis commentatio. Journal f. reine u. angewandte Math. Bd. 25, 1843. Methode von OLBERS mit den Abkürzungen von GAUSS. Berührung des Ausnahmefalles.

BESSEL, F. W., Ueber die Berechnung der wahren parabolischen Anomalie aus der Zeit für Fälle, in welchen sie sich 180° nähert. Astr. Nachrichten, Bd. 22, 1845.

MICHAL, M., Sur deux méthodes pour déterminer les orbites des comètes et des planètes. Compt. rendus. vol. XXIII, 1846. Auf den Methoden der »Mécanique Céleste« als Grundlage findet der Verfasser eine Gleichung dritten Grades für die Bahnlage.

CAUCHY, L. H., Méthodes nouvelles pour la détermination des orbites des corps célestes et en particulier des comètes. Comptes rendus vol. XXIII, 1846, et XXV 1847. — Sur la détermination

des orbites des planètes et comètes. Comptes rendus vol. XXVI, 1848. — Differentialformeln in der Form der LAPLACE'schen; für das hierzu nöthige umständliche Interpolationsverfahren hat CAUCHY im »Journal de mathématiques pures et appliquées« tome 2, 1837, unter dem Titel »Mémoire sur interpolation« Vorschriften gegeben.

ENCKE, J. F., Ueber den Ausnahmefall aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen, Astr. Nachr. Bd. 27, 1848.

RITTER, E., Mémoire sur la détermination des elements de l'orbite d'une comète ou d'une planète au moyen de trois observations. Mémoires de la Société Physique et d'Histoire Naturelle de Genève, tome XII, 1849. Im Wesentlichen das Verfahren von LEGENDRE, nur grössere Genauigkeit in den von der Erde abhängigen Gliedern.

CHALLIS, J., A methode of calculating the orbit of a planet or comet from three obs. places. Mem. of the Astr. Society vol. XXVII, 1849. Ebenfalls nur eine Erweiterung der LAPLACE'schen Differentialmethode. Darin wird die Construction der Gleichung achten Grades J. J. WATERSTONE zugeschrieben (1847), während dieselbe schon von BINET (1831) angegeben wurde.

VILLARCEAU, YVON, Méthode pour calculer les élements des planètes, du plus généralement des astres, dont les orbites sont peu inclinées à écliptique etc. Conn. des temps, 1849. Ausführung der LAPLACE'schen Methode.

WATERSTONE, J. J., On a graphical mode of computing the excentric anomaly. Monthly Not. of the Astr. Society vol. X, 1850. — Lösung des KEPLER'schen Problems mit Hilfe der Sinuslinie und Construction des Differentialquotienten

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}.$$

PERREY, ALEX., Sur la détermination de l'orbite des planètes et des comètes. Conn. des temps pour 1853 (1850). Ausführung der Methoden von CAUCHY.

ENCKE, J. F., Ueber die Auflösung der KEPLER'schen Gleichung. Astr. Nachr. Bd. 30, 1850. Die CASSINI'sche Methode in Formeln umgesetzt.

ENKE, J. F., Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. Berl. astr. Jahrb. f. 1854 (1851).

CLAUSEN, Th., Ueber die OLBERS'sche Methode Kometenbahnen zu bestimmen. Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg. 2. sér. tome X, 1852.

WEYER, G. D. E., Ueber die Differentialquotienten für Kometenbahnen von grosser Excentricität mit Berücksichtigung der planetarischen Störungen, Berlin 1852.

HORNSTEIN, C., Bemerkungen über den Uebergang von der Parabel auf die Ellipse oder Hyperbel, Sitzungsber. d. K. Akademie der Wissensch., Wien, 12. Bd., 1854.

VALZ, B., De la détermination des orbites élliptiques des planètes et des comètes. Comptes rendus vol. XLI, 1855. Ausdehnung der Methode von VALZ (1835) auf elliptische Bahnen, Tafel für doppelte Lösungen des Problemes.

GASPARIS, A. DE, Ueber Bestimmung der mittleren curtirten Distanz Δ_2. Astr. Nachr. Bd. 42, 1855.

RITTER, E., Nouvelle méthode pour déterminer les élements des astres, qui circulent autour de soleil. Mém. de l'Institut National Genevois, 1855. Im Wesentlichen eine Differentialmethode ähnlich der LEGENDRE'schen. Die Auflösung der transcendenten Gleichung geschieht nach einem dem Verfasser eigenthümlichen Verfahren, worin indessen kein Fortschritt gegen GAUSS, HANSEN etc. zu bemerken ist.

GASPARIS, A. DE, Formole pel calcolo dell' orbita ellittica di un pianeta con tre osservationi. Astr. Nachr. Bd. 43, 1856. Reihenentwicklungen von höherem Grade als in der »Theoria motus« der praktische Gebrauch fraglich.

VILLARCEAU, YVON, Détermination des orbites des planètes et des comètes. Annales de l'observatoire de Paris. Tome III, 1857. Der Hauptsache nach mit der Methode von LAPLACE verwandt.

HOUZEAU, J. C., Sur la détermination du rayon vecteur d'une planète nouvelle. Bulletin de l'Académie de Belgique. 2ème sér. tome VIII, 1859. Aus den Pfeilen der Erdbahn und Planetenbahn wird der Radiusvector in der mittleren Beobachtung bestimmt. Verwandt mit NEWTON's Methode.

OPPOLZER, TH. v., Entwicklung von Differentialformeln zur Verbesserung einer Planeten- oder Kometenbahn nach geocentrischen Orten. Sitzungsber. d. K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 49, 1861.

BRÜNNOW, F., On the calculation of the true anomaly in ellipses and hyperbolas of great excentricity. Astronomical Notices 1, 1861.

HANSEN, P. A., Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus 3 Beobachtungen. Ber. über die Verhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XV, 1863. Die Distanzen des Planeten von der Erde werden in der allgemeinsten Form angenommen und die mittlere Distanz ähnlich wie bei GAUSS ermittelt. Die Auflösung des transcendenten Theiles geschieht mit Anwendung des bekannten Kettenbruches; es wird der für die Bahnbestimmung maassgebende Winkel eingeführt.

DUBOIS, E., Moyen de resoudre graphiquement le problème de KEPLER. Astr. Nachr., Bd. 59, 1863. Identisch mit der Auflösung von WATERSTONE, 1850.

WOLFERS, J. PH., Ueber die indirekte Auflösung eines Problems, welches bei den hyperbolischen Bahnen dem KEPLER'schen der elliptischen Bewegung analog ist. Astr. Nachr., Bd. 64, 1865. Auflösung der Gleichung

$$N = \lambda\, e\, tang\, F - log\, tang \left(45° + \frac{F}{2}\right)$$
$$\lambda = 9{\cdot}6377843 \text{ (Modul).}$$

WATSON, J. C., Theoretical astronomy relating to the motions of the heavenly bodies. Philadelphia 1868. (Neuere Auflagen 1877, 1881). Ein Lehrbuch im besten Sinne des Wortes, welches in compendiöser Form die ganze erste Bahnbestimmungsmethode und die Berechnung der Störungen enthält.

FRISCHAUF, J., Theorie der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nebst deren Bahnbestimmung, Graz 1868. Die 2. Auflage unter dem Titel: »Grundriss der theoretischen Astronomie«, Graz 1871. Beide Werke sind Auszüge aus der »Theoria motus« von GAUSS und aus OLBERS' Abhandlung. Die zweite Auflage enthält neben einer historischen Uebersicht über die älteren Planetentheorien die Grundzüge der Störungsrechnung.

OPPOLZER, TH. v., Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 1. Bd. 1. Aufl. 1870, 2. Bd. 1880, 1. Bd. 2. Aufl. 1882. Ein sehr werthvolles Handbuch, hauptsächlich für den praktischen Rechner durch die grosse Anzahl neuer Methoden und Tafeln unentbehrlich.

CAYLEY, A., On the determination of the orbit of a planet from three observations. Mem. of the Astr. Society XXXVIII, 1871. Geometrische Betrachtungen über die Aenderungen eines Bahnelementes, wenn die anderen fünf constant angenommen werden. Siehe darüber CAYLEY's Selbstreferat in den Jahrbüchern über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 2, 1869 und 1870, sowie das Referat in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft VII. Jahrg. 1872.

KLINKERFUES, W., Theoretische Astronomie, 1871. Ein gutes Lehrbuch für die erste Einführung in die Lehre von den Bahnbestimmungen. Enthält einige in ähnlichen Werken nicht vorkommende Artikel, wie die Berechnung der Doppelsternbahnen, die Theorie des Saturnringes, Berechnung der Satellitenbahnen.

PROCTOR, R. A., Graphical methode for determining the motion of a body in an elliptic orbit under gravity. Monthly Notices of the Astr. Society, 1873. Lösung des KEPLER'schen Problems mit Hilfe der Cycloide.

KNORRE, V., Entwicklung einer Correctionsformel betreffend die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus 3 Beobachtungen. Astr. Nachr. Bd. 81, 1873. Von der HANSEN'schen Methode der Bahnbestimmung aus drei Orten ausgehend werden die bekannten Grössen

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \qquad Q = \frac{AY + PBY''}{A + PB}$$

$$Y = 2r_2^3 \left(\frac{\eta'}{\eta} - 1\right) \qquad Y'' = 2r_2^3 \left(\frac{\eta'}{\eta''} - 1\right).$$

P bleibt constant; $Y = Y'' = \vartheta\vartheta''$ in erster Näherung werden variabel. Es werden Formeln für die Differentialänderungen von Y und Y'' aufgestellt, so dass

$$Y + \Delta \qquad Y'' + \Delta''$$

die verbesserten Werthe sind.

STONE, O., On certain expressions for the distance of a comet from the earth. Astr. Nachr. Bd. 84, 1874. — On BRÜNNOW's method of correcting the orbit of a comet. Astr. Nachr. Bd. 84, 1874. Durch Einführung von Hilfsgrössen, welche für ein constantes ρ in zwei verschiedenen Hypothesen bei Auflösung der EULER'schen Gleichung für die Praxis bequemer sind, will der Verfasser die Methode der Variation der Distanzen nach BRÜNNOW und im Ausnahmefalle erleichtern.

GYLDÉN, H., Zur Auflösung des KEPLER'schen Problems. Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft. Jahrg. X, 1875. Anwendung der elliptischen Functionen.

FABRITIUS, W., Ueber die Berechnung der richtigen Distanzen durch successive Annäherung in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Orten, Kiew 1877. Siehe darüber E. WEISS, Ueber die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. Sitzungsber. d. K. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Bd. 100, 1891.

OPPOLZER, TH. v., Neue Methode zur Bestimmung der Bahnelemente gleicher Wahrscheinlichkeit für einen kleinen Planeten. Monatsber. d. K. Preuss. Akademie zu Berlin, 1878. Methode aus den Beobachtungen einer Opposition die wahrscheinlichsten Elemente eines kleinen Planeten abzuleiten nebst den Grenzen der möglichen Aenderung derselben. Folgerungen daraus von F. KÜHNERT, Astr. Nachr. Bd. 95, 1879.

TIETJEN, F., Zusammenstellung aller für die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen erforderlichen Formeln nebst Rechenschema. Berl. astr. Jahrber. f. 1879 (1877).

OPPOLZER, TH. v., Ueber die Bestimmung grosser wahrer Anomalien in parabolischen Bahnen. Monatsber. d. K. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1880. Die bekannte Methode von BESSEL, Astr. Nachr. Bd. 22, wird für den rechnerischen Gebrauch bequemer gemacht.

OPPOLZER, TH. v., Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenproblem. Sitzungsber. d. K. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Bd. 86, 1882.

FABRITIUS, W., DU SÉJOUR und OLBERS. Astr. Nachr. Bd. 106, 1883. Es wird die Identität der Methode von DU SÉJOUR zur Berechnung der Kometenbahnen [Memoiren der Pariser Akademie f. 1779 (gedruckt 1782)] mit der OLBERS'schen Methode nachgewiesen.

THIELE, T. N., Ueber die Berechnung der neuentdeckten Planeten. Astr. Nachr. Bd. 107, 1884. Berechnung einer vorläufigen Ephemeride ohne Kenntniss der Bahnelemente unter der Voraussetzung, dass der Kreisbahnradius zwischen den Grenzen $a_1 = 2{\cdot}3$ und $a_2 = 3{\cdot}5$ liege.

RADAU, R., Sur le calcul approximatif d'une orbite parabolique. Compt. rend. t. 105, 1887. Eine Art Verbindung der LAPLACE'schen und OLBERS'schen Methode, wenn die Beobachtungen nahe bei einander liegen.

GIBBS, J. W., On the determination of elliptic orbits from three complete observations. Nation. Academ. of Sciences. vol. IV (1889?). Die Genauigkeit in der Ersetzung der Zwischenzeiten in den Dreiecksflächen ist grösser als bei GAUSS, daher auch die Rechnung bedeutend umständlicher. Siehe darüber auch die zwei nächsten Abhandlungen.

FABRITIUS, W., Ueber eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Princips von GIBBS. Astr. Nachr. Bd. 128, 1891. Das Problem wird auf eine veränderliche Grösse zurückgeführt.

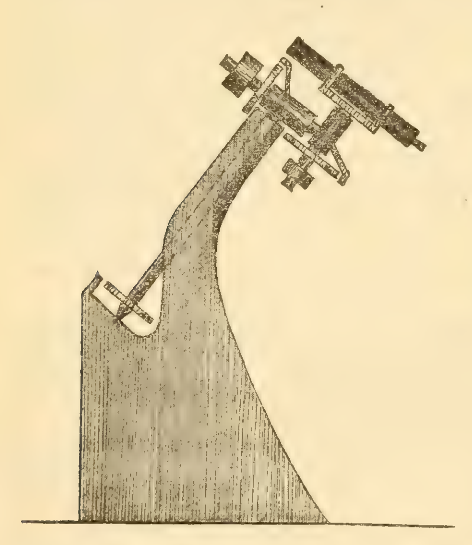
FABRITIUS, W., Weitere Anwendungen des GIBBS'schen Princips. Astr. Nachr. Bd. 128, 1881. Bahnbestimmung aus vier Orten. Verbesserung des OLBERS'schen M ohne Kenntniss der Elemente aus den Zwischenzeiten und r_1, r_3.

WEISS, E., Ueber die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. Sitzungsber. d. K. Akademie d. Wissensch. in Wien, Bd. 100, 1981. Ausführl. Darstellung der Methode von FABRITIUS (1877) und GIBBS.

WEISS, E., Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschriften d. K. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Bd. 60, 1893. Vergleichende Darstellung d. Methoden von GAUSS, HANSEN-OPPOLZER und GIBBS, und Angabe der zulässigen Abkürzungen, wenn die Bahnbestimmung eines Asteroiden nur ein Intervall von 30–40 Tagen umfasst.

TISSERAND, F., Note sur le calcul des planètes. Compt. rend. tome 119, 1894. Bedingungen für die Unmöglichkeit einer Kreisbahn aus zwei geocentrischen Beobachtungen, wenn die tägl. geocentrische Bewegung in Deklination bedeutend ist. KARL ZELBR.

Bahnsucher heisst ein von G. B. AIRY 1861 zuerst angegebenes Instrument, welches die Auffindung vorausberechneter Kometen erleichtern soll. HIND hatte für die Wiederkehr des DE VICO'schen Kometen die Aufsuchungsephemeride berechnet, und bei dieser Gelegenheit erwog AIRY die neue Fernrohrmontirung. In der Regel sind die Elemente der Kometenbahn ziemlich genau bekannt, nicht aber die Zeit der Wiederkehr zum Perihel und daher auch nicht genau der Punkt der Bahn, in welchem sich der Komet zur gegebenen Zeit befindet, sondern nur, dass er irgendwo auf der die Bahn am Himmel bezeichnenden Linie ist. Bei der gewöhnlichen (äquatorealen) Montirung kann man nun nur in einer bestimmten Deklination nach Rectascension, oder wenn das Fernrohr durch ein Uhrwerk in Bewegung gesetzt ist, in bestimmter Rectascension nach Deklination suchen, nicht aber in einer beliebig gegen den Aequator geneigten Richtung. Ersetzt man nun die zweiaxige durch eine dreiaxige Montirung, so ist dies erreichbar. Die Polaraxe liegt wie an der deutschen Aequatorealaufstellung, nur muss die Axe, um eine allseitig freie Rotation zu gestatten, in einer Rohrfassung etwas länger gemacht werden. Die zur Polaraxe senkrechte Axe ist ebenfalls ganz dem Aequatoreal entsprechend angebracht, aber sie trägt nicht wie bei diesem das Fernrohr, sondern ein Rohr, in welchem sich noch eine zweite, wiederum senkrechte Axe dreht. Diese zweite Axe trägt das Fernrohr. Alle drei Axen tragen getheilte Kreise, die Polaraxe den Stundenkreis, sie ist auch durch Uhrwerk drehbar. Die zweite, das Fernrohr am einen Ende tragende Axe hat natürlich am andern Ende ausser dem Kreis noch das Gegengewicht für das Fernrohr, die erste ausser dem Kreis das Gegengewicht für das Fernrohr und sein Gegengewicht, sodass alle Theile gut ausbalancirt sind.



(A. 145.)

Nun ist sofort ersichtlich, dass die zweite, das Fernrohr tragende Axe in jede beliebige Lage gebracht werden kann, sodass das Fernrohr bei seiner Drehung um diese Axe jede beliebige Linie am Himmel beschreibt (Fig. 145).

Es ist natürlich von Vortheil, das Instrument so leicht als möglich zu machen, für das Fernrohr selbst z. B. Holz zu wählen. Es lässt sich auch jedes Aequatoreal in dieser Weise montiren, da ja nichts hindert, das Instrument als Aequatoreal zu benutzen, weil diese Aufstellung nun nur ein specieller Fall unter allen möglichen ist, die die Montirung gestattet.

Von Nutzen ist ein solches Instrument, dem AIRY den Namen Orbit-Sweeper gegeben hat, nicht allein als Bahnsucher für Kometen, sondern auch für Mondbeobachtungen. Wenn man die scheinbare Bewegung des Mondes in Rectascension und Deklination und so die Neigung der scheinbaren Mondbahn am Himmel berechnet, so ist der Bahnsucher auf diese einzustellen und mit geeignetem Uhrwerk der bekannten scheinbaren Geschwindigkeit der Mondbewegung entsprechend festzustellen; ein bestimmter Punkt der Mondoberfläche wird sich dann beliebig lange unter dem Faden des Mikrometers halten lassen.

WINNECKE hat für die Strassburger Sternwarte ein solches Instrument von den Gebr. REPSOLD ausführen lassen. Das Fernrohr hat 6 Zoll Oeffnung, und zeichnet sich das ganze Instrument durch Leichtigkeit und Bequemlichkeit in der Handhabung aus. Dem eigentlichen Zweck hat es aber noch nicht gedient, wurde vielmehr, mit einem feinen Fadenmikrometer versehen, als Aequatoreal neben dem grossen Refractor der Sternwarte seither zu Beobachtungen von Sternhaufen, Planeten, Kometen, Doppelsternen u. s. w. benutzt. VALENTINER.

Biegung. Durch den Einfluss der Schwere auf die einzelnen Theile eines zu Ortsbestimmungen dienenden Instrumentes stehen in letzterem Veränderungen zu befürchten, die die Genauigkeit der Resultate erheblich beeinträchtigen können. Diese unter dem Gesammtnamen der Biegung begriffene Fehlerquelle kommt besonders bei den Instrumenten in Betracht, welche wie der Meridiankreis (s. den betr. Artikel) zur Messung von Zenithdistanzen (Deklinationen) und Rectascensionen der Sterne in weiten Grenzen dienen, während sie da, wo es sich um relative Ortsbestimmungen in sehr geringem gegenseitigen Abstand des bekannten vom unbekannten Stern (Mikrometermessungen) handelt, als beide Sterne gleichmässig beeinflussend ausser Betracht bleiben kann. Fassen wir daher gleich den Meridiankreis speciell ins Auge, so kann sich die Biegung aus mehrfachen Theilen zusammensetzen. Auf die Zenithdistanz wirkt eine Biegung des Kreises und eine Biegung des Fernrohres. Letztere kommt zum Ausdruck, wenn sich die beiden Rohrhälften nicht in derselben Weise durch die Schwere an den Enden senken, wenn also die jeder Rohrhälfte für sich zukommenden Biegungen verschieden von einander sind. Alsdann wird die sogenannte Collimationslinie, d. i. die die Mittelpunkte des Objectivs und des Fadenkreuzes verbindende Linie nicht einer festen Linie am Kreise parallel bleiben, sondern vielmehr beim Drehen des Kreises Winkel durchlaufen, die den am Kreise abgelesenen nicht gleich sind. Auf die Bestimmung der Rectascension, der Durchgänge der Sterne durch die Stundenfäden, wird ganz entsprechend eine Seitenbiegung und Durchbiegung der Axe ihren Einfluss geltend machen. Letztere, bei festen Instrumenten in der Regel von sehr geringem Betrag, wird sich dadurch äussern, dass der Collimationsfehler bei seiner Bestimmung im Horizont (durch Collimatoren) und im Zenith oder Nadir oder in anderen Zenithdistanzen verschiedene Werthe annimmt. Am meisten ist sie erfahrungsgemäss bei gebrochenen Passageninstrumenten zu befürchten, wo sich das in der Mitte der Horizontalaxe angebrachte Prisma senken kann, ohne dass das in einem Lager fest ruhende Ocular mit der Fadenplatte die gleiche Veränderung erleidet. HARKNESS hat eine grössere Anzahl gebrochener Passageninstrumente untersucht, und bei ihnen sehr erhebliche Durchbiegungen constatirt. Doch lässt sich eine solche durch die die Axe stützenden Frictionsrollen in der Regel auf ein Minimum reduciren. Im Uebrigen lassen die HARKNESS'schen Untersuchungen erkennen, dass die Biegung zum Theil von Umständen abhängt, die nicht ganz in der Gewalt des Verfertigers liegen, und jedenfalls ist eine eingehende Untersuchung, wenn es sich um genaue Beobachtungen handelt, nothwendig, um gegebenen Falles die von der Zenithdistanz abhängige Grösse in Rechnung ziehen zu können.

Was nun den Einfluss der Biegung auf die gemessenen Zenithdistanzen betrifft, so kann derselbe durch eine periodische Function der Zenithdistanz ausgedrückt werden, und zwar sowohl die Biegung des Kreises als auch die des Fernrohres, also in der allgemeinen Form

$$\alpha \sin z + \alpha' \cos z + \beta \sin 2z + \beta' \cos 2z + \gamma \sin 3z + \gamma' \cos 3z \ldots .$$

Man hat nun zur Bestimmung wie zur Elimination dieser Biegung verschiedene Methoden in Vorschlag gebracht, deren wesentlichste hier besprochen werden sollen. Sie unterscheiden sich in erster Reihe dadurch von einander, dass man entweder die Beobachtungen der Sterne selbst so anordnet, dass aus einer gewissen Combination die Biegung der Hauptsache nach herausgeht, oder dass man durch besondere Hilfsmittel die Hauptcoëfficienten der Reihe bestimmt und dann den Betrag in Rechnung zieht. Was die Combination der Beobachtungen betrifft, so giebt es zwei Methoden, durch welche die Aufgabe erreicht wird, einmal indem man den Stern in den verschiedenen Kreislagen (nach Umlegung des Instrumentes, also bei Kreis West und Kreis Ost) und ausserdem direkt und reflektirt beobachtet, sodann, wenn das Fernrohr so eingerichtet ist, dass man Objectiv und Ocular mit einander vertauschen kann, indem der Stern in beiden Kreis- und Objectivlagen beobachtet wird.

Rechnen wir nun hierfür allgemein die Zenithdistanzen in der Richtung, in der das Fernrohr gedreht werden muss, um auf zunehmende Ablesungen des Kreises zu führen. Sei die Ablesung, wenn das Fernrohr auf das Nadir gerichtet ist $0°$, wenn es nach dem Zenith gerichtet ist, $180°$, und bei einer Zenithdistanz z sei sie a, dann ist stets

$$z = a - 180° \quad \text{und} \quad a = z + 180°.$$

Unterscheiden wir jetzt die Beobachtungen und Ablesungen in den verschiedenen Kreislagen des Instrumentes, und bezeichnen die in obigem Sinnege zählte Zenithdistanz, die zugehörige Ablesung bei Kreis Ost, wenn der Stern direkt beobachtet wird, mit z_1, a_1, die entsprechenden Grössen bei Kreis Ost und reflektirter Beobachtung mit z_2, a_2, bei Kreis West und direkter Beobachtung mit z_3, a_3, endlich bei Kreis West und reflektirter Beobachtung mit z_4, a_4. Dann ist

I.	Kr. O. D.	$a_1 = z_1 + 180°$	$z_1 = a_1 - 180°$
	Kr. O. R.	$a_2 = a_1 + 180° - 2z_1$	$z_2 = a_1 - 2z_1$
	Kr. W. D.	$a_3 = a_1 - 2z_1$	$z_3 = a_1 - 2z_1 - 180°$
	Kr. W. R.	$a_4 = a_1 + 180°$	$z_4 = a_1$

Wenn nun das Fernrohr so eingerichtet ist, dass man Objectiv und Ocular vertauschen kann, so mögen die nach Umwechslung erhaltenen Zenithdistanzen und Ablesungen der obigen Reihe entsprechend mit a_1', z_1', a_2', z_2', a_3', z_3', a_4', z_4' bezeichnet sein, und wir haben für diese Stellung II folgendes:

II.	Kr. O. D.	$a_1' = a_1 + 180°$	$z_1' = a_1$
	Kr. O. R.	$a_2' = a_1 - 2z_1$	$z_2' = a_1 - 2z_1 - 180°$
	Kr. W. D.	$a_3' = a_1 + 180° - 2z_1$	$z_3' = a_1 - 2z_1$
	Kr. W. R.	$a_4' = a_1$	$z_4' = a_1 - 180°.$

Nennen wir nun den Fehler der Biegung bei der Zenithdistanz z $f(z)$, so ist an die Beobachtungen jeweils folgende Correction anzubringen:

I.	Kr. O. D.	$f(a_1 - 180°)$
	Kr. O. R.	$f(a_1 - 2z_1) = f(360° - a_1)$
	Kr. W. D.	$f(a_1 - 2z_1 - 180°) = f(180° - a_1)$
	Kr. W. R.	$f(a_1)$
II.	Kr. O. D.	$f(a_1)$
	Kr. O. R.	$f(a_1 - 2z_1 - 180°) = f(180° - a_1)$
	Kr. W. D.	$f(a_1 - 2z_1) = f(360° - a_1)$
	Kr. W. R.	$f(a_1 - 180°)$

Schliesst man nun die Ablesung bei der Sternbeobachtung zur Ermittlung der Zenithdistanz an das Nadir, bezw. an den durch Collimatoren ermittelten Horizontalpunkt an, so müssen auch die diesen Ablesungen zukommenden Biegungswerthe berücksichtigt werden. Im Nadir ist die Correction einfach

I. Kr. O. $f(180°)$ II. Kr. O. $f(0°)$
Kr. W. $f(180°)$ Kr. W. $f(0°)$,

und bei der Bestimmung des Horizontpunktes durch zwei im Norden und Süden aufgestellte Collimatoren

I. Kr. O. $\frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)]$ II. Kr. O. $\frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)]$
Kr. W. $\frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)]$ Kr. W. $\frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)]$.

Hiernach ergeben sich nun nach den verschiedenen Beobachtungsmethoden unter Berücksichtigung der Biegung und unter der allgemein durchgeführten Annahme, dass die Ablesungen jeweils selbst für die Fehler der Theilung verbessert wurden, folgende Werthe der Zenithdistanzen.

Objectivlage I.

1) Richtet man das Fernrohr bei Kr. Ost und Kr. West auf den Stern und liest dabei jedesmal den Kreis ab, so kommt:

$$z = \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3) + \tfrac{1}{2}[f(a_1 - 180°) - f(180° - a_1)].$$

2) Verbindet man in jeder Kreislage eine direkte mit einer reflektirten Beobachtung, so kommt:

$$\text{Kr. O.}\quad z = 90° + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_2) + \tfrac{1}{2}[f(a_1 - 180°) - f(360° - a_1)]$$
$$\text{Kr. W.}\quad z = 90° + \tfrac{1}{2}(a_4 - a_3) + \tfrac{1}{2}[f(a_1) - f(180 - a_1)].$$

3) Verbindet man jede einzelne Sternbeobachtung mit einer Nadirbestimmung, welche letztere bei Kreis Ost mit N_1, bei Kreis West mit N_2 bezeichnet werden soll, so findet sich die Zenithdistanz

$$\text{Kr. O. D.}\quad z = 180° - N_1 + a_1 - f(180°) + f(a_1 - 180°)$$
$$\text{Kr. O. R.}\quad z = N_1 - a_2 + f(180°) - f(360° - a_1)$$
$$\text{Kr. W. D.}\quad z = 180° - a_3 + N_2 - f(180° - a_1) + f(180°)$$
$$\text{Kr. W. R.}\quad z = a_4 - N_2 + f(a_1) - f(180°).$$

4) Durch Verbindung mit dem aus Collimatoren bestimmten Horizontpunkt kommen folgende Werthe, in denen H_1 und H_2 die Ablesungen des Horizontpunktes bei Kreis Ost, H_3 und H_4 die bei Kreis West sind, welche jeweils sehr nahe bei 90° und 270° liegen.

$$\text{Kr. O. D.}\quad z = a_1 - \tfrac{1}{2}(H_1 + H_2) - \tfrac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] + f(a_1 - 180°)$$
$$\text{Kr. O. R.}\quad z = 180° - \tfrac{1}{2}(H_1 + H_2) - a_2 + \tfrac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] - f(360° - a_1)$$
$$\text{Kr. W. D.}\quad z = \tfrac{1}{2}(H_3 + H_4) - a_3 + \tfrac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] - f(180° - a_1)$$
$$\text{Kr. W. R.}\quad z = 180° - \tfrac{1}{2}(H_3 + H_4 + a_4 - \tfrac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] + f(a_1).$$

Indem wir alle Grössen mit Accenten versehen, erhalten wir nach Umwechslung von Objectiv und Ocular für die einzelnen Bestimmungen folgende entsprechenden Gleichungen.

Objectivlage II.

1) $z = \tfrac{1}{2}(a_1' - a_3') + \tfrac{1}{2}[f(a_1) - f(360° - a_1)]$

2) Kr. O. $z = 90° + \tfrac{1}{2}(a_1' - a_2') + \tfrac{1}{2}[f(a_1) - f(180° - a_1)]$
Kr. W. $z = 90° + \tfrac{1}{2}(a_4' - a_3') + \tfrac{1}{2}[f(a_1 - 180°) - f(360° - a_1)]$

3) Kr. O. D. $z = 180° - N_1' + a_1' - f(0°) + f(a_1)$
Kr. O. R. $z = N_1' - a_2' + f(0°) - f(180° - a_1)$
Kr. W. D. $z = 180° + N_2' - a_3' + f(0°) - f(360° - a_1)$
Kr. W. R. $z = a_4' - N_2' + f(a_1 - 180°) - f(0°)$

4) Kr. O. D. $z = 180° - \frac{1}{2}(H_1' + H_2') + a_1' - \frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] + f(a_1)$
Kr. O. R. $z = \frac{1}{2}(H_1' + H_2') - a_2' + \frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] - f(180° - a_1)$
Kr. W. D. $z = 180° + \frac{1}{2}(H_3' + H_4') - a_3' + \frac{1}{2}[f(90°) + f(270°)] - f(360° - a_1)$
Kr. W. R. $z = a_4' - \frac{1}{2}(H_3' + H_4') - \frac{1}{2}[f(90° + f(270°] + f(a_1 - 180°)$

Setzen wir nun für $f(z)$ die Reihe

$$\alpha \sin z + \alpha' \cos z + \beta \sin 2z + \beta' \cos 2z + \gamma \sin 3z + \gamma' \cos 3z + \ldots$$

so gehen obige Formeln der Reihe nach in die folgenden über:

I. 1) $z = \frac{1}{2}(a_1 - a_3) - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \ldots$

2) Kr. O. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_1 - a_2) + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \alpha' \cos a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \ldots$

Kr. W. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_4 - a_3) + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \ldots$

3) Kr. O. D. $z = 180° - N_1 + a_1 + \alpha' - \beta' + \gamma' - \delta' + \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots - \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. O. R. $z = N_1 - a_2 - \alpha' + \beta' - \gamma' + \delta' - \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. W. D. $z = 180° + N_2 - a_3 - \alpha' + \beta' - \gamma' + \delta' - \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots + \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

Kr. W. R. $z = -N_2 + a_4 + \alpha' - \beta' + \gamma' - \delta' + \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

4) Kr. O. D. $z = a_1 - \frac{1}{2}(H_1 + H_2) + \beta' - \delta' + \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots - \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. O. R. $z = 180° - a_2 + \frac{1}{2}(H_1 + H_2) - \beta' + \delta' - \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. W. D. $z = -a_3 + \frac{1}{2}(H_3 + H_4) - \beta' + \delta' - \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots + \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

Kr. W. R. $z = 180° + a_4 - \frac{1}{2}(H_3 + H_4) + \beta' - \delta' + \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

II. 1) $z = \frac{1}{2}(a_1' - a_3') + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots$

2) Kr. O. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_1' - a_2') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \ldots$

Kr. W. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_4' - a_3') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + - \alpha' \cos a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \ldots$

3) Kr. O. D. $z = 180° - N_1' + a_1' - \alpha' - \beta' - \gamma' - \delta' - \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

Kr. O. R. $z = N_1' - a_2' + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots - \alpha \sin a_1 - \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 - \delta \sin 4a_1 - \ldots + \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 \ldots$

Kr. W. D. $z = 180^\circ + N_2{}' - a_3{}' + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. W. R. $z = -N_2{}' + a_4{}' - \alpha' - \beta' - \gamma' - \delta' - \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots - \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

4) Kr. O. D. $z = 180^\circ + a_1{}' - \frac{1}{2}(H_1{}' + H_2{}') + \beta' - \delta' + \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

Kr. O. R. $z = -a_2{}' + \frac{1}{2}(H_1{}' + H_2{}') - \beta' + \delta' - \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots + \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 + \ldots$

Kr. W. D. $z = -a_3{}' + 180^\circ + \frac{1}{2}(H_3{}' + H_4{}') - \beta' + \delta' - \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \alpha' \cos a_1 - \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 - \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Kr. W. R. $z = a_4{}' - \frac{1}{2}(H_3{}' + H_4{}') + \beta' - \delta' + \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \gamma \sin 3a_1 + \delta \sin 4a_1 - \ldots - \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 + \delta' \cos 4a_1 - \ldots$

Man kann nun also durch Verbindung der verschiedenen in der Praxis möglichen und vorkommenden Fälle die zur Elimination resp. Bestimmung der Biegung günstigste Combination suchen. Ist z. B. der Meridiankreis nicht zum Umlegen eingerichtet, was aber nur bei älteren und speciell englischen Instrumenten der Fall ist, sodass man also dann nur direkte mit reflektirten Beobachtungen unter Benutzung des Nadirs oder der Collimatoren verbinden kann, so wird dann das Mittel dieser beiden Beobachtungen denselben Fehler enthalten, wie die unter 2) angeordneten Beobachtungen mit einfacher Umlegung, da der Fehler im Nadir- und Horizontpunkt daraus verschwindet. Kann aber, was bei allen modernen Meridiankreisen der Fall ist, das Instrument bequem umgelegt werden, so giebt das Mittel aus den in beiden Kreislagen angestellten direkten und reflektirten Beobachtungen den folgenden Werth als die verbesserte Zenithdistanz

$$z = 90^\circ + \tfrac{1}{4}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots$$

Benutzt man keine reflektirten Beobachtungen, sondern nur die direkten in beiden Kreislagen, so enthält das Mittel aus beiden Bestimmungen denselben Fehler wie die Beobachtung unter 1). Wenn Objectiv und Ocular zu vertauschen sind, so giebt die Combination von I1) mit II1)

$$z = \tfrac{1}{4}(a_1 + a_1{}' - a_3 - a_3{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots$$

Die Combination von I2) und II2) giebt

Kr. O. $z = 90^\circ + \frac{1}{4}(a_1 - a_2 + a_1{}' - a_2{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots$

Kr. W. $z = 90^\circ + \frac{1}{4}(a_4 - a_3 + a_4{}' - a_3{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots$

Die Combination von I3) und II3) giebt

Kr. O. D. $z = 180^\circ + \frac{1}{2}(a_1 + a_1{}' - N_1 - N_1{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \beta' \cos 2a_1 + \delta' \cos 4a_1 + \ldots - \beta' - \delta' - \ldots$

Kr. O. R. $z = \frac{1}{2}(N_1 + N_1{}' - a_2 - a_2{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \beta' \cos 2a_1 - \delta \cos 4a_1 - \ldots + \beta' + \delta' + \ldots$

Kr. W. D. $z = 180^\circ + \frac{1}{2}(N_2 + N_2{}' - a_3 - a_3{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots - \beta' \cos 2a_1 - \delta' \cos 4a_1 \ldots + \beta' + \delta' + \ldots$

Kr. W. R. $z = \frac{1}{2}(a_4 + a_4{}' - N_2 - N_2{}') + \beta \sin 2a_1 + \delta \sin 4a_1 + \ldots + \beta' \cos 2a_1 + \delta' \cos 4a_2 + \ldots - \beta' - \delta' - \ldots$

Die Combination von I4) und II4) endlich ergiebt

Kr. O. D. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_1 + a_1') - \frac{1}{4}(H_1 + H_2 + H_1' + H_2') + \beta \sin 2a_1 +$
$+ \delta \sin 4a_1 + .. + \beta' \cos 2a_1 + \delta' \cos 4a_1 + ... + \beta' - \delta' + ...$

Kr. O. R. $z = 90° + \frac{1}{4}(H_1 + H_2 + H_1' + H_2') - \frac{1}{2}(a_2 + a_2') + \beta \sin 2a_1 +$
$+ \delta \sin 4a_1 + .. - \beta' \cos 2a_1 - \delta' \cos 4a_1 - ... - \beta' + \delta' - ...$

Kr. W. D. $z = 90° + \frac{1}{4}(H_3 + H_4 + H_3' + H_4') - \frac{1}{2}(a_2 + a_3') + \beta \sin 2a_1 +$
$+ \delta \sin 4a_1 + .. - \beta' \cos 2a_1 - \delta' \cos 4a_1 - ... - \beta' + \delta' - ...$

Kr. W. R. $z = 90° + \frac{1}{2}(a_4 + a_4') - \frac{1}{4}(H_3 + H_4 + H_3' + H_4') + \beta \sin 2a_1 +$
$+ \delta \sin 4a_1 + .. + \beta' \cos 2a_1 + \delta' \cos 4a_1 + ... + \beta' - \delta' + ...$

Es ergiebt sich also aus allen diesen Zusammenstellungen, dass es durch keine Combination der Beobachtungen nach den hier angenommenen Methoden möglich ist, die Sinusglieder der geraden vielfachen Winkel zum Verschwinden zu bringen, da sie bei allen Werthen von z dasselbe Zeichen haben. Die übrigen Glieder in der Formel für die Biegung verschwinden dagegen aus den folgenden Combinationen der beobachteten Zenithdistanzen:

1) aus dem Mittel von 4 Beobachtungen, welche in beiden Kreislagen direkt und reflektirt angestellt sind,

2) aus denselben Beobachtungen nach Umwechslung von Objectiv und Ocular,

3) aus direkten Beobachtungen in beiden Lagen des Kreises und Objectivs,

4) aus reflektirten Beobachtungen in beiden Lagen des Kreises und Objectivs,

5) aus direkten und reflektirten Beobachtungen in gleicher Kreislage, aber nach Umwechslung von Objectiv und Ocular,

6) aus entsprechenden Beobachtungen in der anderen Kreislage.

Immer sind 4 Beobachtungen oder Einstellungen des Sternes nöthig, um den Einfluss der Biegung soweit als möglich zu verringern. Lässt sich Objectiv und Ocular nicht vertauschen, wohl aber das Instrument umlegen, so giebt es nur eine Möglichkeit, um für die Zenithdistanz ein Resultat zu erhalten, in dem allein noch die Sinus der geraden Vielfachen von a_1 vorkommen. Dasselbe gilt, wenn sich Objectiv und Ocular vertauschen lassen, das Instrument aber nicht umlegbar ist. Sind aber beide Vorkehrungen möglich, so können aus den dann möglichen 8 verschiedenen Bestimmungen der Zenithdistanz die 6 Combinationen zusammengestellt werden, die hinsichtlich der Biegung alle zum gleichen Resultat führen müssen. Man wird aus der ungenügenden Erfüllung dieser Bedingungen auf vorhandene Fehlerquellen anderer Art schliessen können, Refraction in und am Fernrohr, Spannungen beim Umsetzen von Objectiv und Ocular u. s. w. Speciell muss sich aus den nach 1) und 2) erhaltenen Resultaten zeigen, in wiefern Fehler durch die Vertauschung des Objectivs eingeführt werden.

Stellen wir nun also die Biegung in der einfachen Form $\alpha \sin z + \beta \cos z$ dar, berücksichtigen also nur die Glieder, welche vom Sinus und Cosinus der einfachen Zenithdistanz abhängen, als die jedenfalls einflussreichsten, so haben wir ja zwei Methoden zur Elimination. Die eine, als die Bessel'sche bezeichnet, verbindet direkte und reflektirte Beobachtungen in beiden Kreislagen, die andere, als die Hansen-Repsold'sche bezeichnet, verbindet die Beobachtungen in beiden Lagen des Objektivs und des Kreises. Die erstere hat den grossen Vortheil, dass sie gar keine Veränderungen am Instrument selbst fordert, aber den Nachtheil, dass sie nicht auf alle Gestirne anwendbar ist, da bei grossen und kleinen Zenithdistanzen die Reflexbeobachtungen in der Regel unmöglich werden. Will

man daher nach diesem Verfahren die Beobachtungen aller Sterne von dem Einfluss der Biegung befreien, so bleibt nichts anderes übrig, als die Biegungscoëfficienten aus den Beobachtungen solcher Sterne, die direkt und reflektirt zu beobachten sind, zu bestimmen und dann den Betrag für jede Zenithdistanz zu berechnen. Die HANSEN'sche Methode gestattet sämmtliche Sterne so zu beobachten, dass die Biegung eliminirt wird, aber die Umsetzung des Objectivs und Oculars erfordert stets eine Veränderung am Fernrohr, die möglicherweise auch Aenderungen im Betrag der Biegung hervorrufen kann. Die Körper des Sonnensystems machen übrigens in Folge ihrer veränderlichen Zenithdistanz die Elimination der Biegung im Allgemeinen streng genommen unmöglich.

Wenn nun mit α die Biegung im Horizont, mit β dieselbe im Nadir bezeichnet wird, so ist die Bestimmung der beiden Coëfficienten aus den nach BESSEL'scher Methode angestellten vollständigen Beobachtungen sehr einfach, und ebenso einfach ist dann auch die Verbesserung der unvollständigen Beobachtungen. Bezeichnen wir jetzt der Einfachheit wegen mit I, II, III, IV die Lagen, in denen die 4 Beobachtungen angestellt werden, und zwar der Reihe nach Kreis Ost direkt, Kreis Ost reflektirt, Kreis West direkt, Kreis West reflektirt, ferner sei z die wahre Zenithdistanz des Sternes, und nehmen wir dieselbe immer positiv und kleiner als 90°, ferner seien a_1, a_2, a_3, a_4 die aus den Beobachtungen abgeleiteten Zenithdistanzen des Sternes der Reihenfolge nach in den Lagen I, II, III, IV, α und β seien die Coëfficienten der Biegung, welche wir bei Kreis Ost, Stern direkt an der Nordseite des Meridians positiv annehmen wollen, endlich bezeichne m den Theilfehler in den Lagen I und IV, und n den Theilfehler in den Lagen II und III, welche jeweils die gleichen sind. Berücksichtigen wir dann noch, dass bei der Biegung für eine gewisse, auf das Nadir bezogene Zenithdistanz die Biegung im Nadir nicht ausser Acht gelassen werden darf, so findet sich für die Lagen:

	auf der Nordseite des Meridians	auf der Südseite des Meridians
I.	$z = a_1 + m + \alpha \sin z + \beta(1 + \cos z)$	$z = a_1 + m + \alpha \sin z - \beta(1 + \cos z)$
II.	$z = a_2 + n - \alpha \sin z - \beta(1 - \cos z)$	$z = a_2 + n - \alpha \sin z + \beta(1 - \cos z)$
III.	$z = a_3 + n + \alpha \sin z - \beta(1 + \cos z)$	$z = a_3 + n + \alpha \sin z + \beta(1 + \cos z)$
IV.	$z = a_4 + m - \alpha \sin z + \beta(1 - \cos z)$	$z = a_4 + m - \alpha \sin z - \beta(1 - \cos z)$

Daraus ergiebt sich dann sofort, dass

$$z = \tfrac{1}{2}(m + n) + \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4),$$

dass also, wie auch vorher abgeleitet die Biegungscoëfficienten im Mittel aus 4 Beobachtungen verschwinden. Nimmt man nun als Unbekannte die drei Grössen α, β, z, so liefert jeder vollständig bestimmte Stern eine Gleichung zu viel, führt man dann noch die Differenz der Theilfehler $m - n$ als Unbekannte ein, so hat man gleichviel Gleichungen und Unbekannte. Die Differenz $m - n$ lässt sich also aus den Gleichungen ableiten und andererseits die Grössen m und n selbst eliminiren, sodass man die Biegungscoëfficienten α, β ganz ohne Kenntniss der Theilfehler m und n bestimmen kann. Man findet nämlich aus obigen Gleichungen:

auf der Nordseite des Meridians	auf der Südseite des Meridians
$+ 4\alpha \sin z = (a_2 - a_3) - (a_1 - a_4)$	$+ 4\alpha \sin z = (a_2 - a_3) - (a_1 - a_4)$
$- 4\beta \cos z = (a_2 - a_3) + (a_1 - a_4)$	$+ 4\beta \cos z = (a_2 - a_3) + (a_1 - a_4)$
$m - n = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_4) - \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3) - 2\beta;$	$m - n = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_4) - \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3) + 2\beta.$

Hierbei hat übrigens die Ermittlung der Grösse $m - n$ ganz untergeordnete Bedeutung, da sich für diese nicht durch Vermehrung der beobachteten Sterne

wie für die Biegungscoëfficienten die Genauigkeit erhöhen lässt, indem ja jedem Stern (im Allgemeinen) ein $m - n$ von anderem Betrage zukommt.

Hat man nun also durch passende Sternbeobachtungen, wobei möglichst darauf zu achten ist, dass sich die Sinus- und Cosinuscoëfficienten gleich oder annähernd gleich günstig bestimmen, die Grössen α, β ermittelt, so kann man die unvollständig, d. h. nicht in allen vier Lagen gleichförmig oder doch mit genähert gleichem Gewicht beobachteten Sterne leicht für die Grösse der Biegung verbessern. Behalten wir für a_1, a_2, a_3, a_4, z, die obigen Bedeutungen bei, bezeichnen aber mit p_1, p_2, p_3, p_4 die Zahlen der einzelnen Beobachtungen in den verschiedenen Kreislagen, so ist an der Nordseite des Meridians

$$\begin{aligned} p_1 z &= p_1 a_1 + p_1 \alpha \sin z + p_1 \beta(1 + \cos z) \\ p_2 z &= p_2 a_2 - p_2 \alpha \sin z - p_2 \beta(1 - \cos z) \\ p_3 z &= p_3 a_3 + p_3 \alpha \sin z - p_3 \beta(1 + \cos z) \\ p_4 z &= p_4 a_4 - p_4 \alpha \sin z + p_4 \beta(1 - \cos z) \end{aligned}$$

und

$$z = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + p_4 a_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} +$$
$$+ \frac{[(p_1 - p_2 + p_3 - p_4)\alpha \sin z] + [(p_1 - p_3)(1 + \cos z) - (p_2 - p_4)(1 - \cos z)]\beta}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}.$$

Da das erste Glied einfach das Mittel aus allen einzelnen Beobachtungen ist, bezeichnet das zweite die anzubringende Verbesserung. Fehlen also z. B. die Reflexbeobachtungen, so fallen zunächst a_2 und a_4 fort und es sind p_2 und p_4 jeweils gleich null, so dass kommt:

$$z = \frac{p_1 a_1 + p_3 a_3}{p_1 + p_3} + \alpha \sin z + \frac{(p_1 - p_3)(1 + \cos z)\beta}{p_1 + p_3}.$$

Ebenso findet sich für die Südseite des Meridians

$$z = \frac{p_1 a_1 + p_3 a_3}{p_1 + p_3} + \alpha \sin z - \frac{(p_1 - p_3)(1 + \cos z)\beta}{p_1 + p_3}.$$

Abgesehen nun davon, dass es oft schon die Verhältnisse nicht gestatten, Reflexbeobachtungen anzustellen oder Objectiv und Ocular zu vertauschen, ist es auch an und für sich von grosser Bedeutung, andere Methoden zur Anwendung zu bringen, da es sich um die Vermeidung einer Fehlerquelle handelt, die auf sämmtliche Höhenbestimmungen von grösstem Einfluss ist, und ohne deren möglichster Elimination den berechtigten Anforderungen der Gegenwart hinsichtlich der Verfeinerung der Beobachtungen nicht genügt werden könnte. Selbstverständlich werden alle Methoden, die zur Anwendung von Hilfsapparaten greifen, grundsätzlich denen unterlegen sein, welche auf die Sternbeobachtungen selbst sich gründen, im vorliegenden Fall schon deswegen, weil sie in der Regel die Biegung nur für beschränkte Grenzen der Zenithdistanz zu bestimmen erlauben.

An erster Stelle ist hier die Methode der Collimatoren zu erwähnen, welche zuerst von SCHUMACHER vorgeschlagen wurde, nachdem REPSOLD jene Hilfsinstrumente gefertigt hatte. Im Princip und in seiner ersten Form besteht ein Collimator aus einem Fernrohr von geringen Dimensionen, welches ohne Ocular im Brennpunkt des Objectivs ein Fadenkreuz besitzt. An der Röhre befinden sich zwei Cylinder, deren Axen nach der Construction zusammenfallen und deren Dicke möglichst genau gleich sein sollen. Die Cylinder ruhen als Zapfen horizontal in Lagern und die Röhre kann durch ein Niveau auf ihre Neigung genau untersucht werden. Fällt die optische Axe des Fernrohres mit der gemein-

schaftlichen Axe der beiden Cylinder zusammen, und sind beide letztere vollkommen gleich dick, so ergiebt die Nivellirung den kleinen Winkel, welchen die optische Axe des eventuell nicht genau horizontal liegenden Fernrohres mit dem Horizont bildet. Man kann also zur Bestimmung des Horizontpunktes an einem Meridiankreis jedes einfache Fernrohr, wenn es genau horizontal liegt und übrigens die optischen Axen desselben und des Meridianfernrohres zusammenfallen, benutzen. In neuerer Zeit sind nun die Collimatoren speciell für die Beobachtungen am Meridiankreis und die Biegungsuntersuchungen in vervollkommneter Form hergestellt. Damit sie nicht selbst eine Durchbiegung erleiden, ist eine Contrabalancirung am Fernrohr angebracht; Objectiv und Ocularstück sind zu vertauschen, am Ocular sind Mikrometer zur feinen Einstellung, die Rohre sind in den Lagern drehbar, sodass das Mikrometerocular für die Ausmessung im verticalen und horizontalen Sinn gebraucht werden kann, u. s. w.

Die Anwendung solcher Collimatoren ist ohne weiteres klar. Stellt man nämlich zwei derselben so auf, dass ihre optischen Axen durch die Mitte der Instrumentenaxe gehen und richtet sie so auf einander, dass ihre Fadenkreuze sich vollständig decken, was dadurch ermöglicht wird, dass der Cubus des Meridianfernrohres eine (durch einen Deckel verschliessbare) Oeffnung erhält, so muss das Meridianfernrohr, indem man es erst auf das Fadenkreuz des einen Collimators, dann auf das des anderen einstellt, einen Winkel von genau 180° beschreiben. Ist dann die wahre Zenithdistanz des Collimators z und die Ablesung am Kreise a_1 u. s. w., so ist nach I, 3 in der einen Lage

$$z = a_1 - \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 - \gamma' \cos 3a_1 + \ldots - \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 - \\ - \gamma \sin 3a_1 + \ldots + 180° - N_1 + \alpha' - \beta' + \gamma' - \ldots$$

und nachdem das Fernrohr um genau 180° gedreht und auf den anderen Collimator eingestellt wurde

$$180° + z = a_1' + \alpha' \cos a_1 + \beta' \cos 2a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \ldots + \alpha \sin a_1 + \beta \sin 2a_1 \\ + \gamma \sin 3a_1 + \ldots + 180° - N_1 + \alpha' - \beta' + \gamma' - \ldots$$

daher

$$o = \frac{a_1' - a_1 - 180°}{2} + \alpha' \cos a_1 + \gamma' \cos 3a_1 + \ldots + \alpha \sin a_1 + \gamma \sin 3a_1 + \ldots$$

(Etwaige Theilfehler gehen hier heraus, da bei beiden Einstellungen dieselben Striche nur unter verschiedenen Mikroskopen zur Ablesung kommen.)

So ergiebt nun die Beobachtung eines nördlich und südlich vom Meridiankreis aufgestellten Collimators den Einfluss der Schwere in horizontaler Lage des Fernrohres, der Ueberschuss der Einstellungen über 180° die doppelte Biegung im Horizont. Verbindet man dann das Mittel dieser beiden Einstellungen mit einer Nadirbeobachtung, so ergiebt sich daraus die Biegung im Nadir, und diese beiden Ergebnisse entsprechen dann wieder den Coëfficienten des einfachsten Biegungsausdruckes $\alpha \sin z + \beta \cos z$.

Sind nun, wie hier angenommen, zwei solche Collimatoren vorhanden, der eine im Norden, der andere im Süden des Meridianfernrohres, so gestaltet sich die vollständige Ermittelung der Biegung unter gleichzeitiger Benutzung des Nadirs in folgender Weise, wobei die Darstellung FÖRSTER's benutzt wird:

Seien F', F'' die Ablesungen des Kreises bei der Einstellung des Fernrohres auf den Nadirpunkt, N' und N'' die bei Einstellung auf den horizontalen Collimator im Norden, S' und S'' die auf den Collimator im Süden, und zwar in der Lage Kreis Ost und Kreis West. Nennt man dann $C_{\rm I}$, $C_{\rm II}$ die Biegungen der Collimatoren I und II, d. h. die Ueberschüsse der Zenithdistanzen der

Objectivrichtungen ihrer optischen Axen über 90° im Mittel aus zwei um 180° verschiedenen Drehungsphasen um die Zapfenaxe bei genau horizontaler Lage der letzteren. Die Bezifferung des Kreises ist der Art, dass

$$N' = F' - 90^\circ \qquad N'' = F'' + 90^\circ$$
$$S' = F' + 90^\circ \qquad S'' = F'' - 90^\circ.$$

Wenn nun F_0, N_0, S_0 die unbekannten wahren von Biegung und zufälligen Fehlern befreiten Werthe der Ablesungen für Nadir, Nord- und Südpunkt sind, und mit v_f, v_n, v_s der Reihe nach die unbekannten Verbesserungen für zufällige Fehler bezeichnet werden, so hat man z. B. bei Kreis Ost und wenn Collimator I im Norden liegt:

$$F' + v_f' = F_0' - \alpha \sin F' - \beta \cos F'$$
$$N' + v_n' = N_0' - \alpha \sin N' - \beta \cos N' - C_{\mathrm{I}}$$
$$S' + v_s' = S_0' - \alpha \sin S' - \beta \cos S' + C_{\mathrm{II}}.$$

Zwischen F_0', N_0' und S_0' bestehen nun die strengen Gleichungen

$$N_0' = F_0' - 90^\circ \text{ und } S_0' = F_0' + 90^\circ,$$

vorausgesetzt, dass die bezüglichen Einstellungsgruppen auf Nadir, Nord- und Südpunkt in einer geschlossenen Reihe der Art ausgeführt sind, dass bei möglichst kleinen und symmetrisch angeordneten Zwischenzeiten die Mittelwerthe jeder der drei Einstellungsgruppen nahe auf dieselbe Epoche fallen. Wenn man dann in den mit den sehr kleinen Biegungscoëfficienten α, β multiplicirten Sinus und Cosinus dieselbe Beziehung unter Vernachlässigung der Quadrate und Produkte von α und β einführt und für F_0' setzt $(F_0') + \Delta_{,}$, wo (F_0') ein genäherter Zahlenwerth und $\Delta_{,}$ die unbekannte Verbesserung desselben bedeutet, und wenn man noch die bekannten Glieder der so entstehenden Gleichungen, nämlich

$$(F_0') - F' \text{ mit } l_f'$$
$$(F_0') - 90^\circ - N' \text{ mit } l_n'$$
$$(F_0') + 90^\circ - S' \text{ mit } l_s'$$

bezeichnet, so hat man schliesslich

$$l_f' - v_f' = -\Delta_{,} + \alpha \sin F' + \beta \cos F' \qquad \text{Gleichung } f'$$
$$l_n' - v_n' = -\Delta_{,} - \alpha \cos F' + \beta \sin F' + C_{\mathrm{I}} \qquad \text{Gleichung } n'$$
$$l_s' - v_s' = -\Delta_{,} + \alpha \cos F' - \beta \sin F' - C_{\mathrm{II}} \qquad \text{Gleichung } s'$$

Hier hat man nun ausser den Beobachtungsfehlern v die 5 Unbekannten $\Delta_{,}$, α, β, C_{I}, C_{II}. Jede neue Gruppe von drei solchen Einstellungen, die in geschlossener Reihe durchgeführt sein müssen, liefert eine neue Unbekannte Δ, Δ', Δ'' . . . . während die übrigen Unbekannten dieselben bleiben. Um diese nun von einander und von den Gruppencorrectionen Δ zu trennen, legt man Instrument und Collimatoren um und stellt das Fernrohr auf die direkt auf einander gerichteten, nicht nivellirten Collimatoren ein, wobei die Biegungen der letzteren ohne Einfluss sind. Bezeichnet (N') die Ablesung bei Einstellung auf den nicht genau horizontalen Nord-Collimator und (S') die auf den mit diesem gleich gerichteten Süd-Collimator, und wie dieses wird die unbekannte Verbesserung der Differenz beider für zufällige Fehlerquellen v_d' genannt, so folgt bei Kreis Ost

$$(S') - (N') + v_d' = 180^\circ - \alpha 2 \cos F' + \beta 2 \sin F',$$

oder wenn $180^\circ - [(S') - (N')]$ mit l_d' bezeichnet wird

$$l_d' - v_d' = + \alpha 2 \cos F' - \beta 2 \sin F' \qquad \text{Gleichung } d'.$$

Wenn nun die Collimatoren umgesetzt werden, so tritt nur die Modifikation in den Gleichungen f', n', s', d', die eine vollständige Gruppe in einer Kreislage bilden, ein, dass die Grössen C_{I} und C_{II} mit einander vertauscht werden,

sodass anstatt $+ C_{\mathrm{I}}$ nun $+ C_{\mathrm{II}}$ und anstatt $- C_{\mathrm{II}}$ nun $- C_{\mathrm{I}}$ zu setzen ist. Man sieht auch leicht, wie sich die entsprechenden Gleichungen f'', n'', s'', d'' in der anderen Kreislage (West) gestalten müssen. Eine kleine Vereinfachung wird hier noch dadurch erreicht, dass man die Ablesungen in der zweiten Lage F'' so nahe gleich F' macht, dass der Unterschied in den Coëfficienten zu vernachlässigen ist. Man hat dann

$$\cos N'' = -\sin F' \qquad \sin N'' = \cos F'$$
$$\cos S'' = \sin F' \qquad \sin S'' = -\cos F'$$

und daher die Gleichungen

$$l_f'' - v_f'' = -\Delta + \alpha \sin F' + \beta \cos F' \qquad \text{Gleichung } f''$$
$$l_n'' - v_n'' = -\Delta + \alpha \cos F' - \beta \sin F' - C_{\mathrm{I}} \qquad \text{Gleichung } n''$$
$$l_s'' - v_s'' = -\Delta - \alpha \cos F' + \beta \sin F' + C_{\mathrm{II}} \qquad \text{Gleichung } s''$$
$$l_d'' - v_d'' = +\alpha 2 \cos F' - \beta 2 \sin F' \qquad \text{Gleichung } d''$$

wo $(F_0'') - F''$ mit $l''f$, $(F_0'') + 90° - N''$ mit l_n'', $(F_0'') - 90° - S''$ mit l_s'' und $(N'') - (S'')$ mit l_d'' bezeichnet wird, und wo wieder bei der Umsetzung der Collimatoren die entsprechende Vertauschung von C_{I} und C_{II} wie oben stattfindet.

Aus allen diesen Gleichungen kann man nun unter der Annahme, dass die v in den Mittelwerthen aus zahlreichen Gruppen und mit stark verkleinertem Einfluss auftreten, leicht Näherungswerthe der α, β, C_{I}, C_{II} finden. Dazu mögen zunächst die verschiedenen Gewichte der v ausser Betracht bleiben und es soll dann noch der Uebersichtlichkeit wegen bezeichnet werden

$$\tfrac{1}{2}(l_n' - l_s') \text{ mit } \delta_1' \text{ oder } \delta_2' \qquad \tfrac{1}{2}(l_n' + l_s') \text{ mit } \lambda_1' \text{ oder } \lambda_2',$$

je nachdem bei Kreis Ost Collimator I im Norden, II im Süden, oder Collimator II im Norden, I im Süden liegen, und ebenso bei Kreis West unter Anwendung entsprechender Indices, und endlich

$$\tfrac{1}{2}(C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}}) \text{ mit } S \text{ und } \tfrac{1}{2}(C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{II}}) \text{ mit } U.$$

Es ergaben sich dann die folgenden Gleichungen

$$l_f' - \lambda_1' = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' - U \qquad \text{Ebenso } l_f'' - \lambda_1'' = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' + U$$
$$l_f' - \lambda_2' = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' + U \qquad l_f'' - \lambda_2'' = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' - U$$
$$\delta_1' = -\alpha \cos F' + \beta \sin F' + S \qquad \delta_1'' = +\alpha \cos F' - \beta \sin F' - S$$
$$\delta_2' = -\alpha \cos F' + \beta \sin F' + S \qquad \delta_2'' = +\alpha \cos F' - \beta \sin F' - S$$
$$\tfrac{1}{2} l_d' = +\alpha \cos F' - \beta \sin F' \qquad \tfrac{1}{2} l_d'' = +\alpha \cos F' - \beta \sin F'$$

Die sämmtlichen irgend ein δ enthaltenden Gleichungen sind der Form nach identisch und können daher zusammengefasst werden als

$$D = -\alpha \cos F' + \beta \sin F' + S$$

ebenso die λ_1' und λ_2'' enthaltenden Gleichungen als

$$M_1 = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' - U$$

die λ_2' und λ_1'' enthaltenden als

$$M_2 = +\alpha \sin F' + \beta \cos F' + U$$

und die l_d' und l_d'' enthaltenden als

$$E = +\alpha \cos F' - \beta \sin F'.$$

Aus diesen vier unabhängigen und verschiedenen Gruppen ergeben sich dann leicht für die vier Unbekannten die Ausdrücke

$$U = \frac{M_2 - M_1}{2} \qquad S = D + E$$

$$\alpha = \left(\frac{M_1 + M_2}{2}\right) \sin F' + E \cos F'$$

$$\beta = \left(\frac{M_1 + M_2}{2}\right) \cos F' - E \sin F'.$$

Endlich findet sich

$$C_{II} = \frac{S - U}{2} \qquad C_I = \frac{S + U}{2}.$$

So hat sich für den Berliner PISTOR'schen Kreis in erster Näherung ergeben

$$\alpha = +0''\!\cdot\!62 \quad \beta = +0''\!\cdot\!56 \quad C_I = +0''\!\cdot\!02 \quad C_{II} = -0''\!\cdot\!06.$$

Die zweite Näherung ist streng nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Berücksichtigung der Gruppencorrectionen Δ und der verschiedenen Genauigkeitsmaasse der einzelnen Einstellungsmittelwerthe ausgeführt, indem die sehr kleinen Verbesserungen der ersten Ergebnisse als Unbekannte eingesetzt wurden. Es fand sich dann:

$$\alpha = +0''\!\cdot\!64 \quad \beta = +0''\!\cdot\!60 \quad C_I = -0''\!\cdot\!07 \quad C_{II} = -0''\!\cdot\!03$$

C_I und C_{II} also so klein, dass diese Grössen nicht sicher bestimmbar waren. (Vergl. »Astr. Nachr.« No. 2787 den betr. Artikel von O. JESSE).

Gegen die Verwendung von Collimatoren sind nun vielfache Bedenken erhoben, die sich z. Thl. durch die Vervollkommnung der Apparate im Lauf der Zeit haben heben lassen, oder gehoben werden können, die aber z. Thl. noch bestehen. Zu ersteren gehört die Gefahr, dass die Collimatoren selbst eine starke Biegung erleiden, dass sie in der Regel zu geringe Oeffnungen haben, wodurch die Fadenbilder nicht scharf genug erscheinen, und in den Einstellungen der Collimatoren auf einander und in der des Hauptfernrohres auf den Collimator eine Quelle starker persönlicher Fehler auftritt, deren Nichtberücksichtigung das Biegungsresultat fälschen kann, dass durch ungleiche Erwärmung im Saal und am Pfeiler des Collimators leicht im Innern des letzteren Luftschichten von ungleicher Dichtigkeit entstehen, die nachtheilige Refractionen bewirken, u. dergl. m. Zu den anderen gehört der allen durch Hilfsapparate bewirkten Bestimmungen anhaftende missliche Umstand, dass zur Ermittlung dieses wichtigen Reductionselementes Beobachtungen benutzt werden, die von den eigentlichen Sternbeobachtungen ganz verschieden sind, dass es aber, wie schon verschiedentlich hervorgehoben, vor allem gerathen ist, soviel als möglich die Reductionselemente aus dem eigentlichen Beobachtungsmaterial herzuleiten. Sodann ist aber mit Collimatoren die Biegung nur im Horizont und (mit Zuhilfenahme der Nadirbestimmungen) im Nadir zu bestimmen. Es sind zwar verschiedentlich Vorschläge gemacht, um durch Anbringung von Spiegeln die Bestimmung auch in verschiedenen Zenithdistanzen vorzunehmen, dieselben haben sich aber nicht bewährt.

Da nun aber andererseits nicht zu leugnen ist, dass die zwei Methoden, die allein die Bestimmung der Biegung resp. ihre Elimination aus den Beobachtungen selbst ermöglichen, die Verbindung der reflektirten und direkten Beobachtungen oder die in beiden Objectivlagen und jeweils in beiden Kreislagen — ein sehr grosses Beobachtungsmaterial fordern, indem man für jeden Stern etwa 16 Beobachtungsabende (4 für jede Lage) gebraucht, so ist man doch verschiedentlich auf neue Methoden bedacht gewesen, die zwar auch zu besonderen Hilfsapparaten greifen, aber doch die sonstigen Mängel der Collimatormethode beseitigen

sollen. Insbesondere sind hier MARTH, LÖWY, BAUSCHINGER, SCHAEBERLE zu nennen.

Kommt es darauf an, den Einfluss der Schwere auf die Richtung der optischen Axe oder auf eine Linie zu ermitteln, die von einem dem Objectivmittelpunkt nahen Punkte nach einem festen Punkte des Fadennetzes im Ocular gezogen werden kann, und zwar in allen Lagen des Fernrohres, so kann man in der Mitte des Objectivs eine Marke anbringen, deren Bild zugleich mit einem Spiegelbild des Fadennetzes auf die Ebene des letzteren projicirt wird. Findet eine ungleiche Biegung der beiden Fernrohrhälften statt, wodurch die astronomische Biegung des Fernrohres hervorgerufen wird, so werden jene Bilder ihre Abstände in verschiedenen Lagen des Fernrohres d. h. bei der Drehung des Fernrohres um seine Rotationsaxe ändern, und diese Veränderung ist dann mit einem beweglichen Faden am Ocular auszumessen. Diesen Grundgedanken hat zuerst MARTH ausgesprochen und in folgender Weise zu verwirklichen gesucht.

Der Cubus des Fernrohres ist ja in der Regel durchbohrt, um durch die verschliessbaren Oeffnungen hindurch die Collimatoren aufeinander richten zu können, ohne dass es nöthig ist, das Fernrohr aus seinen Lagern herauszuheben. Im Centrum dieses Würfels wird nun der Hilfsapparat angebracht, welcher die obigen Forderungen erfüllen soll. Der Apparat enthält in einer kurzen Röhre zwei mit den äusseren Oberflächen auf einander gerichtete kleine Objective von nahe der halben Brennweite des Fernrohres, und zwischen beiden einen beiderseits versilberten Spiegel, der in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung hat. Ist nun der Apparat gehörig befestigt und sind die Stellungen der Hilfsobjective so berichtigt, dass ihre Brennpunkte mit dem Fadennetz, und resp. der Objectivmarke genau zusammenfallen, so erblickt man bei gehöriger Beleuchtung der letzten beiden im Ocular neben den Mittelfäden sowohl ihr Spiegelbild als auch das Bild der Objectivmarke und kann nun die oben erwähnten Messungen etwaiger Veränderungen in der Lage der Bilder zu einander bei Drehung des Fernrohres vornehmen. Man erhält so die Biegungen der beiden Fernrohrhälften freilich vermischt mit der Biegung im Apparat selbst, welche letztere durch geeignete Construction zum Verschwinden gebracht werden muss. Um aber die etwaigen Fehler des Apparates zu eliminiren, würde die Beobachtung in verschiedenen Lagen des Apparates zu wiederholen sein, und zwar der Art, dass er einmal in Bezug auf die Axe des Instrumentes gedreht wird, und dann in Bezug auf die Axe des Fernrohres, sodass im letzteren Falle das Hilfsobjectiv, dessen Brennpunkt vorher mit dem Fadennetz zusammenfiel, nun die Objectivmarke im Brennpunkt hat. Hat man nun aber den Einfluss der Biegung des Apparates eliminirt, so ergeben die Veränderungen, die der Ort des Bildes der Objectivmarke in Bezug auf einen festen Punkt des Fadennetzes beim Drehen des Fernrohres erleidet, die Summe der Biegungen der Rohrhälften. Aus den Aenderungen in der Lage des Spiegelbildes des festen Punktes folgt ferner die doppelte Wirkung der Biegung der Ocularhälfte. Beobachtet man also die Aenderungen des Bildes der Marke gegen das Spiegelbild des festen Punktes, so erhält man daraus die Differenz der Biegung der beiden Rohrhälften, worauf es ankommt.

Der Apparat scheint nicht zur Anwendung gekommen zu sein, und es dürfte auch kaum gelingen, ihn in dieser Form so herzustellen, dass nicht Fehler gleicher Ordnung, wie die zu ermittelnde Biegung des Fernrohres eingeführt werden, denn wie zahlreiche Beobachtungen ergeben haben, dürften Veränderungen, die

bei der Umsetzung des Apparates im Cubus des Fernrohres gemacht werden müssen, den Betrag der Biegung selbst schon ganz umgestalten. Löwy hat nun seinem Apparat eine erheblich andere Construction gegeben, die wohl die Mängel des Marth'schen vermindert, aber dies Hauptbedenken bleibt auch hier bestehen, dass ein jedenfalls durchaus nicht einfacher Apparat in das Fernrohr selbst hineingebracht werden muss, und dass kaum anzunehmen ist, dass hierdurch nicht die Biegung gänzlich verändert wird. Hier wird neben den Bildern des Oculars und Objectivs, deren Lage sich durch die Biegungen und durch die Bewegungen des Hilfsapparates verändern kann, ein drittes Bild erzeugt, welches durch die Rotationsaxe fällt und ganz unabhängig von den Rohrbiegungen ist und sich höchstens ganz wenig durch die Versetzung einer Hilfslinse verschieben kann, sodass es thatsächlich als Fixpunkt für die beiden anderen angesehen werden darf. Der Hilfsapparat, der im Cubus angebracht ist, besteht nun aus einem in geeigneter Fassung befestigten Glase, das auf vier Seiten geschliffen ist. Es bildet zunächst eine concav-convexe Linse, deren Durchmesser je nach dem benutzten Fernrohr 4—8 *cm* und deren Dicke 2—3 *cm* betragen kann. Der Krümmungsradius der concaven Oberfläche, die dem Ocular zugewandt ist, ist ungefähr der halben Brennweite des Objectivs gleich. Diese Oberfläche ist abgesehen von zwei kleinen kreisförmigen Stellen versilbert. Das Bild eines Punktes des Fadennetzes, welches von dieser ersten Linsenoberfläche reflectirt wird, fällt also im Ocular neben das reelle Bild. Bei der Drehung des Fernrohres kann man daher auch hier die Biegung des Ocularendes bestimmen, welche aber vermehrt sein wird um die kleine, von der Bewegung des Apparates herrührende Grösse. Für die convexe, dem Objectiv zugewandte Oberfläche ist der Krümmungsradius so berechnet, dass sie mit der ersten concaven Oberfläche eine Linse bildet, deren Brennweite gleich dem vierten Theil der Fernrohrbrennweite ist, sodass von einem Punkt des Objectivs noch ein Bild im Gesichtsfeld des Fernrohres entsteht. Beobachtet man dann im Ocular bei der Drehung des Fernrohres eine Versetzung eines Punktes des Objectivs, so giebt diese wieder die Summe der Biegungen, denen die beiden Fernrohrhälften unterworfen sind, ebenfalls vermehrt um den kleinen Einfluss einer etwaigen Veränderung des Apparates. Die beiden Seiten des Glases sind nun in der Ost-Westrichtung, also in der Richtung der Instrumentenzapfen so geschliffen, dass an der einen Seite die Oberfläche sphärisch convex ist, an der anderen die Oberfläche etwa 45° geneigt ist. Auf diese beiden Flächen fallen Lichtstrahlen, die von einer getheilten Platte ausgehen, welche im durchbohrten Zapfen der Drehungsaxe angebracht ist. Die geneigte Fläche hat nur den Zweck, die Strahlen, nachdem sie die sphärische Fläche passirt haben, durch die eine der beiden nicht versilberten Stellen der concaven Fläche ins Gesichtsfeld zu werfen, und die Krümmung der sphärischen Fläche ist so berechnet, dass sie mit der concaven Fläche eine Linse bildet, durch welche das Bild eines Punktes des Zapfens auf das Netz gelangt. Während der Drehung des Fernrohres wird sich nun dieser Punkt auf dem Fadennetz versetzen und zwar wegen der Biegung des Netzes selbst, wegen der Bewegungen des Apparates und der Biegung der Rotationsaxe. Diese Fehler können an dem Apparat eliminirt oder in Rechnung gebracht werden.

Die ersten Schwierigkeiten schienen in der Herstellung der kleinen Glasscheibe zu liegen, welche zu gleicher Zeit drei Bilder ins Ocular werfen muss, 1) durch Reflexion das Bild des Fadennetzes selbst, 2) das einer Theilung auf dem Objectiv, 3) das eines Theilstriches einer im Zapfen angebrachten Platte.

Die Ausführung des Apparates hat aber thatsächlich keine zu grossen Schwierigkeiten bereitet; er ist für den grossen Meridiankreis Bischofsheim an der Pariser Sternwarte von den Gebrüdern HENRY geliefert und darnach daselbst ausgiebig zur Anwendung gekommen. Aber seither beschränkt sich die Benutzung der Methode allein auf die genannte Sternwarte. Näher darauf einzugehen, würde dieser noch wenig verbreiteten Anwendung kaum entsprechen, um so weniger, als bei aller Anerkennung der Methode im Einzelnen ihr doch immer der nicht zu unterschätzende Nachtheil entgegensteht, der auch der MARTH'schen Idee eigen ist, dass sich die Anbringung des Apparates kaum ohne Veränderung der Biegung wird bewerkstelligen lassen. Die Befestigung und Regulirung desselben ist jedenfalls eine sehr umständliche, sie kann nur geschehen, wenn andere Beobachtungen (der Sterne) unterbleiben. Ausserdem liefert sie allerdings die Biegung des Fernrohres, aber nicht — worauf es doch in letzter Linie ankommt — die des Fernrohres vereint mit der des Kreises. Im Uebrigen mag auf die sehr eingehenden Abhandlungen von LÖWY und PÉRIGAUD im 16. Bd. der »Annalen der Pariser Sternwarte«, sowie auf die abgekürzten bezüglichen Mittheilungen in den »Comptes Rendus« hingewiesen werden. In ersteren finden sich auch erläuternde Abbildungen, und es verdient — was hier noch hervorgehoben werden soll — der Apparat auch darum Beachtung, weil er mit geringer Modifikation der Messungsart ebenfalls etwaige Unregelmässigkeiten in der Form der Zapfen zu ermitteln gestattet. Ferner kann er, wie leicht einzusehen, zur Ermittlung der Biegung im Sinne der Azimuthe oder Rectascensionen gebraucht werden.

BAUSCHINGER verfolgt einen anderen Gedanken, wonach er freilich auch nur die Biegung der Rohrhälften ermittelt, diese aber nach den ersten noch unvollkommenen Versuchen mit grosser Schärfe. Durch ein auf dem Cubus des Meridiankreises befestigtes kleines Fernrohr wird eine oberhalb desselben befindliche Scala in einem am Ende des Rohres (Objectiv oder Ocular) angebrachten Spiegel beobachtet. Dieser Spiegel ist mit einer kleinen Rolle und durch dieselbe mit einem Trägerarm in Verbindung; gegen die Rolle federt eine am Fernrohr befestigte Lamelle der Art, dass die Rolle durch Reibung bewegt wird. Wird nun einmal die Scala bei vertikalem Stand des Fernrohres abgelesen, dann das Fernrohr horizontal gestellt, so wird, wenn sich z. B. das Objectivende dabei senkt, die daran befestigte Lamelle die Rolle und zugleich den Spiegel drehen, sodass die Ablesung der Scala eine andere wird. Man kann nun das Fernrohr auf beliebige Zenithdistanz einstellen und dabei jeweils durch Ablesung der Scala die Grösse der Biegung der betreffenden Rohrhälfte ermitteln. Nennt man r den Radius der Rolle, k die Entfernung des Spiegels von der Scala, λ den Betrag der Biegung in Linearmaass, $l_0 - l$ die Differenz der Scalenablesungen, so wird der Winkel α, um den sich der Spiegel dreht $\alpha = \frac{\lambda}{r}$; ebenso kann man aber auch, da α natürlich sehr klein ist, $\alpha = \frac{1}{2}\frac{l_0 - l}{k}$ setzen, woraus dann

$$\lambda = \frac{r}{2k}(l_0 - l)$$

folgt. Es wird also die wirkliche Biegung an der Scala um $\frac{2k}{r}$ vergrössert abgelesen; k wird aber durch die Länge des Rohres bestimmt. Nimmt man z. B. mit BAUSCHINGER den Radius der kleinen Rolle $r = 2{\cdot}5$ *mm*, die Entfernung von der Mitte des Cubus bis zum Objectiv 1000 *mm*, so folgt, dass man die Biegung 800 fach vergrössert erhält. Nimmt man für die Scala die Millimetertheilung und

schätzt noch die Zehntel Intervalle, so bestimmt sich die Durchbiegung bis auf $\frac{0 \cdot 10}{800} = 0 \cdot 000125$ *mm*, was im vorliegenden Falle etwa 0·″02 entspricht.

Man erhält nun nach dieser Methode die Biegung jeder Rohrhälfte für sich, denn die Spiegeleinrichtung ist an beiden Enden des Rohres anzubringen, und aus der Differenz beider Bestimmungen folgt dann die astronomische Biegung. Es bleibt aber dabei zu untersuchen, ob nicht, wie zweifellos in anderen Fällen, so auch hier die Anbringung des Apparates am Meridianfernrohr Fehlerquellen im Gefolge hat, die die Anwendung der Methode zur Ermittlung so kleiner Grössen doch illusorisch macht. Die in Betracht kommenden Fehlerquellen sind, wie BAUSCHINGER hervorhebt, eine etwaige Durchbiegung des Rollenträgers durch sein eigenes Gewicht, ferner dass die Durchbiegung desjenigen Punktes des Rohres, an dem die Lamelle befestigt ist, nicht wirklich mit der des Objectivmittelpunktes einerseits, oder des Horizontalfadens der Ocularrohrhälfte andererseits zusammenfällt. Die erstere lässt sich durch eine besondere Form des Rollenträgers beseitigen, ausserdem durch Anhängung von Gewichten in horizontaler Lage und Beobachtung der Biegung mit und ohne Gewichte controliren; die letztere wird beseitigt, wenn die Lamelle an einem Punkte der Objectivfassung bezw. der äusseren Seite des Ocularrohres in der Höhe der Fadenplatte angebracht wird, vorausgesetzt natürlich, dass die einzelnen Theile des Rohres, Objectiv und Ocularfadenplatte selbst vollkommen fest sind. Selbstverständlich müssen die einzelnen zur Messung dienenden Theile, Spiegel, Scala, Hilfsfernrohr keine eigenen Biegungen erleiden, es muss die Reibung an der Rolle so gross sein, dass die Rolle den geringsten Bewegungen der Lamelle folgt, das sind aber Bedingungen, die sich durch geeignete Anfertigung ohne zu grosse Schwierigkeit erfüllen lassen.

Die sinnreiche Methode ist ausser bei den BAUSCHINGER'schen Versuchen an einem alten Instrument in provisorischer Ausführung der Apparate noch nicht zur Anwendung gekommen. Will man aber von den Bedenken absehen, welche jeder Methode anhaften, die zu Hilfsapparaten übergeht und nicht die Beobachtungen der Sterne so arrangirt, dass entweder aus ihnen selbst die Biegung eliminirt oder ermittelt werden kann, so dürfte diese nach den von BAUSCHINGER erzielten Resultaten am meisten für sich haben. Der mittlere Fehler, der auf 11 Beobachtungsreihen, deren jede ½ Stunde in Anspruch nahm, beruhenden Biegungsbestimmungen beträgt im Durchschnitt nur 0·″03. Man kann ja auch, was eben von grosser Bedeutung ist, die Biegung in dieser Weise in jeder beliebigen Zenithdistanz bestimmen, und so das Gesetz derselben erkennen. Man kann sogar, wenn es darauf ankommt, für jeden Stern sofort die ihm zukommende Biegung ermitteln, indem man gleichzeitig eine Scalenablesung macht und darauf in die Normallage des Fernrohres zurückgeht und dabei die Ablesung wiederholt. Eine derartige, dann nur auf einmaliger Einstellung beruhende Bestimmung wird aber natürlich eine wesentlich grössere Beobachtungsunsicherheit in sich schliessen.

SCHAEBERLE hat vorgeschlagen, einen auf beiden Seiten versilberten und um eine Horizontalaxe drehbaren Spiegel auf einem auf Quecksilber ruhenden Schwimmer zu verwenden, welcher Apparat dann vor dem Objectiv angebracht wird, so dass man das direkte und reflektirte Bild der Fäden erblickt. Bei der Coincidenz derselben wird der Kreis abgelesen und dann diese Einstellung auf der entgegengesetzten Seite des um 180° gedrehten Fernrohres ohne Veränderung der Lage des Spiegels auf dem Schwimmer wiederholt. Es sind nach diesem Verfahren nur vorläufige Beobachtungen von SCHAEBERLE am Meridiankreis in

Ann Arbor gemacht. Ob sich Apparat und Methode so ausgestalten lassen, dass sie zu günstigen Resultaten führen, ist abzuwarten.

Bei allen diesen Methoden nimmt man im Allgemeinen an, dass die Biegung sich in der einfachen Form $a \sin z + b \cos z$ darstellen lässt, was bei den modernen Instrumenten auch der Hauptsache nach gewiss gestattet ist. Bei älteren und sonst besonders construirten Instrumenten haben sich aber auch andere Glieder erkennen lassen, so hat SCHWARZ für die REICHENBACH'schen Kreise, speciell den Dorpater, bei welchen die Biegung durch eine Hebelvorrichtung aufgehoben werden soll, indem ein Hebel am Ocularende, einer am Objectivende angebracht, die entsprechenden Rohrhälften in jeder Lage des Instrumentes gerade soviel heben sollen, als sich dieselben ohne sie gesenkt haben würden, ein vom Sinus der doppelten Zenithdistanz abhängiges Glied theils direkt, theils durch Benutzung besonderer Apparate nachgewiesen.

GRUEY hat endlich auch einen Apparat zur Ermittlung der Biegung des Kreises allein angegeben, der aber ebenfalls noch keine weitere Anwendung gefunden hat und der insofern nicht der Aufgabe, die Biegung zu bestimmen, entspricht, als es vielmehr auf die Gesammtbiegung ankommt, als auf die der einzelnen Theile des Instrumentes.

Wie aus dem Vorstehenden ersichtlich, hat es nicht an Versuchen gefehlt, den Einfluss der Biegung, sei es durch ihre Bestimmung an besonders construirten Apparaten, sei es durch die Anordnung der Beobachtungen unschädlich zu machen. Die Literatur über diesen Gegenstand ist eine sehr reiche, und es konnte natürlich nur auf die bemerkenswerthesten Arbeiten eingegangen werden. Vielfache Hinweise auf die Schriften früherer Zeit finden sich übrigens in der Abhandlung von H. G. v. d. S. BAKHUYZEN »Over den invloed der buiging etc«. Leiden 1860. Die neuere Zeit liefert nun zum Glück Instrumente, bei denen die Biegung sehr gering ist. So haben z. B. die Bestimmungen am REPSOLD'schen Meridiankreis in München mit Hilfe eines Collimators und einer Mire (es wurde dabei der bewegliche Faden des genau horizontal nivellirten Collimators im Norden auf die Südmire eingestellt, sodass damit Collimator- und Mirenaxe den Winkel von genau 180° mit einander bildeten, und dann das Fernrohr abwechselnd auf den Collimator und die Mire pointirt und dabei der Kreis abgelesen) die Biegung im Horizont im Mittel aus 9 Reihen zu $0''\cdot02$ ergeben, wobei der mittlere Fehler einer Reihe $\pm 0''\cdot15$ ist, d. h. also, dass hier die Biegung als ganz verschwindend angesehen werden kann. Sehr ausführliche Untersuchungen nach der Methode der direkten und reflektirten Beobachtungen sind an der Leidener Sternwarte mit dem dortigen MARTINS'schen Meridiankreise ausgeführt. Dieses Instrument hat zwei fein getheilte Kreise (A und B), einen an jedem Axenende. Hier fanden sich, wenn mit α der Sinuscoëfficient, mit β der Cosinuscoëfficient bezeichnet wird, für Kreis A:

	α	β
aus 442 Durchgängen v. Circumpolarsternen	$= +0''\cdot05 \pm 0''\cdot02$	$= -0''\cdot11 \pm 0''\cdot01$
„ 183 Culminationen von α Urs. min.	$= +0''\cdot11 \pm 0''\cdot02$	$-0''\cdot19 \pm 0''\cdot02$
„ 34 „ „ δ Urs. min.	$= +0''\cdot12 \pm 0''\cdot05$	$-0''\cdot23 \pm 0''\cdot04$

für Kreis B

	α	β
aus 1458 Durchgängen von Sternen verschiedenster Deklination	$= +0''\cdot23 \pm 0''\cdot02$	$= +0''\cdot12 \pm 0''\cdot01$
„ 441 Culmination. v. Circumpolarsternen	$= +0''\cdot41 \pm 0''\cdot02$	$+0''\cdot07 \pm 0''\cdot01$
„ 252 Culminationen von α Urs. min.	$= +0''\cdot31 \pm 0''\cdot02$	$+0''\cdot08 \pm 0''\cdot01$
„ 34 „ „ δ Urs. min.	$= +0''\cdot35 \pm 0''\cdot05$	$+0''\cdot02 \pm 0''\cdot04$

welche Werthe nach Maassgabe der wahrscheinlichen Fehler zu Mitteln vereinigt für

Kreis A $\alpha = +\,0''\cdot09 \pm 0''\cdot02$ $\beta = -\,0''\cdot14 \pm 0''\cdot01$
„ B $\alpha = +\,0''\cdot30 \pm 0''\cdot01$ $\beta = +\,0\cdot09 \pm 0''\cdot01$

ergeben, sodass auch hier die Biegung, wenn auch bei genauen Beobachtungen wohl zu berücksichtigen, in engen Grenzen geblieben ist.

Es ist nun aber vielfach die Bemerkung gemacht worden, dass die Biegungsbestimmungen zu anderen Resultaten führen, je nachdem man die Collimatoren anwendet oder die Combination der direkten und reflektirten Beobachtungen. Längere Zeit sind dadurch die Collimatoren für diese Untersuchungen in den Augen praktischer und sorgfältiger Beobachter in Misskredit gekommen, wogegen andere die reflektirten Beobachtungen für die Abweichungen verantwortlich machen wollten. Die in neuester Zeit bei der Anlage der Sternwarten (s. den Art. Sternwarten) in Obacht genommenen Maassregeln zu möglichster Temperaturausgleichung im Saal, um event. unregelmässige Refractionen zu verhüten, sowie andererseits die Verbesserung der Collimatoren, die insbesondere bei grösseren Dimensionen auch die Anwendung stärkerer Vergrösserungen und schärferer Einstellung gestatten, ferner die strenge Berücksichtigung der störenden persönlichen Fehler, sowie Vermeidung schädlicher Einflüsse auf die Veränderung der Biegung, dürften solche seither noch nicht genügend aufgeklärten Anomalieen wenigstens zum grössten Theil zum Verschwinden bringen.

Was speciell solche Ursachen der Veränderlichkeit betrifft, so können hier auf Erfahrungen hingewiesen werden, die man z. B. an der Leidener Sternwarte gemacht hat und die in den eingehenden Untersuchungen BAUSCHINGER's in München wesentlich bestätigt und noch ergänzt worden sind. Letzterer erwähnt, dass sich das Rohr bei der geringsten Temperaturverschiedenheit der beiden Seiten nach der kälteren Seite zu krümmt und diese Lage längere Zeit beibehält. »Wenn man nur die Hand ohne Berührung unter das horizontal gestellte Rohr hielt, bog sich dasselbe $0''\cdot3$ auf und kehrte erst drei Minuten nach Entfernung der Hand in die ursprüngliche Lage zurück, eine kleine geschlossene Beobachtungslampe in ein Meter Entfernung nur drei Secunden lang unter das Rohr gehalten, änderte die Biegung dieser Rohrhälfte $1''\cdot2$ und erst nach $5\frac{1}{2}$ Minuten trat der frühere Zustand wieder ein. Auch die gewöhnliche Stellung des Beobachters unter dem Fernrohr änderte schon nach 10 Minuten die Biegung der Ocularhälfte merkbar.« Da nun solche Vorkommnisse beim Beobachten nicht zu vermeiden sind, so werden in allerneuester Zeit die REPSOLD'schen Kreise mit besonderen Schirmen und Umhüllungen gegen die strahlende Wärme geschützt. Als eine andere die Biegung beeinflussende Ursache wird von BAUSCHINGER die elastische Nachwirkung erwähnt, sodass erst einige Minuten nach der Einstellung in eine beliebige Zenithdistanz das Rohr eine constant bleibende Lage annahm.

Wo so geringe Ursachen die Biegung des Instrumentes beeinflussen, ist es selbstredend, dass man jede Veränderung am Instrument selbst, insbesondere die zeitweise Anbringung der Hilfsapparate, sei es, dass sie zur Untersuchung der Biegung selbst oder zu anderen Zwecken dienen, mit Misstrauen ansehen und, wenn irgend möglich, vermeiden wird. VALENTINER.

Chronologie. Die Chronologie ist die Lehre von den Geschehnissen, welche eine Eintheilung der Zeit ermöglichen, und von den Formen, welche die Zeitmaasse nach und nach angenommen haben. Sie zerfällt in zwei Haupttheile, nämlich erstens die mathematische oder richtiger astronomische Chronologie, welche diejenigen Lehren der Astronomie umfasst, die uns die regelmässig oder unregelmässig wiederkehrenden Erscheinungen am Himmel erkennen und begreifen lassen, welche die Grundlagen für Zeiteintheilungen geben, und zweitens in die technische, oder manchmal wohl auch historische Chronologie genannt, welche die Formen, denen die Zeitrechnung bei den verschiedenen Völkern sich allmählich angepasst hat, darlegt. Bei der hier gebotenen Raumbeschränkung muss sich der Verfasser damit begnügen, einen allgemeinen Ueberblick über die beiden getrennten Disciplinen zu geben und nur die wichtigsten Punkte etwas eingehender darzulegen, jedoch ist überall für den Leser, der tiefer in diese Materie eindringen will, ein ausführlicher Hinweis beigefügt, auf welche Weise er die dabei nothwendig werdenden einfachen Rechnungen erledigen kann.

Mathematische oder astronomische Chronologie.

Das natürlichste Maass zur Eintheilung der Zeit bietet dem Menschen die Umdrehung der Erde um ihre Axe, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit von Westen nach Osten vollzieht und einerseits den regelmässigen Wechsel von Tag und Nacht bedingt, andrerseits eine scheinbare Bewegung der Gestirne — die sogen. erste, tägliche oder gemeinschaftliche — hervorruft, die mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung wie die Rotation der Erde vor sich zu gehen scheint. Dadurch macht es für einen Beobachter auf der Erde den Eindruck, als ob sich alle Gestirne im Osten über den Horizont, d. h. jenen Kreis, in welchem sich Himmel und Erde zu berühren scheinen, erhöben und am Himmel emporstiegen, bis sie im Meridian ihre grösste Höhe bei ihrer sogen. Culmination erreichten, um dann allmählich nach Westen und unter den Westhorizont herunter zu sinken. Die Zeit, welche verstreicht zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen desselben Sternes, ist dieselbe, die die Erde zu einer vollen Umdrehung braucht, und man nennt diese einen Sterntag, wobei also die Bezeichnung »Tag« in einem weiteren Sinne und nicht nur für den hellen, lichtvollen Zeitabschnitt, also auch nicht im Gegensatz zur Nacht gebraucht ist. Man theilt den Sterntag in 24 Stunden Sternzeit, und beginnt die Zählung derselben, wenn derjenige Punkt am Himmel durch den Meridian des Beobachtungsortes geht, in welchem die von der Sonne am Himmel scheinbar durchlaufene Bahn — die Ekliptik — den Himmelsäquator (d. h. den Kreis, in dem das scheinbare Himmelsgewölbe von der erweitert gedachten Ebene des Erdäquators getroffen wird) schneidet. Man nennt diesen Punkt den Frühlingspunkt, weil man auf der nördlichen Erdhälfte vom Eintritt der Sonne in denselben ab den Frühling rechnet. Der Sterntag ist das gleichmässigste Zeitmaass, aber da derselbe mit dem Lauf der Sonne nicht übereinstimmt, so rechnen nur die Astronomen danach, im bürgerlichen Leben regulirt man die Zeit nach der Sonne, indem man die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen der Sonne einen wahren Sonnentag nennt, den man in 24 Stunden wahre Zeit eintheilt, die man mit dem Durchgang der Sonne durch den Meridian des Ortes zu zählen beginnt. Da nun die Sonne am Himmel täglich um ein kleines Stück von Westen nach Osten, also entgegensetzt der täglichen Bewegung der

Fixsterne, fortrückt, so geht die Sonne heute später durch den Meridian eines Ortes als ein Stern, mit dem sie gestern gleichzeitig diesen Meridian passirte, d. h. der Sterntag ist etwas kürzer als der wahre Sonnentag, und zwar wechselt das »wieviel« von Tag zu Tag, weil die Sonne nicht gleichmässig schnell am Himmel weiterzieht, sodass der wahre Sonnentag keine constante Länge besitzt. Deshalb wurde er auch mit der wachsenden Kultur für das bürgerliche Leben unbrauchbar, und man hat zu dem Auskunftsmittel gegriffen, eine fingirte Sonne für die Zeiteintheilung zu wählen, welche genau die gleiche Bahn in der gleichen Zeit am ganzen Himmel durchläuft wie die wahre Sonne, aber mit gleichmässiger Geschwindigkeit. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen der fingirten Sonne nennt man einen mittleren Sonnentag und theilt ihn in 24 Stunden mittlere Zeit ein. Die Zählung dieser beginnen die Astronomen mit der Culmination der fingirten Sonne, also mit dem Mittag, und zählen die Stunden von 0 bis 24 Stunden durch. Im bürgerlichen Leben zählt man statt dessen zweimal 12 Stunden und beginnt den Tag um Mitternacht. Dieser bürgerliche Tag ist dem astronomischen mittleren Tage um 12 Stunden oder einen halben Tag voraus, also von Mitternacht bis Mittag ist das astronomisch gezählte Datum dem bürgerlichen um einen Tag nach, von Mittag bis Mitternacht stimmen beide überein. Der Unterschied zwischen der Dauer eines mittleren und des entsprechenden wahren Sonnentages nennt man die Zeitgleichung, die sich beständig ändert und höchstens 17 Minuten betragen kann; der mittlere Tag ist 3 Minuten und 56 Secunden länger als ein Sterntag. Da derselbe von dem Durchgang der mittleren Sonne durch den Meridian eines Ortes in Bezug auf seinen Anfang und die damit verknüpfte Stundenzählung abhängt, so ist sein Anfang und damit die Tageszeit für alle die Orte, welche nicht auf einem und demselben Erdmeridian liegen, verschieden, weshalb man die an einem Orte wirklich herrschende Zeit als Ortszeit bezeichnet. In neuerer Zeit hat man eine einheitliche Zeit für die ganze Erde einzuführen gesucht, indem man die mittlere bürgerliche Zeit von Greenwich als Weltzeit proklamirte. Da das aber zuviel Unbequemlichkeiten mit sich gebracht hätte, so hat man sich begnügt, die Erde in 24 Zonen einzutheilen, die jede für sich eine einheitliche, um eine volle Anzahl von Stunden gegen Greenwich verschiedene Zeit haben. In Deutschland rechnet man so nach der als Mittel-Europäische Zeit bezeichneten Zonenzeit, die um eine volle Stunde gegen Greenwicher Zeit voraus ist. Im Allgemeinen giebt die in Zeit ausgedrückte geographische Länge eines Ortes von Greenwich (oder Paris) an, um wieviel die Ortszeit desselben gegen die Ortszeit von Greenwich (oder Paris) differirt, und zwar ist die Ortszeit der betreffenden Gegend gegen Greenwicher (oder Pariser) Zeit voraus, wenn der Ort östlich von Greenwich (bez. Paris) liegt, nach, wenn er eine westliche Länge hat. —

Die Sonne braucht, um einen vollen Umlauf am Himmel zu vollenden, oder wenn sie vom Frühlingspunkt ausgehend immer gegen Osten auf der Ekliptik vorrückt, bis zu ihrer Rückkehr zum Frühlingspunkte einen Zeitabschnitt, den man als ein tropisches Jahr bezeichnet. Die Länge desselben ist dadurch nicht ganz constant, dass der Frühlingspunkt von Osten nach Westen sehr langsam am Himmel vorrückt, so langsam, dass sich die Länge des tropischen Jahres innerhalb 100 Jahren nur um 0·6 Secunden ändert. Dieselbe beträgt für das Jahr 1800 (nach HANSEN) 365 mittlere Tage und 5 Stunden 48 Minuten 46·4 Secunden mittlere Zeit, während die Erde in dieser Zeit eine volle Umdrehung mehr macht, also das tropische Jahr 366 Sterntage, $5^h\ 48^m\ 46^s{\cdot}4$ Sternzeit um-

fasst. Daraus berechnet sich einfach der oben bereits angegebene Längenunterschied zwischen einem mittleren und einem Sterntag.

Die Ekliptik, welche von der Sonne im Laufe eines Jahres am Himmel durcheilt wird, theilt man von Alters her nicht nur wie jeden vollen Kreisumfang in 360°, sondern auch noch in zwölf Kreisbogen von je 30° Länge, von denen jeder mit dem Namen eines benachbarten Sternbildes des Thierkreises oder Zodiakus bezeichnet wird. Diese himmlischen Zeichen führen die Zahlen Null bis elf und ausserdem je noch ein besonderes Symbol, wie die folgende Tabelle lehrt:

Frühlingszeichen	0	♈	Widder	0°	Herbstzeichen	VI	♎	Wage	180°
	I	♉	Stier	30°		VII	♏	Skorpion	210°
	II	♊	Zwillinge	60°		VIII	♐	Schütze	240°
Sommerzeichen	III	♋	Krebs	90°	Winterzeichen	IX	♑	Steinbock	270°
	IV	♌	Löwe	120°		X	♒	Wassermann	300°
	V	♍	Jungfrau	150°		XI	♓	Fische	330°

Die Länge der Sonne, d. h. der Kreisbogen auf der Ekliptik, den die Sonne seit ihrem Durchgang durch den Frühlingspunkt durchlaufen hat, drückte man vielfach früher durch die Zeichen aus. Will man eine solche Angabe in Grade umrechnen, so hat man nur die Nummer des Zeichens mit 30 zu multipliciren; also z. B. bedeutet die Angabe VII Z 21° eine Länge der Sonne von VII $\times$ 30 $= 210° + 21° = 231°$. Die Namen Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterzeichen erklären sich auf folgende Weise. Sobald die Sonne auf der Ekliptik in das Zeichen des Widders tritt, steht sie damit zugleich im Frühlingspunkt, von welchem Moment ab man für die nördliche Halbkugel der Erde den Frühling rechnet. Dann rückt die Sonne auf der Ekliptik vor, indem sie sich dem nördlichen Himmelspol nähert, bis sie beim Eintritt in das Zeichen des Krebses (90° Länge) für die nördliche Erdhälfte ihren höchsten Stand erreicht hat. Diese Stellung nennt man das Sommersolstiz, und da sich die Sonne von da ab wieder abwärts wendet, den Punkt den Wendepunkt des Krebses oder — weil für unsere Gegenden von da ab der Sommer gerechnet wird — den Sommerpunkt. Mit dem Einrücken in das Zeichen der Wage steht die Sonne im Herbstpunkt, welcher Zeitpunkt für uns den Beginn des Herbstes markirt. Nunmehr sinkt die Sonne unter den Aequator herunter und nähert sich dem Südpol des Himmels. Ihre tiefste Stellung nimmt sie beim Eintritt in das Zeichen des Steinbocks ein, dann beginnt sie wieder emporzusteigen. Man rechnet bei diesem Stande für uns den Beginn des Winters und nennt daher den Ort den Winterpunkt oder den Wendepunkt des Steinbocks; die Stellung der Sonne bezeichnet man als Wintersolstiz. Da auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich lang sind, wenn die Sonne im Frühlings- oder im Herbstpunkt steht, so bezeichnet man diese beiden auch wohl als die Aequinoctial- oder Tag- und Nachtgleichenpunkte. Die vier Punkte Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt begreift man auch wohl gemeinschaftlich unter dem Namen der Jahrespunkte. Durch das oben erwähnte Vorrücken des Frühlingspunktes oder, wie wir jetzt allgemeiner sagen können, der Jahrespunkte werden die Sterne gegen die Ekliptik verschoben, und so ist es erklärlich, dass die Sternbilder, welche vor 2000 Jahren für die himmlischen Zeichen ihre Namen herleihen mussten, jetzt um ein ganzes Zeichen nach Osten gerückt sind, sodass gegenwärtig das Sternbild des Widders im Zeichen des Stiers, das des Stieres in dem der Zwillinge u. s. w. steht. Das Eintreten der Sonne in eines der

zwölf himmlischen Zeichen wird nun im Alterthume vielfach zur Fixirung eines bestimmten Zeitmomentes benutzt. Um nun leicht und bequem berechnen zu können, an welchem Tage und zu welcher Stunde und Minute die Sonne in einem bestimmten, vielleicht weit zurückliegenden Jahre in eines der Zeichen eintrat, hat Dr. ROBERT SCHRAM eine sogen. Zodiakaltafel berechnet, die einen Theil der von ihm im XLV. Bande der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien 1882, pag. 289 ff. publicirten »Hilfstafeln für Chronologie« bilden. Der Chronologe überschlage die Einleitung zu diesen und lese dafür desto aufmerksamer den Artikel über »Einrichtung und Gebrauch der Zodiakaltafel«, der auf pag. 297 steht; die Benutzung der Zodiakaltafel wird danach keine Schwierigkeiten mehr bieten. Alle Zeitangaben, die man mittelst der Zodiakaltafel erhält, sind in Tagen der später zu besprechenden julianischen Periode ausgedrückt, d. h. also in Tagen seit Beginn des Jahres 4713 v. Chr. Geb., und in Decimalbrüchen dieser Tage. Verwandelt man diese mittelst einer ebenfalls beigegebenen Tafel in Stunden und Minuten, so sind diese in mittlerer Zeit Greenwich, aber den Tag in astronomischer Weise von Mittag beginnend und die Stunden von 0—24 durchgezählt, ausgedrückt. Darauf hat man sehr genau zu achten, wenn man etwa die berechnete Angabe in einer bestimmten Kalenderangabe ausdrücken will. Man hat dann zu dem gefundenen Werth entweder $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ Tag, d. h. 6 oder 12 oder 18 Stunden zu addiren, wenn in dem betreffenden Kalender der Tag von Sonnenaufgang oder Mitternacht oder Sonnenuntergang ab gerechnet wird. Der Zodiakaltafel ist auch ein Hilfstätelchen beigegeben, um die Zeitangabe in wahrer Zeit zu finden, doch wird das der Chronologe kaum je brauchen. Die gefundenen Zeitangaben sind bis auf 2 Minuten etwa genau, eine für die meisten chronologischen Zwecke überflüssige Genauigkeit, weshalb hier ganz besonders auf das abgekürzte Rechnungsverfahren hingewiesen sei, welches SCHRAM ebenfalls durch ein Beispiel in dem citirten Artikel erläutert und welches für die allermeisten Fälle ausreicht, wenn danach auch die gewonnenen Angaben etwa $2\frac{1}{2}$ Stunden falsch sein können. Häufiger als der Eintritt der Sonne in ein beliebiges Zeichen wird im Alterthum ihr Passiren von einem der vier Jahrespunkte zur Datirung benutzt. Die Berechnung ist ebenfalls mit der SCHRAM'schen Tafel auszuführen, da ja die vier Jahrespunkte der Reihe nach mit dem Eintreten der Sonne in die himmlischen Zeichen ♈ (0°), ♋ (90°), ♎ (180°) und ♑ (270°) zusammenfallen, doch lässt sich — wenn nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird — in diesem Falle die Rechnung einfacher nach den *Tables abrégées pour le calcul des équinoxes et des solstices*; *par M. C. L. Largeteau* ausführen, die in den Mémoires de l'académie des sciences de l'institut de France, tome XXII, 1850, pag. 477 ff., erschienen und auch von JOHANNES VON GUMPACH unter dem Titel: »Hilfsbuch der rechnenden Chronologie oder LARGETEAU's abgekürzte Sonnen- und Mondtafeln«, Heidelberg 1853, deutsch herausgegeben sind. Die Tafeln enthalten für jeden der vier Jahrespunkte zwei Tabellen, die immer zusammen eine Seite einnehmen. Die Benutzung derselben ist an der Hand der in der Einleitung stehenden Beispiele sehr einfach. Die erhaltene Zeitangabe ist in bürgerlicher Zeit von Paris (die Stunden von Mitternacht ab gezählt) ausgedrückt. Die Genauigkeit der LARGETEAU'schen Tafeln ist erheblich geringer als die der SCHRAM'schen Zodiakaltafeln, und besonders in weit zurückliegenden Zeiten kann die LARGETEAU'sche Zeitangabe bis 5 Stunden ungenau sein, was aber für die meisten chronologischen Zwecke nichts ausmacht. Bemerkt sei noch, dass das Wintersolstiz vor dem Jahre 1305 vor Chr. Geb.

statt wie jetzt in den December in den Januar fiel; erst seit dem Jahre 1202 v. Chr. lag es stets im December. In der Zwischenzeit fiel es bald in den Januar bald in den December, und es konnte dadurch Jahre geben, in denen überhaupt kein Wintersolstiz eintrat, und wiederum solche, die dieses Phänomen zweimal aufwiesen.

Fast von noch grösserer Wichtigkeit bei chronologischen und kalendarischen Fragen als die Sonne ist der Mond. Seine wechselnde Lichtgestalt musste ihn schon in sehr früher Zeit als Regulirer der Zeit besonders geeignet erscheinen lassen, und thatsächlich finden wir zu allen Zeiten den Monat als nächste Unterabtheilung des Jahres. Unter den verschiedenen Lichtgestalten oder Phasen des Mondes hat man hauptsächlich folgende zu unterscheiden. Die beiden Stellungen zu Sonne und Erde, in denen er die Figur einer halben kreisförmigen Scheibe zeigt, nennt man das erste und letzte Viertel oder Dichotomie und fasst diese beiden auch wohl unter dem gemeinschaftlichen Namen der Quadraturen zusammen. Unter den Syzygien des Mondes versteht man dagegen die beiden seiner Phasen, in deren einer er als volle Kreisscheibe oder als Vollmond am Himmel leuchtet, während er in der anderen überhaupt nicht sichtbar ist durch die grosse Nähe der Sonne, in welchem Falle man früher annahm, dass sich der Mond erneuere, dass also Neumond sei. Die Zeit, die verstreicht zwischen zwei aufeinander folgenden Neumonden oder allgemeiner gleichen Stellungen des Mondes zu Sonne und Erde, nennt man einen synodischen Monat; dieselbe beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden und ist der Zeitabschnitt, der den Kalendermonaten ursprünglich zu Grunde liegt. Die Bahn, die der Mond am Himmel durchläuft, ist noch um einen Winkel von 5° 9′ stärker gegen den Himmelsäquator geneigt als die scheinbare Sonnenbahn, die Ekliptik, und daher kommt es, dass der Mond während eines vollen Umlaufes bald in unseren Breiten dem Zenith ziemlich nahe, bald dicht am Horizont steht, während er gleichzeitig innerhalb 24 Stunden um einen Bogen von 13½ Grad von Westen nach Osten unter den Sternen vorrückt. In Wahrheit bildet die Mondbahn jenen Winkel von 5° 9′ nicht mit der Sonnen- sondern mit der Erdbahn, und die beiden Punkte, in welchen letztere vom Monde passirt wird, bezeichnet man als die Knoten der Mondbahn, und zwar unterscheidet man einen aufsteigenden und einen absteigenden Knoten, je nachdem sich der Mond dem Nord- oder dem Südpole annähert. Die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch einen dieser Knoten verstreicht, muss etwas kürzer sein als ein synodischer Monat, weil einmal die Sonne von Westen nach Osten vorrückt, der Mond also etwas längere Zeit braucht, um die Sonne wieder einzuholen, und weil zweitens die Knoten langsam von Osten nach Westen fortschreiten, dem Monde also entgegenkommen. Daher braucht der Mond nur 27 Tage 5 Stunden 5 Minuten und 36 Secunden, um wieder in denselben Knoten zu stehen zu kommen, welche Zeit man einen Drachen- oder drakonitischen Monat nennt, weil man im Alterthume die Knoten als Drachenkopf und Drachenschwanz bezeichnete.

In den alten Kalendern war immer die Hauptschwierigkeit, den Mond- und Sonnenlauf in Beziehung zu einander zu bringen, was meistens dazu führte, dass man entweder von den Monaten nur die Namen beibehielt, aber auf den Mondlauf keine Rücksicht nahm, oder dass man den Sonnenlauf ignorirte und nach reinen Mond-Monaten von abwechselnd 29 und 30 Tagen rechnete, um so die Länge des synodischen Monats von rund 29½ Tag herauszubekommen. Eine

Möglichkeit, beide Rechnungen in Uebereinstimmung zu bringen, beruht auf der Thatsache, das 235 synodische Monate nur 2 Stunden 5 Minuten und 43 Secunden länger sind als 19 tropische Jahre; man muss also in einem Cyklus von 19 Jahren in 12 Jahren 12 und in 7 Jahren 13 Monate rechnen. In dieser Weise richtete im Jahre 432 v. Chr. Geb. der Athener METON seinen Kalender ein, weshalb man die erwähnte Relation den Metonischen Mondcyklus nennt, obwohl derselbe anderen Völkern wahrscheinlich schon früher bekannt war. Der heutige Kalender der Juden zeigt dieselbe Einrichtung, und im christlichen Kalender giebt die sogen. goldene Zahl an, das wievielte im 19jährigen Mondcyklus das gerade laufende ist.

Sehr wichtig für den Chronologen ist die Berechnung weit zurückliegender Mondphasen, und dabei hat man zwei getrennte Aufgaben zu unterscheiden, nämlich einmal die genäherte Berechnung aller in einem beliebigen Jahre vorkommenden Quadraturen und Syzygien, und dann die genaue Bestimmung einer genähert bekannten Mondphase. Die Lösung der ersteren Aufgabe gestatten nur die von M. C. L. LARGETEAU berechneten *Tables pour le calcul des syzygies écliptiques ou quelconques*, die zuerst in der Connaissance des temps pour l'an 1846, Additions pag. 3 ff., Paris 1843 erschienen und dann noch mit den oben schon erwähnten LARGETEAU'schen Sonnentafeln gleichzeitig in den Mémoires und bei GUMPACH abgedruckt sind. An der Hand der klaren von LARGETEAU gegebenen Einleitung zu seinen Tafeln bietet es keinerlei Schwierigkeit, die ausserordentlich einfache Rechnung zu erledigen, nur darf man nicht übersehen, dass dieselbe Phase bei den ungleich langen Monaten des christlichen Kalenders in einem langen Monate auch mal doppelt vorkommen, in einem kurzen auch mal ganz fehlen kann. Die auf diese Weise berechneten Daten für die Mondphasen sind noch 1—3 Tage falsch, daher muss man, wenn man den genauen Eintritt einer Phase kennen will, eine zweite Rechnung anstellen. Diese kann man direkt an der Hand derselben LARGETEAU'schen Tafeln vornehmen, das Resultat, welches man in mittlerer (bürgerlicher) Pariser Zeit, also den Tag von Mitternacht ab gerechnet, erhält, kann im ungünstigsten Falle auch bei genauester Rechnung doch noch zwei Stunden falsch sein, doch wird im Allgemeinen der Fehler erheblich geringer sein. Weit kürzer und daher bequemer ist die von R. SCHRAM im Anhang zu seinen oben bereits erwähnten »Hilfstafeln für Chronologie« gegebene Tafel zur Berechnung der Mondphasen, welche freilich verlangt, dass das genähert bekannte Datum in Tagen der julianischen Periode ausgedrückt ist, und die auch das Resultat in dieser Zählungsweise sowie in mittlerer Zeit von Greenwich, den Tag von Mittag ab gezählt, giebt. Die Genauigkeit dieser Tafel ist etwa $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Stunden, d. h. um diesen Betrag kann auch bei richtiger Rechnung die gewonnene Zeitangabe noch falsch sein. Dagegen bis auf etwa 2 Minuten genau kann man den Eintritt von Mondphasen mit den »Syzygien-Tafeln für den Mond« von Prof. THEODOR v. OPPOLZER (Leipzig 1881 bei WILHELM ENGELMANN) berechnen, doch ist natürlich die Berechnung umständlicher als bei SCHRAM, und zwar deshalb um so mehr, weil die Tafeln auch zur Berechnung von Finsternissen dienen sollen und daher noch eine Menge Grössen aufführen, die man für den Mond nicht braucht. Eine eingehende Besprechung der Tafeln findet sich in dem Artikel über »Finsternisse« in diesem Buche. Im Uebrigen sind die aus OPPOLZER gefundenen Daten in denselben Zeitmaassen ausgedrückt, wie die aus der SCHRAM'schen Tafel gewonnenen, ist doch diese letztere nichts weiter als eine sehr glückliche Abkürzung der OPPOLZER'schen. Es giebt noch verschiedene andere Tafelwerke zur Berechnung der Mondphasen,

z. B. die von LEHMANN und von PAULUS, aber die hier besprochenen verdienen aus manchen Gründen den Vorzug, greifen sie doch auch alle drei besonders weit in die Vergangenheit, nämlich bis zum Jahre 4713 v. Chr. Geb., zurück.

Die wechselnde Stellung vom Monde zu Sonne und Erde hat aber ausser den Phasen des Mondes noch die Finsternisse im Gefolge. Wenn der Mond zwischen Sonne und Erde tritt, so wird er einen mehr oder weniger grossen Theil der ersteren für die Erdbewohner verdecken, es findet eine Sonnenfinsterniss statt. Ist der Mond so weit von der Erde entfernt, dass er etwas kleiner erscheint als die Sonne, so wird er diese nicht ganz verdecken können, sondern diese wird die dunkle Mondscheibe nach allen Seiten hin überragen, sie also mit einem leuchtenden Ringe umgeben, daher spricht man in solchem Falle von einer ringförmigen Sonnenfinsterniss, die man ausserdem noch als centrale bezeichnet, wenn für einen Augenblick die Mittelpunkte von Sonne und Mond für einen Beobachter auf der Erde sich decken. Sind die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond gleich gross, so wird eine totale Sonnenfinsterniss ohne Dauer eintreten, die dann nothwendig auch eine centrale ist. Ist endlich die Mondscheibe grösser als die Sonnenscheibe, so tritt eine totale Sonnenfinsterniss ein, welche jedoch für einen Erdort nur etwas über 6 Minuten, gewöhnlich aber nicht so lange dauert. Alle diese Erscheinungen sind auf der Erde nur jedesmal in einem schmalen Streifen ihrer Oberfläche, der sogen. Zone der Totalität oder Ringförmigkeit, sichtbar, und die Breite dieser Zone kann höchstens 220 *km* betragen. Die angrenzenden Ländergebiete sehen nur einen Theil der Sonne durch den Mond verdeckt, also nur eine partielle Sonnenfinsterniss, die um so kleiner wird, je weiter man sich von der Zone der Totalität entfernt, bis man an die Grenze der Sichtbarkeit überhaupt kommt. Eine Sonnenfinsterniss ist also durchaus nicht an allen Orten, in welchen sich die Sonne über dem Horizont befindet, zu sehen, und in denen, wo sie sichtbar ist, in jedem zu einer anderen Zeit und in anderer Grösse. In der Zone der Totalität oder Ringförmigkeit beginnt und endet für die einzelnen Punkte auf der Erde die Finsterniss natürlich mit einer partiellen.

Bei den Mondfinsternissen läuft der Schatten der Erde über die Mondoberfläche dahin, und weil derselbe stets grösser ist als die Mondscheibe, so können nur partielle und totale Mondfinsternisse vorkommen, welche letzteren auch gelegentlich centrale sind, wenn die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Mond für einen Moment auf einer geraden Linie liegen. Ferner ist nach dem Gesagten einleuchtend, dass eine Mondfinsterniss von allen Orten der dem Monde zugewendeten Erdhälfte gleichzeitig und in gleicher Grösse sichtbar ist. Diese letztere bestimmt man in der Weise, dass man sich den Durchmesser des verdunkelten Gestirnes in 12 Zoll oder *digiti* getheilt denkt, und dann die Länge des verdunkelten Stückes desjenigen Durchmessers angiebt, welcher durch den am weitesten in die Scheibe hineingerückten Punkt des verdunkelnden Objectes geht. Bei einer Finsterniss von 8 Zoll würden also $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ dieses Durchmessers im Dunkeln liegen. Im Alterthum drückten viele Astronomen die Grösse der verfinsterten Oberfläche statt des Durchmessers in *digiti* aus, sodass bei den meisten derselben eine Finsterniss von 8 *digiti* eine solche ist, bei welcher $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ der Oberfläche des Mondes oder der Sonne verfinstert sind. Die folgende Tabelle giebt eine ungefähre Vergleichung der beiden Zählungsweisen, die in aller Strenge für den nur manchmal eintretenden Fall gilt,

bei welchem die scheinbaren Durchmesser des verdunkelten und verdunkelnden Objectes gleich gross sind. Man kann also aus der Tabelle direkt für diesen Fall (und genähert für die übrigen Fälle) entnehmen, wie gross eine nach moderner Art (12 Zoll auf den Durchmesser) ausgedrückte Finsternissangabe nach der alten Art (12 *digiti* auf die Oberfläche) sein würde.

Durchmesser 12 Zoll	Oberfläche 12 digiti	Durchmesser 12 Zoll	Oberfläche 12 digiti
1 Zoll	0·4 digiti	7 Zoll	5·8 digiti
2 „	1·0 „	8 „	7·0 „
3 „	1·7 „	9 „	8·2 „
4 „	2·6 „	10 „	9·5 „
5 „	3·6 „	11 „	10·8 „
6 „	4·7 „	12 „	12·0 „

Da die Finsternisse nur dann möglich sind, wenn der Voll- oder Neumond nahe bei oder in die Knoten der Mondbahn fällt, so ist es hauptsächlich das Verhältniss der synodischen zu den drakonitischen Monaten, welches die Finsternisse in ihrer Grösse und Reihenfolge bestimmt. Nun sind aber 223 synodische Monate nur 51 Minuten 22 Secunden kleiner als 242 drakonitische und gleich 18 tropischen Jahren und 11 Tagen, folglich werden nach Ablauf dieser Zeit die Sonnen- und Mondfinsternisse angenähert in derselben Grösse und Ordnung wiederkehren, wenn auch für etwas andere Gegenden auf der Erde. Diese 18 Jahre und 11 Tage nennt man den Saros oder die chaldäische Periode, weil dieselbe schon den alten Chaldäern, ja wahrscheinlich den meisten alten Völkern bekannt und das einzige Mittel für sie war, um Finsternisse im Voraus angeben zu können.

Zur Berechnung von Sonnen- und Mondfinsternissen für weit zurückliegende Zeiten bedient man sich am besten des »Canon der Finsternisse« von Th. von Oppolzer, herausgegeben von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften als LII. Band ihrer Denkschriften, mit 160 Tafeln, Wien 1887. Dieses Werk zerfällt in vier Theile: 1) die umfangreiche Einleitung mit den nöthigen Erläuterungen, 2) den Canon der Sonnenfinsternisse, 3) den Canon der Mondfinsternisse, 4) die Iconographie zum Canon der Sonnenfinsternisse. Der Canon der Sonnenfinsternisse enthält chronologisch geordnet und fortlaufend numerirt von den 8000 Sonnenfinsternissen zwischen dem 10. November 1208 v. Chr. Geb. und dem 17. November 2161 nach Chr. Geb. Jahr und Datum ihres Eintretens sowie die Weltzeit (d. h. bürgerliche Zeit von Greenwich, den Tag von Mitternacht ab, aber die Stunden von 0 bis 24 durchgezählt) der Mitte der Finsterniss, sowie ferner die Längen und Breiten derjenigen Erdorte, für welche die Centralität der betreffenden Finsterniss bei Sonnenaufgang, im Mittag oder bei Sonnenuntergang stattfand, durch welche Angaben man gleich einen ungefähren Anhalt für das Sichtbarkeitsgebiet der betreffenden Finsterniss erhält. Noch besser wird dieser durch die 160 Karten der Erdoberfläche bis zum 30° südlicher Breite gegeben, die den vierten Theil des Buches die Iconographie zum Canon der Sonnenfinsternisse bilden, und in den alle diese Punkte (soweit sie in das Gebiet der Karten fallen) eingetragen und für jede Finsterniss durch eine Curve verbunden sind, die die Centralitätscurve für die betreffende Finsterniss ist. Alle Sonnenfinsternisse, die auf einer Seite im Canon zusammenstehen, sind auch auf einer Karte der Iconographie

eingetragen, deren Nummer man findet, indem man die gerade Seitenzahl durch 2 dividirt. Um nun für einen beliebigen Erdort die Grösse und Sichtbarkeitsdauer einer Finsterniss berechnen zu können, sind im Canon bei jeder Sonnenfinsterniss 23 Hilfsgrössen aufgeführt, welche in Formeln, die in der Einleitung enthalten sind, eingesetzt, die genannten Resultate berechnen lassen. Aber weit einfacher gelangt man zu diesem Ziel mittelst der »Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse« von Dr. R. Schram, die in den Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Klasse, LI. Band, Wien 1886, pag. 385 ff., erschienen sind. Freilich sind die dadurch gewonnenen Werthe nicht so genau als bei direkter umständlicher Rechnung, aber für chronologische Zwecke vollkommen ausreichend. Ueber die Mondfinsternisse giebt der dritte Theil des Oppolzer'schen Werkes, der Canon der Mondfinsternisse, Auskunft, welcher von den 5200 Finsternissen zwischen 1207 v. Chr. Geb. und 2163 n. Chr. Geb. Jahr und Datum, Weltzeit für den Eintritt der grössten Phase, Grösse dieser, halbe Dauer der partiellen und totalen Finsterniss sowie die Länge und Breite desjenigen Erdortes bringt, für welchen in der Mitte der Finsterniss der Mond im Zenith stand. Mit Hilfe dieser Grössen ist es nach den in der Einleitung zum Canon gegebenen Vorschriften sehr einfach, die Sichtbarkeit einer solchen Mondfinsterniss für einen beliebigen Ort auf der Erde ohne Formeln zu berechnen. Kommt es darauf an, bei der Berechnung der näheren Umstände einer Sonnen- oder Monfinsterniss die äusserste Genauigkeit zu erzielen, so bedürfen die Grössen in Oppolzer's Canon erst einiger Verbesserungen, die man einfach aus den »Reductionstafeln für den Oppolzer'schen Finsterniss-Canon zum Uebergang auf die Ginzel'schen empirischen Correctionen« von Dr. R. Schram entnimmt, welche in den Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Klasse, LVI. Band, Wien 1889, pag. 187 ff., erschienen sind. Ausführliche Beispiele zur möglichst strengen Berechnung einer Finsterniss finden sich in dem Artikel über »Finsternisse« in diesem Buche. Vermuthlich noch im Jahre 1896 wird von der Berliner Akademie der Wissenschaften ein specieller Canon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Alterthumswissenschaften von 900 v. Chr. Geb. bis 600 n. Chr. Geb. von Dr. Ginzel veröffentlicht werden, welcher genauere Auskunft über alle in dem Gebiet von 10° westlicher bis 50° östlicher Länge und zwischen 25° und 50° nördlicher Breite sichtbaren Sonnen- und Mondfinsternisse enthält, indem er deren Grösse und genaue Zeitangaben für Rom, Athen, Memphis und Babylon sowie für die Sonnenfinsternisse die Centralitätscurven aufführt. Ausserdem finden darin alle in diesem Zeitraum erwähnten historischen Finsternisse ihren besonderen rechnerischen Nachweis unter Beifügung der darauf bezüglichen Literatur. Eine kurze Uebersicht der »historischen Finsternisse« ist auch in diesem Buche unter derselben Bezeichnung gegeben.

Da man im Alterthum in den seltensten Fällen im Besitze von fest aufgestellten Instrumenten war, die eine Positionsbestimmung der Gestirne ermöglichten, so musste man sich meistens darauf beschränken ihren Durchgang durch einen natürlichen, am Himmel fixirten grössten Kreis zu beobachten, und als solcher bot sich der Horizont des Beobachtungsortes dar. Mit anderen Worten: die täglichen Auf- und Untergänge der Gestirne spielten im Alterthum eine sehr wichtige Rolle. Um diese nun für ein weit zurückliegendes Datum berechnen zu können, bedarf man nur der für dieses Datum gültigen Rectascension und Deklination des betreffenden Gestirnes, dann rechnet man mit diesen Grössen

nach genau den gleichen Formeln, als wenn der betreffende Auf- oder Untergang heute stattfände. Diese Formeln sind aber in diesem Buche in dem Artikel über Aufgänge zur Genüge dargelegt. Ebenso ist hier nicht der Platz, auf die Berechnung von Sonnen-, Mond- und Planetenörtern für die Vergangenheit näher einzugehen. Streng genommen könnte auch wegen der Bestimmung von Fixsternpositionen für entlegene Zeiten einfach auf den Artikel über Präcession verwiesen werden, doch sei hier eine für chronologische Zwecke bestimmte Arbeit erwähnt, welche für 46 der hellsten Fixsterne die Rectascensionen und Deklinationen von 100 zu 100 Jahren für den Zeitraum von 2001 vor bis 1800 n. Chr. Geb. des julianischen Kalenders aufführt. Es sind das die »Sterntafeln« von Dr. O. DANCKWORTT, welche im 16. Jahrgang (1881) pag. 9 ff. der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft (Leipzig, WILHELM ENGELMANN) erschienen sind, und aus denen man die Positionen der 46 Sterne für ein beliebiges Jahr in dem genannten Zeitraum durch eine einfache Interpolation entnehmen kann. Für die Berechnung der Position eines anderen Sternes bietet die DANCKWORTT'sche Arbeit ausser den nöthigen Formeln in der Einleitung auch noch einige Tafeln mit Hilfsgrössen, die diese Rechnung wesentlich erleichtern.

Diese täglichen Auf- und Untergänge der Gestirne waren wohl in hervorragendem Maasse geeignet, zur Eintheilung der Zeit innerhalb eines Tages zu dienen, aber sie vermochten nicht ein bestimmtes Datum festzulegen, wenn wir nun aber trotzdem Auf- und Untergänge von Sternen dazu verwendet finden, so müssen das ganz besondere Phänomene dieser Art sein.

Die täglichen Auf- und Untergänge der Sterne finden für einen bestimmten Erdort für längere Zeiträume zu denselben Sternzeiten statt, aber da die Sternzeit innerhalb 24 Stunden um 3 Minuten 56 Secunden gegen die mittlere (bürgerliche) Zeit voreilt, so finden die täglichen Auf- und Untergänge von Tag zu Tag nach bürgerlicher Zeit um 3 Minuten 56 Secunden früher statt, durchlaufen also in einem Jahre sämmtliche bürgerlichen Tages- und Nachtzeiten. Ein Stern geht also zu gewissen Jahreszeiten am Tage, zu anderen zur Nachtzeit auf oder unter, dazwischen aber wird es sich aber auch mal ereignen, dass der Stern gleichzeitig mit der Sonne auf- oder untergeht, oder dass sein Aufgang mit dem Sonnenuntergang zusammenfällt und umgekehrt. Jeder dieser vier auf diese Weise ausgezeichneten Auf- und Untergänge eines Sternes wird sich im Laufe eines Jahres nur einmal ereignen können, weshalb man dieselben die jährlichen nennt, und diese können natürlich zur Fixirung eines Datums dienen. Aber freilich wird es, auch wenn ein Beobachter von seinem Standpunkte den Horizont überblicken kann, ihm nicht gelingen, diese mit der Sonne gleichzeitig erfolgenden Auf- und Untergänge von Sternen wahrzunehmen, da das Sonnenlicht die Sterne überstrahlt und unsichtbar macht. Wohl aber wird es einige Tage, nachdem ein Stern genau bei Sonnenaufgang für einen Erdort auf- oder untergegangen ist, sich ereignen, dass der Stern so lange vor Sonnenaufgang auf- oder untergeht, dass man seinen Auf- bez. Untergang gerade noch beobachten kann, dass die Sonne also noch so tief unter dem Horizont steht, dass ihr Licht noch nicht mächtig genug ist, das des Sternes zu überstrahlen. Ganz entsprechend wird es einige Tage vor dem mit Sonnenuntergang gleichzeitig erfolgenden Auf- oder Untergang eines Sternes möglich sein, seinen Auf- oder Untergang in der Abenddämmerung gerade noch zu beobachten. Diese vier neuen, aber nunmehr mit blossem Auge deutlich wahrnehmbaren Auf- und Untergänge eines Sternes treten auch im Laufe eines Jahres nur je einmal ein, gehören also auch zu den jährlichen oder — wie sie wegen der häufigen Erwähnung bei den alten Dichtern

auch heissen — poetischen Auf- und Untergängen und sind die eigentlichen zu gelegentlichen Datirungen im Alterthume benutzten Phänomene. Die genaueren Bezeichnungen der einzelnen lehrt die folgende Uebersicht.

Jährliche Auf- und Untergänge.

A. Mit blossem Auge nicht wahrnehmbar.

1) Der wahre kosmische Aufgang: Stern und Sonne gehen gleichzeitig auf.

2) Der wahre kosmische Untergang: der Stern geht bei Sonnenaufgang unter.

3) Der wahre akronychische Aufgang: der Stern geht bei Sonnenuntergang auf.

4) Der wahre akronychische Untergang: Stern und Sonne gehen gleichzeitig unter.

B. Mit blossem Auge wahrnehmbar.

5) Der heliakische Aufgang: der erste sichtbare Aufgang des Sternes in der Morgendämmerung.

6) Der heliakische Untergang: der letzte sichtbare Untergang des Sternes in der Abenddämmerung.

7) Der scheinbare akronychische Aufgang: der letzte sichtbare Aufgang des Sternes in der Abenddämmerung.

8) Der scheinbare kosmische Untergang: der erste sichtbare Untergang des Sternes in der Morgendämmerung.

Für die Nummern 5—8 hat Ideler die deutschen Namen Frühaufgang, Spätuntergang, Spätaufgang, Frühuntergang vorgeschlagen, während er für die unter 1—4 aufgeführten Phänomene dieselben Namen unter Voraussetzung des Beiwortes »wahrer« gebraucht wissen will.

Bei der Beobachtung der unter B. genannten vier Vorgänge am Himmel wird es nicht allein darauf ankommen, dass der Beobachter von seinem Standpunkte den Horizont frei überschauen kann, sondern es wird auch von der Durchsichtigkeit der Luft und der Schärfe seiner eigenen Augen abhängen, ob er die betreffenden Auf- oder Untergänge bei grösserer oder geringerer allgemeiner Helligkeit noch wahrnehmen kann oder nicht. Ein durch grosse Sehschärfe und Klarheit der Luft begünstigter Beobachter wird z. B. den heliakischen Aufgang eines Sternes 1—2 Tage früher notiren als einer, der diese Vortheile nicht hatte. Oder mit andern Worten: der erste Beobachter konnte einen Sternaufgang bei grösserer Himmelshelligkeit, also bei geringerer Tiefe der Sonne unter dem Horizonte beobachten, als der letztere. Diese Grösse in Winkelmaass ausgedrückt, um welche die Sonne bei Eintritt einer der vier in Rede stehenden Erscheinungen senkrecht unter dem Horizont sich befindet, heisst der *arcus visionis* oder Sehungsbogen, und derselbe ist nicht nur von der Helligkeit des zu beobachtenden Sternes und dem Umstande, ob Stern und Sonne auf gleicher oder verschiedener Seite (östlicher und westlicher) des Horizontes stehen, abhängig, sondern der Betrag für den Sehungsbogen kann auch — wie eben erwähnt — mit der Durchsichtigkeit der Luft und der Sehschärfe des Beobachters variiren. Auf diese letzteren kann man natürlich nicht Rücksicht nehmen, wenn es sich um die Berechnung von jährlichen Auf- und Untergängen handelt, sondern man muss sich dann mit Mittelwerthen für den Sehungsbogen begnügen,

wie sie sich aus den Beobachtungen der Alten in guter Uebereinstimmung mit neueren Wahrnehmungen ergeben und in der folgenden Tabelle aufgeführt sind, und zwar einmal für die Sterne der obersten vier Helligkeitsklassen sowie ferner für die beiden Fälle, dass Sonne und Stern in gleichen oder entgegengesetzten Gegenden des Horizontes sich befinden.

Sehungsbogen für Sterne der	bei dem scheinbaren akronychischen Auf- und kosmischen Untergang	bei dem heliakischen Auf- und Untergang
1. Grössenklasse . .	7°	10°
2. „ . .	8·5	14
3. „ . .	10	16
4. „ . .	14	17

Zur Berechnung der eben besprochenen Phänomene dienen die »Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- und Untergänge der Gestirne« von Dr. WALTER F. WISLICENUS, die als XX. Publikation der Astronomischen Gesellschaft in Commission bei WILHELM ENGELMANN, Leipzig 1892, erschienen sind. Diese Tafeln gestatten die direkte oder indirekte Lösung folgender vier Aufgaben: 1) Die jährlichen Auf- und Untergänge eines bekannten Sternes für einen gegebenen Erdort und ein bestimmtes Jahr zu berechnen. 2) Aus den für einen Erdort in einem gegebenen Jahre bekannten jährlichen Auf- und Untergängen die Position des Sternes zu ermitteln. 3) Wenn für einen bekannten Stern seine jährlichen Auf- und Untergangszeiten in einen bestimmten Beobachtungsort gegeben sind, auf welches Jahr bezieht sich diese Angabe? Und 4) Auf welchen Erdort haben die gegebenen jährlichen Auf- und Untergangszeiten eines bekannten Sternes in einem bestimmten Jahre Bezug? — Eine ganz ausführliche Gebrauchsanweisung zu den Tafeln findet der Leser auf pag. 18 ihrer Einleitung, wonach dann die Benutzung derselben keinerlei Schwierigkeiten mehr bietet. Die genauen Formeln zur Berechnung der jährlichen Auf- und Untergänge ohne Benutzung der Tafeln sind auf pag. 9—17 derselben Einleitung vollständig abgeleitet, sie hier zu wiederholen ist bei dem für diesen Artikel reservirten Platz unmöglich.

Aus allem, was bisher über die jährlichen Auf- und Untergänge gesagt ist, geht hervor, dass dieselben zu einer genauen Zeitbestimmung nicht dienen können, weil deren Berechnung stets nur Mittelwerthe liefern kann. Dazu kommt, dass sich die Zeiten derselben bei der nur ganz langsamen Aenderung der Oerter der Sterne in benachbarten Jahren fast garnicht und erst in grösseren Zeiträumen merklich ändern. So gingen z. B. die Plejaden in Rom zur Zeit von Christi Geburt am 27. Mai heliakisch auf, während sie die sgegenwärtig am 15. Juni thun. Aber wenn auch keine genaue Zeitbestimmung durch die jährlichen Auf- und Untergänge möglich ist, so dienen sie doch vielfach zur allgemeinen Orientirung oder in Zweifelsfällen zur Entscheidung.

Technische oder historische Chronologie.

Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass es der Mond war, dessen wechselnde Lichtgestalten zuerst den Menschen ein bequemes Mittel boten, um eine bestimmte Anzahl von Tagen und Nächten zu einem grösseren Zeitabschnitt

— dem Monat — zusammenzufassen, und zwar benutzte man den synodischen Monat, dessen Länge man im Alterthume schon mit grosser Genauigkeit bestimmt hatte. Da es nun aber unbequem war, nach Monaten von 29½ Tagen zu rechnen, so wechselte man mit der Monatslänge zwischen 29 und 30 Tagen ab. Nach roher Beobachtung kehrte die Sonne nach Verlauf von 12 solchen Mondmonaten in die gleiche Stellung am Himmel zurück, sodass man diese zu einem Jahre zusammenfasste, welches man chronologisch als reines Mondjahr bezeichnet. Eine nur etwas genauere Beobachtung musste lehren, dass dieses reine Mondjahr mit seinen 354 Tagen gegen das tropische Jahr doch erheblich zurückbleibe, weshalb bei den meisten Völkern das Bestreben sich geltend machte, Sonnen- und Mondlauf in Uebereinstimmung zu bringen, was dann zur Einführung des sogen. Lunisolarjahres führte, d. h. eines Jahres, dessen Länge dem tropischen entspricht, dessen Monate aber sich dem Mondlaufe anschliessen. Vielfach jedoch entschlossen sich die Völker, direkt ihre Jahre nach dem Sonnenlaufe abzumessen und sie in 12 möglichst gleich grosse Monate zu theilen, die dann freilich an den Mondlauf durch nichts weiter als den Namen erinnerten. Solche Sonnenjahre sind dann entweder feste, indem sie durch eine irgendwie geregelte Einschaltung von Tagen sich der Länge des tropischen Jahres möglichst eng anschliessen, oder bewegliche, wobei dann durch die unveränderliche Jahreslänge die einzelnen Monate und Tage sich allmächlich durch alle Jahreszeiten bewegen. Endlich findet sich direkt das siderische Sonnenjahr einigen Zeitrechnungen zu Grunde gelegt. Dies vorausgeschickt, mögen hier einige Angaben über die wichtigsten Kalender, wie sie sich bei den einzelnen Völkern finden, in möglichst chronologischer Reihenfolge und in der durch den beschränkten Raum gebotenen Kürze folgen.

Kalender der Chinesen und Japaner. Beide Völker rechnen nach Lunisolarjahren, die in 60jährigen Cyklen gezählt werden, und zwar bei den Chinesen vom 10. März 2697 an, zuweilen vom 6. März 2637, sehr selten erst vom 23. Februar 2397 v. Chr. Geb. an, bei den Japanern vom 18. Februar 660 v. Chr. an. Im Cyklus hat jedes Jahr seinen eigenen Namen, welcher immer angegeben wird, jedoch selten die Nummer des laufenden Cyklus; dagegen fügen die Chinesen bei, das wievielte Jahr das fragliche seit dem Regierungsantritt eines Kaisers oder seit Zulegung eines Regierungsprädikats zu dessen Namen ist, während die Japaner ausser dem 60jährigen Cyklus noch nach Jahren der Aera Nino datiren, d. h. seit der Thronbesteigung des Sin-mu-ten-oe, welche auf den 25. Februar 601 v. Chr. fällt. Die Monate beider Völker sind reine Mondmonate zu abwechselnd 29 und 30 Tagen und werden danach als kleine *(sjao)* oder grosse *(ta)* bezeichnet, sonst erhalten sie meist nur die Ordnungszahlen zur näheren Bestimmung. Die Ausgleichung derselben gegen das Sonnenjahr erfolgt in der Weise, dass derjenige Monat im Jahr als erster bezeichnet wird, in welchem die Sonne in das Zeichen der Fische tritt, der als zweiter, in welchem sie in den Widder tritt, und so fort. Wenn jedoch in einem Monate mal die Sonne in kein neues Zeichen tritt, so gilt dieser Monat als Schaltmonat und erhält dieselbe Nummer wie der vorhergehende unter Zufügung der Bezeichnung *shun*. Zuweilen erhalten die Monate die Prädikate als erster *(meng)*, mittlerer *(tschung)* oder letzter *(ki)*, des Frühlings *(tschun)*, Sommers *(hja)*, Herbstes *(tsiu)* oder Winters *(tung)*, also: *meng-tschun tschung-tschun* . . . etc. Endlich werden die Monate auch nach dem gleichen 60er Cyklus gezählt und mit demselben Namen in diesem bezeichnet wie die Jahre und zwar beginnt

der	3. Monat	im Cyklus die Jahre	1,	6,	11,	16	....	bis	56			des 60jährigen Cyklus.
„	15.	„ „ „ „ „	2,	7,	12,	17	....	„	57			
„	27.	„ „ „ „ „	3,	8,	13,	18	....	„	58			
„	39.	„ „ „ „ „	4,	9,	14,	19	....	„	59			
„	51.	„ „ „ „ „	5,	10,	15,	20	....	„	60			

Die nächste Unterabtheilung unter die Monate sind die 24 Halbmonate *(tsje-kʿi)*, welche immer vom Anfang bis zur Mitte eines Zeichens im Sonnenlauf und dann wieder von der Mitte bis zum Anfang des nächsten Zeichens reichen und besondere Namen haben. Die eigentliche Eintheilung der Mondmonate ist die in 3 zehntägige Wochen, indem der 1., 11. und 21. Tag des Monats besonders hervorgehoben und die ersten 10 desselben als die »angehenden« *(tschu)* bezeichnet werden. Sonst zählen sie die Tage im Monat von 1—29 oder 30 ohne Eigennamen. Ausserdem läuft aber unabhängig von den Monaten der 60theilige Cyklus auch für die Tage mit denselben Bezeichnungen wie bei den Jahren und Monaten. Diese setzen sich aus zwei Reihen von 10 und 12 Namen zusammen, welche 60 verschiedene Combinationen geben. Dieselben sind bei den

	Chinesen		Japanern	
1	*kja* —	*tszy*	*kino je*	*ne*
2	*ji* —	*tscheu*	*kino to*	*us*
3	*ping* —	*jin*	*fino je*	*torra*
4	*ting* —	*mao*	*fino to*	*vo*
5	*wu* —	*tschen*	*tsutsno je*	*tats*
6	*ki* —	*szy*	*tsutsno to*	*mi*
7	*keng* —	*wu*	*kanno je*	*uma*
8	*sin* —	*wei*	*kanno to*	*tsitsuse*
9	*shen* —	*schen*	*midsno je*	*sar*
10	*kuei* —	*jeu*	*midsno to*	*torri*
11	*kja* —	*sju*	*kino je*	*in*
12	*ji* —	*hai*	*kino to*	*y*
13	*ping* —	*tszy*	*fino je*	*ne*
	etc. —	etc.	etc.	etc.

Der Tag beginnt um Mitternacht und wird in 12 *schi* (1 *schi* = 2 Stunden) getheilt, die Namen der 12 schi sind: *tscheu*, *jin*, *mao*, *tschen*, *szy*, *wu*, *wei*, *schen*, *jeu*, *sju*, *hai*, *tszy*, und jedes *schi* wird durch Anhängen der Silben *kjao* und *tsching* in Hälften zerlegt, also ist: *tscheu-kjao* = 1 Uhr Morgens, *tscheu-tsching* = 2 Uhr Morgens, *jin-kjao* = 3 Uhr Morgens, u. s. w. 1 *schi* zerfällt in 8 *ko*, daher 1 *ko* = eine Viertelstunde, und es bedeutet *tschuko* = Volle Stunde, *jiko* = 1. Viertel, *errhko* = 2. Viertel, *sanko* = 3. Viertel. 1 *ko* = 15 *fen*, also 1 *fen* = 1 Minute. —

Kalender der Inder. Die Inder rechnen theils nach siderischen Sonnenjahren, theils nach Lunisolarjahren, von denen die ersteren, wohl hauptsächlich die Rechnung der Gelehrten, uns hier zunächst beschäftigen sollen. Es bestehen folgende grössere Zeitabschnitte:

		Morgen-dämmerung	Zeitalter	Abend-dämmerung	Summe	
Goldenes Zeitalter	= *Kritayuga*:	144000	1440000	144000	1728000	Jahre.
Silbernes „	= *Tretâyuga*:	108000	1080000	108000	1296000	„
Ehernes „	= *Dvâparayuga*:	72000	720000	72000	864000	„
Eisernes „	= *Kaliyuga*:	36000	360000	36000	432000	„
	Summa = Grosses Zeitalter = *Mahâyuga*				4320000	„

71 *Mahâyugas* umfassen 306720000 Jahre
Abenddämmerung dazu 1728000 „

Summa = Manvantara od. Patriarchat = 308448000 Jahre.

Morgendämmerung = 1728000 Jahre
14 Manvantaras 4318272000 „

Summa = Aeon oder Kalpa = 4320000000 „

1 Kalpa = 1 Tag Brahma's, seine Nacht von gleicher Dauer und da sein Leben 100 Jahre Brahma's umfasst, so dauert es 311040000000000 Jahre und das ist wieder gleich einem Augenzwinkern Siva's. Gegenwärtig ist Brahma's Leben erst halb verflossen und wir leben in der 2. Hälfte von Brahma's Leben und zwar in deren 1. Kalpa, deren 7. Manvantara, deren 28. Mahâyuga und in deren eisernem Zeitalter, dessen Jahr x = dem (155521972944000 + xten) Jahre im Leben Brahma's ist. Das jetzige eiserne Zeitalter hat am 16. Februar 3102 v. Chr. begonnen. Ausserdem zählt man die siderischen Sonnenjahre hauptsächlich nach folgenden Aeren:

1000jähriger Cyklus des Paraśurâma, deren I. am 7. August 1177 v. Chr. begann.
90 „ „ Grahaparivritti, „ I. „ 3. Novemb. 1 v. „ „

Die Śaka des Śâlivâhana beginnt am 15. März 78 nach Chr.
Das Vilâyatî san „ „ 23. Aug. 593 „ „
„ Fasli-Jahr „ „ 21. Juni 593 „ „
„ Bengali san „ „ 20. März 594 „ „

Die Länge der siderischen Sonnenjahre nehmen sie zu $365^t\ 6^h\ 12^m\ 36^s{\cdot}56$ an und zählen sie zuweilen auch nach einem 12jährigen Cyklus, wobei dann die Jahre mit den neueren bengalischen Monatsnamen unter Vorsetzung des Wortes *Mahâ* bezeichnet werden. Ausserdem besteht noch der *Brihaspati Chakra*, das ist ein 60järiger Cyklus, dessen einzelne Namen nach drei verschiedenen ziemlich complicirten Regeln angewendet werden. Zu bemerken ist noch, dass die Inder häufig nur die abgelaufenen Jahre angeben und nicht, wie wir, das gerade laufende mitzählen. Das siderische Jahr zerfällt in 12 Monate, welche folgende Namen und Längen haben.

Bengalische Namen		Tamulische Namen	Anzahl der Tage	Bengalische Namen		Tamulische Namen	Anzahl der Tage
Aeltere	Neuere			Aeltere	Neuere		
Mésha mâsa	Vaiśâkha	Chaitram	30·925	Tulá mâsa	Kârtika	Arpesi	29·902
Vrisha „	Iyaishtha	Vyassei	31·403	Vriśchika „	Mârgaśiras	Cartiga	29·507
Mithuna „	Âshâdha	Auni	31·610	Dhanus „	Pausha	Margali	29·349
Karkata „	Śrâvana	Audi	31·470	Makara „	Mâgha	Tye	29·455
Tinha „	Bhádrapada	Auvani	31·037	Kumbha „	Phâlguna	Maussi	29·807
Kanyâ „	Âśvina	Paratasi	30·457	Mîna „	Chaitra	Pungoni	30·339

In der Praxis werden die Monate nur zu einer ganzen Anzahl von Tagen gerechnet, aber die obigen ganzen Tageszeiten werden um eine Einheit erhöht, wenn durch Addition der Bruch 0·5 übersteigt. Unabhängig von den Monaten läuft die 7tägige Woche, deren Tage die Namen: *Soma-*, *Mangala-*, *Budha-* *Gurú-*, *Śukra-*, *Śani-* und *Ravi-vâra* tragen entsprechend unserem Montag bis Sonntag.

Die Inder rechnen ausserdem nach Lunisolarjahren und zählen diese nach folgenden Aeren:

Kaliyuga	beginnt am	20.	Januar	3102	v.	Chr.
Aera *Lokakâla*	„ „	24.	„	3078	„	„
Buddhistische Aera	„ „	28.	Februar	545	„	„
Aera *Samvat Vikramâditya*	„ „	6.	März	59	„	„
„ *Kulachuri* oder *Chedi Samvat*	„ „	2.	„	249	n.	„
„ *Valabhî Samvat*	„ „	23.	Septemb.	301	„	„
Burmesische Aera	„ „	1.	März	637	„	„
Fasli Jahr der Westprovinzen	„ „	23.	März	593	„	„
Aera *Śiva-Simha Samvat*	„ „	28.	Februar	1112	„	„

Die Jahre sind entweder Schaltjahre *(Adhika-Samvatsara)* zu 383, 384 oder 385 Tagen oder Gemeinjahre von 354 oder 355 Tagen *(Samvatsara-Mâna.)* Ihre Monate sind reine Mondmonate von Neumond zu Neumond, nur im Fasli-Jahr der Westprovinzen fangen die Monate mit dem folgenden Vollmond an. Jeder Mondmonat erhält den Namen desjenigen Sonnenmonats, in dem er beginnt. Fangen zwei Mondmonate in demselben Sonnenmonat an, so gilt der erste der beiden als Schaltmonat und erhält zu dem Namen den Zusatz *Adhika* (eingeschalteter), der zweite den Zusatz *Nija* (richtiger). Das kann in einem Jahre zweimal vorkommen, dann wird aber auch in dem gleichen Jahre in einem Sonnenmonat gar kein Neumond fallen, dann hat also das Jahr zwei Schaltmonate, dagegen fehlt ihm ein gewöhnlicher Monat, es heisst dann *Kshaya-samvat.* Da das Lunisolarjahr mit dem Neumonde anfängt, der dem ersten Sonnenmonat vorausgeht, so ist der erste Mondmonat der *Chaitra.* Nur das Fasli-Jahr der Westprovinzen fängt mit dem Vollmonde an, der in den Sonnenmonat *Âśvina* fällt. Die Mondmonate werden genau mit dem Eintreten des wirklichen Neumondes begonnen und zwar berechnet für den Meridian von Laṅkâ ($5^h\ 3^m\ 33^s$ östlich von Greenwich), einem der vier Punkte, die nach indischer Annahme genau auf dem Aequator und in 90° Länge voneinander liegen. Jeder Mondmonat zerfällt in eine »lichte Hälfte« = *Sudi* oder *Śukla-Paksha* vom Neumond zum Vollmond, und in eine »dunkle Hälfte« = *Badi* oder *Krishna-Paksha* vom Vollmond zum Neumond. Jede dieser Hälften umfasst 15 *Tithi,* welche die Ordnungszahlen 1—14 tragen, während die 15. des *Sudi Pûrnimâ*=Vollmond, die des *Badi Amâvâsyâ*=Neumond heisst. Die *Tithi,* welche im Laufe eines Tages beginnt, giebt diesem ihren Namen. Fällt der Anfang zweier *Tithi* auf einen Tag, so heisst die erste *Kshaya Tithi* und fällt weg. Tritt an einem Tage kein Anfang einer *Tithi* ein, so heisst die vorhergehende *Adhika* (eingeschaltet) und ihre Zahl wird wiederholt. Daneben rechnet man auch hier nach der siebentägigen Woche, die die gleiche wie beim Sonnenjahr ist. Der Tag zerfällt in 60 *ghaṭikâs* zu 60 *vighaḍias* zu 60 *paras* zu 60 *suras,* also 1 *ghaṭikâ* = 24^m, 1 *vighaḍia* = 24^s, 1 *para* = 0·4 und 1 *sura* = 0^s·007.

Kalender der Aegypter. Die Hauptkenntniss über denselben haben wir aus den Schriften des Ptolemäus, der aber als Astronom wohl manches genauer und anders rechnete, als das im Volke geschah. Er rechnet den Tag von Mittag zu Mittag und theilt ihn in 24 gleiche Stunden, während ihn das Volk wahrscheinlich von Mitternacht oder vom Morgen ab rechnete und Tag und Nacht je in 12 Stunden von ungleicher d. h. wechselnder Länge eintheilte. Die 7tägige Woche ist vielleicht erst mit dem Christenthum bei den Aegyptern eingeführt,

vielleicht aber auch aus einer alten astrologischen Beziehung der sieben Wandelsterne zu den Tagen entstanden. Die Aegypter rechneten schon sehr frühzeitig nach beweglichen Sonnenjahren von 365 Tagen, welche in 12 Monate zu je 30 Tagen und 5 Ergänzungstage eingetheilt waren. Die Monatsnamen sind: Thoth, Phaophi, Athyr, Choiak, Tybi, Meschir, Phamenoth, Pharmuthi, Pachon, Payri, Epiphi, Mesori und die 5 Epagomenai. Sie zählten ihre Jahre nach Regenten, indem sie als erstes Jahr eines Regenten dasjenige bezeichneten, welches mit dem ersten Thot beginnt, der dem Regierungsantritte des betreffenden Regenten vorangeht. Ueber die Zählweise giebt Auskunft der bekannte

Canon des Ptolemäus.

Assyrische und Medische Könige 0. Jahr	Jahre Nabonassars	Persische Könige 0. Jahr	Jahre Nabonassars	Griechische Könige 0. Jahr	Jahre Nabonassars	Jahre Philippi	Römische Könige 0. Jahr	Jahre Nabonassars	Jahre Philippi
Nabonassar.	0	Cyrus	209	Alexander der			Augustus	718	294
Nadius	14	Cambyses	218	Macedonier.	416		Tiberius	761	337
Chinzer u. Porus	16	Darius I.	226	Phillippus Ari-			Cajus (Caligula)	783	359
Iluläus	21	Xerxes	262	däus	424	0	Claudius	787	363
Mardokempad	26	ArtaxerxesI	283	Alexander II.	431	7	Nero	801	377
Arkean	38	Darius II.	324	Ptolemäus Lagi	443	19	Vespasianus	815	391
1. Interregnum	43	Artaxerxes II.	343	Philadelphus	463	39	Titus	825	401
Bilibus	45	Ochus	389	Euergetes I.	501	77	Domitianus	828	404
Aparanadius	48	Arogus	410	Philopator	526	102	Nerva	843	419
Regebel	54	Darius III.	412	Epiphanes	543	119	Trajanus	844	420
Mesesimordak	55			Philometor	567	143	Hadrianus	863	439
2. Interregnum	59			Euergetes II.	602	178	Aelius Antoninus	884	460
Asaradin	67			Soter	631	207	Marcus u. Com-		
Saosduchin	80			Dionysius	667	243	modus	907	483
Kiniladan	100			Cleopatra	696	272	Severus	939	515
Nabopollassar	122						Antoninus	964	540
Nebucadnezar	143						Alexander	968	544
Illoarudam	186						Maximinus	981	557
Nerikasolassar	188						Gordianus	984	560
Nabonadius	192						Philippus	990	566
							Decius	996	572
							Gallus	997	573
							Gallienus	1000	576
							Claudius	1015	591
							Aurelianus	1016	592
							Probus	1022	598
							Carus	1029	605
							Diocletianus	1031	607

Der erste assyrische König gilt mit seinem Regierungsantritt auch als Epoche der Nabonassarischen Aera, die am 26. Februar 747 v. Chr. beginnt. Mit dem Tode Alexanders des Grossen oder mit dem Regierungsantritt seines Nachfolgers Philippus beginnt am 12. November 324 v. Chr. die Philippische Aera. Eine wahrscheinlich erst später entstandene und nur von den Gelehrten benutzte Rechnung war die Sothis- oder Hundssternperiode. Der Sothis oder Sirius

(d. h. Hundsstern) zeigte durch seinen heliakischen Aufgang, der vor einigen tausend Jahren auf die Sommersonnenwende fiel, das Steigen des Niles an, fielen beide Ereignisse auf den 1. Thoth eines Jahres, was am 20. Juli 2782 v. Chr. geschah, so begann damit die erste Hundssternperiode. Diese umfasste 1461 ägyptische = 1460 julianische Jahre, nach welcher Zeit der heliakische Aufgang des Sirius wieder auf den ersten Thoth fiel. Die gelegentlich verwendete Aera der Sintfluth ist wohl entschieden indischen Ursprungs, da sie nur 2 Tage später beginnt, nämlich am 18. Februar 3102 v. Chr. als die Aera des Kaliyuga. Als Aegypten römische Provinz wurde, beschloss der römische Senat, den Tag der Einnahme von Alexandrien durch AUGUSTUS (den 1. August 30 v. Chr.) als Beginn einer neuen Zeitrechnung für Aegypten, die sich der römischen anschliessen sollte, zu bestimmen. Die Aegypter in Alexandrien rechneten aber diese neue Aera des AUGUSTUS vom nächsten 1. Thoth ab und schalteten in jedem 4. Jahre 6 statt 5 *Epagomenai* ein, gingen also zum festen Sonnenjahr über, während im übrigen Aegypten diese Schaltmethode sich erst im 5. Jahrhundert n. Chr. einbürgerte. Die Aera des AUGUSTUS heisst fälschlich auch vielfach die Actische Aera nach der Schlacht bei Actium. Im Volke rechnete man ruhig nach Regenten weiter. Die Aera DIOCLETIANS beginnt am 29. August 284 n. Chr. Die Kopten zählen nach dieser Aera, die sie wegen der Christenverfolgungen DIOCLETIANS die Märtyrerära nennen. Unter dem Namen *Gnadenära* ist sie noch bei den Abessiniern in Gebrauch, doch zählen sie diese in Cyklen von 532 Jahren, von denen der erste am 29. August 284 n. Chr. beginnt. Von den Alexandrinischen Christen wurde die Alexandrinische Weltära aufgestellt, welche von der Erschaffung der Welt d. h. vom 29. August 5503 v. Chr. ab läuft. Im 5. Jahrhundert stellte der ägyptische Mönch PANODORUS eine nach ihm benannte Weltära auf, die die Erschaffung der Welt auf den 29. August 5493 v. Chr. festsetzt. Im Jahre 5786 der Alexandrinischen Weltära wurden 10 Jahre aus derselben weggelassen, um sie mit der des PANODORUS in Uebereinstimmung zu bringen, die von da ab vielfach unter dem Namen der Alexandrischen Weltära läuft. Gleichzeitig mit PANODORUS stellte der ägyptische Mönch ANIANUS seine mit der des PANODORUS identische Weltära auf, in welcher nur die Jahre nach der 532jährigen grossen Osterperiode der Christen gezählt werden.

Die Kalender in Vorderasien zusammenzufassen ist insofern vollberechtigt, als sie mit Ausnahme des jüdischen Kalenders wenigstens in der späteren Zeit alle in der Jahresform und vielfach auch in den Monaten übereinstimmten, wozu die Eroberungszüge ALEXANDERS wohl viel beigetragen haben, und weshalb auch hier gleich der macedonische Kalender mit besprochen werden soll, während wir den jüdischen in einem besonderen Abschnitt erledigen wollen. Auch den Kalender der Babylonier wollen wir kurz hier mit erwähnen, soviel darüber zu sagen ist. Eine directe Ueberlieferung desselben haben wir nicht und doch muss ein solcher existirt haben, denn sonst hätten Aegypter und Griechen nicht babylonische oder richtiger chaldäische Beobachtungen zu ihren astronomischen Berechnungen verwenden können. Die älteren dieser Beobachtungen sind uns in ägyptischer Datirung überliefert, was im Verein damit, dass die ägyptische Nabonassarische Aera sich auf einen babylonischen Herrscher stützt, darauf hinweist, dass der babylonische dem ägyptischen Kalender analog gewesen sein muss. Die neueren chaldäischen Beobachtungen werden in macedonischer Datirung aufgeführt, was auf ein Parallellaufen der macedonischen und babylonischen Monate deutet. Da die spätere macedonische Jahrform der ägyptischen sehr ähnlich ist, liegt hierin kein Widerspruch. Das Einzige, was direkt

überliefert wird, ist, dass die Babylonier einen Cyklus von 60 Jahren einen Sossos nannten, 10 Sossos bildeten einen Neros, 6 Neros einen Saros, der also 3600 Jahre umfasste. Hier tritt der Name Saros also in ganz anderer Bedeutung auf, als wie er oben bei den Finsternissen erwähnt wurde.

Die Macedonier müssen ursprünglich nach Mondmonaten und wahrscheinlich auch einem Lunisolarjahr gerechnet haben, wenigstens werden ihre Monate vielfach in direkte Parallele mit den griechischen und jüdischen Mondmonaten gebracht. In ersterem Falle wird vor ALEXANDER DEM GROSSEN der macedonische Däsius mit dem griechischen Hekatombäon gleich gesetzt, nach ALEXANDER stimmt letzterer mit dem macedonischen Monat Lous überein. Der jüdische Thischri wird mit dem Hyperberetäus der Macedonier als gleichlaufend gerechnet. Später rechnen Macedonier und Kleinasiaten nach festen Sonnenjahren von 365 Tagen mit Einschaltung eines Tages in jedes vierte Jahr. Auch die Monate stimmen genau mit den unsrigen an Länge.

Namen der Monate in		Anfänge der Monate in		
Syrien	Macedonien Ephesus, Tyrus	Macedonien und Syrien	Ephesus	Tyrus
Thischri I	Hyperberetäus	1. October	24. August	19. October
„ II	Dius	1. November	24. September	18. November
Kanun I	Apelläus	1. December	24. October	18. December
„ II	Andynäus	1. Januar	24. November	17. Januar
Schebat	Peritius	1. Februar	25. December	16. Februar
Adar	Dystrus	1. März	24. Januar	18. März
Nisan	Xanthicus	1. April	22. Februar	18. April
Jjar	Arthemisius	1. Mai	24. März	19. Mai
Hasiran	Däsius	1. Juni	24. April	19. Juni
Thamus	Panemus	1. Juli	24. Mai	20. Juli
Ab	Lous	1. August	24. Juni	20. August
Elul	Gorpiäus	1. September	25. Juli	19. September

In einigen anderen kleinasiatischen Städten und Landschaften waren bei sonst gleichem Kalender verschiedene Monatsnamen und Anfänge in Gebrauch, worüber die folgenden Tabellen Aufschluss geben.

Namen der Monate in			Anfänge der der Monate
Bithynien	Creta	Cypern	
Heräus	Thesmophorion	Aphrodisius	23. September
Hermäus	Hermäus	Apogonicus	24. October
Metrous	Eiman	Ainicus	23. November
Dionysius	Metarchius	Julius	24. December
Herakleius	Agyius	Cäsarius	24. Januar
Dius	Dioscurus	Sebastus	21. Februar
Bendidäus	Theodosius	Autokratoricus	24. März
Strateius	Pontus	Demarchexusius	23. April
Periepius	Rhabinthius	Plethypatus	24. Mai
Areius	Hyperberetus	Archiereus	23. Juni
Aphrodisius	Nekysius	Hestieus	24. Juli
Demetrius	Basilius	Romäus	23. August

Eine Ausnahme bildet der Autokratoricus auf Cypern, der mit dem 23. März beginnt. Zur besseren Verständigung wurden die Monate gelegentlich nur mit den Ordnungszahlen bezeichnet, was in der folgenden Tabelle unter »Kleinasien« eingetragen ist.

Kleinasien		Jonische Städte in Asia proconsularis		Heliopolis	
Namen	Anfänge	Namen	Anfänge	Namen	Anfänge
1. Monat	24. September	Cäsarius	24. September	Ab	23. September
2. „	24. October	Tiberius	24. October	Ilul	23. October
3. „	23. November	Apaturius	24. November	Ag	22. November
4. „	24. December	Poseideon	25. December	Thorin	23. December
5. „	23. Januar	Lenäus	24. Januar	Gelon	22. Januar
6. „	22. Februar	Hierosebastus	22. Februar	Chanu	21. Februar
7. „	25. März	Artemisius	24. März	Sobath	24. März
8. „	25. April	Euangelius	24. April	Adad	23. April
9. „	25. Mai	Stratonicus	24. Mai	Neisan	24. Mai
10. „	24. Juni	Hekatombäus	24. Juni	Jarar	24. Juni
11. „	25. Juli	Anteus	25. Juli	Ezer	24. Juli
12. „	25. August	Laodikius	25. August	Thamiza	23. August

Die Jahre in allen diesen Kalendern werden gezählt entweder nach der Aera der Seleuciden, d. h. vom 1. October 312 v. Chr. ab, oder, besonders in Syrien, nach der Antiochisch-Cäsarischen Aera, die am 1. October 48 v. Chr. beginnt. Gelegentlich wird die Seleucidische Aera einen Monat früher begonnen, und die syrischen Griechen setzten den Beginn der Antiochisch-Cäsarischen Aera häufig 13 Monate früher also am 1. September 49 v. Chr. an. Die Araber nennen die Seleucidische Aera entweder die Aera Alexanders oder die Aera des Zweigehörnten, während sie bei den Juden gelegentlich unter dem Namen Zählung der Contracte benutzt wurde. In Tyrus zählte man die Jahre vom 19. October 126 v. Chr., während man in Antiochien zuweilen nach der Actischen Aera oder den Jahren des Sieges rechnete, deren Zählung am 1. October 31 v. Chr. beginnt. Endlich finden wir noch in fast allen diesen Kalendern die siebentägige Woche unabhängig von den Monaten.

Kalender der Griechen. Die Griechen rechneten nach Lunisolarjahren, die vom 8. Juli 776 v. Chr. ab liefen und in Cyklen von vier Jahren, deren jeder eine Olympiade hiess, gezählt wurden; man gab also an, das wievielte das laufende Jahr in der so und so vielten Olympiade sei. Die Jahre umfassten entweder 12 oder 13 Mondmonate von 29 oder 30 Tagen und hatten je nachdem eine Länge von 354, 355, 383 oder 384 Tagen. Die Einfügung des Schaltmonats war ziemlich willkürlich, bis der Athener Meton seinen 19jährigen Cyklus einführte, in welchem das 3., 5., 8., 11., 13., 16. und 19. Jahr ein Schaltjahr von 13 Monaten war, und dessen astronomische Grundlage wir bereits oben erwähnt haben. Dieser Cyklus wurde mit dem 1. Jahre der 87. Olympiade d. h. mit dem 16. Juli 432 v. Chr. eingeführt. Da nicht genau 19 tropische Jahre 235 synodischen Monaten entsprechen, so suchte Kallippus den übrig bleibenden Fehler dadurch zu verkleinern, dass er 4 Metonische Cyklen zusammenfasste und deren Dauer um einen Tag verkleinerte. In diesem 76 jährigen Cyklus des Kallippus waren ausser den 7 oben genannten noch das 22., 24., 27., 30., 32., 35., 38., 41., 43., 46., 49., 51., 54., 57., 60., 62., 65., 68., 70., 73. und 76. Jahr Schaltjahre

von 13 Monaten. Dieser Cyklus kam mit dem 3. Jahre der 112. Olympiade also am 28. Juni 330 v. Chr. in Gebrauch. Die Namen der Monate sind in der gewöhnlich angenommenen Reihenfolge:

1) Hekatombäon	4) Pyanepsion	7) Gamelion	10) Munychion
2) Metageitnion	5) Mämakterion	8) Anthesterion	11) Thargelion
3) Boëdromion	6) Poseideon	9) Elaphebolion	12) Skirophorion

Dazu trat im Schaltjahr nach dem Poseideon ein Poseideon II ein. Gelegentlich wird eine Vertauschung der Stellen zwischen Pyanepsion und Mämakterion angenommen. Der Monat zerfiel in drei 10tägige Wochen, deren Tage mit den Ordnungszahlen bezeichnet wurden, für die letzte Woche zuweilen in umgekehrter Reihenfolge. Der Tagesanfang wurde mit Sonnenuntergang gerechnet.

Gelegentlich bedienen sich die Kirchenväter und die späteren Geschichtsschreiber des Orients der Olympiadenrechnung zur Datirung, indem sie diese Zählweise auf die ihnen geläufige Form der festen Sonnenjahre übertragen, dabei aber die Olympiaden vom 1. September 778 v. Chr. ab rechnen.

Der römische und der christliche Kalender. Da der zweite dieser Kalender aus dem ersten hervorgegangen ist, so mögen sie auch im direkten Anschluss aneinander besprochen werden. Die Römer hatten ursprünglich ein reines Mondjahr mit 12 Monaten (möglicher Weise in noch früherer Zeit nur 10) die aber nicht abwechselnd 30 und 29 Tage hatten, sondern stets eine ungerade Anzahl von Tagen, angeblich weil die Römer es für nöthig hielten, dass jeder Monat einen genau in der Mitte liegenden Tag hatte. Die Namen und Längen der Monate waren:

1) Martius	31 Tage	7) September . .	29 Tage
2) Aprilis	29 „	8) October . . .	31 „
3) Majus	31 „	9) November . .	29 „
4) Junius	29 „	10) December . .	29 „
5) Quintilis . . .	31 „	11) Januarius . . .	29 „
6) Sextilis	29 „	12) Februarius . .	27 „

Die Namen erklären sich so: der 1. Monat ist dem Mars heilig, der 2. dem Apollo mit dem Beinamen Aperta, der 3. dem Jupiter mit dem Beinamen Majus, der 4. der Juno, der 5. bis 10. tragen die Ordnungszahlen, der 11. war dem Janus heilig und der 12. dem Pluto oder Februus. Dass dieser letzte Monat nur 27 Tage hatte, erklärt sich daraus, dass bei einem Jahre von 354 Tagen nicht mehr Tage für ihn übrig waren. Numa soll nun ein Lunisolarjahr eingeführt haben, indem er bestimmte, dass jedem 2. Jahre ein Schaltmonat von 22 und jedem 4. Jahre ein solcher von 23 Tagen mit dem Namen Markedonius angefügt werden sollte. In solchem Schaltjahre endete man den Februar mit dem Feste der Terminalien (*terminus* = Ende), welches auf den 23. Februar fiel, und fügte die 4 restbleibenden Tage dem Markedonius zu. Dieser Schaltmodus wurde sehr bald durchbrochen, indem man es den Pontifices überliess, zu bestimmen, wann ein Schaltmonat eingefügt werden sollte, wodurch allmählich der ganze Kalender in grosse Unordnung gerieth. Um diese zu beseitigen, beschloss Julius Caesar eine Kalenderreform durchzuführen, die er unter Beirath des Aegypters Sosigenes in folgender Weise ins Werk setzte. Um die alte

Ordnung wieder herzustellen, dass nämlich der 1. Januar nahezu auf den kürzesten Tag im Jahre und zugleich auf einen Neumond fiel, befahl er als *Pontifex maximus*, dass im Jahre 708 a. u. c. (46 v. Chr.) nicht nur der Markedonius mit 23 Tagen, sondern zwischen November und December ein *mensis intercalaris prior* mit 29 Tagen, ein *mensis intercalaris posterior* mit 31 Tagen und 7 weitere Schalttage (Epagomenen) eingefügt werden sollten, wodurch dieses Jahr die Länge von 444 Tagen erhielt, weshalb es das Jahr der Verwirrung *(annus confusionis)* genannt wurde. Ferner sollten von da ab die Monate Aprilis, Junius, Sextilis, September und November je 30 Tage, December und Januarius je 31 Tage und der Februarius in einem Gemeinjahr 29, in einem Schaltjahr 30 Tage haben. Dadurch erhielt das Gemeinjahr eine Länge von 365 Tagen, während jedes vierte Jahr ein Schaltjahr zu 366 Tagen sein sollte. Der Jahresanfang wurde definitiv auf den 1. Januar verlegt. Der Schalttag sollte, wie früher der Markedonius, nach dem 23. Februar eingefügt werden, aber keine besondere Nummer erhalten, sondern als *ante diem bissextum Calendas Martias* bezeichnet werden. Daher hiess der Schalttag *dies bissextus*, das Schaltjahr *annus bissextus*, woraus spätere Chronologen *bissextilis* gemacht haben, welche Bezeichnung wir noch in dem heutigen *année bissextile* der Franzosen wiederfinden. Nach CAESAR's Ermordung wurde missverständlich die ersten 36 Jahre hindurch jedes 3. Jahr zum Schaltjahr gemacht, sodass in diesen Jahren 12 statt 9 Schalttage eingefügt wurden. Um diesen Fehler zu verbessern, befahl AUGUSTUS, dass die nächsten 12 Jahre kein Schalttag eingefügt werden sollte; zugleich ordnete er an, dass der Geburtsmonat CAESAR's — der Quintilis — diesem zu Ehren den Namen Julius tragen sollte, worauf der Senat beschloss, dem Monat Sextilis, in welchem Augustus seine meisten Siege erfochten hatte, diesem zu Ehren den Namen AUGUSTUS zu verleihen und ihm ebensoviel Tage wie dem Julius, also 31, zu geben, weshalb sich denn der Februar fortan mit nur 28 Tagen behelfen musste. So ist der heute noch gebräuchliche julianische Kalender entstanden.

Die Römer zählten die Jahre von der Gründung der Stadt (*ab urbe condita* = *a. u. c.*), d. h. vom 1. Januar 753 v. Chr. ab, doch werden bei den Datirungen meistens nur die Consuln angegeben, die in dem betreffenden Jahre amtirten. Ein vollständiges Verzeichniss derselben findet man in ALMELOVEEN's *Fastorum Romanorum Consularium libri duo.* Später kamen durch die Eroberungen der Römer noch andere Zählweisen der Jahre hinzu, wie die schon erwähnte Aera des AUGUSTUS in Aegypten und die Caesarisch-Antiochische Aera in Kleinasien. Andere solche Epochen, von denen eine neue Jahreszählung ab datirte, sind der 1. Januar 45 v. Chr. für die Aera der Kalenderverbesserung, der 1. Januar 38 v. Chr. für die spanische Aera (Eroberung Spaniens durch die Römer) und der 1. Januar 27 v. Chr. für die Aera der römischen Kaiser *(Anni Augustorum).* Hierher gehören die schon in der christlichen Zeit entstandenen bereits früher genannten Aeren des DIOCLETIAN und des PANODORUS. Eine ähnliche Weltära wie die des PANODORUS kam in Byzanz auf, welche auf den 1. September 5509 v. Chr. zurückgeht; auch die Aera ABRAHAMS, die vom 1. Oktober 2016 v. Chr. ab gerechnet wird, gehört hierher. Im Jahre 527 n. Chr. schlug der Abt DIONYSIUS EXIGUUS vor, die Jahre von der Fleischwerdung Christi *(ab incarnatione Domini)*, d. h. vom 25. März 753 a. u. c., zu zählen, doch erst 80 Jahre später nahm BONIFACIUS IV. diesen Vorschlag für die Zählung der Jahre an, worauf sich die Zählung allmählich in Italien, Frankreich u. s. w. einbürgerte, wohl zuletzt, nämlich erst 1415 n. Chr., in Portugal. Im Orient wurde früher gelegentlich eine

Aera *ab incarnatione* verwendet, die 8 Jahre später beginnt, als die jetzt überall gebräuchliche. Das Unbequeme bei dieser Zählung ist, dass man Jahre vor und nach Christi Geburt unterscheiden muss, wobei man noch dazu das Jahr Null nicht rechnet. Das thun die Astronomen, indem sie das Jahr 1 v. Chr. als Null zählen, wodurch dann sämmtliche Jahre v. Chr. um eine Einheit kleiner werden. Die Astronomen kennzeichnen das durch ein vor die Zahl gesetztes Minuszeichen, also:

298 v. Chr. Geb. (chronologisch) = — 297 (astronomisch).

Schon KEPLER hat darauf hingewiesen, dass DIONYSIUS EXIGUUS sich bei seiner Berechnung vermuthlich um 5 Jahre geirrt hat, oder richtiger gesprochen, wir kennen das Geburtsjahr Christi nicht. Was den von ihm vorgeschlagenen Jahresanfang (25. März) betrifft, so hat der niemals unumschränkt gegolten, sondern neben ihm war der 25. December im Gebrauch, so besonders in Deutschland, wo sich dann allmählich als Jahresanfang der 1. Januar entwickelte. Umgekehrt war es in Frankreich und England, wo man vom 25. December zum 25. März überging, der dann gegen den 1. Januar durch Gesetz ausgetauscht wurde in Frankreich 1566, in den Niederlanden 1575, in Schottland 1599 und in England erst 1752.

Das Jahr im julianischen Kalender ist gegen das tropische um $11^m\ 12^s$ zu gross, welcher Fehler nach $128\frac{1}{2}$ Jahren zu einem Tage und nach 1285 Jahren zu 10 Tagen angewachsen ist, doch wäre dieser Fehler in der Praxis nicht sobald bemerkt worden, wenn das Concil von Nicaea (325) nicht zur Berechnung des christlichen Osterfestes die Regel aufgestellt hätte, dass Ostern an dem Sonntag zu feiern ist, der auf den ersten Vollmond nach der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche folgt, und zugleich, weil damals das Frühlingsäquinoctium auf den 21. März fiel, den 21. März als Frühlingspunkt festgesetzt hätte. Dadurch rückte das Osterfest immer mehr gegen den Sommer vor und machte eine Reform wünschenswerth. Nach den vergeblichen Vorschlägen von BEDA, ROGER BACON, PIEERE D'AILLY, NICOLAUS V. CUSA, STÖFFLER und MICHAEL STIFEL, sowie den erfolglosen Versuchen des Papstes SIXTUS IV. und des lateranischen Concils führte Papst GREGOR XIII. durch die vom 1. März 1582 datirte Bulle die Reform in der Weise nach einem Plane der Gebrüder LUIGI und ANTONIO LILIO durch, dass er befahl, auf den 4. gleich den 15. October 1582 folgen zu lassen, um den Frühlingspunkt wieder auf den 21. März zu bringen, und in Zukunft alle diejenigen vollen Jahrhunderte als Gemeinjahre zu rechnen, in welchen die Division durch 400 nicht aufgeht. Dadurch ist das gregorianische Jahr nur um 26^s grösser als das tropische, welcher Fehler erst in 3345 Jahren einen Tag ausmachen wird.

Die gregorianische Kalenderreform wurde streng nur in Spanien, Portugal und einem Theil von Italien durchgeführt, Frankreich und ein Theil der katholischen Niederlande folgten noch im gleichen Jahre, 1583 thaten das ein Theil der katholischen Schweizer Cantone, 1584 das katholische Deutschland, 1586 Polen, 1587 Ungarn u. s. w. Die protestantischen deutschen Reichsstände nahmen am 23. October 1699 den von ERHARD WEIGEL vorgeschlagenen »verbesserten Reichskalender« an, indem sie auf den 18. Februar 1700 gleich den 1. März folgen liessen, die gregorianische Schaltmethode acceptirten, aber ihre Osterrechnung auf die besseren von KEPLER berechneten RUDOLPHINI'schen Tafeln gründeten, wodurch sie gelegentlich zu einem anderen Osterfest geführt wurden als die

Katholiken. Als dies 1778 wieder bevorstand, setzte FRIEDRICH DER GROSSE die völlige Annahme des gregorianischen Kalenders durch.

Die Römer hatten eine 8 tägige Woche *(nundinum)* und jedem Tage derselben wurde einer der 8 ersten Buchstaben des Alphabets als Bezeichnung vorgesetzt. Das Christenthum übernahm von den Juden die 7 tägige Woche, die aber von den Christen, zum Unterschiede gegen die Juden, nicht wie bei diesen mit einem Ruhetag (dem Sabbath) beendigt, sondern mit einem Ruhetag (dem Tag des Herrn, *Domenica)* begonnen wird; die übrigen Wochentage hiessen dann Feria I, Feria II, u. s. w. Die Astrologie hatte schon frühe die sieben Wochentage mit den sieben Wandelsternen des PTOLEMÄI'schen Systems in der Reihenfolge (von aussen nach innen). 1) Saturn ♄, 2) Jupiter ♃, 3) Mars ♂, 4) Sonne ☉, 5) Venus ♀, 6) Merkur ☿ und 7) Mond ☾ dadurch in Beziehung gebracht, dass dieselben der Reihe nach die Stunden des Tages regierten und dabei derjenige, welcher die erste Tagesstunde regierte, zugleich Tagesregent war und dem Tag seinen Namen gab. Die erste Stunde des Sabbaths regierte der Saturn, welcher daher auch der Regent des Sabbaths war; er regierte natürlich auch die 8., 15. und 22. Stunde des Sabbaths, die 23. regierte der Jupiter, die 24. der Mars, und die Sonne die erste Stunde des nächsten Tages. Dann regierte die Sonne auch die 8., 15. und 22. Stunde des nächsten Tages, die Venus die 23, der Merkur die 24., und der Mond die erste Stunde des dritten Tages und so fort, woraus die folgenden lateinischen Namen der Wochentage und deren astronomische Zeichen entstanden sind, die mit den entsprechenden Namen in den wichtigsten modernen Sprachen hier zusammengestellt sind, um den Zusammenhang derselben zu zeigen.

♄	dies	Saturni	Sonnabend	Samedi	Sabbato	Saturday
☉	,,	Solis	Sonntag	Dimanche	Domenica	Sunday
☾	,,	Lunae	Montag	Lundi	Lunedi	Monday
♂	,,	Martis	Dienstag	Mardi	Martedi	Tuesday
☿	,,	Mercurii	Mittwoch	Mercredi	Mercoledi	Wednesday
♃	,,	Jovis	Donnerstag	Jeudi	Jovedi	Thursday
♀	,,	Veneris	Freitag	Vendredi	Venerdi	Friday

Dieser wird sofort klar, wenn man berücksichtigt, dass die römischen Götter gegen altnordische vielfach ausgetauscht sind. So treten für Mars die Schlachtengötter Tues, Zio (daher im Allemannischen »Zistig« für Dienstag) und Erich (daher in Steyermark »Erchtag«) ein, für Merkur: Wodan, für Jupiter: Donnar und Thor und endlich für Venus: Freia. Auch als *Jahresregent* tritt jedesmal einer der Wandelsterne auf, und man bestimmt denselben für ein beliebiges christliches Jahr J, indem man $\frac{J+4}{7}$ bildet und mit dem Rest bei dieser Division in die obige Reihe der Wandelsterne eingeht, also bleibt der Rest 6, so ist Merkur der Regent des Jahres J.

Die römische Sitte, die acht ersten Buchstaben des Alphabets für die Bezeichnung der Wochentage zu nehmen, hat sich auch in der Form in den christlichen Kalender eingebürgert, dass man die 7 ersten Tage des Jahres mit den 7 Anfangs-Buchstaben des Alphabets bezeichnet, dann den 8., 15., 22., 29. Januar wieder mit *A*, den 9., 16., 23., 30. Januar mit *B* und so fort. Denjenigen Buchstaben, der auf den ersten Sonntag im Jahre fällt, nennt man den *Sonntagsbuchstaben* des Jahres. Da nun ein Gemeinjahr aus $52 \times 7 + 1$ Tag und ein Schaltjahr

aus $52 \times 7 + 2$ Tagen besteht, so rückt nach einem Gemeinjahr der Sonntagsbuchstabe um einen, nach einem Schaltjahr um zwei Buchstaben zurück, so kommt es, dass erst nach 28 Jahren wieder dieselbe Reihenfolge der Sonntagsbuchstaben eintritt. Dieser Cyklus von 28 Jahren heisst der *Sonnencirkel.* Der Anfang eines solchen ist an sich beliebig, doch hat man festgesetzt, als erstes Jahr ein Schaltjahr zu wählen, das mit einem Montage anfängt. Rechnet man davon rückwärts, so fällt der Anfang eines Sonnencirkels 9 Jahre vor Christi Geburt. Will man für ein beliebiges Jahr J wissen, das wievielte im laufenden Sonnencirkel es ist, so hat man $J + 9$ durch 28 zu dividiren, die ganze Zahl die sich dabei ergiebt, sind die Anzahl der bereits verstrichenen Sonnencirkel und der Rest, der bei der Division übrig bleibt, giebt an, das wievielte Jahr das Jahr J im laufenden Sonnencirkel ist. Diesen Rest bezeichnet man mit z und nennt ihn gemeinhin den *Sonnencirkel* des betreffenden Jahres. Mit diesem kann man aus der nachstehenden Tabelle den Sonntagsbuchstaben des Jahres entnehmen, wobei Folgendes zu beachten ist. Der Schalttag ist der 24. Februar, welcher aber denselben Buchstaben erhält wie der 24., wodurch erreicht wird, dass der 1. März denselben Buchstaben erhält im Schaltjahr, den er in einem Gemeinjahr mit gleichem Sonntagsbuchstaben haben würde. Dadurch fallen also in der Schaltwoche auf 7 Tage nur 6 Buchstaben und der Sonntagsbuchstabe rückt nach dem Schalttage um einen Buchstaben zurück. Das Schaltjahr hat also zwei Sonntagsbuchstaben, von denen der erste für Januar und Februar, der zweite für März bis December gilt. In der Tabelle bedeutet z Sonnencirkel, S Sonntagsbuchstabe.

z	S	z	S	z	S	z	S
1	*GF*	8	*E*	15	*C*	22	*A*
2	*E*	9	*DC*	16	*B*	23	*G*
3	*D*	10	*B*	17	*AG*	24	*F*
4	*C*	11	*A*	18	*F*	25	*ED*
5	*BA*	12	*G*	19	*E*	26	*C*
6	*G*	13	*FE*	20	*D*	27	*B*
7	*F*	14	*D*	21	*CB*	28	*A*

Das alles gilt für den julianischen Kalender; für den gregorianischen hat der Sonnencirkel keine rechte Bedeutung mehr, um aber diese Tabelle zur Bestimmung des gregorianischen Sonntagsbuchstaben verwenden zu können, berechnet man den julianischen Sonnenzirkel und zieht davon

2 ab, wenn das gregorianische Jahr zwischen 1582 und 1699 liegt,
3 „ „ „ „ „ „ 1700 „ 1799 „
4 „ „ „ „ „ „ 1800 „ 1899 „
5 „ „ „ „ „ „ 1900 „ 2099 „

Mit dem Rest geht man als z in obige Tabelle ein. Ergiebt sich der Rest zu 0, — 1, — 2, — 3 oder — 4, so nimmt man statt dessen der Reihe nach als z 28, 27, 26, 25 oder 24. Findet man aus der Tabelle für ein gregorianisches Schaltjahr nur einen Sonntagsbuchstaben, so ist vor 1800 der gefundene Buchstabe giltig für März bis December, für Januar und Februar gilt der nächstfolgende als Sonntagsbuchstabe; für Zeiten nach 1900 ist die Regel gerade umgekehrt. Findet man aus der Tabelle für ein gregorianisches Gemeinjahr zwei

Buchstaben, so ist vor 1800 der in der Tabelle zuerst stehende, also dem Alphabet nach nachfolgende Buchstabe der richtige; nach 1900 ist es umgekehrt. Zwischen 1800 und 1900 kommen beide Fälle nicht vor.

Der Metonische 19 jährige Cyklus wurde von der christlichen Kirche zur Osterrechnung verwendet. In dem beliebig gewählten Anfangsjahr eines solchen Cyklus fiel der Neumond auf den 23. Januar, rechnet man davon rückwärts, so fiel im Jahre 1 v. Chr. der Neumond auf den 23. Januar. Die Division der um 1 vermehrten Jahreszahl durch 19 giebt an, wieviele solcher Cyklen schon verstrichen sind, während der übrigbleibende Rest g besagt, das wievielte Jahr im laufenden Mondcyklus das fragliche ist; dieser Rest g heisst die *goldene Zahl*, weil man sie im Mittelalter in den Kalendern mit Goldschrift schrieb. Nun sind 12 synodische Monate 10,883 Tage kürzer als ein julianisches Jahr von 365,25 Tagen, daher wird der Mond beim Anfang des nächsten Jahres rund 11 Tage älter sein als beim Anfang des laufenden. Dieses Alter des Mondes beim Jahresanfang nennt man die *Epakte* (von ἐπακταί), dieselbe berechnet sich daher für den julianischen Kalender als der Rest, der bei der Division $\frac{11 \times g}{30}$ bleibt. Für den gregorianischen Kalender muss man von diesem Rest zunächst bis zum Jahre 1700 die 10 weggelassenen Tage abziehen, nach 1700 deren 11; diese Correktur heisst die *Sonnengleichung* der Epakte. Nun weichen aber nach $312\frac{1}{2}$ Jahren die Neumonde um einen Tag zurück, weshalb die Epakte dann um einen Tag vermehrt werden müsste; da die Zahl $312\frac{1}{2}$ unbequem ist, so vermehrt man im gregorianischen Kalender sieben Mal hintereinander aller 300 Jahre und dann einmal nach 400 Jahren die Epakte um eine Einheit. Diese Correktur heisst die *Mondgleichung* der Epakte. Sonnen- und Mondgleichung heben sich, wo sie zusammentreffen, gegenseitig auf. Daher ist für ein christliches Jahr die

gregorianische Epakte = der julianischen Epakte minus 10 für 1582—1700
" " = " " " " 11 " 1701—1900
" " = " " " " 12 " 1901—2200.

Die Epakte schreibt man stets mit römischen Ziffern.

Alle 15 Jahre wurden im römischen Reiche die Steuercataster neu hergestellt, und man nennt daher diesen Cyklus von 15 Jahren den Cyklus der Indictionen. Ein solcher hat am 1. Januar 312 begonnen, und geht man davon rückwärts, so kommt man auf das Jahr 3 v. Chr.. Dividirt man daher die um 3 vermehrte Jahreszahl durch 15, so giebt die ganze Zahl an, wieviel volle Indictionencyklen verflossen sind, während der Rest besagt, das wievielte das fragliche Jahr im laufenden Cyklus ist; dieser Rest heisst die *Römerzinszahl* des Jahres.

Um Sonnenzirkel, Epakte und Römerzinszahl leichter berechnen zu können, schlug Joseph Scaliger vor, einen Cyklus von $28 \times 19 \times 15 = 7980$ Jahren einzuführen und denselben mit einem Jahre zu beginnen, in welchem Sonnenzirkel, goldene Zahl und Römerzinszahl gleich 1 sind, d. h. mit dem Jahr 4713 v. Chr. Für die Jahre dieser Periode folgen Sonnenzirkel, goldene Zahl und Römerzinszahl einfach als die Reste, die bei der Division der Jahreszahl durch 28, 19 und 15 übrig bleiben. Diese Periode nannte Scaliger die *julianische Periode*, entweder seinem Vater Julius Scaliger zu Ehren, oder weil darin

nach julianischen Jahren gerechnet wird. Diese Periode ist bei chronologischen Untersuchungen sehr viel angewendet besonders in einzelnen modernen chronologischen Hilfstafeln, wo aber nicht nach Jahren, sondern nach Tagen dieser Periode gezählt wird.

Alle diese zuletzt besprochenen Grössen dienten früher zur Berechnung des Osterfestes, sind aber jetzt überflüssig geworden durch die von GAUSS aufgestellte Osterformel. Dieselbe lautet: Entsteht aus der Division

der Jahreszahl	mit 19	der Rest	a
„ „	„ 4	„ „	b
„ „	„ 7	„ „	c
„ Zahl $19a + M$	„ 30	„ „	d
„ „ $2b + 4c + 6d + N$	„ 7	„ „	e,

so fällt Ostern auf den $(22 + d + e)$ten März oder, wenn dieser Werth grösser als 31 wird, auf den $(d + e - 9)$ten April. Dabei ist im julianischen Kalender stets $M = 15$, $N = 6$. Im gregorianischen Kalender sind M und N für 100 Jahre constant, und zwar für $100k + 99$ berechnet sich M und N wie folgt. Die ganzen Quotienten, welche herauskommen (mit Vernachlässigung der Reste) bei den Divisionen $\frac{k}{3}$ und $\frac{k}{4}$ seien p und q, dann sind M und N die Reste, die man erhält bei den Divisionen

$$\frac{15 + k - p - q}{30} \quad \text{und} \quad \frac{4 + k - q}{7}.$$

Danach sind

für 1582—1699	$M = 22$	$N = 2$
„ 1700—1799	„ $= 23$	„ $= 3$
„ 1800—1899	„ $= 23$	„ $= 4$
„ 1900—2099	„ $= 24$	„ $= 5$.

Ausnahmen von der GAUSS'schen Regel sind: Erhält man aus der Rechnung den 26. April, so muss statt dessen der 19. April genommen werden, und findet man durch die Rechnung als Termin den 25. April und ist dabei a grösser als 10 und d gleich 28, so fällt Ostern thatsächlich auf den 18. April. Ostern kann frühestens auf den 22. März und spätestens nur auf den 25. April fallen.

Wir müssen noch einen Blick auf den russischen Kalender werfen, denn wenn derselbe auch sonst genau mit dem julianischen übereinstimmt, so sind doch Sonnenzirkel, goldene Zahl, Sonntagsbuchstabe und Epakte anders im russischen Kalender. Wenn J die Jahreszahl bezeichnet, so ist

der russische Sonnenzirkel gleich dem Rest, der bei $\frac{J + 20}{28}$ bleibt

die „ goldene Zahl „ „ „ „ „ $\frac{J + 17}{19}$ bleibt.

Die ersten sieben Buchstaben des russischen Alphabetes sind: *A (As), B (Wiedi), G (Glagol), D (Dobro), E (Jest), Sz (Selo), S (Semla).* Der Sonntags-

buchstabe *(Wrutzeleto)* giebt an, auf welchen Wochentag der 1. September fällt, mit welchem Tage bis zu Peter dem Grossen das russische Jahr anfing. Ist der *Wrutzeleto A, B* oder *G*, so fällt der 1. September auf einen Sonntag, Montag oder Dienstag. Man findet den Sonntagsbuchstaben für ein russisches Jahr, indem man das Fünffache des russischen Sonnenzirkels durch 4 dividirt und den Quotienten mit Vernachlässigung des Restes durch 7 dividirt, der Rest, der bei dieser zweiten Division bleibt, giebt an, der wievielte von sieben ersten Buchstaben der Sonntagsbuchstabe ist. Die julianische Epakte ist in den russischen Kalender unverändert übergegangen, führt aber daselbst den Namen *Osnowanie*, während man unter *Epakta* im russischen Kalender die Zahl versteht, welche die Osnowanie zu 21 oder, wenn diese selbst schon grösser ist, zu 51 ergänzt. Unter dem Kalenderschlüssel *(Klutsch Granitz)* versteht man die Zahl, welche angiebt, wieviel Tage nach dem 21. März der Ostersonntag fällt, also z. B. *Klutsch Granitz* = 11, so fällt in dem Jahre der Ostersonntag auf den 1. April. Heut zu Tage berechnet man die russische Ostergrenze, d. h. den Tag auf dessen nächstfolgenden Sonntag Ostern fällt, folgendermaassen: Man dividirt die Jahreszahl durch 19, den Rest, der dabei bleibt, multiplicirt man mit 19, dividirt das Produkt durch 30 und addirt den dabei bleibenden Rest zum 5. April; wird die so erhaltene Ostergrenze grösser als der 18. April, so zieht man 30 Tage davon ab. Fällt die Ostergrenze selbst auf einen Sonntag, so fällt Ostern auf den folgenden. Um das russische Datum oder Datum alten Styles zu finden, das einem bestimmten gregorianischen Datum oder Datum neuen Styles entspricht, muss man von letzterem abziehen

10 Tage, wenn das gregorianische Datum zwischen	1582	und dem 24. Februar 1700
11 Tage, wenn das gregorianische Datum zwischen dem	24. Februar 1700	und dem 24. „ 1800
12 Tage, wenn das gregorianische Datum zwischen dem	24. „ 1800	und dem 24. „ 1900
13 Tage, wenn das gregorianische Datum zwischen dem	24. „ 1900	und dem 24. „ 2100

liegt.

Der jüdische Kalender ist in seiner jetzigen Form im Jahre 338 n. Chr. durch den Rabbi Samuel aufgestellt, der sich dabei dem vorhandenen alten Kalender so viel als möglich anschloss. Er behielt die alten Mondmonate, die vom ersten Sichtbarwerden der Mondsichel ab gezählt werden, bei und ordnete nur die cyklische Berechnung der Neumonde, welche Moled heissen, und die Einschaltung der Monate in das Lunisolarjahr. Dabei nahm er den Metonischen 19jährigen Cyklus an, doch bestimmte er in demselben die Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17 und 19 als Schaltjahr von 13 Monaten. Die Jahre selbst zählt er nach Erschaffung der Welt, welche er auf den 7. October 3761 v. Chr. setzt, sodass man nur diese Jahreszahl zu einem christlichen Jahre zu addiren hat, um zu wissen, welches jüdische Jahr in dem betreffenden christlichen Jahre beginnt. Bei den Gemein- und den Schaltjahren hat man *mangelhafte*, *regelmässige* und *überzählige* zu unterscheiden, deren Längen 353, 354 und 355 für das Gemein-, 383, 384 und 385 Tage für das Schaltjahr betragen. Die Namen der Monate und ihre Längen für die regelmässigen Jahre sind.

Name	Länge im Gemeinj.	Länge im Schaltjahr	Name	Länge im Gemeinj.	Länge im Schaltjahr	Name	Länge im Gemeinj.	Länge im Schaltjahr
Tischri . . .	30	30	Schebat . . .	30	30	Ijar . . .	29	29
Marcheschwan .	29	29	Adar	29	30	Sivan . . .	30	30
Kislev . . .	30	30	Veadar (Schaltm.)	—	29	Thamuz . .	29	29
Tebet . . .	29	29	Nisan	30	30	Ab	30	30
						Elul . . .	29	29

In den mangelhaften Jahren hat der Kislev nur 29, in den überzähligen dagegen der Marcheschwan 30 Tage. Die eigenthümliche Verschiedenheit der Jahreslängen ist mit bedingt durch die eigenthümliche Neujahrsberechnung. Die allgemeine Regel dafür lautet: Der Neujahrstag fällt auf den Moled, welcher der nächste nach der Herbst-Tag- und Nachtgleiche ist. Davon bestehen 5 Ausnahmen.

1) Fällt der Neujahrsmoled auf Sonntag, Mittwoch oder Freitag, so verlegt man Neujahr auf den folgenden Tag, weil sich sonst die Festtage zu sehr häufen und dadurch Missstände eintreten würden. Diese Verhinderung heisst *Adu* (Zusammenfügung der Zahl-Zeichen für Sonntag, Mittwoch und Freitag).

2) Fällt der berechnete Neumond nach 18 Uhr (d. h. 12^h Mittags, weil die Juden den Tag 6^h Abends beginnen), so wird die Mondsichel voraussichtlich erst am folgenden Abend sichtbar, also setzt man Neujahr auch erst auf den folgenden Tag; diese Verzögerung heisst *Jach* (d. h. 18).

3) Müsste wegen *Jach* Neujahr auf einen Sonntag, Mittwoch oder Freitag fallen, so fällt es wegen *Adu* noch einen Tag später; Verhinderung *Jach-Adu*.

4) Fällt in einem Gemeinjahr der Neujahrsmoled auf einen Dienstag zwischen 9 Uhr 204 Chlakim und 18 Uhr, so würde der Moled des folgenden Jahres auf einen Sonnabend nach 18 Uhr fallen, müsste also wegen *Jach-Adu* auf den Montag verlegt werden. Dadurch würde das laufende Jahr eine Länge von 356 Tagen erhalten, die aber nicht vorkommen darf, daher muss man das Jahr erst am Donnerstag anfangen. Die Verzögerung heisst *Gatrad* (das sind die Zeichen für Dienstag, 9 Uhr, 204 Chlakim).

5) Fällt in einem Gemeinjahr, das auf ein Schaltjahr folgt, der Neujahrsmoled auf Montag zwischen 15 Uhr 589 Chlakim und 18 Uhr, so fiel der Neujahrsmoled des vorhergehenden Schaltjahres auf Dienstag nach 18 Uhr, musste also wegen *Jach-Adu* auf Donnerstag verlegt werden. Wollte man das Gemeinjahr nun an diesem Montag beginnen, so hätte das Schaltjahr nur 382 Tage gehabt, es muss aber mindestens 383 Tage haben, folglich fängt man das Gemeinjahr erst am Dienstag an. Verhinderung *Betuthakpat* (Zeichen für Montag, 15 Uhr, 589 Chlakim).

Das jüdische Oster- oder Passahfest fällt immer genau 163 Tage vor das folgende Neujahrsfest und stets auf den 15 Nisan. GAUSS hat eine Formel gegeben zur Berechnung des julianischen Datums im christlichen Jahre B, auf welches das Passahfest des entsprechenden jüdischen Jahres A fällt. Für die Osterzeit besteht die Beziehung:

$$A - 3760 = B.$$

Man dividirt

$12A + 17$	oder	$12B + 12$	durch 19 und nennt den bleibenden Rest	a
A	„	B	„ 4 „ „ „ „ „	b.

Dann bildet man:

$$32{\cdot}0440932 + 1{\cdot}5542418a + 0{\cdot}25b - 0{\cdot}003177794A = M + m$$

oder

$$20{\cdot}0955877 + 1{\cdot}5542418a + 0{\cdot}25b - 0{\cdot}003177794B = M + m,$$

wo M die ganze Zahl und m den Decimalbruch bedeutet. Dann dividirt man $M + 3A + 5b + 5$ oder $M + 3B + 5b + 1$ durch 7 und nennt den übrigbleibenden Rest c, dann hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $c = 2$ oder 4 oder 6, so fällt wegen *Adu* Passah auf den $(M + 1)$ten März oder (wenn M grösser als 30 ist) auf den $(M - 30)$ten April alten Styls.

2) Ist $c = 1$, zugleich $a > 6$ ($>$ bedeutet »grösser als«, $<$ »kleiner als«) und $m \geqq 0{\cdot}63287037$, so fällt wegen *Gatrad* Passah auf den $(M + 2)$ten März alten Styls.

3) Ist $c = 0$, zugleich $a > 11$ und $m \geqq 0{\cdot}89772376$, so ist wegen *Betuthakpat* Passah am $(M + 1)$ten März alten Styls.

4) In allen übrigen Fällen ist Passah am Mten März alten Styls.

Dabei ist zu bemerken, dass das Jahr A ein Schaltjahr ist, wenn $a > 11$, ein Gemeinjahr, wenn $a < 12$ ist, und dass die ganze Rechnung im Allgemeinen nur mit zwei Decimalstellen durchzuführen ist und nur in Zweifelfällen genauer.

Die Juden fangen den Tag mit 6 Uhr Abends an und zählen die Stunden von hier ab durch bis 24. 1 Stunde zerfällt in 1080 *Chlakim* (Theil) und 1 Chlakim in 76 *Regaim* (Augenblick). Von ihrer siebentägigen Woche, die mit dem Ruhetag, dem Sabbath, schliesst, und deren Tage sonst nur mit den Ordnungszahlen bezeichnet werden, ist oben schon die Rede gewesen.

Der Kalender der Türken. Die Türken rechnen im Allgemeinen nach Mondjahren von 354 oder 355 Tagen, die sie einem Befehl des Kalifen Omar III. zu Folge von der Hedschra, d. h. der Flucht Mahommeds von Mekka nach Medina, ab zählen, welche am 16. Juli 622 nach Chr. stattfand. Sie haben einen 30jährigen Cyklus, in welchem 11 Schaltjahre zu 355 Tagen sind, und zwar sind die Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 und 29; ergiebt also die Division einer türkischen Jahreszahl durch 30 eine dieser 11 Zahlen als Rest, so ist das betreffende Jahr ein Schaltjahr. Neben dieser gewöhnlichen Rechnung ist noch eine etwas abweichende von den arabischen Astronomen aufgestellt, wonach die Hedschra auf den 15. Juli fällt und statt des 15. und 24. Jahres das 16. und 25. im 30jährigen Cyklus Schaltjahre sind, doch wird diese Zählweise nur vereinzelt angewendet. Die Monate sind:

Moharrem	hat	30	Tage	Redscheb	hat	30	Tage
Safar	„	29	„	Schabân	„	29	„
Rebî-el-awwel	„	30	„	Ramadân	„	30	„
Rebî-el-accher	„	29	„	Schewwâl	„	29	„
Dschemâdi-el-awwel	„	30	„	Dsû'l-kade	„	30	„
Dschemâdi-el-accher	„	29	„	Dsû'l-hedsche	„	29	oder 30 Tage

Unabhängig vom Monat läuft die 7tägige Woche, deren Namen sind: Ahad, Esnein, Salasa, Erbua, Chamis, Dschuma, Sebt, entsprechend unserem Sonntag bis Samstag. Da die Hedschra an einem Dschuma (Freitag) stattfand, so ist dieser Wochentag ein Festtag. Den Tag beginnen die Türken mit Sonnenuntergang.

Der Kalender der französischen Republik ist von dem Deputirten ROMME aufgestellt und am 5. October 1793 in Frankreich eingeführt, sowie am 1. Januar 1806 wieder abgeschafft worden. Die Jahre desselben sind feste Sonnenjahre und werden vom 22. September 1792, der Begründung der Republik, ab gezählt und mit römischen Ziffern bezeichnet. Das Jahr hat 12 Monate zu je 30 Tagen, dazu kommen im Gemeinjahr 5, im Schaltjahr 6 *jours complémentaires* oder *jours epagomènes*. Auf 3 Gemeinjahre folgt ein Schaltjahr von 366 Tagen, die vier Jahre zusammen heissen eine Franciade. Die Namen der Monate sind:

Herbstmonate	Wintermonate	Frühlingsmonate	Sommermonate
1) Vendémiaire	4) Nivôse	7) Germinal	10) Messidor
2) Brumaire	5) Pluviôse	8) Floréal	11) Thermidor
3) Frimaire	6) Ventôse	9) Prairial	12) Fructidor

Jeder Monat zerfiel in 3 10tägige Wochen (Décade), deren Tage hiessen: Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Décadi deren letzter immer ein Festtag war. Der Tag begann mit Mitternacht und hatte 10 Stunden, 1 Stunde 100 Minuten, 1 Minute 100 Secunden.

Um nun alle die hier besprochenen Kalender, sowie noch einige andere weniger wichtige Zeitrechnungen, die hier aus Platzmangel übergangen werden mussten, mit einander vergleichen und eine Zeitangabe nach einem Kalender bequem in die entsprechende eines anderen Kalenders umrechnen zu können, hat Dr. ROBERT SCHRAM in Wien »Kalendariographische Tafeln« berechnet, die einen Theil seiner schon erwähnten »Hilfstafeln für Chronologie« bilden und im XLV. Bande der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien 1882, pag. 303 ff., abgedruckt sind (auch als Separatabdruck bei KARL GEROLD's Sohn, Wien 1883, erschienen). Für alle Kalender enthalten die SCHRAM'schen Tafeln je zwei Tabellen, welche als »Tafel I« und »Tafel II« unterschieden sind. »Tafel I« giebt für grössere geeignet erscheinende Zeitabschnitte des betreffenden Kalenders die seit Anfang der oben erwähnten julianischen Periode von SCALIGER verflossenen Tage an, während »Tafel II« die seit Beginn eines solchen grösseren Zeitabschnittes verstrichenen Tage von Monat zu Monat liefert. Die Einrichtung dieser zwei Tafeln ist bei den verschiedenen Kalendern möglichst gleich gehalten, im übrigen geben über ihre Anwendung die von SCHRAM auf der ersten Seite seiner Tafeln (pag. 303 des ganzen Bandes) gegebenen Erläuterungen über »Einrichtung und Gebrauch der Tafeln«, sowie die jedem Kalender vorgedruckten Erklärungen genügend Aufschluss. Der *modus operandi* ist also stets der, dass man eine gegebene Kalenderangabe in Tage der julianischen Periode verwandelt und diese rückwärts in die dem gegebenen Datum entsprechende Angabe eines anderen Kalenders. Auf pag. 358 der SCHRAM'schen Tafeln findet sich eine »Zusammenstellung der verschiedenen Aeren von hundert zu hundert Jahren« mit ausführlicher Gebrauchsanweisung, die dazu dienen soll, auf die

einfachste Weise eine genäherte Vergleichung der verschiedenen Kalender zu ermöglichen. Da bei dieser Tafel das Jahr das kleinste Maass ist, so kann sehr wohl bei Benutzung derselben das Resultat gegen die genaue Rechnung um ein Jahr falsch sein. — Ausserdem enthalten die SCHRAM'schen Tafeln noch eine Fülle von Hilfstabellen, wie z. B. zur Festrechnung der einzelnen Kalender, Regententafeln und dergl., wodurch der Werth und die Brauchbarkeit des ganzen Werkes für den Chronologen und Historiker nur noch erhöht wird.

Literaturnachweis.

Art de vérifier les dates. Paris 1783.

GAUSS, Formel zur Berechnung des christlichen Osterfestes, v. ZACH's Monatl. Correspond. 2. Bd., pag. 121. 1800.

GAUSS, Formel zur Berechnung des jüdischen Osterfestes, v. ZACH's Monatl. Correspond. 5. Bd., pag. 435. 1802.

IDELER, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, 2 Bd. Berlin 1825/26.

H. A. E. WAGNER, Versuche eines ausführlichen Lehrbuches der Chronologie, nur 1. Teil erschienen. Leipzig 1826.

M. MAGOLD, Handbuch der Chronologie. 1829.

IDELER, Lehrbuch der Chronologie. Berlin 1831.

W. MATZKA, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange mit Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre. Wien 1844.

F. PIPER, Formeln und Tafeln zur Kirchenrechnung, CRELLE's Journal, Bd. 22, pag. 97. 1841.

FASBENDER, Darstellung des Wesens und der Geschichte des Gregorianischen Kalenders. Barmen 1851.

L. FELDT, De Gaussii formula paschali analytica commentatio. Braunsberg 1852.

F. VON SCHMÖGER, Grundriss der christlichen Zeit und Festrechnung in ihrer Entwickelung und gegenwärtigen Gestaltung. Halle 1854.

A. J. WEIDENBACH, Calendarium historico-christianum medii et novi aevi. Regensburg 1855.

A. BOECKH, Zur Geschichte der Montcyklen der Hellenen. Leipzig 1857, und: Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten. Leipzig 1863.

H. GROTEFEND, Handbuch der historischen Chronologie des deutschen Mittelalters und der Neuzeit. Hannover 1872.

F. KALTENBRUNNER, Die Vorgeschichte des gregorianischen Kalenders. Wien 1876.

E. BRINCKMEIER, Praktisches Handbuch der historischen Chronologie aller Zeiten und Völker. Berlin 1882.

A. MOMMSEN, Chronologie: Untersuchungen über das Kalenderwesen der Griechen. Leipzig 1883.

KNOBLOCH, Die wichtigsten Kalender der Gegenwart. Wien 1885.

A. SCHMIDT, Handbuch der griechischen Chronologie. Jena 1888.

E. MAHLER, Chronologische Vergleichstabellen 1. Theil. Wien 1888/89.

WISLICENUS, Astronomische Chronologie. Leipzig 1895.

M. HAMBURGER, Beweis zur GAUSS'schen Formel für die Berechnung des jüdischen Osterfestes, CRELLE's Journal, Bd. 116, pag. 90. 1896.

WALTER F. WISLICENUS.

Das Chronometer. Die für astronomische Zwecke verwendeten Präcisionsuhren können in Bezug auf ihre Construction und Verwendbarkeit in zwei Gattungen, Gewichtsuhren und Federzuguhren, eingetheilt werden. — Bei ersteren Instrumenten dient ein herabsinkendes Gewicht als Motor, und die Gleichheit der angezeigten Zeitintervalle wird durch die schwingende Bewegung eines Pendels hergestellt. Die Aufstellung dieser Uhren muss, damit ein gleichmässiger Gang erreicht wird, eine feste sein. Dem gegenüber dient bei den Federzuguhren eine spiralförmig aufgewundene Feder aus gehärtetem (federhartem) Stahl als Motor; die Gleichheit der einzelnen durch die Uhr markirten Zeiteinheiten wird durch die Schwingung eines Reifens (der Unruhe) erreicht, welcher mit einer schwingenden elastischen Spiralfeder verbunden ist. Der Gang dieser Uhren wird durch langsame Ortsveränderung (Transport) in verhältnissmässig geringem Grade beeinflusst[1].

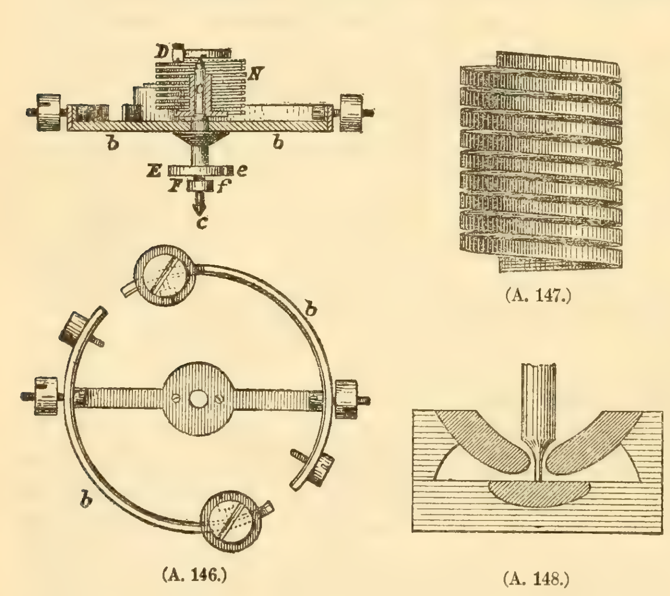
Das Bedürfniss der Herstellung tragbarer Präcisionsuhren machte sich zuerst in der Nautik geltend, seitdem durch spanische Gelehrte im Anfange des 16. Jahrhunderts darauf hingewiesen war, dass man mit Hilfe derartiger Instrumente im Stande sein würde, in einfacher Weise die geographische Länge des Schiffsortes zu ermitteln. Allein wegen des unvollkommenen Zustandes der damaligen Technik vergingen mehr als zwei Jahrhunderte, bevor eine befriedigende Lösung dieses mechanischen Problems erreicht wurde. Erst die von WILLIAM HARRISON um etwa 1730 nach neuen Principien construirten »Chronometer«, welche mit einer Temperatur-Compensation und einer doppelaxigen Aufhängung versehen waren, ergaben so zuverlässige Resultate, dass die neue Methode der Längenbestimmung praktische Anwendung in der Nautik finden konnte. Das Beispiel und die Erfolge HARRISON's wirkten naturgemäss anregend auch auf andere Künstler, und innerhalb weniger Jahrzehnte wurden die Chronometer durch Verbesserungen der einzelnen Theile zu einem hohen Grade der Zuverlässigkeit gebracht. LEROY entdeckte, dass eine Spiralfeder von einer gewissen Länge, welche experimentell ermittelt werden kann, isochrone Schwingungen macht, d. h. dass die Schwingungen einer solchen Feder — unabhängig von der Schwingungsweite — stets von gleicher Zeitdauer sind. ARNOLD führte für das Chronometer die cylindrische Spiralfeder ein, welche bei der Gleichheit ihrer Windungen schneller den Isochronismus finden und das Zusammentreffen des Schwerpunktes mit dem Mittelpunkte der Bewegung leichter erhalten lässt. EARNSHAW, ARNOLD, DUTERTRE, MUDGE u. A. erfanden die einzelnen Arten der sogenannten »freien« Hemmungen, welche die bisherigen Einrichtungen dieser Art durch Zuverlässigkeit bei weitem übertrafen; EIFFE und später AIRY, HARTNUP u. A. vervollkommneten die schon von HARRISON angewandte Com-

[1]) Es werden in astronomischen Werken die Uhren häufig in »Pendeluhren« und »Federuhren« eingetheilt. Diese Unterscheidung ist nicht streng logisch, weil als Eintheilungsprincip im ersteren Falle die Form des Regulators, im zweiten Falle die Form des Motors gewählt ist. — Ausserdem wird hierbei die Bezeichnung »Federuhr« in einem ganz anderen Sinne, wie sonst allgemein üblich, gebraucht: Der Uhrmacher versteht unter einer »Federuhr« eine solche Uhr, welche mit einer Federhemmung versehen ist, und für den hier auszudrückenden Begriff gebraucht er die Bezeichnung »Federzuguhr«.

pensations-Vorrichtung durch Einführung von Hilfscompensationen, welche erst bei extremen Temperaturen in Wirksamkeit treten und hier die bei Anwendung der einfachen Temperatur-Compensation auftretenden Gangveränderungen ausgleichen.

Die vorstehenden Erfindungen bilden die Constructionsgrundlagen aller bis auf den heutigen Tag verfertigten Chronometer. Durch die mehr oder minder strenge Durchführung dieser Principien beim Bau der Instrumente, durch die Anwendung der einen oder anderen Hemmung und durch Unterschiede in der Anordnung und Ausführung der einzelnen Theile ist aber andererseits eine so grosse Mannigfaltigkeit der Bauart geschaffen, dass es unmöglich ist, an dieser Stelle auf sämmtliche bedeutenderen Sonderconstructionen einzugehen. Da für astronomische Zwecke in erster Linie das Marine-Chronometer mit der von Earnshaw construirten Federhemmung Verwendung findet, so soll hier eine genauere Beschreibung desselben gegeben, doch an geeigneter Stelle auf die Abweichungen hingewiesen werden, durch welche sich die ebenfalls auf Sternwarten vielfach benutzte Duplexuhr in der Construction von ersterem Instrumente unterscheidet.

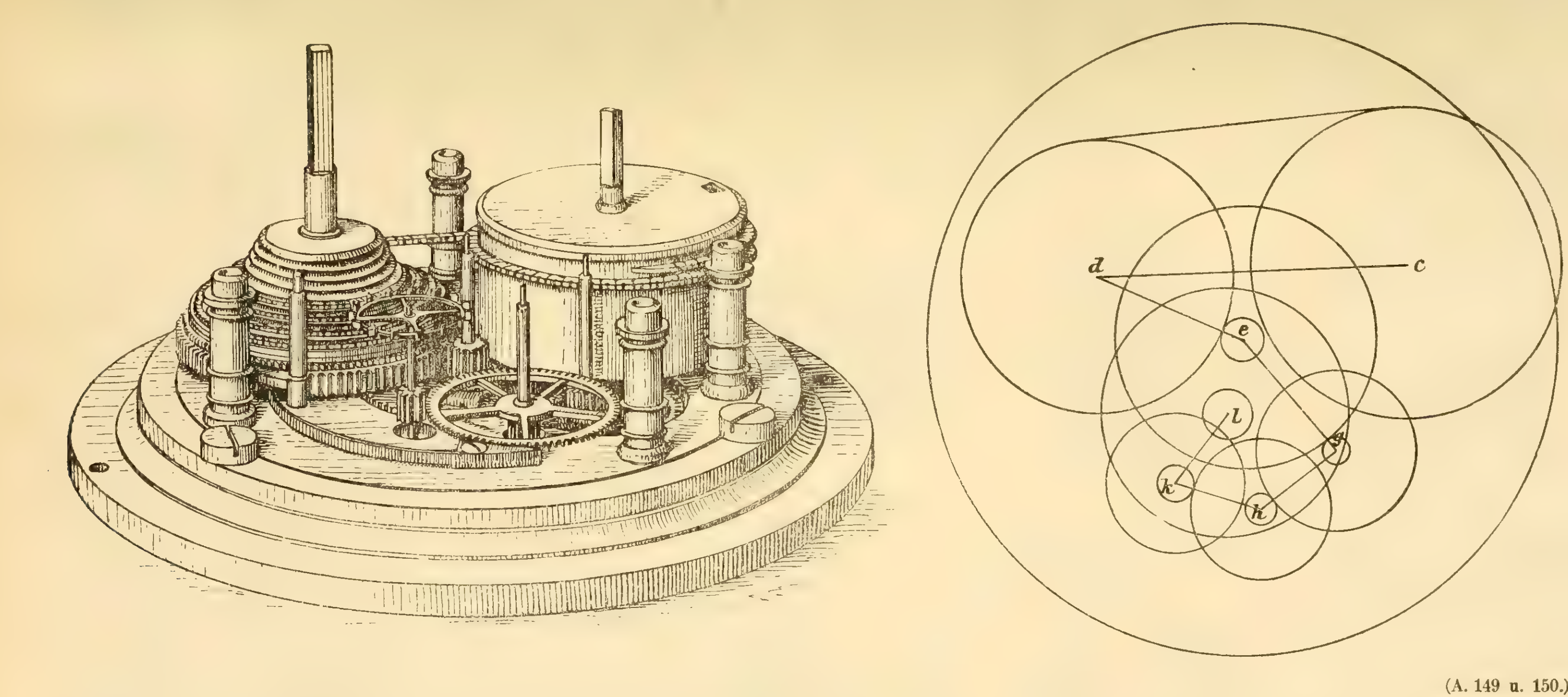
Der Mechanismus jedes Chronometers ist zusammengesetzt aus folgenden vier einzelnen Systemen: 1) der Triebkraft, 2) dem Räderwerk, 3) der Hemmung, 4) dem Regulator. Letzterer ist der eigentliche Zeiteintheiler; er besteht aus einem um die Axe cc (Fig. 146) drehbaren metallenen Reifen bb, der Unruhe oder Balance und einer cylindrischen Spiralfeder N aus federhartem Stahl (s. Fig. 146 und 147). Das eine Zapfenloch der mit der Speiche der Unruhe fest verbundenen Axe befindet sich in einer starken Metallplatte oder Platine $A_1 A_1$ (Fig. 152); das zweite Zapfenloch ist in eine an jener Platine angebrachten Brücke A' eingelassen; es ist somit der Unruhe nur eine drehende Bewegung, parallel zur Platine, möglich. — Auf die Herstellung der Zapfenlöcher und Zapfen wird seitens des Fabrikanten besondere Sorgfalt verwendet; man wählt für erstere, um die baldige Abnutzung zu verhindern, besonders harte Edelsteine (Diamanten, Rubine und Saphire). Der im Innern des Zapfenloches befindliche Hohlraum (s. Fig. 148) dient zur Aufnahme des Oeles. Die Steintheile (Steinloch und Deckstein) sind in der Figur durch schräge Schraffirung gekennzeichnet.



(A. 146.) (A. 147.) (A. 148.)

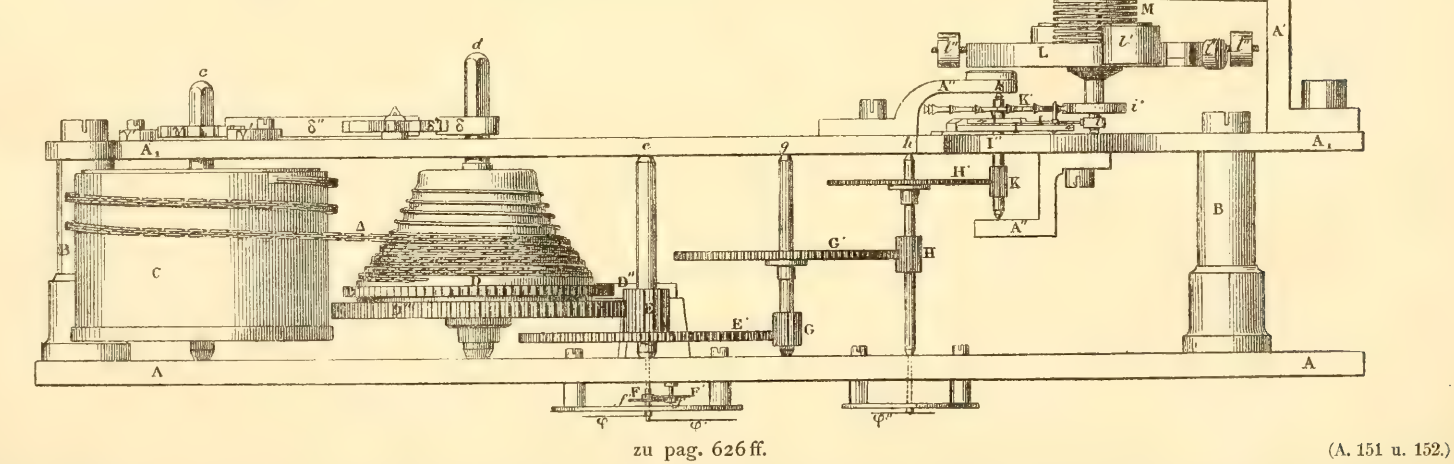


Tafel II.



(A. 149 u. 150.)

Perspective Ansicht des Räderwerks eines Chronometers nach Entfernung der unteren Platine, der Unruhe und Spirale. Das Instrument befindet sich in umgekehrter Lage (Zifferblatt unten), also in derjenigen Stellung, welche es beim Aufziehen einnimmt. Mit Hilfe der in Fig. 150 gegebenen schematischen Zeichnung, welche im Grundriss die Lage der einzelnen Räder angiebt, ist die Orientirung in Fig. 149 leicht auszuführen. Es bezeichnet: *c* das Federhaus, *d* die Schnecke, *e* das Grossbodenrad, *g* das Kleinbodenrad, *h* das Secundenrad, *k* das Hemmungsrad, *l* die Unruhe. Aus Fig. 150 ist ferner das in Fig. 151 und 152 dargestellte Chronometermodell (nach RODANET) in der Weise abgeleitet worden, dass alle Räderaxen in die Ebene zweier dieser Axen unter Berücksichtigung ihrer wahren Entfernungen gestellt worden sind; es ist dadurch die gebrochene Linie *cdeghkl* in Fig. 150 in eine Gerade übergegangen.



zu pag. 626 ff. (A. 151 u. 152.)

Chronometermodell. Bezeichnung der einzelnen Theile: A obere Platine, A_1 untere Platine, A' Brücke der Unruhe, A'', A'' Brücke der Hemmung, B, B Pfeiler der Platine, C Federhaus, γ Sperrad für die Feder, γ', γ' Sperrkegel, D Schnecke, D' Gegensperrad, D'' Sperrfeder für das Gegengesperr, D''' Schneckenrad, Δ Kette, δ Zahn der Stellung, δ' Stellungsrad, δ'' Stellungsfeder, E Trieb des Grossbodenrades, E' Grossbodenrad, F Minutenrohr, F' Wechselrad, f Trieb des Wechselrades, f' Stundenrad, φ Stundenzeiger, φ' Minutenzeiger, φ'' Secundenzeiger, G Trieb des Kleinbodenrades, G' Kleinbodenrad, H Trieb des Secundenrades, H' Secundenrad, K Trieb des Hemmungsrades, K' Hemmungsrad, I Hemmungsfeder, I' Anschlagkloben für die Hemmungsfeder, I'' Brücke der Hemmungsfeder, i kleine Rolle, i' grosse Rolle, L Unruhe, l Axe der Unruhe, l' Compensations-Gewichte, l'' Regulirschrauben, M Spirale.

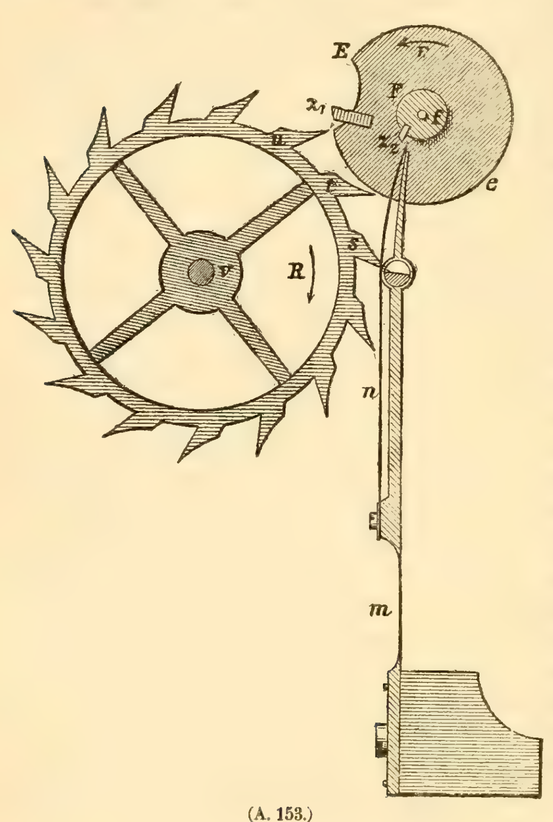


Das eine Ende der Spiralfeder ist in der Nähe der Axe der Unruhe befestigt, das andere Ende ist vermittelst eines Klöbchens mit der erwähnten Brücke *A'* fest verbunden. Entfernt man nun die Unruhe etwas aus ihrer Ruhelage, so wird die Spiralfeder eine Formveränderung erleiden: es wird bei einer Drehung in dem einen Sinne der Windungsradius der Spirale vergrössert, bei einer Drehung in dem anderen Sinne derselbe Radius verkleinert werden. Ueberlässt man nach dieser Entfernung aus der Ruhelage den Regulator sich selbst, so kehrt die Unruhe in Folge der Wirkung der in ihrem molekularen Gleichgewichte gestörten Spirale nicht nur zur Ruhelage zurück, sondern sie wird über diese Stellung hinweggeführt. Man erkennt leicht, dass in dieser Weise eine oscillirende Bewegung des Regulators zu Stande kommt, doch würde nach und nach durch die Reibung der Zapfen und den Widerstand der Luft gegen die schwingenden Theile eine Verminderung der Schwingungsweite und schliesslich ein Stillstand eintreten, falls nicht die Bewegung durch einen regelmässigen Antrieb unterhalten würde. Dieser Antrieb, welcher von dem später zu besprechenden Motor des ganzen Systems ausgeht, wird durch die Hemmung (Echappement) auf den Regulator übertragen.

Bevor wir uns indessen zur Erläuterung dieser Vorrichtung wenden, erübrigt es, auf eine nähere Beschreibung der Unruhe selbst einzugehen. Der Reifen der letzteren ist aus zwei Metallen von verschiedener Dehnbarkeit zusammengesetzt, und zwar befindet sich dasjenige Metall, dessen Ausdehnungs-Coëfficient grösser ist (Messing), auf der Aussenseite. Der innere Ring besteht aus Stahl. Um eine innige Verbindung beider Metalle an der Berührungsfläche zu erzielen, wird die Unruhe in der Art angefertigt, dass man geschmolzenes Messing um eine massive Stahlscheibe herumgiesst und dann den Reifen und die Speiche herausarbeitet. Der Reifen der Unruhe ist nahe an der Speiche an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen durchschnitten, so dass jeder Halbkreis nur an einem Ende mit der Speiche zusammenhängt. Auf den Halbkreisen sind mehrere Gewichte, welche man als compensirende Massen und Regulirschrauben bezeichnet, in symmetrischer Stellung angebracht, so dass also die Unruhe in Bezug auf ihren Mittelpunkt äquilibrirt ist. In Folge dieser Einrichtung werden sich bei steigender Temperatur die freien Schenkel der Unruhe wegen der grösseren Ausdehnung des auf der Aussenseite befindlichen Messings nach innen biegen, die compensirenden Massen werden sich demnach der Axe nähern und das Trägheitsmoment des ganzen Systems wird verringert werden. Bei sinkender Temperatur findet die gegentheilige Wirkung statt. Ausserdem ist man im Stande durch Verschieben der compensirenden Massen die erwähnte Wirkung grösser oder kleiner zu machen: Je mehr man nämlich die Gewichte dem freien Schenkel der Unruhe nähert, desto mehr werden sie bei steigender Temperatur dem Mittelpunkte der Unruhe zugeführt. — Die oben genannten Regulirschrauben, welche dazu dienen, den Uhrgang um eine constante Grösse zu verändern, sind an denjenigen Stellen angebracht, wo die Speichen der Unruhe mit den Schenkeln zusammentreffen; diese Massen werden also bei verschiedenen Temperaturen stets nahezu gleiche Entfernungen von der Unruh-Axe behalten.

Mit der Axe der Unruhe sind ferner die beiden Scheiben *Ee* (grosse Rolle) und *Ff* (kleine Rolle) fest verbunden. Wie Fig. 153 zeigt, ist erstere bis auf einen kleinen Ausschnitt kreisförmig; ein aus Edelstein gefertigter Zahn z_1 ragt aus diesem Ausschnitt heraus. Die kleine, ebenfalls kreisförmige Scheibe *Ff* ist mit dem Auslösungszahn z_2 (gleichfalls ein Edelstein) versehen. Diese beiden Zähne

vermitteln die Verbindung zwischen dem Regulator und der nächstdem zu beschreibenden Hemmung. Bei der Drehung der Axe in der durch den Pfeil *r* bezeichneten Richtung drückt der Zahn z_2 die schwache Goldfeder *n* zur Seite, also in unserer Figur nach rechts. Der Fuss der Goldfeder ist mit der etwas stärkeren Hemmungsfeder *m* durch eine Schraube verbunden; sie legt sich in der Nähe ihrer Spitze an die Spitze der Hemmungsfeder und ragt über letztere um ein Geringes hinaus. Zum besseren Verständnisse der von der unteren Seite gesehenen Zeichnung in Fig. 153 möge noch bemerkt werden, dass die Platte *Ff* sowie die beiden Federn *m* und *n* als oberhalb der Ebene der Zeichnung liegend zu denken sind. In die Hemmungsfeder ist auf der vom Beschauer abgewandten Seite der Ruhestein eingesetzt, an dessen abgeplattete Seite sich der Zahn *s* des Hemmungsrades *V* anlegt. Letzteres, sowie der Ruhestein und die Platte *Ee* liegen in der Ebene der Zeichnung. Das Hemmungsrad hat in Folge einer Kraftwirkung, welche von dem später zu beschreibenden Motor des Uhrwerks ausgeht, das Bestreben, eine Drehung in der Richtung des Pfeiles *R* auszuführen. In der Stellung, welche durch Fig. 153 dargestellt wird, wird diese Drehung durch die Anlehnung des Zahnes *s* an den Ruhestein verhindert. Sobald aber in Folge der Schwingung des Regulators der Zahn z_2 die Goldfeder und durch sie die Hemmungsfeder etwas nach rechts gedrückt hat, wird der Zahn *s* des Hemmungsrades von dem Ruhestein, welcher an der Hemmungsfeder sitzt, frei. Das Hinderniss ist somit für einen Augenblick beseitigt und das Hemmungsrad kann in seiner durch den Pfeil *R* bezeichneten Drehungsrichtung fortschreiten. Hierbei trifft nun der Zahn *u* des Hemmungsrades auf den Zahn z_1 der Platte *Ee* und ertheilt durch diesen Impuls dem Regulator einen kleinen Antrieb, welcher hinreicht, um den oben erwähnten durch Reibung und Luftwiderstand bewirkten Verlust an lebendiger Kraft zu ersetzen. In Folge der Fortsetzung der Drehung des Regulators in der Richtung des Pfeiles *r* verlässt aber der Zahn *u* des Hemmungsrades alsbald den Zahn z_1 der Platte *Ee*, das Hemmungsrad schreitet nunmehr in seiner Drehungsrichtung so weit fort, bis der Zahn *t* auf den Ruhestein trifft, welcher inzwischen wieder in die durch Fig. 153 dargestellte Stellung zurückgekehrt ist. Es möge noch bemerkt werden, dass die Anlehnung des Zahnes *u* an den Zahn z_1, also die Führung des Regu-

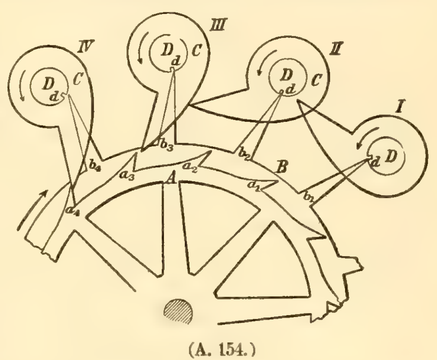


(A. 153.)

lators durch die Hemmung, bei sorgfältig gearbeiteten Instrumenten eine Dauer von nur etwa $\frac{1}{80}$ Secunde in Anspruch nimmt.

Kehrt nun die Unruhe in Folge der oben erläuterten Wirkung der Spiralfeder ihre Drehungsrichtung um, so tritt die soeben besprochene Wechselwirkung zwischen Regulator und Hemmung nicht wieder ein; es wird dann nur die leicht biegsame Goldfeder durch den Zahn z_2 bei Seite gedrückt; eine weitere Veränderung in Bezug auf die Stellung der Hemmungsfeder und des Hemmungsrades findet nicht statt. Die Goldfeder kehrt, nachdem sie wiederum von dem Zahne z_2 frei geworden ist, in die durch Fig. 153 dargestellte Lage zurück. Da sich das gleiche Spiel der Hemmung nach jeder Doppelschwingung des Regulators wiederholt, so schreitet das Hemmungsrad bei jeder Doppelschwingung um je eine Zahndistanz in seiner Drehungsrichtung fort.

Es möge nun noch in Kürze eine Beschreibung der von DUTERTRE erfundenen Duplex- oder Doppelradhemmung gegeben werden. — In der Duplexuhr ist das Hemmungsrad aus zwei fest mit einander verbundenen Rädern A und B (Fig. 154) zusammengesetzt; die kurzen Zähne a_1, a_2 . . . heissen ihrer Bestimmung gemäss Stosszähne, die langen Zähne bezeichnet man als Ruhezähne. Zum besseren Verständniss der Figur diene die Bemerkung, dass das Rad B als in der Ebene der Zeichnung liegend, das Rad A als etwas oberhalb dieser Ebene befindlich gedacht werden muss [1]. In denselben Horizontalebenen wie die beiden Räder sind an der Axe der Unruhe die beiden Scheiben C bezw. D befestigt. Die Scheibe C, welche mit einem langen Finger versehen ist, liegt also ebenfalls oberhalb der Ebene der Zeichnung, während die Scheibe D, welche bis auf eine kleine Auskerbung kreisförmig ist, sich in der Ebene der Zeichnung befindet.

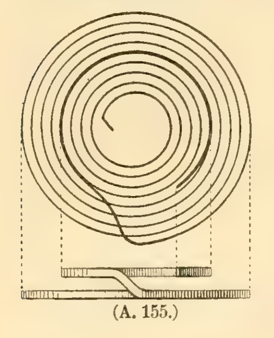


(A. 154.)

Wenn nun die Unruhe in der Richtung des neben der Stellung I gezeichneten Pfeiles schwingt und hierbei so weit gekommen ist, dass die Kerbe d dem punktirten Zahne b_1 gegenübersteht, so rückt die Spitze des Zahnes in die Kerbe; sie treibt, indem sie sich an die rechte Wandfläche der letzteren anlehnt, während eines kurzen Theiles der Schwingung die Unruhe vor sich her (Stellung II) und verlässt die Kerbe erst, wenn die Stellung III erreicht ist. Bei letzterer Stellung liegt nun der lange Finger C kurz vor dem Stosszahn. Wenn also der Ruhezahn aus der Kerbe heraustritt, fällt der Stosszahn auf den Finger und ertheilt hierdurch dem Regulator einen Impuls (Stellung IV). Bei der Fortsetzung der schwingenden Bewegung wird der Stosszahn alsbald wieder von dem Finger C frei, doch kann das Hemmungsrad zunächst nur um ein sehr kleines Stück in seiner Drehungsrichtung fortschreiten, weil der nächste Ruhezahn sofort auf die Scheibe D trifft. In dieser Anlehnung an die Scheibe D verbleibt der Ruhezahn sowohl während der Vollendung der Schwingung des Regulators in der Pfeilrichtung als auch während der ganzen Rückschwingung. Bei letzterer tritt der Ruhezahn für einen Augenblick wiederum in die Kerbe, doch wird er sofort gezwungen, dieselbe wieder zu verlassen, weil der Regulator im Augenblicke des Eintritts gerade das Maximum seiner Geschwindigkeit erreicht hat und daher den nur an einem kleinen Hebelarm wirkenden Gegendruck des Ruhezahns leicht überwindet. Man bezeichnet die Rückschwingung, weil keine Veränderung in der Stellung des Hemmungsrades eintritt, deshalb auch als todte oder stumme Schwingung. Erst nachdem die Rückschwingung vollendet ist und der Regulator wieder die durch den Pfeil bezeichnete Drehungsrichtung angenommen hat, wiederholt sich in der beschriebenen Weise das Spiel der Hemmung.

[1]) In der Praxis wird statt dessen häufig ein Rad mit zwei Zahnreihen angewendet.

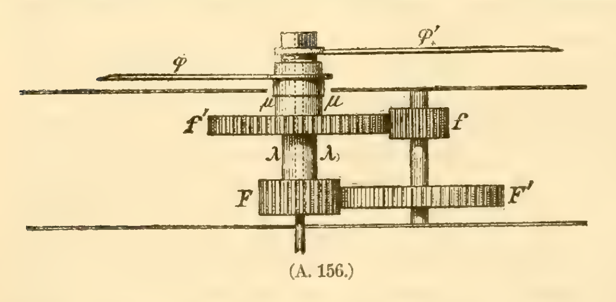
Es möge noch bemerkt werden, dass man bei Duplexuhren sowie bei Taschenchronometern, um diese Instrumente flacher bauen zu können, vielfach an Stelle der cylindrischen Spirale die aufgebogene oder (nach dem Erfinder benannte) BREGUET-Spirale (Fig. 155) anzuwenden pflegt. Der letzte Umgang derselben ist in einer Biegung gegen die Mitte zurückgeführt und geht über die übrigen Gänge hinweg. Die BREGUET-Spirale besitzt allerdings gegenüber einer flachen, in einer Ebene schwingenden Spiralfeder den Vorzug einer gleichmässigeren Entwickelung bei der Bewegung, sie liefert aber im Allgemeinen keine so vorzüglichen Resultate wie die cylindrische Spiralfeder.


(A. 155.)

In einen auf der Axe des Hemmungsrades befindlichen Trieb (Fig. 152) greift das Secundenrad H' ein, dessen durch das Zifferblatt hindurchgehender Zapfen den Secundenzeiger φ'' trägt. Da nun in einem richtig gehenden Chronometer der Regulator während einer Zeitsecunde je zwei Doppelschwingungen ausführt und nach dem Früheren das Hemmungsrad bei jeder Doppelschwingung um eine Zahndistanz fortschreitet, so wird auch der Secundenzeiger zwei Sprünge ausführen, d. h. auf dem Zifferblatte halbe Secunden anzeigen. Das Secundenrad steht durch einen auf seiner Axe befindlichen Trieb in Eingriff mit dem Zwischen- oder Kleinbodenrad G', welches andererseits durch den Trieb G mit dem Grossboden- oder Minutenrade E' verbunden ist. Die Anzahl der auf den bis jetzt besprochenen Rädern und Trieben befindlichen Zähne pflegt gewöhnlich folgendermaassen gewählt zu werden:

Hemmungsrad	15	Zähne	Trieb	10	Zähne
Secundenrad	80	„	Trieb	10	„
Kleinbodenrad	80	„	Trieb	12	„
Minutenrad	90	„			

Durch eine einfache Rechnung findet man aus diesen Zahlen, dass einer Umdrehung des Minutenrades 480 Umdrehungen des Hemmungsrades entsprechen.



(A. 156.)

Da nun das letztere Rad 15 Zähne besitzt und nach den früheren Angaben in je einer halben Secunde um eine Zahndistanz in seiner Drehungsrichtung fortschreitet, so wird eine Umdrehung in 7·5 Secunden vollendet; 480 Umdrehungen des Hemmungsrades oder eine Umdrehung des Minutenrades werden also in genau einer Stunde ausgeführt. In ähnlicher Weise findet man, dass eine Umdrehung des Secundenrades in einer Minute vollendet wird.

Der durch die Platine A sowie durch das Zifferblatt hindurchgehende Zapfen des Grossbodenrades trägt die nur auf Reibung sitzende Hülse $\lambda\lambda$ (Fig. 156), an welcher vor dem Zifferblatte ein Vierkant abgesetzt ist. Auf letzteres wird der an dem einen Ende mit einer Verstärkung und einem quadratischen Loche versehene Minutenzeiger geschoben. Ausserdem wird durch ein zwischen Platine und Zifferblatt liegendes Räderwerk bewirkt, dass die Bewegung des Minutenzeigers in zwölffacher Verkleinerung auf dem Zifferblatte durch einen zweiten

Zeiger, den Stundenzeiger φ, zur Anschauung gebracht wird. Es befindet sich nämlich an der erwähnten Hülse $\lambda\lambda$ (Viertelrohr) ein Trieb F, welcher mit dem Rade F' (Wechselrad) in Eingriff steht. Durch einen auf der Axe dieses Rades angebrachten Trieb f wird die Bewegung auf das Rad f' (Stundenrad) übertragen. Letzteres sitzt auf einer zweiten, auf dem Viertelrohr lose gehenden Hülse, welche auch den Stundenzeiger φ trägt. Diese Einrichtung macht es erstens möglich, dass man den Minutenzeiger mit Hilfe des auf das Vierkant gesetzten Schlüssels stellen kann, ohne dass das Grossbodenrad gedreht wird, und sie bewirkt zweitens, dass jede Drehung des Minutenzeigers, sowohl beim Gehen des Uhrwerks als auch beim Stellen, in entsprechender Weise auf den Stundenzeiger übertragen wird. Das Verhältniss der Winkelbewegung beider Zeiger (12:1) ergiebt sich sofort aus der Anzahl der auf den einzelnen Rädern und Trieben angebrachten Zähne; es hat nämlich

der Vierteltrieb	F	14	Zähne
das Wechselrad	F'	56	„
der Wechseltrieb	f	18	„
das Stundenrad	f'	54	„

Auf der Axe des Grossbodenrades befindet sich ferner der Trieb E (Fig. 152), in welchen das mit der Schnecke D verbundene Zahnrad D''' eingreift[1]). Die Schnecke steht durch die Metallkette Δ, welche sich in die eingeschnittenen Gänge D einlegt, in Verbindung mit dem Federhause (Trommel) C, und in diesem ist der Motor des ganzen Systems, eine starke, breite Zugfeder aus federhartem Stahl, enthalten. Das eine Ende dieser Zugfeder ist an der Axe c, das andere an der Innenwandung der Trommel befestigt. Nimmt man nun, um sich die Wirksamkeit des ganzen Mechanismus zu veranschaulichen, an, dass die Kette einen Augenblick aus ihrer Verbindung mit dem Federhause gelöst, letzteres so um seine feststehende Axe gedreht würde, dass die Windungen der im Innern befindlichen Zugfeder sich aufwinden, und dass nunmehr die Verbindung zwischen Federhaus und Kette wieder hergestellt würde, so würde offenbar die Trommel in Folge der Wirkung der elastischen Zugfeder bestrebt sein, eine Drehung auszuführen, welche der soeben beschriebenen entgegengesetzt ist. Diese Bewegung würde sich in Folge des Aufwindens der Kette auf die Aussenwand der Trommel auf die Schnecke und auf das ganze Räderwerk übertragen, so dass man in dieser Weise im Stande ist, dem letzten Rade, dem Hemmungsrade, das schon oben erwähnte Bestreben der Drehung in einem bestimmten Sinne zu ertheilen. Man erkennt ferner leicht, in welcher Weise die konische Form der Schnecke geeignet ist, die nicht immer in gleicher Stärke wirkende Zugfeder zu einem annähernd konstanten Motor umzugestalten: In dem Maasse, wie die Zugfeder sich im Innern der Trommel abrollt und damit ihre Wirkung verringert, wächst der Hebelarm, an welchem die sich abrollende Kette die Schnecke zieht.

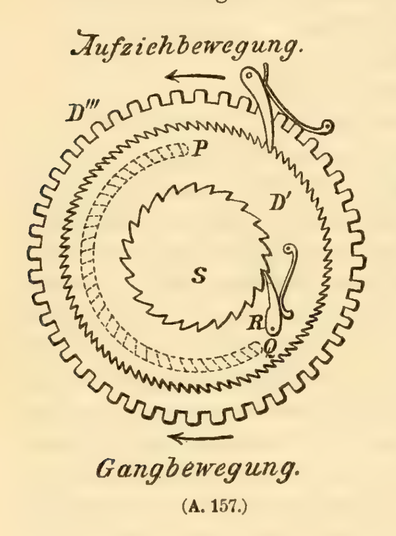
Man erkennt aus der vorstehend gegebenen Beschreibung des eigentlichen chronometrischen Apparates, dass zwischen dem Motor und dem Regulator eine gewisse Wechselwirkung besteht. Einerseits bewirkt der Regulator, dass das mit dem Motor durch das Räderwerk in Verbindung stehende Hemmungsrad nur

---

[1]) Es wird später, um die Beschreibung des eigentlichen chronometrischen Apparates nicht zu unterbrechen, genauer erklärt werden, wie die Verbindung zwischen D''' und der Schnecke hergestellt ist; vorläufig wollen wir diese Verbindung als eine vollständig feste betrachten.

zahnweise fortschreiten kann, und dass diese periodisch wiederkehrende Bewegung eine regelmässige wird; andererseits wird die Kraft des Motors, so weit sie nicht durch Reibung innerhalb des Räderwerks absorbirt wird, durch das Hemmungsrad nach und nach auf den Regulator übertragen und giebt letzterem hierdurch den Antrieb zur Fortsetzung seiner schwingenden Bewegung. Abgesehen von der oben erwähnten äusserst kurzen Impulszeit (ungefähr $\frac{1}{80}$ Secunde) steht der Regulator während seiner Schwingung in keiner Verbindung mit dem Räderwerke; diese Einrichtung bildet das Wesen einer sogen. »freien Hemmung« und ist eine der Hauptbedingungen für den regelmässigen Gang des Uhrwerks.

Es erübrigt nach dieser Beschreibung des eigentlichen chronometrischen Apparates, noch die Erläuterung mehrerer Hilfsmechanismen hinzuzufügen, welche für das sichere Functioniren des Instrumentes von wesentlicher Bedeutung sind. Es wird das tägliche Aufziehen des Chronometers nicht, wie in der obigen Veranschaulichung angenommen, durch eine unmittelbare Bewegung des Federhauses hervorgebracht; es wird vielmehr die Schnecke vermittelst des auf den Aufziehzapfen d (Fig. 151) gesetzten Schlüssels um ihre Axe gedreht und hierdurch die Kette von der sich drehenden Trommel abgerollt und in die Gänge der Schnecke gebracht. Wäre nun die Verbindung zwischen der Schnecke D und dem Zahnrad D''' eine vollständig feste, so würde die Aufziehbewegung, welche der gewöhnlichen Bewegungsrichtung der Schnecke entgegengesetzt ist, sich auf das ganze Räderwerk übertragen; es würde dies ein Zurückgehen sämmtlicher Räder und Zeiger und ausserdem eine vollständige Zerstörung der ganzen Hemmungsvorrichtung herbeiführen. Durch die nunmehr zu beschreibende, zwischen den Rädern D' und D''' angebrachte Vorrichtung werden diese üblen Folgen verhindert, und es wird zweitens durch sie die Drehungsrichtung des Räderwerks während des Aufziehens im richtigen Sinne unterhalten. — Von den in Fig. 157 dargestellten Rädern ist nur das kleine Sperrrad S, welches als oben liegend zu denken ist, mit der Schnecke fest verbunden. Der Sperrkegel R für dieses Rad, sowie die dazu gehörige Feder sind auf dem darunterliegenden Sperrrade D' angebracht, dessen Zähne denjenigen des Rades S entgegengesetzt gerichtet sind. Der Fuss des zum Sperrrade D' gehörigen Sperrhakens sitzt auf einem Ansatz der Platine. Das mittlere Rad D' ist ferner mit dem darunter liegenden Zahnrade D''' durch eine Feder verbunden, deren Ende Q am Rade D' und deren Ende P am Rade D''' befestigt ist. Letzteres Rad sitzt lose auf der Axe der Schnecke und wird nur durch einen vorgelegten kleinen Ring am Herabfallen verhindert. Bei der Gangbewegung dreht sich die Schnecke und damit das Sperrrad S in der nebenstehend angegebenen Richtung. Diese Bewegung wird, weil der Sperrkegel jetzt aufsetzt, auf das mittlere Rad D' und, nachdem die Feder PQ etwas zusammengedrückt und angespannt ist, durch diese auf das Zahnrad D''' übertragen. Der Sperrhaken des mittleren Rades gleitet bei dieser Bewegung von Zahn zu Zahn. Wenn dagegen beim Aufziehen des Instrumentes die Schnecke und mithin auch das Rad S in entgegengesetzter Richtung ge-



(A. 157.)

dreht wird, werden die beiden unteren Räder nicht mitgenommen. Es wird nämlich das Rad D' durch seinen jetzt einfallenden Sperrhaken verhindert an der Drehung theilzunehmen, und der Sperrkegel des Rades S gleitet nunmehr von Zahn zu Zahn. Dagegen tritt jetzt die Feder PQ, welche während der regelmässigen Bewegung des Uhrwerks gespannt wurde, in Wirksamkeit: Sobald das Rad D' stillsteht, strebt die Feder danach, sich auszudehnen, und treibt hierdurch das Rad D''' im Sinne der Gangbewegung weiter; diese Feder ist also während der kurzen Zeit des Aufziehens der Motor des Instrumentes. Tritt dann nach beendigtem Aufziehen die Schnecke wieder in die frühere Drehungsrichtung ein, so wird zunächst wieder die Feder PQ etwas zusammengedrückt und dadurch gespannt.

Ferner ist hier noch die sogenannte Stellung des Uhrwerks, sowie das Auf- und Abwerk kurz zu beschreiben. Erstere Einrichtung hat den Zweck, die Aufziehbewegung zu begrenzen und damit ein zu starkes Anspannen der Zugfeder und Kette zu verhindern; durch letzteren Mechanismus wird auf dem Zifferblatte die Anzahl der Stunden angezeigt, welche seit dem letzten Aufziehen des Chronometers verflossen ist. Die Stellung der Uhr[1]) besteht erstens aus einem über das Vierkant der Schneckenaxe gelegten Ringe, welcher mit dem Finger δ (Fig. 151 und 152) versehen ist, zweitens dem Rade δ' und drittens der schwachen Feder δ''. Wenn beim Aufziehen der Uhr die Schneckenaxe gedreht wird, so kommt der Finger δ bei jeder Umdrehung einmal in Berührung mit dem Rade δ' und bewegt dieses Rad, welches lose auf einem Stift sitzt, um je eine Zahndistanz weiter; die schwache Feder δ'' dient dazu, die Stellung des Rades δ' zwischen je zwei Eingriffen des Fingers festzuhalten. Gelangt aber endlich δ auf den ungezahnten Theil des Rades, so ist ein weiteres Aufziehen nicht mehr möglich. Während des Ganges der Uhr dreht sich die Schneckenaxe in entgegengesetzter Richtung und nimmt folglich auch wiederum das Rad δ' mit. Ein Stillstand tritt, falls nicht inzwischen ein erneutes Aufziehen stattgefunden hat, ein, wenn sich der Finger δ von der anderen Seite an den ungezahnten Theil des Rades δ' anlehnt.

Es möge hier noch kurz erwähnt werden, dass das auf das Vierkant des Federhauses aufgesetzte Sperrrad oder Anspannrad dazu dient, die Spannung der Zugfeder zu variiren; dreht man nämlich die Axe mit Hilfe des auf das Vierkant gesetzten Uhrschlüssels rechts herum und setzt dann das Anspannrad durch die beiden Sperrkegel γ (Fig. 151 und 152) fest, so wird hierdurch die Spannung der Feder vermehrt. Da aber die Herstellung eines während der ganzen Gangzeit constanten Motors nur durch das Zusammenwirken von Zugfeder und Schnecke erzielt werden kann, so wird auch nur bei einer ganz bestimmten, von den Dimensionen und der Form der Schnecke abhängigen Spannung der Zugfeder die gewünschte Constanz der Kraftwirkung eintreten. Die dieser Spannung entsprechende Stellung des Federhauses wird von dem Fabrikanten auf experimentellem Wege ermittelt.

Das Auf- und Abwerk, welches mit dem auf dem Zifferblatte angebrachten sogenannten Aufziehzeiger in Verbindung steht, ist sehr einfach eingerichtet. Auf dem durch die Platine hindurchgehenden Schneckenzapfen ist (zwischen Platine und

---

[1]) Die Stellung wird von den Fabrikanten in sehr verschiedener Weise ausgeführt; es kann bei dieser Mannigfaltigkeit selbstverständlich keine Beschreibung der einzelnen Formen gegeben werden.

Zifferblatt) ein kleiner Trieb angebracht, welcher mit einem grösseren Rade in Eingriff steht. Der auf dem Zifferblatte sichtbare Aufziehzeiger ist auf letzteres Rad aufgesetzt. Durch diese Anordnung wird bewirkt, dass der Aufziehzeiger jede Drehung der Schnecke, sowohl bei der Gang- als auch bei der Aufziehbewegung in verkleinertem Maassstabe auf dem Zifferblatte zur Anschauung bringt. Die Anzahl der Zähne auf Rad und Trieb ist so gewählt, dass der Drehung der Schnecke während 56 Stunden Gangzeit eine Drehung des Aufziehzeigers von etwa 320° entspricht. — Es ist in Fig. 151 und 152 die Darstellung des Auf- und Abwerks unterblieben, um die Uebersicht über die wesentlicheren Theile des chronometrischen Apparates nicht zu erschweren.

Schon vor etwa einem Jahrhundert haben Breguet und andere berühmte Uhrmacher den Versuch gemacht, den Mechanismus des Chronometers dadurch wesentlich zu vereinfachen, dass die Schnecke und Kette aus dem Instrument fortliessen und ein an dem Federhause angebrachtes Zahnrad direkt auf den Trieb des Grossbodenrades wirken liessen. Diese Anordnung, welche übrigens bei Taschenuhren vielfach üblich ist, hat gute Resultate geliefert, wenn die Dimensionen des Federhauses möglichst gross gewählt waren und in Folge dessen eine Feder von beträchtlicher Länge benutzt werden konnte. In neuerer Zeit hat in Deutschland besonders der Fabrikant A. Kittel in Altona das gezahnte Federhaus bei Chronometern mit gutem Erfolge angewendet.

Man pflegt das Gehäuse des Chronometers mit einer doppelaxigen oder (nach dem Erfinder benannten) Cardani'schen Aufhängung zu versehen, um zu bewirken, dass sowohl die Lage der schwingenden Theile in Bezug auf die Richtung der Schwerkraft als auch die Reibungsverhältnisse der Unruhzapfen bei jeder Stellung des Chronometerkastens unverändert bleiben.

Es wird nach der vorstehenden Beschreibung des Uhrwerkes einleuchtend sein, dass Veränderungen in der Schwingungsdauer des Regulators, d. h. Veränderungen im Gange des Chronometers im Allgemeinen durch die folgenden unmittelbaren Ursachen herbeigeführt werden können: erstens durch Veränderungen in der Stärke des Antriebs; zweitens durch Gestalts- und Elasticitätsveränderungen, sowie durch Veränderungen des magnetischen Zustandes, welche die einzelnen Theile des Regulators in Folge der Einwirkung innerer oder äusserer Kräfte erleiden können; drittens durch Gewichtsveränderungen der schwingenden Theile in Folge des Ansetzens oder Verdunstens von Niederschlägen aus der umgebenden atmosphärischen Luft; viertens durch Veränderungen in der Reibung der Unruhzapfen; fünftens durch Veränderungen der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, als des Mediums, in welchem der Regulator seine Schwingungen ausführt; und sechstens durch Bewegungen, besonders Erschütterungen, welche den ganzen Apparat treffen.

Es soll nun im Folgenden näher erörtert werden, in welchem Sinne die erwähnten Veränderungen den Gang des Instrumentes beeinflussen; es sollen ferner im Anschlusse hieran die Principien dargelegt werden, nach welchen Unruhe und Spirale zu construiren sind, um einen grossen Theil der gangstörenden Wirkungen auszuschliessen oder auszugleichen (compensiren); und es sollen endlich die Methoden auseinandergesetzt werden, welche man anwendet, um den Einfluss der mechanisch nicht eliminirbaren Fehlerquellen in Bezug auf den Gang des Chronometers seinem numerischen Betrage nach kennen zu lernen. Es wird sich aber nicht empfehlen, die weiteren Auseinandersetzungen strenge in der obigen Reihenfolge vorzunehmen, weil eine Anzahl der angegebenen unmittelbaren Veranlassungen zu Gangstörungen aus einer gemeinsamen Ursache (z. B.

Veränderungen der Temperatur) stammen. Wir werden deshalb, um Wiederholungen und Hinweise auf Früheres zu vermeiden, auf diese letzten Ursachen der Gangveränderungen zurückgehen und ihre Einwirkung auf den Mechanismus im Zusammenhange darlegen.

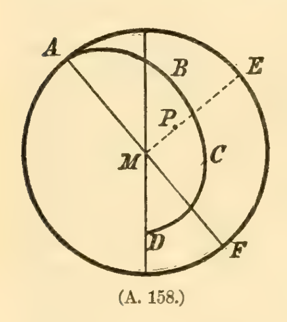
Bevor wir indessen zu diesen Betrachtungen übergehen, mögen hier kurz die Erklärungen von »Stand« und »Gang einer Uhr« gegeben werden, um vor Allem jeden Zweifel in Bezug auf die Vorzeichen dieser Grössen auszuschliessen. Man versteht unter »Stand einer Uhr« die Abweichung der von derselben angezeigten Zeit gegen mittlere bezw. Sternzeit des Beobachtungsortes, oder gegen die Zeit eines besonders benannten Meridians. Ist die Uhr gegen die Zeit des gewählten Meridians zurück, so erhält der Stand das positive Vorzeichen; geht hingegen die Uhr in Bezug auf jene Zeit vor, so kennzeichnet man den Stand durch das negative Vorzeichen. Es besitzt also der Stand dasjenige Vorzeichen, mit welchem sein absoluter Betrag an die Angabe der Uhr anzubringen ist, um mittlere bezw. Sternzeit zu erhalten. Man bezeichnet ferner als den »täglichen Gang« einer Uhr die Anzahl Secunden, um welche die Uhr in 24 Stunden mittlere Zeit gegen mittlere bezw. Sternzeit zurückbleibt oder voreilt. Es ist demnach der tägliche Gang die Aenderung des Standes der Uhr in einem Tage. Man bezeichnet den Gang mit dem positiven Vorzeichen, wenn die Uhr zurückbleibt, und mit dem negativen Vorzeichen, wenn sie voreilt.

Trotz der Einschaltung der Schnecke zwischen Zugfeder und Räderwerk wird es niemals in der Vollkommenheit gelingen, eine für alle Zeiten constante Kraftübertragung auf den Regulator herzustellen; die Stärke der Impulse wird nach und nach verringert werden, weil erstens die Reibungswiderstände der Zapfen des Räderwerks in Folge der allmählich eintretenden Verunreinigung und Verdickung des Oeles wachsen und weil zweitens die Elasticität der stets im gespannten Zustande befindlichen Zugfeder in Folge molekularer Veränderungen im Laufe der Zeit abnimmt. Durch diese Verminderung des Antriebs wird eine Verkleinerung der Schwingungsweite herbeigeführt. Andererseits werden auch durch die Bewegungen und kleinen Erschütterungen beim praktischen Gebrauch des Instrumentes (Transport, Schiffsbewegung etc.) Veränderungen der Schwingungsweite für kürzere oder längere Zeit hervorgebracht[1]). Aus diesen Gründen wurden die Uhrmacher darauf hingeleitet, in Bezug auf die Grösse der einzelnen Regulatortheile nach einer solchen Auswahl zu suchen, dass die Dauer der Unruhschwingung durch die Verschiedenheit der Schwingungsweite keine Veränderung erleide, oder — in der Sprechweise des Technikers ausgedrückt — dass der Regulator isochron schwinge. Welche praktischen Erfahrungen nun zur Erreichung dieses Zieles geführt haben, wird sich am einfachsten durch die Beschreibung der folgenden Versuche darlegen lassen.

Wir wollen uns vorstellen, dass zwei vollkommen gleich gearbeitete Unruhen, jede mit ihrer Spirale verbunden, aber ohne Räderwerk, neben einander aufgestellt seien; die Spirale A sei sehr kurz (etwa 3—4 Windungen), die Spirale B dagegen sehr lang (etwa 30—40 Windungen). Die Stärke, Windung und Elasticität des Spiraldrahtes möge in beiden Fällen als vollkommen gleich angenommen werden. Entfernt man nun die Unruhe A mit der Hand zunächst um einen kleinen Winkel (etwa 20°) und bei einem zweiten Versuche um einen bedeutend grösseren Winkel (etwa 180°) aus der Gleichgewichtslage und vergleicht die Dauer der nach dem Loslassen ausgeführten Schwingungen, so wird man die Beobachtung machen, dass die Schwingungen von grosser Amplitude schneller

[1]) Wir werden später sehen, dass Veränderungen der Schwingungsweite ausserdem noch durch die Einwirkung mehrerer anderer Einflüsse herbeigeführt werden können.

als diejenigen von kleiner Amplitude vollendet werden. Der Grund für diese Thatsache ist darin zu suchen, dass man im letzteren Falle die sehr kurze Spirale durch die bedeutende Veränderung des Windungsradius sehr weit aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat; die Kraft, mit welcher diese Spirale in die Gleichgewichtslage zurückstrebt, ist also (wie man durch das Gefühl schon erkennen wird) in diesem Falle sehr bedeutend, und in Folge dessen wird die Unruhe während der Schwingung eine grosse Geschwindigkeit erlangen. Zu entgegengesetzten Beobachtungsresultaten wird man geführt, wenn man mit der Unruhe B dieselben Versuche vornimmt: Hier werden die Schwingungen von grosser Amplitude längere Zeit in Anspruch nehmen als diejenigen von kleiner Amplitude, weil im ersteren Falle der Windungsradius wegen der bedeutenden Länge der Spiralen verhältnissmässig wenig geändert wird. Aus diesen Erfahrungen folgerte Pierre Leroy: »Es giebt bei allen Spiralfedern von hinreichender Länge eine gewisse Länge, bei welcher alle Schwingungen — mögen sie gross oder klein sein — isochron sind, d. h. in gleicher Zeitdauer vollendet werden. Bei grösserer Länge der Spiralfeder werden die grossen Schwingungen langsamer als die kleinen ausgeführt und das umgekehrte findet bei geringerer Länge statt.« — Praktische Versuche haben die Richtigkeit dieser Schlussfolgerungen vollkommen bestätigt[1]).



(A. 158.)

Später fand der französische Ingenieur Phillips auf theoretischem Wege, dass man jede Spiralfeder isochron machen kann, indem man ihre Endcurven, d. h. diejenigen Theile der Spirale, welche in der Nähe ihrer Befestigungspunkte gelegen sind, nach den im Folgenden gegebenen Bedingungen arbeitet[2]). Sei A der Punkt, wo die Endcurve $ABCD$ die kreisförmige Windung der Spiralfeder verlässt, M der Mittelpunkt des Kreises und ME senkrecht zu AF; dann muss die Phillips'sche Endcurve folgenden beiden Bedingungen genügen:

1) Der Schwerpunkt P der Endcurve muss auf ME liegen,

2) Die Entfernung dieses Schwerpunktes vom Mittelpunkte muss gleich dem Quadrate des Spiralhalbmessers dividirt durch die Curvenlänge sein, also

$$\overline{MP} = \frac{\overline{AM}^2}{(ABCD)}.$$

Phillips hat gezeigt, dass diesen Bedingungen durch unendlich viele Curven genügt wird, und er hat ferner die Principien für die geometrische Construction dieser Curven aufgestellt. Bei Anwendung derartig construirter Endcurven entwickelt sich die Spiralfeder während der Schwingung vollständig regelmässig und concentrisch, der Schwerpunkt der Spirale bleibt stets in der Axe der Unruhe und die Zapfen der letzteren üben keinen Seitendruck gegen die Wände der Zapfenlöcher aus.

---

[1]) Es möge hier bemerkt werden, dass die Forderung des Isochronismus bei mathematischer Behandlung des Problems zu der Bedingung führt, dass das Moment des Elasticitäts-Widerstandes der Spirale stets proportional dem Winkel sein muss, um welchen die Unruhe aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt ist.

[2]) L. Lossier, »Das Reguliren der Unruhen in den Lager«, deutsch von M. Loeske, Bautzen 1893, pag. 125.

Ein nach LEROY's Versuchen oder nach PHILLIPS' Theorie hergestellter Regulator wird aber die Eigenschaft des strengen Isochronismus verlieren, sobald er in das Chronometer gebracht und mit der Hemmung in Verbindung gesetzt wird. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Impuls des Hemmungsrades die Schwingung der Unruhe beeinflusst, die Unruhzapfen gegen die Wände der Zapfenlöcher treibt und hierdurch die Seitenreibung verändert. Es treten also jetzt Einflüsse hinzu, welche den theoretisch hergestellten Isochronismus wiederum vernichten. Es ist nun die Aufgabe des Regleurs, durch entsprechende Veränderungen der Länge bezw. der Endcurven den sogenannten »praktischen Isochronismus« herzustellen. Da die Regelmässigkeit des Uhrganges hauptsächlich durch den Umstand bewirkt wird, dass der praktische Isochronismus dem theoretischen möglichst nahe steht, so wird der im Reguliren geschickte Uhrmacher dahin streben, durch möglichst geringe Veränderungen der Spirale den practischen Isochronismus zu erreichen. Bei Ausführung dieser Regulirung setzt man Zugfedern von verschiedener Stärke nach einander in das Federhaus und erhält hierdurch grössere bezw. kleinere Schwingungen der Unruhe. Bei Anwendnng des gezahnten Federhauses erreicht man diesen Zweck in noch einfacherer Weise, indem man nämlich mit Hilfe des oben erwähnten Anspannrades die Kraftwirkung der Feder (natürlich innerhalb mittlerer Grenzen) verändert. Es wird weiter unten noch besprochen werden, aus welchen Gründen man in der Praxis den vollkommen strengen Isochronismus verlassen hat, und in welchem Sinne man absichtlich eine etwas anisochrone Reglage durchführt.

Bevor wir diese Darlegungen fortsetzen, möge hier die Formel für die Dauer der Regulatorschwingung eingeschaltet werden, weil man mit Hilfe dieser Formel in manchen Fällen sofort erkennen kann, in welchem Sinne einzelne gangstörende Ursachen auf das Chronometer wirken. Da die recht umfangreiche strenge Ableitung der genannten Formel hier nicht gegeben werden kann, so muss im Folgenden an einzelnen Stellen auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Zwischen der Schwingung eines Pendels und derjenigen eines Regulators bestehen gewisse Analogien. Entfernt man diese Apparate aus ihrer Ruhelage, so werden sie erst nach einer Reihe von Schwingungen mit stets abnehmender Amplitude dauernd in diese Lage zurückkehren. Der Wirkung der Schwerkraft beim Pendel entspricht die elastische Kraft der Spiralfeder beim Regulator. Betrachtet man diese Kräfte für einen Augenblick als gegebene Constanten, so erkennt man, dass man die Schwingungsdauer im ersteren Falle durch Veränderung des Gewichtes und der Dimensionen der Unruhe zu vergrössern bezw. zu verkleinern vermag. Wenn wir daher annehmen, dass die Analogie beider Bewegungen sich auch in der Formel für die Schwingungsdauer ausspricht, so werden wir, um zur Regulatorformel zu kommen, in der bekannten Pendelformel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

für l eine Grösse A einsetzen müssen, welche von dem Gewichte und den Dimensionen der Unruhe abhängt, während g durch einen Werth B, welcher durch die Elasticität der Spiralfeder bestimmt wird, zu ersetzen ist. Der Ingenieur PHILLIPPS hat nun den Beweis geführt, dass A das Trägheitsmoment der Unruhe ist und dass B den Werth $\frac{M}{L}$ besitzt, wo M das Elasticitätsmoment und L die

Länge der Spiralfeder bezeichnet. Die Formel für die Schwingungsdauer des Regulators lautet demnach

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}}.$$

Unter den pag. 634 erwähnten äusseren Einflüssen, durch welche Gestalts- und Elasticitätsveränderungen der Theile des Regulators hervorgerufen werden können, nehmen die Schwankungen der Temperatur die erste Stelle ein. Wenn wir einen Augenblick annehmen, dass das Chronometer an Stelle der oben beschriebenen compensirenden Unruhe mit einem einfachen homogenen Metallreifen versehen wäre, so würde bei steigender Temperatur eine (wenn auch nur geringe) Ausdehnung dieses Ringes und mithin eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes eintreten. In Bezug auf die Spiralfeder wird bei steigender Temperatur eine Vergrösserung der Länge stattfinden und es wird ausserdem das Elasticitätsmoment verringert werden. Die letztere Einwirkung bedarf vielleicht einer kurzen Erläuterung. Es ist eine bekannte Erfahrungsthatsache, dass der elastische Widerstand aller Metalle bedeutend abnimmt, wenn man dieselben stark erhitzt und dass dieser Widerstand vollkommen aufhört, sobald der Schmelzpunkt erreicht ist. Der gleiche Sinn der Einwirkung ist aber auch schon bei einer geringeren Temperaturerhöhung innerhalb der Grenzen der Temperatur unserer Atmosphäre deutlich bemerkbar. In Folge dieser Verminderung des elastischen Widerstandes der Spirale wird bei Erhöhung der Temperatur eine Vergrösserung der Schwingungsamplitude eintreten, und die gegentheilige Wirkung wird bei einer Temperaturerniedrigung stattfinden. Durch die Betrachtung der obigen Formel erkennt man nun, dass die Schwingungsdauer sowohl durch das Anwachsen von A und L als durch die Verkleinerung von M vergrössert wird, d. h. der Gang des Chronometers wird bei steigender Temperatur langsamer werden.

Man hat nun den numerischen Betrag der Gangveränderungen, welche mittelbar durch jede der drei soeben erwähnten, hauptsächlichsten Wirkungen der Temperaturveränderungen erzeugt werden, durch folgende Beobachtungen und Berechnungen festgestellt. Durch mehrjährige, auf der Deutschen Seewarte ausgeführte Gangbeobachtungen eines Marinechronometers, in welchem die compensirende Unruhe durch einen homogenen Metallreifen ersetzt war, wurde ermittelt, dass einer Temperaturerhöhung von 1° C. eine Veränderung von $11^s{\cdot}2$ im täglichen Gange entspricht. Dieser Betrag stellt also die Gesammtsumme jener drei Wirkungen dar. Nimmt man den Ausdehnungscoëfficienten des Messings zu 0·000018 und denjenigen des Stahls zu 0·000012 an, so ergiebt eine einfache, unter Benutzung der obigen Formel und unter Berücksichtigung der Dimensionen des Regulators ausgeführte Berechnung, dass bei einer Temperaturerhöhung von 1° C. durch die Ausdehnung der Unruhe eine Vergrösserung des täglichen Ganges um $1^s{\cdot}6$ und durch die Längenausdehnung der Spiralfeder eine solche von $0^s{\cdot}5$ hervorgebracht wird. Es ist demnach der Elasticitätsveränderung der Spirale, welche man auf direktem Wege nicht messen kann, eine Gangveränderung von etwa 9^s im verlierenden Sinne zuzuschreiben. — Hierbei muss allerdings bemerkt werden, dass die Veränderung der Temperatur in noch anderer Weise mittelbar den Gang des Chronometers beeinflusst, doch sind diese Einwirkungen, besonders wenn der Isochronismus der Spirale nahezu hergestellt ist, jedenfalls von sehr geringfügigem Betrage. Es wird nämlich durch die Längenveränderung der Spirale gleichzeitig die Gleichgewichtsstellung des

Regulators, d. h. die Stellung, welche der Regulator in der Ruhelage einnimmt, etwas verschoben. Weil nun der Punkt, wo das Hemmungsrad dem Regulator den Impuls ertheilt, unverändert bleibt, so entspringt aus der genannten Verschiebung ein kleiner Unterschied in der Wirkung des Antriebes. Ferner wird jede Temperaturveränderung eine kleine Störung des Isochronismus hervorbringen, weil letzterer, wie wir oben gesehen haben, auf ein bestimmtes Verhältniss zwischen dem Trägkeitsmoment der Unruhe, der Länge (bezw. der Form) und der elastischen Kraft der Spirale begründet ist. Da diese drei Elemente durch Veränderungen der Temperatur in ganz verschiedener Weise beeinflusst werden, so ist »der Isochronismus bei allen Temperaturen« in vollkommener Schärfe überhaupt nicht erreichbar. Endlich üben die Veränderungen der Temperatur einen Einfluss auf die Consistenz des Oeles und hierdurch mittelbar auch auf die Reibungen aller Zapfen aus.

Um nun dem gangändernden Einflusse der Temperaturveränderungen entgegenzuwirken, wird das Instrument mit der oben beschriebenen compensirenden Unruhe versehen, deren Wirksamkeit darin besteht, dass durch dieselbe die Trägheit der Unruhe bei steigender Temperatur in dem Maasse verringert und hierdurch eine Beschleunigung des Uhrganges erzeugt werden soll, in welchem durch die oben erörterten Wirkungen eine Verzögerung entsteht[1]).

Es lässt sich aber andererseits zeigen, dass ein derartiger Ausgleich beider Wirkungen nie in aller Schärfe, sondern nur in einem grösseren oder geringeren Grade der Annäherung für sämmtliche Temperaturen erreicht werden kann. Um die Beweisführung hierfür nicht zu sehr zu compliciren, wollen wir annehmen, dass durch die Wirksamkeit der compensirenden Unruhe nur diejenigen Gangveränderungen auszugleichen seien, welche sich aus der Veränderung des Elasticitätsmomentes bei verschiedenen Temperaturen ergeben. Wir haben oben gesehen, dass die aus dieser Ursache stammenden Gangveränderungen den numerisch bei weitem grössten Beitrag zu jener Gangveränderung von $11^{s}\cdot 2$ lieferten, welche der Veränderung der Temperatur um 1° C. entspricht. Durch die experimentellen Untersuchungen des englischen Uhrmachers DENT[2]) ist nachgewiesen worden, dass man berechtigt ist, innerhalb der Temperaturgrenzen unserer Atmosphäre die Veränderungen des Elasticitätsmomentes der Spirale proportional den Veränderungen der Temperatur anzunehmen. Wir können uns ferner die gesammte Masse der Unruhe m in einem Punkte, dessen Entfernung von der Axe der Unruhe r sei, vereinigt denken. Endlich wird auch die Annahme erlaubt sein, dass sich m innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen proportional der Temperaturveränderung der Axe der Unruhe nähert. Würde es nun möglich sein, einen vollständigen Ausgleich der beiden oben genannten Wirkungen zu erzielen, so müsste in der Formel für die Schwingungsdauer

[1]) Man wird durch die Betrachtung der obigen Formel für die Schwingungsdauer unwillkürlich zu der Frage hingeleitet, ob es nicht möglich wäre (ähnlich wie bei der Compensation durch die Unruhe), mit der Spiralfeder einen Mechanismus zu verbinden, welcher ihre wirksame Länge so verändert, dass das Produkt $\frac{AL}{M}$ für alle Temperaturen einen constanten Werth behält. Eine derartige Anordnung, die compensirende Rückervorrichtung, wurde früher vielfach in Taschenuhren angewendet, doch ist man später von diesem Gebrauche zurückgekommen, weil es unter diesen Umständen vollkommen unmöglich ist, den Isochronismus herzustellen.

[2]) Nautical Magazine, Jahrgang 1833.

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}}$$

der Werth $\frac{A}{M}$ durch passende Wahl von r, d. h. durch eine gewisse Stellung der compensirenden Massen, unabhängig von der Temperatur gemacht werden können. Es mögen die Werthe von r und M für die Temperatur $+ 15°$ C. mit dem Index 0 und die Veränderung dieser Grössen bei einer Temperaturerhöhung von 1° C. mit dr und dM bezeichnet werden; dann ist für eine Temperatur $15° + t$

$$\frac{A}{M} = \frac{m(r_0 + dr \cdot t)^2}{M_0 + dM \cdot t} = \frac{mr_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left(1 + \frac{dr}{r_0} t\right)^2}{1 + \frac{dM}{M_0} t}.$$

Man erkennt hieraus, dass es durch keine Wahl der einzig verfügbaren Constanten r_0 gelingen wird, diesen Werth unabhängig von t zu machen.

Um nun den Ausgleich der beiden genannten Wirkungen für alle Gebrauchs-Temperaturen wenigstens annähernd zu erreichen, sucht der Uhrmacher die Compensationsgewichte der Art einzustellen, dass das Chronometer bei zwei passend gewählten Temperaturen, z. B. bei 0° und bei 30°, die gleichen Gänge zeigt. Dann werden weder bei den zwischenliegenden noch bei den in der Praxis vorkommenden extremen Temperaturen sehr grosse Gangänderungen auftreten. Die Erfahrung lehrt, dass ein für die genannten Punkte der Temperaturscala genau compensirtes Chronometer bei der Temperatur von + 15° etwa 2—3 Secunden gewinnt und bei den Temperaturen ausserhalb der Grenzen 0° und 30° seinen Gang im verlierenden Sinne ändert. Sind dagegen als Compensationspunkte 0° und 15° oder 15° und 30° gewählt worden, so wird das Chronometer im ersten Falle bei 30° und im zweiten Falle bei 0° etwa 6 Secunden täglich zurückbleiben.

Wir können unter der vorhin gemachten Voraussetzung, dass durch die compensirende Unruhe nur die von der Elasticitätsveränderung der Spirale ausgehenden Gangunterschiede auszugleichen seien, auch durch die Formel die Wirksamkeit der Compensationsunruhe ermitteln. Da sich aus der Natur des Problemes ergiebt, dass die oben eingeführten Variationen dr und dM, welche der Zunahme der Temperatur um 1° C. entsprechen, das negative Vorzeichen haben müssen, so wollen wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{dr}{r_0} = -\rho \quad \text{und} \quad \frac{dM}{M_0} = -\mu.$$

Es sind demnach ρ und μ unter allen Umständen positive Grössen. Nehmen wir nun an, dass ein Chronometer für die beiden Temperaturen 0° und 30° genau compensirt sei, so muss, weil wir t von + 15° aus zählen, nach Obigem ρ die durch folgende Gleichung ausgesprochene Bedingung erfüllen:

$$\frac{(1 - 15\rho)^2}{1 - 15\mu} = \frac{(1 + 15\rho)^2}{1 + 15\mu}.$$

Daraus folgt

$$225\mu\rho^2 - 2\rho + \mu = 0$$

$$\rho = \frac{1}{225\mu}(1 \pm \sqrt{1 - 225\mu^2}).$$

Es lässt sich nun sofort erkennen, dass das positive Vorzeichen der Wurzel in diesem Falle keine physikalische Bedeutung haben kann. Es sind nämlich die

Grössen ρ und μ jedenfalls sehr klein; würde man das positive Zeichen wählen, so würde einem kleinen Werthe von μ ein sehr grosser Werth für ρ entsprechen müssen. Durch Einführung des soeben für ρ gefundenen Werthes in den früher abgeleiteten Ausdruck für $\frac{A}{M}$ erhält man nun

$$\frac{A}{M} = \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{(1-\rho t)^2}{1-\mu t} = \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{t}{225\mu}\left(1 - \sqrt{1 - 225\mu^2}\right)\right]^2}{1-\mu t}.$$

Setzt man

$$15\,\mu = \sin\vartheta$$

und vernachlässigt kleine Grössen von der dritten Ordnung, so ergeben einige weitere Umformungen

$$\frac{A}{M} = \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{t}{15 \sin\vartheta}(1 - \cos\vartheta)\right]^2}{1-\mu t} = \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{t}{15} \tang \frac{\vartheta}{2}\right]^2}{1-\mu t} =$$

$$= \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{t}{30}\sin\vartheta\right]^2}{1-\mu t} = \frac{m r_0^2}{M_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\mu}{2} t\right]^2}{1-\mu t} =$$

$$= \frac{m r_0^2}{M_0}\left[1 - \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{4}\right]\left[1 + \mu t + \mu^2 t^2\right] = \frac{m r_0^2}{M_0}\left[1 + \frac{\mu^2 t^2}{4}\right],$$

also wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M} \cdot L} = \pi r_0 \sqrt{\frac{mL}{M_0}} \cdot \left[1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}\right].$$

Da das Chronometer in der Secunde vier einfache Schwingungen machen soll, so ist der Werth des täglichen Ganges g mit der Schwingungsdauer durch die Gleichung verbunden

$$g = n(4T - 1),$$

wo n die Anzahl der in einem Tage enthaltenen Secunden, also die Zahl 86400, bezeichnen möge. Demnach wird

$$g = n\left[4\pi r_0 \sqrt{\frac{mL}{M_0}} \cdot \left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}\right) - 1\right] = \left(4\pi n r_0 \sqrt{\frac{mL}{M_0}} - n\right) + 4\pi n r_0 \sqrt{\frac{mL}{M_0}} \cdot \frac{\mu^2}{8} \cdot t^2$$

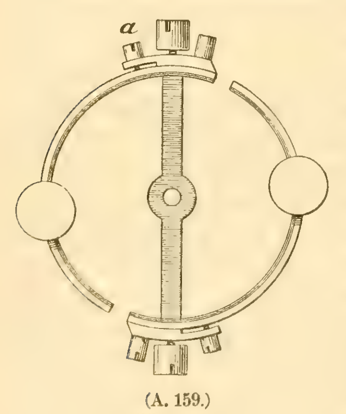
$$g = k_1 + k_2 t^2.$$

Durch eine einfache Ueberlegung erkennt man, dass die zweite der soeben eingeführten Constanten, k_2, stets einen positiven Werth besitzen muss. Betrachtet man demnach in einem rechtwinkligen Coordinatensystem t als Abscisse und g als Ordinate, so stellt die zuletzt gefundene Gleichung eine nach der Seite der positiven g geöffnete Parabel dar. Ferner lehrt uns die obige Gleichung Folgendes: Der Gang des Chronometers wird in diesem Falle bei der Temperatur $+ 15°$ C. (Scheitelpunkt der Parabel) seinen kleinsten Werth annehmen; innerhalb der Grenzen 0° und 30° ist das durch die Compensationsvorrichtung hergestellte Trägheitsmoment der Unruhe zu klein, ausserhalb jener Grenzen ist das Trägheitsmoment zu gross. Die Compensationsvorrichtung wirkt also bei hohen extremen Temperaturen nicht stark genug nach innen biegend und bei tiefen extremen Temperaturen zu stark nach aussen biegend.

Es möge zur Erläuterung des häufig von den Uhrmachern gebrauchten Ausdrucks: »Das Chronometer ist über-compensirt, bezw. unter-compensirt« hier nun noch folgende Bemerkung hinzugefügt werden. Es ist klar, dass der Charakter der Gangcurve, d. h. ihre parabolische Form, durch die Wahl der

Compensationspunkte nicht geändert werden kann. Wir wollen uns nun die Parabel construirt denken und diejenige Temperatur aufsuchen, bei welcher der gleiche Gangwerth wie bei 0° stattfindet. Ist die in dieser Weise gefundene Temperatur θ grösser als 30°, so wirkt die Compensationsvorrichtung bei 30° zu stark nach innen biegend, das Chronometer ist über-compensirt; ist hingegen θ kleiner als 30°, so tritt bei letzterer Temperatur eine zu geringe compensirende Wirkung ein, das Chronometer ist unter-compensirt.

Man kann nun die erwähnten Unzulänglichkeiten in der compensirenden Wirkung der Unruhe innerhalb der vorkommenden Temperaturgrenzen durch folgende zwei Mittel wesentlich verringern: erstens durch das Verlassen des Isochronismus und zweitens durch Anwendung sogenannter Hilfscompensationen. Wir haben oben gesehen, dass mit der Verminderung der Temperatur gleichzeitig eine Verminderung der Schwingungsamplitude eintritt. Wenn man nun den tieferen der beiden Compensationspunkte nach einer höheren Temperatur verschiebt (also etwa + 10° und + 30° C. als Compensationspunkte wählt) und gleichzeitig den Isochronismus in der Weise verlässt, dass man die kleinen Schwingungen etwas schneller als die grossen macht, so erkennt man, dass man hierdurch im Stande ist, der bei tiefen Temperaturen auftretenden Verlangsamung des Ganges entgegenzuwirken. Die innerhalb der angegebenen Compensationstemperaturen auftretenden Gangabweichungen sind hier natürlich bedeutend geringer, als wenn man 0° und 30° als Compensationspunkte gewählt haben würde. Das Aufgeben des Isochronismus kann aber unter Umständen für das Chronometer sehr verhängnissvoll werden. Wenn in Folge der Verdickung des Oeles die Zapfenreibung eine grössere wird oder wenn im Laufe der Zeit eine Verringerung in der Wirkung der Zugfeder eintritt, so wird gleichfalls die Unruhe zu kleineren Schwingungen übergehen, und es wird somit im erwähnten Falle ein Voreilen im Gange eintreten. Auch durch Bewegungen des Instrumentes beim Transport und (wie wir später sehen werden) durch die Variation des Luftdrucks kann die Amplitude der Regulatorschwingung geändert werden; es werden dann in Folge einer anisochronen Reglage gleichfalls Gangstörungen stattfinden.



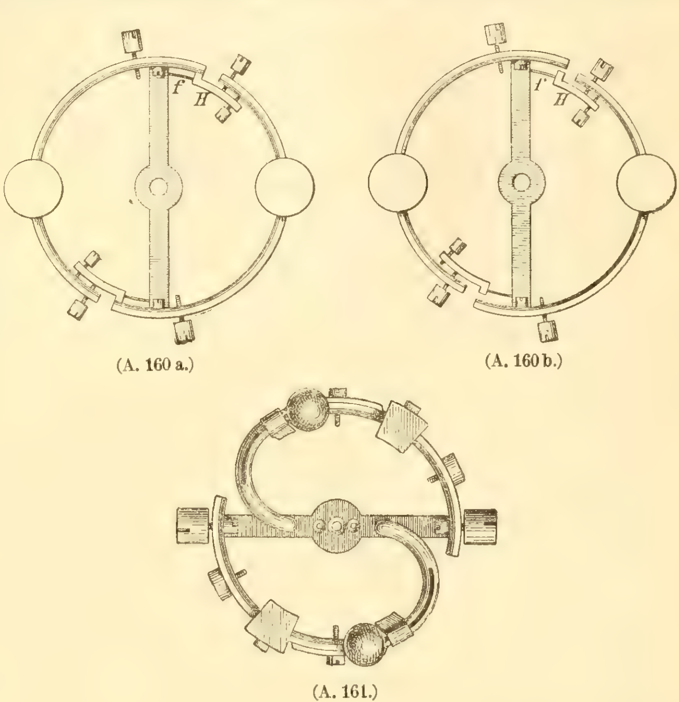
(A. 159.)

Das Bestreben, die bei der einfachen Temperatur-Compensation übrigbleibenden Fehler durch Anwendung einer Hilfscompensation zu beseitigen, hat während der letzten 50 Jahre zur Construction einer so grossen Anzahl Vorrichtungen dieser Art geführt, dass es unmöglich ist, an dieser Stelle eine vollständige Beschreibung der verschiedenen Anordnungen zu geben. Es werden daher im Folgenden nur einige typische Formen der Hilfscompensation Erwähnung finden können. Auch wird eine eingehende Beschreibung der Wirksamkeit dieser Vorrichtungen überflüssig sein; man wird dieselbe durch die Betrachtung der Figur sofort erkennen, wenn man sich nur der bereits erwähnten Thatsache erinnert, dass die einfache Compensation bei hohen Temperaturen nicht stark genug nach innen biegend und bei tiefen Temperaturen zu stark nach aussen biegend wirkt.

Bei der Hilfscompensation von Poole (Fig. 159) ist auf der Aussenseite jedes Unruhschenkels ein kurzer Messingarm festgeschraubt, welcher die Anlehnungsschraube *a* trägt. Man schiebt nun die Compensationspunkte nach der Seite

der höheren Temperaturen zusammen, sodass die Unruhe selbst noch bei den höchsten vorkommenden atmosphärischen Temperaturen genügend compensirt, und stellt die Anlehnungsschraube so ein, dass sie bei der Temperatur des tieferen der beiden Compensationspunkte mit dem Unruhschenkel in Berührung tritt. Die Unruhe wird dann bei extremen tiefen Temperaturen durch den Widerstand des starken Messingarmes verhindert, zu stark nach aussen biegend zu wirken.

In Fig. 160 a und b ist die von EIFFE und MOLINEUX construirte Hilfscompensation dargestellt. Die an der Speiche der Unruhe befestigte Feder *f* trägt das Anlehnungsstück *H*, mit welchem der freie Schenkel der Unruhe in Berührung tritt, sobald die Temperatur des höheren der beiden Compensationspunkte erreicht ist. Bei mittleren und tiefen Temperaturen hat die Unruhe eine vollkommen freie Bewegung; bei extremen hohen Temperaturen wird gleichzeitig die Masse des Anlehnungsstückes mitgenommen und hierdurch die compensirende Wirkung verstärkt. Die Form der Unruhe bei einer solchen extremen hohen Temperatur wird durch Fig. 160 b dargestellt. Die Feder *f* ist so schwach, dass sie beim Einwärtsbiegen keinen merklichen Widerstand leistet. Man pflegt die Anordnung POOLE's als »Hilfscompensation für Kälte«, diejenige von EIFFE und MOLINEUX als »Hilfscompensation für Wärme« zu bezeichnen.



(A. 160 a.) (A. 160 b.)

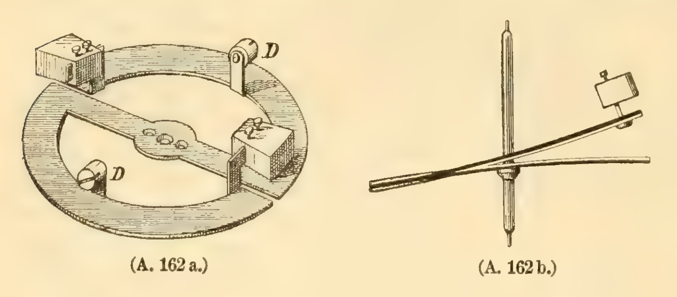
(A. 161.)

Auf wesentlich anderen Grundsätzen beruht die Construction der continuirlich wirkenden Hilfscompensation oder verbesserten Unruhe von LOSEBY, welche in Fig. 161 dargestellt ist. An den freien Enden der verkürzten Unruhschenkel sind zwei Quecksilberthermometer befestigt, deren krummgebogene Röhren nach der Umdrehungsaxe gerichtet sind. Diese Thermometer nehmen an der Wirkung der compensirenden Massen Theil und folgen den Bewegungen der doppeltmetallischen Reifen; wenn die Temperatur steigt, findet aber gleichzeitig eine Ausdehnung des Quecksilbers nach dem Mittelpunkte der Unruhe hin und damit eine Verringerung des Trägheitsmomentes der letzteren statt.

Schliesslich möge hier noch eine von KULLBERG in London construirte verbesserte Unruhe, die sogen. *Flat-Rim*-Balance[1]), kurz beschrieben werden. Die Speichen sowie die ganz flachen Schenkel dieser Unruhe sind aus zwei Metallen von verschiedener Dehnbarkeit (Stahl und Messing) zusammengesetzt, und zwar

[1]) *Flat* = flach; *rim* = Schenkel, Reifen.

liegt in der durch Fig. 162 gegebenen Stellung bei der Speiche die Messinglamelle oben, die Stahllamelle unten, während bei den Schenkeln die umgekehrte Anordnung gewählt ist. An der Innenseite der Schenkelenden sind ferner zwei senkrecht aufsteigende Stützen angebracht, an deren rechtwinkliger Fortsetzung die Compensationsgewichte vermittelst Schrauben festgehalten werden. Die Höhe der Compensationsgewichte über den Schenkeln kann nach dem Lösen der Klemmschrauben durch zwei kleine, auf jedem Gewichte angebrachte Schrauben regulirt werden. Die beiden Schrauben D, welche bei jeder Temperatur in nahezu gleicher Entfernung von der Umdrehungsaxe bleiben, dienen dazu, den Uhrgang um constante Grössen zu verändern. Man erkennt, dass bei Erhöhung der Temperatur die Speiche sich nach unten und die Schenkel sich nach oben biegen werden; in Folge dessen werden auch die Compensationsgewichte sich der Unruhaxe nähern. Diese Bewegung der Gewichte zur Mitte wird aber nicht einfach proportional der Temperaturzunahme erfolgen, sondern in verstärktem Maasse stattfinden, je höher die Temperatur steigt. Man wird deshalb bei richtiger Einstellung der compensirenden Massen im Stande sein, Gangabweichungen, welche analytisch vom Quadrate der Temperatur abhängig sind, auszugleichen.



(A. 162 a.) (A. 162 b.)

Alle derartigen Hilfscompensationen und verbesserten Unruhen haben, besonders wenn sie von den mit der Einrichtung und den Eigenschaften vollkommen vertrauten Erfindern hergestellt und regulirt waren, längere Zeit hindurch vortreffliche Gangresultate geliefert. Nichtsdestoweniger ist man, besonders in der nautischen Praxis, immer wieder zur einfachen Temperatur-Compensation zurückgekehrt, weil jene complicirteren Mechanismen weit leichter Störungen und Unordnungen unterworfen sind und somit einen geringeren Grad der Zuverlässigkeit besitzen. Ausserdem kommt für den Seemann das praktische Bedenken hinzu, dass er Instrumente mit Hilfscompensation nicht jedem Fabrikanten, besonders im Auslande, zur Reparatur oder Reinigung anvertrauen kann. Um ein solches Chronometer schnell und sorgfältig zu reguliren, bedarf es in der That grosser Erfahrung auf einem Special-Gebiete, welche man bei der grossen Mannigfaltigkeit der Anordnung der Hilfscompensationen nicht bei jedem Chronometermacher voraussetzen darf. Andererseits lehrt die Erfahrung, dass im Allgemeinen das Chronometer mit einfacher Temperatur-Compensation Angaben von genau gleicher Zuverlässigkeit liefert wie ein Chronometer mit Hilfscompensation, wenn nur der Beobachter das Instrument mit der nöthigen Sorgfalt behandelt und die durch eine Voruntersuchung auf einem Chronometer-Observatorium erlangten Instrumental-Constanten sowie die später beobachteten Gangwerthe in richtiger Weise verwerthet. Dieses Resultat steht vollkommen in Uebereinstimmung mit der auch in anderen Theilen der practischen Astronomie und messenden Physik gemachten Erfahrung, dass ein geübter Beobachter mit Hilfe eines nach richtigen Principien construirten einfachen Instrumentes Resultate erlangen kann, welche den mit vervollkommneten, aber complicirteren Apparaten gewonnenen nicht nur gleichkommen, sondern dieselben in manchen Fällen sogar an Genauigkeit übertreffen.

Die soeben erwähnte Voruntersuchung des Chronometers auf einem Chronometer-Observatorium bezieht sich in erster Linie auf das Verhalten des Instrumentes bei verschiedenen Temperaturen. Aus den früheren Darlegungen hat sich ergeben, dass man den Gang eines mit einfacher Temperatur-Compensation versehenen Chronometers als eine stetige Function der Temperatur betrachten darf. (Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, dass andere gangstörende Einwirkungen, welche später noch erörtert werden sollen, ausgeschlossen sind.) Man ist deshalb auf Grund des TAYLOR'schen Lehrsatzes berechtigt, für den Gang des Instrumentes eine Reihenentwicklung von der Form anzusetzen

$$g = g_0 + a\,(t - t_0) + b\,(t - t_0)^2 + \ldots.$$

wo g_0 den Gangwerth bei einer bestimmten Temperatur t_0 (gewöhnlich $+ 15°$ C.) und g den Gangwerth bei einer anderen Temperatur t bezeichnet. Die Grössen a und b sind Constanten, welche von den Dimensionen des Instrumentes und den Ausdehnungs- sowie Elasticitätscoëfficienten der verwendeten Metalle abhängen. Für die Praxis wird es stets genügen, wenn man die obige Entwicklung mit dem quadratischen Temperaturgliede schliesst. Man ist nun freilich nicht ohne Weiteres berechtigt, eine Reihenentwicklung von obiger Form auch auf den Gang derjenigen Chronometer anzuwenden, welche mit einer Hilfscompensation versehen sind, weil hier eine Discontinuität in der compensirenden Wirkung bei einer bestimmten Temperatur eintritt. Doch hat die Discussion vieler Temperatur-Untersuchungen von Chronometern dargethan, dass diese Discontinuität bei sorgfältig gearbeiteten Instrumenten von so geringfügigem Betrage ist, dass man in der Praxis keine Ursache hat, von der Benutzung der obigen Reihenentwicklung Abstand zu nehmen.

Die Erfahrung lehrt ferner, dass jedes unter gleichen äusseren Verhältnissen aufbewahrte Chronometer Gangveränderungen zeigt, deren Beträge nahezu proportional der Zeit sind. Diese Erscheinung, welche man als die »Acceleration des Chronometerganges« zu bezeichnen pflegt, hat ihren Grund in den mit der Zeit fortschreitenden molekularen Veränderungen der Metalle und in den Veränderungen der Consistenz des Oeles. Erstere Ursache wirkt mittelbar hauptsächlich durch Elasticitätsveränderungen der Spirale, letztere durch Veränderungen der Zapfenreibung auf den Gang ein.

Fassen wir demnach die Wirkung der Temperatur und der Acceleration zusammen, so ergiebt sich die folgende Gangformel

$$g = g_0 + a\,(t - 15°) + b\,(t - 15°)^2 + c\,(z - z_0)$$

wo z und z_0 verschiedene Beobachtungsepochen bezeichnen.

Es ist nun der hauptsächlichste Zweck der Voruntersuchung, die in dieser Gleichung enthaltenen Grössen a und b, welche man für längere Zeit als Constanten betrachten kann, für jedes Chronometer zu ermitteln. Zu diesem Ende wird der Gang der Instrumente beobachtet, während dieselben in Räumen aufgestellt sind, deren mittlere Temperatur beliebig verändert und mit grosser Schärfe ermittelt werden kann[1]). Man pflegt, um das Accelerations- oder Zeitglied später leicht eliminiren zu können, die Reihenfolge der Temperaturen so zu wählen, dass eine symmetrische Anordnung in Bezug auf die Mitte der Untersuchungszeit stattfindet. Um ein Beispiel zu geben, möge hier das Prüfungsschema, welches auf den drei deutschen Chronometer-Observatorien bei Aus-

---

[1]) Eine nähere Beschreibung derartiger Apparate ist u. A. in den »Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie« Jahrgang 1894, Beiheft 1, pag. 24 ff., sowie im »Archiv der Deutschen Seewarte«, Jahrgang 1894, No. 4, pag. 13, gegeben.

führung vollständiger Temperatur-Untersuchungen inne gehalten wird, kurz erläutert werden. Die Instrumente werden nach einander je 10 Tage den Temperaturen

30°, 25°, 20°, 15°, 10°, 5°, 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°

ausgesetzt. Bildet man nun die Mittelwerthe der Gänge während der symmetrisch zur Mitte der Untersuchungszeit gelegenen Dekaden gleicher Temperatur, so verschwindet bei Benutzung obiger Gangformel überall das Zeitglied, und es bedarf zur Ermittelung der Temperatur Coëfficienten nur der Auflösung von 6 Bedingungsgleichungen mit je drei Unbekannten. Einige weitere Vereinfachungen, welche man unter strenger Berücksichtigung der Methode der kleinsten Quadrate in diesem Falle bei der numerischen Rechnung anwenden kann, sind in den »Annalen der Hydrographie u. s. w.« Jahrgang 1895, pag. 388 ff., gegeben.

Was die spätere Verwendung der in dieser Weise ermittelten Instrumentalwerthe anbetrifft, so wird man im Allgemeinen nur die Temperatur-Coëfficienten a und b benutzen, da die Erfahrung gezeigt hat, dass die Grössen g_0 und c sich sehr bald ändern. Auch wird es meistens sowohl bei Vorausberechnungen als bei Interpolationen zwischen einschliessenden Zeitbestimmungen genügen, dass man zur Ermittelung des Uhrstandes unter Fortlassung des Zeitgliedes die abgekürzte Form der Gangformel

$$g = g_0 + a\,(t - 15^\circ) + b\,(t - 15^\circ)^2$$

zu Grunde legt. Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, dass die Intervalle zwischen je zwei Zeitbestimmungen nicht zu lang sind; im anderen Falle ist ein graphisches Ausgleichungsverfahren, welches im »Archiv der Seewarte«, Jahrgang 1894, No. 4, pag. 45 ff. auseinandergesetzt ist, zu empfehlen. Da auch die Werthe der Temperatur-Coëfficienten sich im Laufe der Jahre zu ändern pflegen, so wird es vortheilhaft sein, dass der Beobachter von Zeit zu Zeit eine Neubestimmung dieser Grössen auf Grund der eigenen Beobachtungen vornimmt. Ob es nothwendig ist, bei der Ausgleichungsrechnung auch das quadratische Temperaturglied zu berücksichtigen, wird natürlich von der Amplitude der Beobachtungstemperaturen sowie von dem Genauigkeitsgrade abhängen, bis zu welchem im gegebenen Falle die mittleren Tagestemperaturen festgestellt werden können.

Eine zweite Ursache, durch welche Störungen im Gange des Chronometers hervorgerufen werden können, ist die Veränderung der Luftfeuchtigkeit. Schon von Tennant wurde (»Monthly Notices of the R. Astron. Soc., London«, Band 49) die Vermuthung ausgesprochen, dass man diesem Elemente eine gangstörende Wirkung zuschreiben müsse, allein erst durch die während der Jahre 1886 und 1887 ausgeführten verdienstvollen Arbeiten von Dr. C. F. W. Peters ist der Sinn und die mittlere Grösse dieser Beeinflussung festgestellt worden. In grösserem Umfange und unter möglichstem Ausschluss aller anderen gangstörenden Ursachen wurden diese Untersuchungen dann im Jahre 1888 auf der Deutschen Seewarte fortgesetzt. Die relative Feuchtigkeit wurde hierbei von 26% bis 93% variirt, und es wurde mit Rücksicht auf die Verhältnisse an Bord besonders die hohe Feuchtigkeit während längerer Zeit zur Anwendung gebracht. Durch diese Untersuchungen wurde die von Peters bereits ermittelte Thatsache bestätigt, dass bei vermehrter Luftfeuchtigkeit eine Verzögerung des Chronometerganges eintritt; diese Einwirkung ist aber nicht (wie bei der Temperatur) eine regelmässige und unter denselben Feuchtigkeitsverhältnissen in gleichem Betrage wiederkehrende, es nimmt vielmehr die Empfindlichkeit des Instrumentes gegen die Beeinflussung

durch Feuchtigkeit im Allgemeinen ständig zu. Wie man hieraus folgern kann, übt die Vermehrung der Feuchtigkeit erstens eine direkte Einwirkung auf den Chronometergang aus, indem durch mikroskopische Niederschläge auf Unruhe und Spirale eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes der schwingenden Theile eintritt; zweitens wächst die hygroskopische Wirkung in dem Maasse, wie die Rost- und Schimmelpilzbildung, welche durch hohe Feuchtigkeit stark befördert wird, zunimmt.

Caspari hat in einer Denkschrift, welche er im Jahre 1889 dem »Congrès de Chronometrie« in Paris vorlegte, eine andere Erklärung für diese Thatsachen gegeben. Durch Versuche von Winnerl ist festgestellt worden, dass Pendeluhren in vollkommen trockener Luft sehr schnell zum Stillstand gelangen. Man ist durch diese Erscheinung zu der Vermuthung geführt worden, dass unter gewöhnlichen atmosphärischen Verhältnissen die mikroskopischen Feuchtigkeitsniederschläge eine »einölende« (oder wohl besser: die Reibung vermindernde) Wirkung auf das Räderwerk ausüben. Sobald in ähnlicher Weise beim Chronometer durch vermehrte Feuchtigkeit die Widerstände verringert werden, wird sich die Schwingungsweite vergrössern. Wie wir oben gesehen haben, werden nun seitens der Fabrikanten die Chronometer fast ausnahmslos so regulirt, dass die grossen Schwingungen ein wenig langsamer als die kleinen ausgeführt werden, es wird also bei dieser anisochronen Regulirung die Vermehrung der Feuchtigkeit eine Verzögerung des Ganges zur Folge haben. Wenn zweitens hohe Feuchtigkeit so lange auf das Chronometer einwirkt, dass hierdurch Rost- und Schimmelpilzbildung erzeugt wird, so muss die Gangveränderung im verlierenden Sinne zunehmen, weil der Rost eine Schwächung der Spirale und eine Vermehrung der Masse aller schwingenden Theile herbeiführt. Die Entscheidung, ob die eine oder die andere dieser Erklärungen zutreffend ist, würde sich dadurch erbringen lassen, dass man Chronometer, welche im entgegengesetzten Sinne, wie sonst üblich, anisochron regulirt sind, bei verschiedenen Feuchtigkeiten beobachtet.

Die vorstehenden Beobachtungsthatsachen haben zu der Erkenntniss geführt, dass eine rechnerische Berücksichtigung der Feuchtigkeit bei den Gangbestimmungen ausgeschlossen ist, und dass es andererseits zweckmässig ist, Vorrichtungen anzubringen, welche den Mechanismus vor dem Zutritt hoher Feuchtigkeiten schützen. Dr. Peters suchte diesen Zweck dadurch zu erreichen, dass er das Instrument mit einem möglichst hermetisch schliessenden Gehäuse versah und besonders das Rohr für den Aufziehzapfen durch eine sorgfältig gearbeitete Stopfbüchse abdichtete. Einige Fabrikanten haben in Verfolgung des gleichen Princips noch eine besondere, im Innern des eigentlichen Gehäuses liegende Schutzkapsel angebracht; andere haben sämmtliche durch das Gehäuse hindurchgehende Schraubengänge beseitigt und das Zifferblattglas, statt es in einen abschraubbaren Ring einzusprengen, auf einen breiten Metallrand aufgeschliffen. Mehrjährige Erfahrungen haben aber gezeigt, dass diese nahezu hermetischen Chronometergehäuse, welche beim Gebrauch der Instrumente am Lande ihrem Zwecke ausreichend entsprechen, sich auf See nicht bewähren. Es lässt sich trotz aller Abdichtung nicht vermeiden, dass die Aussenluft im Laufe der Jahre in Folge der Luftdruckschwankungen in das Gehäuse tritt; dabei dringen natürlich auch die auf See stets hohen Feuchtigkeiten in das Uhrwerk. Man hat auf Grund dieser Erfahrungen in der Deutschen Marine neuerdings die Anwendung der hermetischen Verschlüsse wiederum verlassen. Zweckmässiger für den Seegebrauch ist es sicher, nach Dr. Neumayer's Vorschlage an Bord die Chronometer in einem Spinde aufzubewahren, in welchem eine mittlere

Feuchtigkeit von 50—55%, entsprechend der Feuchtigkeit am Lande, constant erhalten werden kann. Die Entwässerung der Luft wird in diesem Falle durch Anwendung von Chlorcalcium bewirkt. Im »Archiv der Seewarte», Jahrgang 1894, No. 4, pag. 8 und 20 ist die genauere Einrichtung eines derartigen Chronometer-Spindes angegeben.

Um den Einfluss der Luftdruckveränderungen auf den Gang des Chronometers zu ermitteln, wurden bereits von URBAN JÜRGENSEN ausgedehnte Untersuchungen vorgenommen, welche zu scheinbar einander widersprechenden Resultaten führten. JÜRGENSEN beobachtete, dass bei Luftdruckverminderungen zwar in allen Fällen eine Vergrösserung der Schwingungsamplitude eintrat; der Gang der Instrumente aber änderte sich ziemlich beträchtlich, theils im gewinnenden, theils im verlierenden Sinne. Der Grund der ersten Erscheinung ist in dem geringeren Luftwiderstande zu suchen, welchen Unruhe und Spirale bei der Schwingung erfahren; eine Erklärung für die letztere Beobachtung ist durch die Mängel des Isochronismus gegeben. Da URBAN JÜRGENSEN bei seinen Versuchen den Luftdruck bedeutend verminderte, so mussten schon geringe Unvollkommenheiten der Regulirung stark auf den Gang einwirken. Dr. HILFIKER wiederholte vor mehreren Jahren diese Versuche und fand als extreme Werthe, dass der Druckzunahme von 1 *mm* bei dem Chronometer GRANJEAN No. 96 eine Gangveränderung von $+ 0^{s}\cdot0042$ und bei dem Chronometer GRANJEAN No. 110 eine Gangveränderung von $+ 0^{s}\cdot0170$ (im verlierenden Sinne) entsprach. Die Uebereinstimmung der Vorzeichen erklärt sich dadurch, dass man jetzt allgemein bei der Reglage von dem strengen Isochronismus in dem oben mehrfach besprochenen Sinne abzugehen pflegt[1]).

VILLARCEAU hat in den »Annalen der Pariser Sternwarte« (Band 7) auf theoretischem Wege nachgewiesen, dass der Einfluss der Veränderungen des Luftdruckes auf den Gang des Instrumentes ein verschwindend kleiner ist, wenn der Isochronismus strenge oder doch wenigstens nahezu hergestellt ist. Man wird deshalb in der Praxis im Allgemeinen auch keine Veranlassung haben, die Gangformel eines Chronometers um ein vom Luftdruck abhängiges Glied zu vermehren; auszunehmen wären vielleicht nur die vereinzelten Fälle, wo ein stark anisochrones Instrument in wesentlich verschiedenen Meereshöhen benutzt wird, doch dürften auch dann die uncontrolirbaren, durch den Transport verursachten Gangstörungen die Sicherheit des Resultates in Frage stellen.

Wie schon im Eingange dieses Artikels hervorgehoben, bedient man sich des Chronometers, um die Differenz der geographischen Länge zweier Beobachtungsorte durch Zeitübertragung zu ermitteln. Die bei diesen Transporten unvermeidlichen Erschütterungen beeinflussen, wie bereits pag. 634 erwähnt, ebenfalls den Gang des Chronometers. Um den Sinn und die Grösse dieser Einwirkung festzustellen, wurden im Jahre 1888 auf der deutschen Seewarte ausgedehnte Untersuchungen mit Hilfe eines rotirenden Schaukel-Apparates ausgeführt, durch welchen die Bewegungen und Erschütterungen des Transportes, unter besonderer Berücksichtigung der Schiffsbewegungen, nachgeahmt und einer Anzahl

---

[1]) Aus diesen sowie aus früheren Darlegungen muss sich die Erkenntniss ergeben, dass es gewiss höchst fehlerhaft ist, wenn der Regleur über ein geringes Maass hinaus den Isochronismus zu Gunsten einer leichteren Temperatur-Compensation Preis giebt. In Bezug hierauf sagt LOUIS BERTHOUD sehr treffend: »Man hat die Spiralfeder sehr oft die Seele der Uhr genannt; sie kann aber nur als vernünftige Seele bezeichnet werden, wenn sie isochron ist.«

Chronometer mitgetheilt wurden. Es zeigte sich, dass die Grösse der hierdurch herbeigeführten Gangveränderungen ungleich ausfiel, und es ist anzunehmen, dass diese Werthe in erster Linie von dem Gewichte der Unruhe, sowie von der Elasticität und Länge der Spiralfeder abhängig sind. Besonders starke Gangveränderungen erlitt (nach einer Untersuchung aus dem Jahre 1882) ein Chronometer, welches mit einer sehr leichten Unruhe versehen war. Als Mittelwerthe der Gangveränderung sämmtlicher Chronometer ergaben sich bei den einzelnen Bewegungsarten des Apparates die folgenden Beträge:

beim einfachen Rotiren des Apparates (entsprechend einer Vorwärtsbewegung)	— 0^{s}·16	gewinnend
beim Rollen oder Schlingern (schaukelnde Bewegung in der Ebene senkrecht zur Richtung der Vorwärtsbewegung)	— 0·25	„
beim Stampfen (schaukelnde Bewegung in der durch die Richtung der Vorwärtsbewegung gelegten Vertikalebene)	— 0·02	„
beim Rollen und Stampfen	— 1·26	„
beim Rollen und Stampfen mit vertikalen Stössen . . .	— 1·52	„

Es erzeugten somit alle Bewegungsarten ein Acceleriren, und es erreichte die Gangveränderung in diesem Sinne einen besonders hohen Betrag bei Anwendung der combinirten Bewegungen und beim Hinzutreten vertikaler Stösse.

Es kann ferner die Zuverlässigkeit eines Chronometers dadurch sehr leiden, dass einzelne Theile permanenten Magnetismus annehmen; dieser Fall wird hauptsächlich dann eintreten, wenn sich das Instrument längere Zeit in der Nähe eines starken Magneten, grosser Eisenmassen oder einer Dynamo-Maschine befunden hat. Man kann das Vorhandensein derartiger Störungen sehr einfach dadurch ermitteln, dass man die Gänge mit einander vergleicht, welche sich bei Aufstellung des Instrumentes in verschiedenen Azimuthen ergeben. Ist nun ein solcher Fall eingetreten, so wird es sich kaum verlohnen, auf das Chronometer eine der vielen Methoden zur Anwendung zu bringen, welche während der letzten Jahre zur Beseitigung des permanenten Magnetismus bei Taschenuhren in Vorschlag gebracht worden sind. Die Erfahrung hat gezeigt, dass in vielen Fällen im Laufe der Zeit der frühere magnetische Zustand wieder hervorgetreten ist. Es ist deshalb dringend zu empfehlen, dass bei einem Chronometer, welches einmal permanenten Magnetismus angenommen hat, sämmtliche magnetischen Theile entfernt und durch neue Stücke ersetzt werden.

Von Krusenstern, Mouchez u. A. ist die Vermuthung ausgesprochen worden, dass die atmosphärische Elektricität einen nicht unbedeutenden Einfluss auf den Chronometergang besitzt; auch Caspari führt an, dass er derartige Störungen bei regenlosen Gewittern in Cochinchina beobachtet habe, dass er aber in Ermangelung aller electrometrischen Messungen nicht im Stande gewesen sei, irgend welche Gesetzmässigkeit dieser Wirkung zu erkennen. Diese von Caspari erwähnten Fälle sind aus dem Grunde besonders bemerkenswerth, weil man hier nicht, wie sonst meistens, den Eintritt von Gangstörungen auf die plötzliche Vermehrung der Luftfeuchtigkeit zurückführen kann. — Prof. Gelcich erwähnt folgende vereinzelte Beobachtung[1]). Während der Fahrt der französischen Fregatte »Coquille« von Amboina nach Port Jackson im Jahre 1823 schlugen mehrere Blitze in der Nähe des Schiffes ein. Beim Ansegeln der Insel Timor bemerkte

[1]) Gelcich, Geschichte der Uhrmacherkunst, vierte Aufl., pag. 131.

man auffallende Differenzen im Stande der drei Chronometer, und nach der Ankunft fand man folgende Gänge

$+ 7^s{\cdot}0 \qquad - 18^s{\cdot}7 \qquad + 27^s{\cdot}6,$

während frühere Beobachtungen die Werthe

$- 5^s{\cdot}3 \qquad - 26^s{\cdot}2 \qquad + 10^s{\cdot}1$

ergeben hatten. — Es wäre wünschenswerth, dass auch in weiteren Kreisen diesen interessanten und selten vorkommenden Erscheinungen Beachtung geschenkt würde.

Eine weitere Ursache, durch welche Gangstörungen herbeigeführt werden können, bilden die mit der Zeit eintretenden Veränderungen in der Molekular-Structur der Metalle. Dieselben pflegen sich besonders dann bemerkbar zu machen, wenn das Chronometer durch plötzliche starke Temperatur-Veränderungen oder Erschütterungen betroffen worden ist. Es werden nun zwar bei vorsichtiger Behandlung extreme Fälle dieser Art kaum eintreten können, doch ist anzunehmen, dass selbst geringere thermische oder mechanische Erschütterungen den molekularen Zustand der Metalle, besonders der Unruhe und Spirale, ebenfalls schon beeinflussen. Ausserdem bringt die schwingende Bewegung selbst im Laufe der Zeit beim Regulator unverkennbar Veränderungen in der molekularen Lagerung hervor. Es ist in gleicher Weise wie bei Kanonen und lange benutzten Hängebrücken constatirt worden, dass die an Bruchflächen erkennbare, ursprünglich faserförmige Structur der Metalle allmählich in ein krystallinisches Gefüge übergeht und dass die Cohäsion sowie die Elasticität wesentlich abnimmt. Durch letzteren Umstand werden in Bezug auf die Spirale Störungen der Schwingungsdauer und des Isochronismus sowie in Bezug auf die Unruhe Veränderungen der compensirenden Wirkung hervorgebracht. Da die genannten Veränderungen in der molekularen Lagerung bei sorgfältig gearbeiteten Instrumenten aber nur ganz allmählich einzutreten pflegen, so wird der aus dieser Ursache stammende Fehler im Uhrgange nur dann einen erheblichen Betrag annehmen, wenn das Intervall zwischen je zwei Zeitbestimmungen sehr gross ist.

Es ist ferner eine oft beobachtete Erscheinung anderer Art zu besprechen, welche gleichfalls auf molekulare Veränderungen in der Spirale zurückzuführen ist. Durch das Biegen der Spiralenden in die Form der von Phillips angegebenen Curven – vorzüglich wenn dies mit einer kalten Zange ausgeführt wird — werden im Spiraldrahte starke Spannungen hervorgebracht, welche sich erst im Laufe einiger Zeit wieder zu verringern pflegen. Jede Verminderung der Spannung hat eine Vergrösserung der Elasticität zur Folge, und diese wiederum bewirkt, wie die oben aufgestellte Gangformel zeigt, ein starkes Voreilen des Chronometers. Die Gangänderung in diesem Sinne tritt in geringerem Grade auf, wenn das Biegen der Spiralenden mit einer blauheissen Zange ausgeführt wird, weil dann das Entstehen von Oberflächenspannungen wesentlich verringert wird. Auch kommt der grössere oder geringere Härtegrad des Spiraldrahtes hierbei wesentlich in Betracht: in weichen Spiralfedern geht der Ausgleich der vorhandenen Spannungen schneller vor sich als in härteren, und es wird deshalb bei ersteren das Acceleriren kürzere Zeit andauern als bei letzteren. Es ist indessen nicht vortheilhaft, Spiralfedern von geringem Härtegrade zu wählen, weil dieselben schon nach Verlauf weniger Jahre schwankende und unzuverlässige Gänge zeigen und als vollkommen abgenutzt wieder beseitigt werden müssen. Andererseits darf auch der Fabrikant nicht in das andere Extrem gehen und zu harte Spiralen anwenden, weil die in diesem Falle auftretenden Spannungen

meistens eine sich über Jahre erstreckende Acceleration hervorrufen und weil derartige Federn leichter zum Brechen neigen.

Endlich sind hier noch die Wirkungen zu berücksichtigen, welche durch die mit der Zeit eintretenden Veränderungen in der Beschaffenheit des Oeles auf den Gang des Instrumentes ausgeübt werden. Hierbei kommt in erster Linie das Oel in Betracht, welches als Schmiermittel der Unruhzapfen dient. Wenn sich altes, durch metallische Beimengungen verunreinigtes oder durch den Sauerstoff der Luft angegriffenes oder verdicktes (»verharztes«) Oel im Zapfenloche befindet, so wird der Reibungswiderstand vergrössert und die Amplitude der Unruhe verringert werden. Nun sind, wie wir früher gesehen haben, die Chronometer meistens nicht vollkommen isochron, sondern der Art regulirt, dass die kleinen Schwingungen ein wenig schneller als die grossen ausgeführt werden. Wenn also in Folge der Verdickung des Oeles die Unruhe im Laufe der Zeit zu kleineren Schwingungen übergeht, so tritt ein Voreilen im Gange ein. Diese Wirkung wird in den meisten Fällen den verzögernden Einfluss, welcher sich aus der vermehrten Zapfenreibung ergiebt, noch wesentlich übertreffen. Die häufig gemachte Beobachtung, dass Chronometer, welche mehrere Jahre hindurch ohne Erneuerung des Oeles benutzt wurden, einen stark voreilenden Gang zeigen, ist in den meisten Fällen auf diesen Umstand zurückzuführen.

Wie die Erfahrung lehrt, nimmt die Verdickung des Chronometeröls sehr schnell zu, wenn sich das Instrument in sehr trockener Luft befindet, d. h. wenn die atmosphärische Feuchtigkeit unter 40% sinkt. Auch das Aussehen des Oeles ändert sich unter solchen Verhältnissen sehr bald: einige Oelsorten nehmen eine bräunliche bis tiefbraune, andere eine grüne Färbung an. Vielleicht ist das Auftreten der letzteren Färbung, welche man besonders in den Zapfenlöchern des Räderwerkes bemerkt, dem Umstande zuzuschreiben, dass diese Oelsorten von vorne herein nicht vollkommen säurefrei sind oder in Folge fortschreitender Zersetzung säurehaltig werden, in diesem Zustande die Messingtheile etwas angreifen und durch die metallischen Beimengungen dann eine grüne Färbung erhalten.

Aus den bisherigen Darlegungen ergiebt sich die Erkenntniss, dass man nur dann von einem Chronometer ein regelmässiges Verhalten erwarten darf, wenn es gelingt, die Einwirkung der vielen gangstörenden Ursachen fernzuhalten oder wenigstens bedeutend abzuschwächen. Es sollen deshalb im Folgenden die Vorschriften für eine zweckmässige Behandlung des Chronometers gegeben werden.

Da die Veränderungen der Temperatur und hohe Feuchtigkeiten, wie wir gesehen haben, sehr bedeutende gangstörende Wirkungen ausüben, so ist es in erster Linie wichtig, einen solchen Aufbewahrungsort für das Instrument zu wählen, an welchem stets eine möglichst constante Temperatur (etwa 15°—20° C.) und ein mittlerer Feuchtigkeitsgrad (etwa 50%—60%) herrschen. Man wird wohl in den meisten Fällen das Chronometer in einem geschlossenen Schranke aufbewahren, es muss dann dafür Sorge getragen werden, dass das Instrument beim Oeffnen der Schrankthür sowie der Zimmerthüren keine Erschütterungen erleidet. Ist man gezwungen, das Chronometer frei aufzustellen, so lässt man es am besten in seinem Ueberkasten und schützt es während der Nacht durch Ueberbreiten einer trockenen Wolldecke. Letztere Vorsicht ist besonders während des Aufenthaltes in den Tropen zu empfehlen. Das Gehäuse des Chronometers soll bei einer festen Aufstellung stets frei in der cardanischen Aufhängung schweben; es ist aber sehr wichtig, dass nach jedem Gebrauche sowie nach

jedem Aufziehen auf ein genau horizontales Einspielen des Zifferblattes geachtet und unter Umständen eine Justirung der Aufhängungsvorrichtung ausgeführt wird. Geneigte Lagen üben einen bedeutenden Einfluss auf den Gang aus. In Bezug auf Taschenchronometer möge noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass man dieselben am besten stets in einer Lage (entweder horizontal oder vertikal) aufbewahrt. — Da man für eine sorgfältige Bestimmung des Ganges der Kenntniss der mittleren Tagestemperatur bedarf, so wird man passend zwei Extrem-Thermometer in der Nähe des Chronometers anbringen. Der Mittelwerth der täglichen Ablesungen wird stets sehr nahe die mittlere Tagestemperatur ergeben.

Während der Benutzung des Chronometers bei der Beobachtung bewahre man dasselbe möglichst vor extremen Temperaturen und vor feuchter Luft. Beobachtet man am Tage im Freien, so stelle man das Instrument in den Schatten; ein ausgespannter und in geeigneter Weise festgebundener Regenschirm bietet einen guten Schutz gegen die Sonnenstrahlen. Bei starkem Frost überdecke man das Chronometer mit Ausnahme des Zifferblattes mit wollenem Zeuge. Man schütze ferner das Instrument, um Niederschläge im Innern des Werkes zu vermeiden, möglichst vor schroffen Temperaturveränderungen.

Das Aufziehen des Chronometers ist täglich zur gleichen Stunde auszuführen; man zähle dabei die Anzahl der Umdrehungen und drehe zuletzt sehr vorsichtig. Nach Beendigung des Aufziehens bringe man das Gehäuse vorsichtig wieder in die horizontale Lage. Beim Aufziehen eines Taschen-Chronometers drehe man nur den Schlüssel bezw. den Aufziehknopf, nicht aber die Uhr.

Vor jedem Transporte des Chronometers ist das Gehäuse durch den Arretirhebel festzustellen und die Klemmschraube des letzteren anzuziehen. Man versäume diese Vorsicht selbst dann nicht, wenn man eine geringe Stellenveränderung, z. B. von einem Zimmer zum anderen, vorzunehmen gedenkt. — Während eines Transportes ist die grösste Vorsicht bei allen Bewegungen zu beobachten: Das Instrument muss stets so gehalten werden, dass das Zifferblatt in horizontaler Lage verbleibt; jede Erschütterung und jede schnelle Drehung in horizontaler Richtung ist sorgfältig zu vermeiden. Die letztgenannte Bewegung kann nämlich unter Umständen bewirken, dass die Schwingungsamplitude der Unruhe sich so wesentlich vergrössert, dass der Auslösungszahn der kleinen Rolle bei einer Schwingung die Goldfeder zwei Mal passirt; es wird in diesem Falle das Hemmungsrad um zwei Zähne und der Secundenzeiger um zwei halbe Secunden bei einer Doppelschwingung fortschreiten. Da nun der Regulator nach einem derartigen Ueberschwingen nicht sofort wieder seine normale Schwingungsweite annimmt, so wird der gleiche Vorgang bei den nächsten Schwingungen meistens wiederum stattfinden und somit eine beträchtliche Standveränderung hervorrufen. Als unmittelbare Nachwirkung pflegt dann eine Gangveränderung im verlierenden Sinne aufzutreten, weil in Folge der erhöhten Spannung der Spirale die Elasticität derselben zeitweise verändert, und zwar meistens verringert wird. Eine sehr gewaltsame horizontale Drehung kann sogar, wie mehrfach vorgekommen, ein Zerspringen der Spiralfeder herbeiführen. — Andererseits ist auch häufig beobachtet worden, dass durch eine schnelle horizontale Drehung, welche der Schwingung der Unruhe nahezu gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt war, ein Stillstehen des Chronometers hervorgebracht worden ist. Man möge es sich daher zur Regel machen, ein Chronometer niemals in kürzerer Zeit als 10 Secunden um 360° zu drehen.

Es empfiehlt sich ferner auf einem Transporte, bei welchem das Chronometer getragen wird, sowie auf kürzeren Reisen den gepolsterten Ueberkasten zu benutzen; es wird hierdurch das Instrument schon wesentlich vor schroffen Temperaturübergängen, sowie vor dem Zutritte feuchter Luft geschützt sein. Lässt es sich vermeiden, so benutze man während eines kürzeren Transportes nicht eine Droschke oder Pferdebahn, sondern trage das Chronometer mit der Hand an seinen Bestimmungsort, weil erfahrungsgemäss durch die beim Fahren stattfindenden Erschütterungen häufig Gangveränderungen hervorgebracht worden sind. Bleibt während einer längeren Reise das Chronometer unter der Obhut einer zuverlässigen Person, so wird man am besten in folgender Weise verfahren. Man nehme das Gehäuse vollständig aus der kardanischen Aufhängung heraus (indem man die vordere, durch den Ring hindurchgehende Schraube löst), umhülle dasselbe mit einigen Bogen Seidenpapier und verpacke es dann sorgfältig in einem kleinen, mit Werg oder Watte gefüllten Korbe; letzteren behalte man während der Fahrt im Personenwagen. Soll ein Chronometer mit der Post befördert werden, so empfiehlt es sich, die Unruhe durch einen Uhrmacher feststellen zu lassen. Für den Fall, dass der Beobachter durch die Umstände gezwungen ist, diese Manipulation selbst auszuführen, mögen hier folgende praktische Winke gegeben werden. Man lasse, wenn die Zeit es erlaubt, zunächst das Chronometer vollständig ablaufen, setze das Gehäuse durch den Arretirhebel fest und schraube das Zifferblattglas ab. Nun lege man die Finger der linken Hand rund herum auf den Rand des Zifferblattes und kehre das ganze Instrument mit der rechten Hand um; es wird hierdurch das Werk meistens schon aus dem Gehäuse heraus in die geöffnete linke Hand gleiten. Sollte dies nicht eintreten, so löse man wiederum den Arretirhebel, wende das Gehäuse halb um und drücke das Werk mit Hilfe des auf den Aufziehzapfen gesetzten Schlüssels vorsichtig ein wenig aus dem Gehäuse heraus. Die linke Hand bleibt, um ein Herausfallen des Werkes zu verhindern, während der letzteren Manipulation in der vorhin beschriebenen Stellung. Es ist hierbei natürlich jede Berührung der Zeiger und des Werkes sorgfältig zu vermeiden. Man lege jetzt das herausgenommene Werk in umgekehrter Stellung (Zifferblatt unten, Platine oben) auf das durch den Arretirhebel festgestellte Gehäuse, bringe — falls sich das Chronometer noch in Gang befindet — durch ein vorsichtig gegen die Unruhe gehaltenes weiches Papier das Instrument zum Stehen und nehme das Feststellen der Unruhe vermittelst zweier kleiner Korkkeile vor. Dieselben sind mit einer Pincette ungefähr an denjenigen Stellen unter die Reifen der Unruhe zu schieben, wo dieselben mit der Speiche zusammenhängen; niemals darf die Unruhe in der Nähe ihres freien Endes festgestellt werden. Auch vermeide man, die Korke zu fest unterzuschieben, weil hierdurch leicht ein Verbiegen der Unruhe oder ein Brechen der Unruh-Axe herbeigeführt werden kann; die Keile sollen nur so fest haften, um eine schwingende Bewegung der Unruhe während des Transportes zu verhindern. Der benutzte Kork muss neu, trocken und darf nicht brüchig sein. Die Berührung der Correctionsschrauben an der Unruhe ist stets zu vermeiden. War das Chronometer vollständig abgelaufen, so ist es vortheilhaft, nach dem Feststellen die Schnecke um etwa eine Viertelumdrehung (nicht mehr) aufzuziehen, um zu verhindern, dass das Hemmungsrad während des Transportes hin- und hergeschleudert wird und sich möglicherweise mit der Spitze eines Zahnes genau auf den Rubinzahn der Unruhe setzt. Hierdurch kann bei dem späteren Ingangsetzen eine Verletzung des Hemmungsrades oder gar ein Bruch der Unruh-Axe herbeigeführt werden. Ist

dagegen die Zugfeder ein wenig gespannt, so wird sich ein Zahn des Hemmungsrades mit leichtem Drucke an den Ruhestein legen und eine Bewegung des Hemmungsrades wird hierdurch verhindert werden.

Ist ein Chronometer abgelaufen oder ohne äussere Veranlassung stehen geblieben, so setze man es, um ein unnöthiges Stellen der Zeiger zu vermeiden, erst dann wieder in Gang, wenn die auf dem Zifferblatte angezeigte Zeit herangekommen ist. Man fasse, nachdem das Instrument vollständig aufgezogen und das Gehäuse durch den Arretirhebel festgestellt worden ist, mit beiden Händen den Kasten und gebe ihm eine sanfte horizontale Drehung um etwa 60°—90°. Befindet sich das Chronometer in unverletztem Zustande, so wird die Unruhe hierdurch wieder in Schwingung kommen. Bleibt ein Chronometer zum zweiten Male ohne äussere Veranlassung stehen, so ist es nicht rathsam, ein nochmaliges Ingangsetzen vorzunehmen, weil man annehmen muss, dass das Instrument reparaturbedürftig ist und weil der Schaden sich in den meisten Fällen vergrössert, wenn das Chronometer unter diesen Umständen in Gang erhalten wird. Soll ein nicht in gehendem Zustande befindliches Chronometer transportirt werden, so ist die Unruhe stets festzustellen. Auch wenn ein Chronometer, welches bisher ein gutes Verhalten gezeigt hat, andauernd einen stark schwankenden Gang annimmt, wird es aus den oben erwähnten Gründen sich empfehlen, das Instrument ablaufen zu lassen und ausser Gebrauch zu stellen. Ebenso wird man verfahren, wenn ein zunehmendes starkes Retardiren beobachtet wird, da dies auf ein Rosten der Spirale deutet und ein Zerspringen derselben bei Fortsetzung der schwingenden Bewegung zu befürchten ist.

Es wurde oben erwähnt, dass das Stellen der Zeiger möglichst zu vermeiden ist. Für den Fall, dass dennoch eine derartige Aenderung aus irgend einem Grunde wünschenswerth erscheint, mögen hier die folgenden practischen Rathschläge beigefügt werden. Nachdem man das Gehäuse durch den Arretirhebel festgestellt und den Glasdeckel vorsichtig abgeschraubt hat, führe man den Minutenzeiger mit Hilfe des auf das Vierkant gesetzten Schlüssels in rechtsdrehendem Sinne bis zur richtigen Einstellung. Eine Bewegung im entgegengesetzten Sinne darf nie ausgeführt werden, weil hierdurch eine Verletzung der Zähne des Hemmungsrades oder gar ein Bruch der Unruh-Axe leicht herbeigeführt werden kann. Da es aus ähnlichen Gründen nicht rathsam ist, eine Verschiebung des Secundenzeigers vorzunehmen, so ist der Minutenzeiger so einzustellen, dass er mit dem Secundenzeiger übereinstimmt, d. h. es muss ersterer genau über einem Striche der Theilung stehen, wenn letzterer die Secunde Null passirt. Schliesslich überzeuge man sich, ob nach der Einstellung der Minutenzeiger frei über den Stundenzeiger hinweggehen kann; im anderen Falle würde nämlich sehr bald ein Stillstand des Uhrwerks eintreten.

Es möge als Regel festgehalten werden, dass das Chronometer etwa alle drei Jahre gereinigt und mit frischem Oel versehen werde. Indessen dürfte gelegentlich eine weitere Benutzung während eines vierten und fünften Jahres keine Bedenken haben, wenn das Instrument sich stets unter günstigen äusseren Bedingungen befunden hat. Man wird im Allgemeinen gut thun, die Reinigung oder Reparatur dem Verfertiger des Instrumentes zu übertragen; diese Wahl ist besonders dann zu empfehlen, wenn das Chronometer mit einer complicirten Hilfscompensation versehen ist, deren richtige Einstellung langjährige Erfahrung auf einem Sondergebiete der Reglage erfordert. C. Stechert.

Coordinaten. In der Astronomie bedient man sich zur Bestimmung der Lage der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel der sphärischen Coordinaten, indem man einige bestimmte grösste Kreise als Fundamentalkreise ansieht. Namentlich drei solcher Kreise kommen zur Anwendung, erstens der Horizont, zweitens der Aequator, drittens die Ekliptik.

1) Der Horizont. Die die Oberfläche der Erde im Beobachtungsort berührende Ebene schneidet die Himmelskugel in einem grössten Kreise, welcher die sichtbare von der unsichtbaren Hemisphäre trennt und der Horizont des Beobachtungsortes heisst. Eine Ebene, welche parallel dieser durch den Erdmittelpunkt gelegt wird, bildet den wahren Horizont, im Gegensatz zum vorher erwähnten scheinbaren Horizont. Die Pole des Horizontes heissen Zenith (Scheitelpunkt) und Nadir (Fusspunkt), ersterer in der sichtbaren, letzterer in der unsichtbaren Hemisphäre gelegen. Die Richtung nach dem Zenith resp. Nadir ist die Verticale, sie fällt mit der Richtung der Lothlinie zusammen und die durch die Pole des Horizontes gelegten grössten Kreise heissen Verticalkreise. Zwei derselben sind von besonderer Wichtigkeit, nämlich erstens der Meridian, d. i. derjenige Verticalkreis, der durch die Erdaxe geht, er schneidet den Horizont in dem Süd- und Nordpunkt. Senkrecht zum Meridian steht der andere Verticalkreis, welcher der erste Vertical heisst, er schneidet den Horizont im Ost- und Westpunkt. Es sind daher Ost- und Westpunkt die Pole des Meridians, Süd- und Nordpunkt die des ersten Verticals.

Die Höhe eines Sternes ist der Bogenabstand des Sternes vom Horizont, gezählt auf dem durch den Stern gelegten Verticalkreis. Sie wird von $0°$ (im Horizont) bis $90°$ (im Zenith) gezählt. Die Depression (über dieselbe s. d. Art. Sextant) gilt als negative Höhe. Anstatt der Höhe findet sich häufig Zenithdistanz angegeben, welche der Bogenabstand des Sternes vom Zenith, gezählt auf demselben Verticalkreise, ist; die Depression wird über $90°$ hinüber gezählt. Das Azimuth ist der Bogenabstand zwischen dem durch den Stern gelegten Verticalkreis und dem Meridian, gezählt auf dem Horizont von Süd durch West, Nord, Ost bis Süd, von $0-360°$, oder der Winkel, welchen der Verticalkreis des Sternes mit dem Meridian am Zenith bildet. In der Nautik zählt man das Azimuth von Nord durch Ost bezw. West nach Süd von $0-180°$ und muss dann ein östliches und westliches Azimuth unterscheiden. Höhe und Azimuth bilden die Coordinaten des Sternes bezogen auf den Horizont als Fundamentalebene.

Wollte man für diese sphärischen Coordinaten zur Ortsangabe rechtwinklige benutzen, so würde für letztere die X- und Y-Axe in der Ebene des Horizontes liegen, erstere positiv nach Süden, letztere nach Westen gerichtet sein, die Z-Axe aber nach dem Zenith, und es wäre

$$x = \cos h \cos A$$
$$y = \cos h \sin A$$
$$z = \sin h,$$

wobei die Entfernung, so lange es sich nicht um Körper des Sonnensystems handelt, ausser Betracht bleibt.

Kleine, dem Horizonte parallele Kreise nennt man Horizontalkreise oder Almucantarate (s. d. danach benannte Instrument, sowie auch Universalinstrument).

2) Der Aequator. Der Aequator ist derjenige grösste Kreis der Sphäre, dessen Ebene mit der Ebene des Erdäquators zusammenfällt und daher senkrecht zur Erdaxe ist. Letztere verlängert fällt mit der Axe des Himmelsäquators

zusammen, die Endpunkte bilden den Nord- und Südpol. Der Aequator theilt die Himmelskugel in die nördliche und südliche Hemisphäre. Zweimal im Jahr, im Frühjahr und im Herbst, befindet sich die Sonne im Aequator. Diejenigen grössten Kreise, welche durch die Weltpole gehen, heissen Deklinations- oder Stundenkreise; die kleinen Kreise, welche man sich parallel dem Aequator gezogen denken kann, heissen Parallelkreise. Da der Meridian ebenfalls durch die Erdaxe geht, ist er auch ein Stundenkreis.

Deklination eines Sternes ist der Bogenabstand des Sternes vom Aequator, gezählt auf dem durch den Stern gelegten Stundenkreis. Sie wird vom Aequator ausgehend von $0°$ bis $\pm 90°$ gerechnet, je nachdem sich der Stern auf der nördlichen oder südlichen Hemisphäre befindet, und man spricht von nördlicher oder positiver und südlicher oder negativer Deklination. An Stelle der Deklination wird vielfach, namentlich in England, Poldistanz und zwar Nordpoldistanz (wenn nichts anderes bemerkt) angewandt, sodass die Deklination $\delta = 90° - p$ (Poldistanz) ist. Wenn p grösser als $90°$ ist, so ist also die Deklination negativ. Diese Zählweise, welche den Vortheil hat, dass bei den Angaben das verschiedene Zeichen unnötig ist, (z. B ist dies von grossem Werth bei astronomischen Telegrammen, da hier nicht allein ein Wort gespart, sondern auch eine gefährliche Fehlerquelle vermieden wird) aber andererseits für die Rechnung und Uebersichtlichkeit in vielen Fällen Unbequemlichkeit bietet, kommt immer mehr in Abnahme.

Der Stundenwinkel ist der Bogenabstand des durch den Stern gelegten Stundenkreises von dem Meridian, gezählt von letzterem von Süd durch West, Nord, Ost bis Süd von $0-360°$, oder von 0^h bis 24^h auf dem Aequator, oder der sphärische Winkel, welcher am Pol des Aequators von dem durch den Stern gelegten Stundenkreis mit dem Meridian gebildet wird. Letztere Zählweise gründet sich darauf, dass ein beliebiger Punkt des Aequators in 24 Stunden in Folge der Drehung der Erde um ihre Axe die ganze Peripherie von $360°$ durchläuft. Es ergiebt sich daher

$$1^h = 15° \quad \text{und} \quad 1° = 4^m$$
$$1^m = 15' \qquad 1' = 4^s$$
$$1^s = 15'' \qquad 1'' = 0^s{\cdot}06667,$$

wobei bemerkt werden mag, dass in der Astronomie die Minuten und Secunden nach Zeit oder Bogenmaass streng dadurch unterschieden werden, dass im ersteren Falle die Bezeichnung, wie oben, $^{m,\,s}$ ist, im letzteren dagegen die auch sonst übliche $','' $. Die Verwandlung beider Zählweisen in einander wird sehr oft gebraucht. Vielfach existiren Hilfstafeln, die aber bei folgender, sich aus obigen Verhältnissen sofort ergebender Regel sämmtlich überflüssig sind. Wenn Bogenmaass in Zeitmaass zu verwandeln ist, so dividire man die Zahl der Grade durch 15, wodurch die Zahl der Stunden erhalten wird, den Rest multiplicire man mit 4 und addire hierzu die Zahl der durch 15 dividirten Bogenminuten, was die Zahl der Zeitminuten giebt, den Rest der Bogenminuten multiplicirt man wieder mit 4, addirt dazu die durch 15 dividirte Anzahl der Bogensecunden und ihrer Theile, hat damit die Zahl der Zeitsecunden nebst deren Bruchtheilen. Für den umgekehrten Fall multiplicire man die Zahl der Stunden mit 15, addire zum Produkt die Zahl der durch 4 getheilten Minuten, wodurch sich die Grade ergeben; man multiplicirt dann den bei der Division verbleibenden Rest mit 15, addirt dazu die Zahl der durch 4 getheilten Secunden uud erhält damit die Zahl der Bogenminuten; endlich multiplicirt man den verbleibenden Rest mit 15 und erhält so die Zahl der Bogensecunden und ihrer Bruchtheile.

Beispiel:

a)	b)
$348^\circ\ 17'\ 32''{\cdot}55 = 23^h\ 13^m\ 10^s{\cdot}17$	$23^h\ 13^m\ 10^s{\cdot}17 = 348^\circ\ 17'\ 32''{\cdot}55$
$348^\circ : 15 = 23^h$	$23^h \times 15 + 13^m : 4 = 348^\circ$
$3^\circ \times 4 + 17' : 15 = 13^m$	$1^m \times 15 + 10^s{\cdot}17 : 4 = 17'$
$2' \times 4 + 32''{\cdot}55 : 15 = 10^s{\cdot}17$	$2^s{\cdot}17 \times 15 = 32''{\cdot}55$

Will man auch hier statt dieser beiden auf den Aequator bezogenen sphärischen Coordinaten rechtwinklige gebrauchen, so wird die positive Z-Axe auf dem Aequator senkrecht und nach dem Nordpol gerichtet sein, die X- und Y-Axen liegen in der Ebene des Aequators, sodass die positive X-Axe nach dem Nullpunkte gerichtet, die Y-Axe nach dem 90. Grad der Stundenwinkel gerichtet ist. Bezeichnet δ die Deklination, t den Stundenwinkel, so ist

$$x' = \cos\delta \cos t$$
$$y' = \cos\delta \sin t$$
$$z' = \sin\delta.$$

Während im ersten System beide Coordinaten, Höhe und Azimuth, von der Zeit der Beobachtung abhängig sind, ist im zweiten System nur noch der Stundenwinkel, nicht aber die Deklination von der täglichen Bewegung abhängig.

3) Der Aequator. In einem dritten System sind beide Coordinaten von der Beobachtungszeit unabhängig, die Fundamentalebene ist ebenfalls der Aequator, und die eine Coordinate, die Deklination, ist die gleiche wie vorher. Für die zweite wird als Anfangspunkt anstatt des im Laufe der täglichen Umdrehung veränderlichen Punktes, in dem der Meridian den Aequator schneidet, ein fester auf dem Aequator gewählt, und zwar einer der beiden Punkte, in welchem der Aequator von der Ekliptik geschnitten wird. Letztere ist derjenige grösste Kreis, welchen der Mittelpunkt der Sonne vom Mittelpunkt der Erde aus gesehen im Laufe eines Jahres unter den Sternen von West nach Ost beschreibt. Die Neigung der Ekliptik gegen den Aequator, welche ungefähr $23\frac{1}{2}^\circ$ beträgt, heisst die Schiefe der Ekliptik, die beiden Durchschnittspunkte Frühlings- und Herbst-Tag- und Nachtgleichenpunkte oder Aequinoctialpunkte, der Durchmesser der Himmelskugel, in welchem sich die Ebene des Aequators und der Ekliptik schneiden, ist die Linie der Aequinoctien. Der Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt wird auch Widderpunkt genannt und in der Regel mit ♈ bezeichnet, weil in ihm das Zeichen des Widders beginnt. Er ist derjenige der beiden Punkte, in welchem die Sonne von der südlichen Hemisphäre auf die nördliche übertritt, der Herbstpunkt dagegen derjenige, in welchem die Sonne von der nördlichen zur südlichen übergeht. Von den Aequinoctialpunkten um 90° entfernt liegen in der Ekliptik die Solstitialpunkte, das Sommersolstitium findet statt, wenn die Sonne ihre grösste nördliche Deklination, das Wintersolstitium, wenn sie ihre grösste südliche Deklination erreicht hat. Der durch die Solstitialpunkte gelegte Deklinationskreis ist der Colur der Solstitien, der durch die Aequinoctialpunkte gelegte der Colur der Aequinoctien. (Ueber die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und des Widderpunktes und ihre Veränderungen s. d. Art. Schiefe der Ekliptik, Rectascensionsbestimmung, Präcession, Nutation).

Die Rectascension oder Gerade Aufsteigung ist nun der Bogen des Aequators, welcher zwischen dem Frühlingsäquinoctialpunkt und dem Stundenkreis des Sternes liegt, oder der sphärische Winkel, welcher am Pol des Aequators von den durch den Stern und den Frühlingspunkt gelegten Stundenkreisen gebildet wird. Sie wird gezählt entgegen der Richtung der täglichen Bewegung von West nach Ost von 0—360°, oder (wie die Stundenwinkel) von 0^h—24^h.

Da nun die Rectascension und Deklination unabhängig von der Lage des Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche sind, so eignen sich diese Coordinaten besonders für die Angaben der Sternörter an der Sphäre und die Sternverzeichnisse oder Sterncataloge (s. d.) sind dementsprechend angeordnet. Will man auch für diese rechtwinklige Coordinaten einführen, so würden sich diese von denen im vorigen System nur darin unterscheiden, dass die positive X-Axe nach dem Frühlingspunkt, die Y-Axe nach dem 90. Grad der Rectascension gerichtet ist. Entsprechend wird, wenn mit α die Rectascension bezeichnet wird,

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha$$
$$y'' = \cos\delta \sin\alpha$$
$$z'' = \sin\delta.$$

Auf die Fundamentalebene des Aequators gründen sich die äquatoreal montirten Instrumente, s. darüber d. Art. Aequatoreal.

4) Die Ekliptik. Die durch die Pole der Ekliptik gelegten grössten Kreise sind Breitenkreise und der Bogenabstand des Sternes gezählt auf dem durch denselben gelegten Breitenkreis von $0°$ bis $\pm 90°$ ist die Breite des Sternes, nördlich (positiv), oder südlich (negativ), je nachdem er auf der nördlichen oder südlichen Hemisphäre liegt. Die Länge des Sternes ist der Bogenabstand seines Breitenkreises von dem Frühlingsäquinoctialpunkt, gezählt wie die Rectascension, aber auf der Ekliptik und nur im Bogenmaass von $0—360°$, oder der sphärische Winkel, welcher von dem Breitenkreis des Sternes und dem durch den Widderpunkt gelegten am Pol der Ekliptik gebildet wird. Eine früher nicht selten gebrauchte Zählweise der Längen nach Zeichen, deren jedes $30°$ hatte, ist jetzt vollständig abgekommen.

Das Coordinatensystem der Längen und Breiten, das ekliptikale wird besonders bei den Bestimmungen der Bahnen der Körper im Sonnensystem gebraucht.

(A. 163.)

Es wird oft nöthig, die nach dem einen System gegebenen Coordinaten eines Sternes in die eines anderen Systems zu verwandeln. Die Formeln ergeben sich dafür in folgender Weise.

a) Azimuth und Höhe eines Sternes sei zu verwandeln in Stundenwinkel und Deklination, bei gegebener geographischer Breite oder Polhöhe des Beobachtungsortes.

Im sphärischen Dreieck PZS (Fig. 163) sei P der Nordpol des Aequators, Z das Zenith, S der Stern. Es seien ferner

φ die Polhöhe oder geographische Breite des Beobachtungsortes,
α die Rectascension des Gestirnes,
t der Stundenwinkel „ „
δ die Deklination „ „
p die Poldistanz „ „
A das Azimuth „ „
h die Höhe „ „
z die Zenithdistanz „ „
q der sogen. parallactische Winkel am Stern.

Im betrachteten Dreieck ist der Winkel am Pol $SPZ = t$, der am Zenith $PZS = 180 - A$, da PZM einen Bogen des Meridians vorstellt und der Winkel

MZS das Azimuth sein würde; der Bogen PZ, die Zenithdistanz des Poles, ist $90° - \varphi$, der Bogen $SZ = 90° - h = z$, der Bogen $SP = 90° - \delta = p$. Dann ist

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A$$
$$\cos\delta \sin t = \cos h \sin A$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A.$$

Für die Wahl des Quadranten gilt einfach folgende Ueberlegung: Der Cosinus der Deklination und der Höhe muss immer positiv sein, da beide Grössen nicht über 90° werden, daher hat $\sin t$ das Zeichen von $\sin A$, d. h, wenn A zwischen 0° und 180° liegt, muss auch t zwischen 0° und 180° liegen, wenn A zwischen 180° und 360° liegt, muss auch t zwischen 180° und 360° liegen, was übrigens auch aus der Bedeutung des Azimuthes und des Stundenwinkels folgt; ferner muss, da $\cos\delta$ immer positiv ist, $\cos t$ das Zeichen der rechten Seite der dritten Gleichung haben; endlich wird das Zeichen von $\sin\delta$ und damit das der Deklination durch die erste Gleichung bestimmt.

Für die logarithmische Rechnung ist dieses Formelsystem nicht bequem, und man benutzt daher die Einführung von Hilfswinkeln, deren Bedeutung in jedem einzelnen Falle leicht kenntlich ist, da sie auf der Zerlegung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks in zwei rechtwinklige oder der Ergänzung des ersteren zu einem rechtwinkligen beruht.

Man setzt hier

$$\sin h = m \cos M$$
$$\cos h \cos A = m \sin M,$$

dann werden die obigen drei Gleichungen

$$\sin\delta = m \sin(\varphi - M)$$
$$\cos\delta \sin t = m \sin M \operatorname{tang} A$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos(\varphi - M)$$

und daraus folgen zur Bestimmung von δ und t die einfachen Formeln

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{cotang} h \cos A$$
$$\operatorname{tang} t = \sin M \operatorname{tang} A \sec(\varphi - M)$$
$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(\varphi - M) \cos t$$

und

$$\cos h \cos A \cos(\varphi - M) = \cos\delta \cos t \sin M$$

als Controle.

b) Für den umgekehrten Fall, wo die Höhe und das Azimuth eines Sternes aus seinem Stundenwinkel und seiner Deklination gesucht wird, gelten die Gleichungen

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t,$$

welche durch Einführung von Hilfswinkeln mittels

$$\sin\delta = m' \sin M'$$
$$\cos\delta \cos t = m' \cos M'$$

übergehen in das System

$$\operatorname{tang} M' = \operatorname{tang}\delta \sec t$$
$$\operatorname{tang} A = \cos M' \operatorname{tang} t \operatorname{cosec}(\varphi - M')$$
$$\operatorname{tang} h = \operatorname{cotang}(\varphi - M') \cos A$$

und

$$\cos\delta \cos t \sin(\varphi - M') = \cos h \cos A \cos M'$$

als Controle. Ueber die Wahl der Quadranten gilt die gleiche Bemerkung wie vorher.

Beispiel a) Gegeben

$$h = 41^\circ\ 30'{\cdot}5$$
$$A = 37\ \ 13{\cdot}6$$
$$\varphi = 49\ \ \ 0{\cdot}5$$

$\log cotang\, h$	0·05306	M	41° 58′·7	$\log tang\,(\varphi - M)$	9·09102
$\log cos\, A$	9·90105	$\varphi - M$	7 1·8	$\log cos\, t$	9·94944
$\log tang\, M$	9·95411	t	27 6·8	$\log tang\, \delta$	9·04046
$\log sin\, M$	9·82533	δ	6 15·8	$\log cos\, \delta$	9·99740
$\log sec\,(\varphi - M)$	0·00328	$\log cos\, h$	9·87440	$\log sin\, M$	9·82533
$\log tang\, A$	9·88069	$\log cos\, A\, cos\,(\varphi - M)$	9·89777	$\log cos\, t$	9·94944
$\log tang\, t$	9·70930	Summe	9·77217	Summe	9·77217

Beispiel b) Gegeben

$$\delta = 5^\circ\ 50'{\cdot}5$$
$$t = 23\ \ 58{\cdot}5$$
$$\varphi = 49\ \ \ 0{\cdot}5$$

$\log tang\, \delta$	9·00992	M'	6° 23′ 3	$\log cotang\,(\varphi - M')$	0·03612
$\log sec\, t$	0·03919	$\varphi - M'$	42° 37·2	$\log cos\, A$	9·92295
$\log tang\, M'$	9·04911	A	33 7·9	$\log tang\, h$	9·95907
$\log cos\, M'$	9·99729	h	42 18·2	$\log cos\, h$	9·86899
$\log tang\, t$	9·64807	$\log cos\, \delta$	9·99774	$\log cos\, A$	9·92295
$\log cosec(\varphi - M')$	0·16933	$\log cos\, t\, sin(\varphi - M')$	9·79148	$\log cos\, M'$	9·99729
$\log tang\, A$	9·81469	Summe	9·78922	Summe	9·78923

Wird allein die Zenithdistanz (oder Höhe) aus der Deklination und dem Stundenwinkel gesucht, ein Fall, der nicht selten vorkommt, so kann man die ursprüngliche Formel für $sin\, h$ (pag. 659) bequem umformen. Setzen wir

$$cos\, t = 1 - 2\, sin^2 \tfrac{1}{2} t$$

dann kommt

$$sin\, h = cos\, z = sin\, \varphi\, sin\, \delta + cos\, \varphi\, cos\, \delta - 2\, cos\, \varphi\, cos\, \delta\, sin^2 \tfrac{1}{2} t$$
$$= cos\,(\varphi - \delta) - 2\, cos\, \varphi\, cos\, \delta\, sin^2 \tfrac{1}{2} t.$$

Subtrahiren wir nun noch beide Seiten von 1, so wird

$$sin^2 \tfrac{1}{2} z = sin^2 \tfrac{1}{2} (\varphi - \delta) + cos\, \varphi\, cos\, \delta\, sin^2 \tfrac{1}{2} t$$

und setzt man hier

$$n = sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \delta) \qquad m = \sqrt{cos\, \varphi\, cos\, \delta}$$
$$\frac{m}{n}\, sin \tfrac{1}{2} t = tang\, \lambda$$

so ist dann

$$sin \tfrac{1}{2} z = n\, sec\, \lambda = m\, sin \tfrac{1}{2} t\, cosec\, \lambda.$$

Je nachdem $cos\, \lambda$ oder $sin\, \lambda$ grösser ist als $sin\, \lambda$ oder $cos\, \lambda$, findet man z genauer durch den ersten oder letzten Ausdruck. Das Vortheilhafte dieser Formel liegt namentlich auch darin, dass, wenn eine grössere Reihe gleicher Beobachtungen in rascher Folge angestellt wird, die Werthe n und m als Constanten für den Abend und den Stern nur einmal zu berechnen sind. Man bildet sich dann ausser jenen noch den Werth von $\frac{m}{n}$, der zu den verschiedenen Werthen $sin \tfrac{1}{2} t$ addirt wird. Da man den Winkel λ selbst nicht braucht, so schreibt man dann gleich unter $sin \tfrac{1}{2} t$ — indem man $\frac{m}{n}\, sin \tfrac{1}{2} t$ im Kopf behält — $sec\, \lambda$ bezw. $cosec\, \lambda$ hin und erhält darnach $sin \tfrac{1}{2} z$.

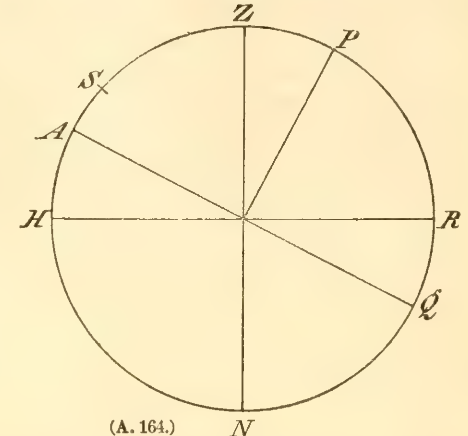
Ist $t = 0$, also der Stern im Meridian, so ist die Zenithdistanz:

$$z = \varphi - \delta,$$

wofür man für Sterne, die nördlich vom Zenith culminiren

$$z = \delta - \varphi$$

setzt. Dass $z = \varphi - \delta$, wenn der Stern im Meridian ist, folgt auch sofort aus der Fig. 164, in welcher der Kreis $HASZPRQNH$ den Meridian bezeichnet, HR den Horizont, AQ den Aequator. Dann ist Z das Zenith, P der Nordpol, der Bogen $PR = AZ$ die Polhöhe φ, AS die Deklination eines Sternes S, und SZ seine Zenithdistanz.



(A. 164.)

Es folgt auch aus der Gleichung

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}t,$$

dass das Gestirn seine grösste Höhe erreicht, wenn $t = 0$ ist, seine geringste, wenn $t = 180°$ ist. Passirt es den Meridian bei $t = 0$, so befindet es sich in Oberer Culmination, oder es culminirt schlechthin, wenn der Durchgang durch den Meridian bei $t = 180°$ nicht über dem Horizont des Beobachtungsortes sichtbar ist. Diesen letzteren Durchgang nennt man die Untere Culmination. Sie lässt sich nur beobachten bei den Circumpolarsternen, und für diese ist dann die Zenithdistanz, wie auch aus der Fig. 164 folgt:

$$z\ (\text{Unt. Culm.}) = 180 - (\varphi + \delta).$$

Die grösste (bezw. geringste) Höhe erreicht das Gestirn aber nur im Meridian, wenn es keine eigene Bewegung hat, in Folge deren sich die Deklination merkbar verändert; hier liegt dann vielmehr die grösste (bezw. kleinste) Höhe ausserhalb des Meridians, und will man den Stundenwinkel hierfür kennen, so kann man durch Differentiation die anzubringende Correction ermitteln. Wenn die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

unter Annahme, dass t, z, δ veränderlich seien, nach t differenzirt wird, so kommt

$$-\sin z\frac{dz}{dt} = (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt} - \cos\varphi\cos\delta\sin t,$$

und die Bedingung, dass z ein Maximum oder Minimum ist, wird erfüllt, wenn $\frac{dz}{dt} = 0$ ist. Es muss daher:

$$(\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt} = \cos\varphi\cos\delta\sin t$$

oder

$$\sin t = (\tang\varphi - \tang\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt}$$

sein, woraus der Stundenwinkel des Gestirnes für den Moment der grössten bezw. kleinsten Höhe folgt. Da nun natürlich $\frac{d\delta}{dt}$, das Verhältniss der Aenderung der Deklination zu der des Stundenwinkels, oder der Ausdruck der Bewegung des Gestirnes, sowie auch t selbst sehr klein sein wird, so kann man, wenn ausserdem $d\delta$ als die Veränderung in der Zeitsecunde angesehen wird, unter Berück-

sichtigung, dass bei kleinen Winkeln der Sinus mit dem Bogen, der Cosinus mit der Einheit vertauscht werden kann, annehmen, dass

$$t^s = \frac{206265}{15} \frac{d\delta}{dt} (tang\,\varphi - tang\,\delta)$$

ist. Darnach erreicht ein Gestirn bei einer nördlichen Bewegung den Meridian um t Secunden vor seiner grössten Höhe, bezw. nach seiner geringsten.

Am 4. Februar 1888 betrug z. B. bei Ob. Culm. für Berlin ($\varphi = 52° 30'\cdot 3$) die Deklination des Mondes $-13° 7'\cdot 1$, seine stündliche Aenderung $-594''$, d. h. der Mond ging noch weiter nach Süden. Es findet sich darnach, dass er seine grösste Höhe $3^m\ 52^s\cdot 4$ vor dem Durchgang durch den Meridian erreichte.

Will man auch den dritten Winkel, den parallactischen Winkel q, berücksichtigen, so werden am besten, wie immer in solchen Fällen, die GAUSS'schen Gleichungen angewendet. Dieselben lauten dann:

$$\cos\tfrac{1}{2}z \sin\tfrac{1}{2}(A - q) = \sin\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}z \cos\tfrac{1}{2}(A - q) = \cos\tfrac{1}{2}t \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \sin\tfrac{1}{2}(A + q) = \sin\tfrac{1}{2}t \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \cos\tfrac{1}{2}(A + q) = \cos\tfrac{1}{2}t \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta).$$

Durch Division erhält man zunächst die logarithmisch ganz bequemen Formeln

$$tang\,\tfrac{1}{2}(A - q) = tang\,\tfrac{1}{2}t \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \delta)}$$
$$tang\,\tfrac{1}{2}(A + q) = tang\,\tfrac{1}{2}t \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \delta)},$$

woraus A und q folgen. Zur Berechnung von z kann man dann beliebig eine der obigen Gleichungen benutzen, oder auch, indem man die dritte durch die erste oder die vierte durch die zweite dividirt, eine der folgenden:

$$tang\,\tfrac{1}{2}z = cotang\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \frac{\sin\frac{1}{2}(A - q)}{\sin\frac{1}{2}(A + q)}$$
$$= tang\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta) \frac{\cos\frac{1}{2}(A - q)}{\cos\frac{1}{2}(A + q)}.$$

Beispiel. Gegeben für den Stern α Lyrae (1885) die Rectascension $\alpha = 18^h\ 33^m\ 2\cdot 6$ und die Deklination $\delta = +38° 40' 38''$; gesucht für die Sternzeit $\vartheta = 21^h\ 11^m\ 37^s\cdot 6$ die Zenithdistanz z, das Azimuth A und der parallactische Winkel q. Polhöhe $\varphi = 49° 0' 30''$.

Es ist zunächst der Stundenwinkel $t = \vartheta - \alpha = 2^h\ 38^m\ 35^s\cdot 0 = 39° 38' 45''$.

$\frac{1}{2}(\varphi + \delta) = 43° 50' 34''$ $\qquad \frac{1}{2}t = 19° 49' 22''$

$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) = 5\ \ 9\ \ 56$

$log\ sin\,\frac{1}{2}(\varphi + \delta) =$	9·84054	I
$log\ sec\,\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$	0·00177	I
$log\ tang\,\frac{1}{2}t$	9·55687	I, II
$log\ cos\,\frac{1}{2}(\varphi + \delta)$	9·85808	II
$log\ sec\,\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$	1·04559	II

Summe I = $log\ tang\,\frac{1}{2}(A - q)$	9·39918
Summe II = $log\ tang\,\frac{1}{2}(A + q)$	0·46054
$\frac{1}{2}(A - q)$	14° 4' 30''
$\frac{1}{2}(A + q)$	70° 53' 56''
$log\ cos\,\frac{1}{2}(A - q)$	9·98677
$log\ sec\,\frac{1}{2}(A + q)$	0·48513
$log\ tang\,\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$	8·95618
$log\ tang\,\frac{1}{2}z$	9·42808
$\frac{1}{2}z$	15° 0' 4''

b) Zur Verwandlung des zweiten ins dritte System, der Stundenwinkel und Deklination in Rectascension und Deklination bedarf es natürlich nur der Ermittelung des Stundenwinkels des Frühlingspunktes, oder der augenblicklichen Lage des Meridians gegen den Stundenkreis des Frühlingspunktes. Der Stundenwinkel dieses Punktes heisst die Sternzeit des Beobachtungsortes. Die der Sternzeit zu Grunde liegende Einheit der Zählung ist der Sterntag und dieser ist die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen eines festen Punktes am Himmel durch denselben Meridian verfliesst. Es gilt allgemein als dieser feste Punkt der Frühlingsäquinoctialpunkt, und es ist 0^h Sternzeit, wenn dieser Punkt den Meridian passirt. Da man den Sterntag ebenso wie den mittleren Tag (astronomisch) in 24 Theile oder Stunden theilt, so hat man 1^h, 2^h, 3^h . . . Sternzeit, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunktes 1^h, 2^h, $3^h \ldots = 15°, 30°, 45° \ldots$ beträgt. Ueber das Verhältniss der Sternzeit zur mittleren Zeit und die Verwandlung der einen in die andere, zu welcher die in den Astron. Jahrbüchern enthaltenen Angaben zu Hilfe zu nehmen sind, s. den Art. Zeit.

Sei nun ϑ die Sternzeit, α die Rectascension und t der Stundenwinkel, so ist:

$$\vartheta - t = \alpha$$
$$t = \vartheta - \alpha.$$

Wenn $t = 0$, der Stern im Meridian ist, so ist die Sternzeit gleich der Rectascension des Sternes. Darnach bietet also die Umwandlung dieser Systeme in einander keine Schwierigkeit.

c) Für die Verwandlung des dritten ins vierte System, d. h. der Rectascension α und Deklination δ in Länge l und Breite b und umgekehrt, ergeben sich analoge Formeln, wie unter a). In dem sphärischen Dreieck Fig. 163 bedeutet dann P den Pol der Ekliptik, Z den Pol des Aequators und S den Stern. Es ist $P'Z = \varepsilon$, die Schiefe der Ekliptik, $PS = 90° - b$, $ZS = 90° - \delta$, Winkel $SPZ = 90° - l$, Winkel $SZP = 90° - \alpha$, und wir haben folgende Formeln:

$$\sin b = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha$$
$$\cos b \sin l = \sin\varepsilon \sin\delta + \cos\varepsilon \cos\delta \sin\alpha$$
$$\cos b \cos l = \cos\delta \cos\alpha,$$

und umgekehrt

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l$$
$$\cos\delta \sin\alpha = \sin\varepsilon \sin b + \cos\varepsilon \cos b \sin l$$
$$\cos\delta \cos\alpha = \cos b \cos l.$$

Durch Einführung von Hilfswinkeln, nämlich

$$\operatorname{tang} N = \operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec}\alpha \text{ bezw. } \operatorname{tang} N' = \operatorname{tang} b \operatorname{cosec} l,$$

kommen die einfachen Ausdrücke

$$\operatorname{tang} l = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} \operatorname{tang}\alpha \quad \text{bezw.} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos(N' + \varepsilon)}{\cos N'} \operatorname{tang} l$$
$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang}(N - \varepsilon) \sin l \qquad \operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(N' + \varepsilon) \sin\alpha$$

mit den Controlformeln

$$\cos(N - \varepsilon) \cos\delta \sin\alpha = \cos N \cos b \sin l \text{ bezw. } \cos(N' + \varepsilon) \cos b \sin l = \cos N' \cos\varepsilon \sin\alpha.$$

Die geometrische Bedeutung des Hilfswinkels ergiebt sich so, dass er derjenige Winkel ist, welchen der durch den Stern und den Frühlingspunkt gelegte grösste Kreis mit dem Aequator bezw. der Ekliptik bildet.

Auch hier kommt es oft vor, dass man noch den Winkel am Stern gebraucht, und bei der Bequemlichkeit der logarithmischen Rechnung nach den Gauss'schen

Formeln empfiehlt sich ihre Anwendung auch hier. Bezeichnet man den genannten Winkel mit $90° - E$, so ist

$$\begin{aligned}
\sin(45° - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E - l) &= \cos(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin[45° - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta)]\\
\sin(45° - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E - l) &= \sin(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos[45° - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta)]\\
\cos(45° - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E + l) &= \sin(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin[45° - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta)]\\
\cos(45° - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E + l) &= \cos(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos[45° - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta)].
\end{aligned}$$

Beispiele für diese Anwendungen hier zu geben, ist unnöthig, da sich solche in dem Artikel Bahnbestimmung finden.

Da sich die Sonne in der Ekliptik bewegt, so ist, abgesehen von kleinen Veränderungen, ihre Breite $b = 0$. Handelt es sich also darum, aus der Rectascension und Deklination der Sonne ihre Länge oder umgekehrt aus letzterer die beiden ersten Coordinaten zu finden, so hat man unmittelbar unter Benutzung des vom Frühlingspunkt, dem Orte der Sonne G in der Ekliptik, und dem Durchschnittspunkt B des durch G gelegten Stundenkreises mit dem Aequator gebildeten rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, wo also $\Upsilon B = \alpha$, $BG = \delta$, $\Upsilon G = l$ ist, folgende Gleichungen

$$\cos l = \cos\alpha\cos\delta$$

$$\sin l = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

$$\tan l = \tan\alpha\sec\varepsilon$$

oder

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \tan l\cos\varepsilon\\
\sin\delta &= \sin l\sin\varepsilon\\
\tan\delta &= \tan\varepsilon\sin\alpha,
\end{aligned}$$

Gleichungen, die natürlich auch aus den allgemeinen folgen, wenn man in ihnen $b = 0$ setzt.

Will man die rechtwinkligen Coordinaten in einander transformiren, so wird man in der Regel nur die Fälle zu betrachten haben, in denen den beiden Coordinatensystemen eine Ebene gemeinsam ist. Sei beispielsweise diese Ebene die XZ-Ebene und sei OX und OZ die x- und z-Axe im ersten System, OX_1 und OZ_1 die x_1-Axe und z_1-Axe des neuen Systems, ferner sei S die Projection des Sternortes im Raum auf die gemeinschaftliche Ebene, $x = SB$, $z = OB$, $x_1 = SB_1$, $z_1 = OB_1$; da sich die Entfernung des Punktes von der gemeinsamen Ebene nicht verändert hat, so ist $y = y_1$. Nehmen wir dann an, dass sich die YX- und YZ-Ebene um die y-Axe um den Winkel u gedreht haben, um von dem ersten zum zweiten System überzugehen, so ergiebt sicht leicht, da $u = xOx_1 = zOz_1, = BSB_1$,

$$x\sec u = x_1 - z_1\tan u$$

oder

$$\begin{aligned}
x &= x_1\cos u - z_1\sin u\\
y &= y_1\\
z &= x_1\sin u + z_1\cos u
\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
x_1 &= x\cos u + z\sin u\\
y_1 &= y\\
z_1 &= -x\sin u + z\cos u.
\end{aligned}$$

Wendet man diese Gleichungen auf die Transformation des ersten ins zweite System an, so ist hier der Meridian die gemeinsame Ebene, der Winkel $u = 90° - \varphi$ und setzt man für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z u. s. w. die obigen Ausdrücke für die Polarcoordinaten ein, so erhält man die gleichen Aus-

drücke, welche die Betrachtung des sphärischen Dreiecks gab. Kommt die Verwandlung der Rectascension und Deklination in Länge und Breite in Betracht, so ist die gemeinsame Ebene die YZ-Ebene und der Drehungswinkel die Schiefe der Ekliptik ε, daher, wenn x, y, z die aequatoralen, x', y', z', die eklipticalen Coordinaten sind,

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos\varepsilon + z \sin\varepsilon \\ z' &= y \sin\varepsilon + z \cos\varepsilon \end{aligned}$$

Für die Verwandlungen der verschiedenen Coordinatensysteme in einander sind mehrfach Hiltstafeln berechnet, von GAUSS in der »Sammlung von Hilfstafeln von SCHUHMACHER-WARNSTORFF«, Hamburg 1845, von ENCKE im »Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1831«, dazu gehörige Formeln von NECKER in den »Astr. Nachr.« u. s. w. Man geht dabei von einem bestimmten Fall, einer bestimmten Polhöhe, einer bestimmten Schiefe der Ekliptik aus. ENCKE giebt z. B. folgende Ableitung.

Es bezeichne l' und δ' die Länge und Deklination eines Punktes, dessen Rectascension α und Breite 0 ist, dann werden die Gleichungen auf pag. 663

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\varepsilon \sin\delta' - \sin\varepsilon \cos\delta' \sin\alpha \\ \sin l' &= \sin\varepsilon \sin\delta' + \cos\varepsilon \cos\delta' \sin\alpha \\ \cos l' &= \cos\alpha \cos\delta', \end{aligned} \qquad (a)$$

und

$$\begin{aligned} \sin l' \sin\varepsilon &= \sin\delta' \\ \sin l' \cos\varepsilon &= \cos\delta' \sin\alpha \\ \cos l' &= \cos\delta' \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (b)$$

Durch Multiplikation der ersten ursprünglichen Gleichung (pag. 663) mit $\cos\delta'$ und der ersten Gleichung (a) mit $\cos\delta$ sowie der zweiten und dritten ursprünglichen Gleichung mit $\cos l'$ resp. $\sin l'$ kommt dann

$$\sin b = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta'} \sin(\delta - \delta')$$

$$\cos b \sin(l - l') = \sin\varepsilon \cos\alpha \sin(\delta - \delta')$$

$$\begin{aligned} \cos b \cos(l - l') &= \cos\delta \cos\delta' \cos^2\alpha + \sin^2\varepsilon \sin\delta \sin\delta' + \cos^2\varepsilon \sin^2\alpha \cos\delta \cos\delta' + \\ &\quad + \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin\alpha \sin(\delta + \delta') \\ &= \cos(\delta - \delta') - (\cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha)(\cos\varepsilon \sin\delta' - \sin\varepsilon \cos\delta' \sin\alpha) \\ &= \cos(\delta - \delta'). \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen quadrirt und addirt geben

$$1 = \left(\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\delta'} + \sin^2\varepsilon \cos^2\alpha\right) \sin^2(\delta - \delta') + \cos^2(\delta - \delta').$$

Setzt man dann

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta'} = \sin\gamma \qquad \sin\varepsilon \cos\alpha = \cos\gamma,$$

wobei γ wegen der Gleichung für $\sin b$ immer $< 180°$ sein muss, so hat man die folgenden Formeln zu berechnen:

$$\begin{aligned} \tang l' &= \tang\alpha \sec\varepsilon \\ \tang\delta' &= \sin\alpha \tang\varepsilon \\ \cos\gamma &= \cos\alpha \sin\varepsilon \\ \sin b &= \sin\gamma \sin(\delta - \delta') \\ \cos b \sin(l - l') &= \cos\gamma \sin(\delta - \delta') \\ \cos b \cos(l - l') &= \cos(\delta - \delta'), \end{aligned}$$

wo $\cos l'$ und $\cos\alpha$ stets gleiches Zeichen haben müssen. Es sind also hier bei einem bestimmten Werth von ε, l', δ', γ nur Functionen von α und man kann

dieselben, resp. ihre trigonometrischen Functionen, in Tafeln mit dem Argument α bringen.

Ganz in gleicher Weise erhält man für den umgekehrten Fall die Gleichungen:

$$\begin{aligned} tang\,\alpha' &= tang\,l\,sec\,\varepsilon \\ tang\,b' &= sin\,l\,tang\,\varepsilon \\ cos\,\gamma' &= cos\,l\,sin\,\varepsilon \\ sin\,\delta &= sin\,\gamma'\,sin\,(b + b') \\ cos\,\delta\,sin\,(\alpha' - \alpha) &= cos\,\gamma'\,sin\,(b + b') \\ cos\,\delta\,cos\,(\alpha' - \alpha) &= cos\,(b + b'). \end{aligned}$$

Bringt man dann mit einem Argument k (entweder die Rectascension oder die Länge) folgende Ausdrücke in Tafeln:

$$\begin{aligned} tang\,A &= tang\,k\,sec\,\varepsilon \\ tang\,A' &= sin\,k\,tang\,\varepsilon \\ a &= cos\,k\,sin\,\varepsilon \\ a' &= \frac{cos\,\varepsilon}{cos\,B}, \end{aligned}$$

so erhält man, wenn

$$\begin{aligned} k &= \alpha \\ tang\,(l - l') = tang\,p &= a\,tang\,(\delta - A') \\ tang\,b &= a'\,tang\,(\delta - A')\,cos\,p \\ l &= A + p \end{aligned}$$

und für

$$\begin{aligned} k &= l \\ tang\,(b + b') = tang\,q &= a\,tang\,(b + A') \\ tang\,\delta &= a'\,tang\,(b + A')\,cos\,q \\ \alpha &= A - q. \end{aligned}$$

Es werden aber im Allgemeinen solche Tafeln, gerade weil sie nur für bestimmte Werthe der Schiefe der Ekliptik (oder wenn es sich um die Verwandlung des ersten Coordinatensystems ins zweite handelt, für eine bestimmte Polhöhe) gelten, beschränkten Gebrauch finden, und ihre Berechnung nur an ständigen Sternwarten oder wo diese Art von Rechnungen sehr häufig vorkommt lohnend sein, und auch dann in der Regel nur, wo es auf Näherungen ankommt, oder wo man sich durch eine doppelte Rechnung wirksam gegen grobe Fehler schützen will.

Es ist nun noch zu untersuchen, welchen Einfluss kleine Aenderungen in einem Coordinatensystem auf die Angaben des anderen haben. Man kann hier zunächst allgemein die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, die man in folgender Weise schreibt (mit grossen Buchstaben die Winkel, mit kleinen die gegenüberliegenden Seiten bezeichnend),

$$\begin{aligned} cos\,a &= cos\,b\,cos\,c + sin\,b\,sin\,c\,cos\,A \\ sin\,a\,sin\,B &= sin\,b\,sin\,A \\ sin\,A\,cotang\,B &= cotang\,b\,sin\,c - cos\,c\,cos\,A \end{aligned}$$

differenziren, womit alle Fälle umfasst werden, indem alle Grössen als veränderlich anzusehen sind. Man findet dann leicht unter Beachtung der Bedeutung der Faktoren aus dem sphärischen Dreieck die Formeln:

$$\begin{aligned} da &= cos\,C\,db + cos\,B\,dc + sin\,b\,sin\,C\,dA \\ cotang\,a\,da + cotang\,B\,dB &= cotang\,b\,db + cotang\,A\,dA \\ sin\,a\,dB &= sin\,C\,db - cos\,a\,sin\,B\,dc - sin\,b\,cos\,C\,dA \\ dA &= -\,cos\,c\,dB - cos\,b\,dC + sin\,b\,sin\,C\,da. \end{aligned}$$

Für den Einfluss, den eine kleine Aenderung im Azimuth und der Höhe auf den Stundenwinkel und die Deklination hat, ergiebt sich danach:

$$d\delta = \cos q\, dh + \cos t\, d\varphi + \cos h \sin q\, dA$$
$$\cos\delta\, dt = -\sin q\, dh + \sin t \sin\delta\, d\varphi + \cos h \cos q\, dA,$$

und umgekehrt

$$dh = \cos q\, d\delta - \cos A\, d\varphi - \cos\delta \sin q\, dt$$
$$\cos h\, dA = \sin q\, d\delta - \sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos q\, dt.$$

Hier kommt der parallactische Winkel q vor, hat man ihn daher nicht durch Benutzung der GAUSS'schen Gleichungen vorher gefunden, so kann man ihn direkt nach folgenden Formeln berechnen:

$$\cos h \sin q = \cos\varphi \sin t$$
$$\cos h \cos q = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos t,$$

die sich mit Einführung eines Hilfswinkels auch so schreiben lassen:

$$\tang q = \tang t \frac{\sin\nu}{\cos(\delta + \nu)},$$

wo

$$\tang \nu = \cos t \cotang \varphi$$

ist. Es lassen sich verschiedene Folgerungen aus obigen Formeln ziehen. Zunächst ergiebt sich:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\delta \sin q = -\cos\varphi \sin A.$$

Die Geschwindigkeit, mit der ein Gestirn in irgend einem Punkte der täglichen Bahn seine Höhe ändert, ist also $= 0$ im Meridian, wo das Azimuth $= 0$ ist, sie ist am grössten, wenn das Azimuth $= \pm 90°$ ist, wenn das Gestirn also im ersten Vertical ist. Für diese Stellung des Gestirnes findet sich die Höhe und der Stundenwinkel, wenn man in der Gleichung,

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A$$

$A = \pm 90°$ setzt, wodurch dann

$$\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$$

wird. Dieser Werth ist in die Gleichung für *sin h*, pag. 659, b einzusetzen, wodurch

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varphi} = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

und dann

$$\cos t = \frac{\tang\delta}{\tang\varphi}$$

wird. Durch Verbindung des Stundenwinkels mit der Rectascension des Sternes ergiebt sich dann die Sternzeit des Durchgangs durch den ersten Vertical. Man sieht auch leicht, dass für $\delta > \varphi$ der Stern nicht mehr in den ersten Vertical eintritt, er culminirt dann nördlich vom Zenith. Da übrigens, wenn der Stern im ersten Vertical ist, das Dreieck Pol, Zenith, Stern, am Zenith rechtwinklig ist, so würde man obige Ausdrücke auch direkt aus diesem speciellen Dreieck erhalten.

Wenn δ und φ einander nahe gleich sind, so werden die Ausdrücke für *sin h* und *cos t* ungenau; man kann den letzteren leicht umformen, indem man beide Seiten zu 1 addirt und von 1 subtrahirt, wodurch man erhält:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

und für h kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck ableiten,

$$\cotang h = \tang t \cos\varphi.$$

Aehnlich findet sich:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\delta \cos q}{\cos h},$$

d. h. die grösste Veränderung des Azimuths in gleichbleibender Zeit findet statt, wenn der Stern im Meridian, der parallactische Winkel $q = 0$ ist, wenn aber $q = 90°$ ist, so wird $\frac{dA}{dt} = 0$, d. h. die Bewegung des Sternes im Azimuth wird $= 0$, da aber

$$\cos\varphi \sin A = \sin q \cos\delta,$$

also

$$\sin A = \frac{\sin q \cos\delta}{\cos\varphi}$$

ist, so wird dann ($q = 90°$) das Azimuth, östlich oder westlich, zugleich ein Maximum. Die Stellung des Gestirnes in seiner täglichen Bahn, wo dies stattfindet, ergiebt sich, indem in der Gleichung

$$\sin\varphi = \sin\delta \sin h + \cos\delta \cos h \cos q$$

$q = 90°$ gesetzt wird. Dadurch wird

$$\sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

und diesen Werth in die Gleichung für $\sin h$ (pag. 8b) eingesetzt, findet man

$$\cos t = \frac{\tang\varphi}{\tang\delta}.$$

Ebenso findet man für diesen Fall,

$$\sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}.$$

Es kann also überhaupt nur für solche Sterne $q = 90°$ werden, für welche $\delta > \varphi$ ist, d. h. solche, die nördlich vom Zenith culminiren. Man sagt dann, der Stern sei in seiner grössten (östlichen oder westlichen) Digression, und ferner findet dies in dem Punkte des Paralleles des Gestirnes statt, wo letzterer vom Verticalkreise berührt wird, weil nur hier der den Parallel stets senkrecht schneidende Stundenkreis auch auf dem Verticalkreis des Sternes senkrecht steht. Es ist also dann auch das Dreieck Pol, Zenith, Stern rechtwinklig, aber der rechte Winkel liegt jetzt am Stern.

Beispiel. 1) Für den Polarstern α Urs. min. ist für 1892 Jan. 1 $\alpha = 1^h\, 19^m\, 8^s$, $\delta = 88°\, 44'\, 13''$, und es findet sich daraus für die grösste Digression $t = 88°\, 32'{\cdot}7 = 5^h\, 54^m\, 11^s$, also die Sternzeit im Osten $19^h\, 24^m\, 57^s$, im Westen $7^h\, 13^m\, 19^s$, ferner $A = 1°\, 55'{\cdot}6$ von Nord aus, und $h = 49°\, 1'{\cdot}5$.

2) Für α Urs. maj. ist für dieselbe Zeit $\alpha = 10^h\, 57^m\, 4^s$, $\delta = +62°\, 20'\, 2''$ und danach $t = 52°\, 53'{\cdot}8 = 3^h\, 31^m\, 35^s$, also die Sternzeit im Osten $7^h\, 25^m\, 29^s$, im Westen $14^h\, 28^m\, 39^s$; $A = 45°\, 3'{\cdot}6$ von Nord aus, $h = 58°\, 27'{\cdot}4$.

Ganz ähnlich findet man für die Umwandlung der Rectascension und Deklination in Länge und Breite die Differentialformeln, wenn man für den pag. 664 mit $90° - E$ bezeichneten Winkel η setzt:

$$db = \cos\eta\, d\delta - \cos\delta \sin\eta\, d\alpha - \sin l\, d\varepsilon$$
$$\cos b\, dl = \sin\eta\, d\delta + \cos\delta \cos\eta\, d\alpha + \cos l \sin b\, d\varepsilon$$

und umgekehrt,

$$d\delta = \cos\eta\, db + \cos b \sin\eta\, dl + \sin\alpha\, d\varepsilon$$
$$\cos\delta\, d\alpha = -\sin\eta\, db + \cos b \cos\eta\, dl - \cos\alpha \sin\delta\, d\varepsilon,$$

wo man dann den Winkel am Stern ebenso wie vorher berechnen kann. Es ist hier häufig wünschenswerth, die Differentialformeln derart aufzustellen, dass sie nur die Grössen $d\alpha$, $d\delta$, $d\varepsilon$, dl und db enthalten; sie lauten dann:

$$db = -\sin\varepsilon\cos l\,d\alpha + \left(\frac{\cos\varepsilon\cos l}{\cos\alpha} + \frac{\sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha}{\cos b}\right)d\delta - \sin l\,d\varepsilon$$

$$dl\cos b = (\cos\varepsilon\cos b - \sin\varepsilon\sin b\sin l)\,d\alpha + \frac{\cos l\sin\varepsilon}{\cos\delta}\,d\delta + \sin b\cos l\,d\varepsilon.$$

VALENTINER.

Deklinationsbestimmung. Die Bestimmung der Deklination eines Gestirnes kann eine relative oder absolute sein, indem sie entweder auf die bekannte Deklination eines anderen Sternes bezogen wird oder nur von der geographischen Breite des Beobachtungsortes und der Bestimmung des Nullpunktes am Kreise, an welchem sie gemessen wird, abhängt. Die relativen Deklinationsbestimmungen geschehen mit Hilfe der Mikrometer, indem der Winkelabstand des unbekannten Sternes von einem in unmittelbarer Nähe befindlichen bekannten gemessen wird (s. unter Mikrometer und Heliometer) oder auch durch Beobachtung mit wirklichen Aequatorealen. Die absoluten Bestimmungen werden an fest montirten Instrumenten oder doch jedenfalls an solchen, deren Aufstellung man jeder Zeit controliren kann und die in gewissen, der Deklinationsbestimmung besonders günstigen Ebenen aufgestellt sind, gemacht Die Gleichung aus dem sphärischen Dreieck Pol, Zenith, Stern

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A,$$

wo δ die Deklination, φ die geographische Breite, z die Zenithdistanz, und A das Azimuth bedeuten, zeigt, dass wenn $A = 0$ ist, d. h. wenn der Stern den Meridian passirt

$$\delta = \varphi - z$$

ist. Wenn dagegen $A = 90°$ ist, sodass der Stern den ersten Vertical passirt, wird die Gleichung

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z.$$

Wenn daher ein im Meridian aufgestelltes Instrument mit einem fein getheilten Kreis versehen ist, welcher die Zenithdistanz genau abzulesen gestattet, und wenn die geographische Breite des Instrumentes anderweitig bekannt ist, so ist damit die Deklination in einfachster Form gegeben. Ist ein solches Instrument im ersten Vertical aufgestellt, so führt auch hier die Messung der Zenithdistanz auf die Deklination. Da aber einestheils die Anwendung der Beobachtungen im ersten Vertical eine beschränkte ist, indem nur die Sterne in diese Ebene eintreten können, deren Deklination zwischen 0° und φ, der Polhöhe, ist, andererseits das im Meridian aufgestellte Instrument zugleich die Rectascension des Sternes in einfachster Weise zu bestimmen gestattet, so werden die oben bezeichneten Instrumente doch vorzugsweise als Meridiankreise im Meridian aufgestellt, und nur in seltenerem Falle als Verticalkreise im ersten Vertical.

Es ergiebt sich aber aus den Gleichungen

$$\sin z\cos A = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t$$
$$\sin z\sin A = \cos\delta\sin t,$$

wo t noch den Stundenwinkel bezeichnet, dass man, wenn $A = 90°$ ist, auch auf eine Methode der Deklinationsbestimmung geführt wird, die auf die Ermittelung der Zeit zurückkommt, zu welcher der Stern den Vertical passirt, ohne dass es dann einer Messung am Kreise und daher eines fein getheilten

Kreises bedarf. Durch Differentiation der obigen beiden Gleichungen, nachdem sie in einander dividirt wurden, kommt, unter Anwendung des parallactischen Winkels am Stern q

$$d\delta = \frac{\cos\delta \cos z}{\cos\varphi} d\varphi + \frac{\sin z \cos\delta}{\sin A \cos\varphi} dA - \frac{\cos q \cos^2\delta}{\sin A \cos\varphi} dt.$$

Es werden also die Coëfficienten von dt und dA um so kleiner, je mehr A sich 90° nähert; in diesem Fall kann der Zähler von dt, da allgemein

$$\cos q \cos\delta = \sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A$$

ist, $\sin\varphi \sin z \cos\delta$ geschrieben werden, und man hat

$$d\delta = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} (\cos z\, d\varphi + \sin z\, dA - \sin\varphi \sin z\, dt).$$

Es ergiebt sich daraus, dass die Fehler in A und t um so geringer werden, je kleiner die Zenithdistanz ist, je mehr sich also die Deklination des Sternes der geographischen Breite nähert, sie verschwinden aber überhaupt, soweit bei t nicht die zufälligen Beobachtungsfehler in Betracht kommen, aus dem Resultat, wenn man den Durchgang des Sternes durch den Ost- und Westvertical beobachtet, da das Azimuth A einmal 90°, das andere Mal 270° ist, und $\sin A$ daher mit entgegengesetztem Zeichen eingeht. Hierbei ist natürlich die Constanz der Aufstellung, die Unveränderlichkeit des Azimuths und des Uhrganges in der Zwischenzeit, oder die sonstige Ermittelung der Veränderung vorausgesetzt, Einflüsse, die sich ja aber, wenn auch in anderer Weise, auch bei den Messungsmethoden geltend machen. Der wesentliche Vortheil dieser Methode liegt in der Einfachheit des benutzten Instrumentes, eines Passageninstrumentes ohne fein getheilten Kreis, der grosse Nachtheil indessen in der engen Begrenzung der möglichen Anwendbarkeit.

Da nun die Deklinationsbestimmung nach den verschiedenen Methoden die sorgfältige Behandlung und Theorie der betreffenden Instrumente voraussetzt, so mögen an dieser Stelle die gemachten Andeutungen genügen, indem für das Weitere auf die bezüglichen Artikel (Meridiankreis, Passageninstrument, Verticalkreis) verwiesen wird. VALENTINER.

Diopter. Zur sicheren Einstellung auf einen Stern hat schon PTOLEMÄUS das Diopter eingeführt. Zwei Blättchen, welche auf irgend einer Unterlage, einem Stab oder einer Ebene, längs welcher visirt werden soll, befestigt sind, und welche in genau gleicher Höhe über dieser Unterlage kreisförmig durchbohrt sind, geben in der Verbindungslinie der beiden Oeffnungen die Visirlinie. Das eine Blättchen befand sich in der Nähe des Auges, (Oculardiopter), das andere gegen das Object hin, (das Objectivdiopter). Diese Einrichtung erhielt sich durch das ganze Mittelalter bis zur Erfindung des Fernrohres; selbst als schon das Fernrohr ziemlich allgemein an Stelle der Diopter getreten war, behielt man die letzteren noch dort bei, wo die Entfernung der zu beobachtenden Objecte nicht allzu gross war, also bei terrestrischen Objecten; ja, HEVEL versah noch am Ende des 17. Jahrhunderts seine astronomischen Messinstrumente nicht mit Fernrohren, weil er die Beobachtungen mit dem freien Auge vorzog. In der Feldmesskunst, namentlich bei den Messtischarbeiten, welche sich auf kleinere Complexe erstrecken, wurden die Diopter auch noch in unserer Zeit verwendet (Diopterlineal), nur wurde dann die Oeffnung in das Objectivdiopter etwas grösser geschnitten und mit einem einfachen horizontalen oder verticalen feinen Draht oder aber mit einem Fadenkreuz versehen. N. HERZ.

Doppelsterne. Einen physischen Doppelstern bilden zwei Sterne, wenn ihre gegenseitige Entfernung so klein ist, dass die Einwirkung der übrigen Fixsterne auf ihre relative Bewegung vernachlässigt oder wenigstens als nebensächlich betrachtet werden darf. Stehen zwei Sterne nur scheinbar in grosser Nähe bei einander, so entsteht ein optischer Doppelstern. Das Vorkommen eines solchen ist den Gesetzen des Zufalls unterworfen, und es ist deshalb eine wohl definirte mathematische Aufgabe, die zu erwartende Anzahl optischer Doppelsterne von gegebenem scheinbaren Abstand zu berechnen, wenn Anzahl und Vertheilung der Sterne im Raume bekannt sind. Da eine strenge Lösung dieser Aufgabe nicht vorliegt, entbehren die gewöhnlich angeführten Angaben über die zu erwartende Anzahl von optischen Doppelsternen der genügend sicheren Grundlage. Leicht kann man sich aber davon überzeugen, dass die Anzahl hellerer optischer Doppelsterne von kleiner Distanz nicht bedeutend sein kann, und in diesem Sinne kann man in der That behaupten, dass die Componenten der überwiegenden Mehrzahl der vielen bekannten Doppelsterne nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit physisch mit einander verbunden sein werden. Man hat, zum Theil aus äusserlichen Gründen, nach dem Vorgange von W. STRUVE, als Maximaldistanz eines Doppelsternes im engeren Sinne 32″ festgesetzt. In der That werden der Hauptsache nach die Systeme mit schnellerer Revolutionsbewegung hierdurch umgrenzt.

Dass die Entdeckung zahlreicher engerer Doppelsterne einer mit optischen Hilfsmitteln besser ausgerüsteten Zeit vorbehalten bleiben musste, ist selbstverständlich. Indessen sind vereinzelt schon sehr frühe Doppelsterne aufgefunden worden. So z. B. α Centauri von FEUILLÉE im Jahre 1709, γ Virginis, Castor, 61 Cygni von BRADLEY etc. Dass dies aber nicht vereinzelte Fälle seien, dass vielmehr eine grössere Anzahl von Doppelsternen am Himmel existiren, hat zuerst CHRISTIAN MAYER, Hofastronom in Mannheim, gezeigt. Er suchte nicht nur nach solchen Objecten, sondern bestimmte auch die Rectascensions- und Deklinationsdifferenzen der beiden Componenten mit einem 8füssigen BIRD-schen Mauerquadranten. Diese Thatsache kann nicht verdunkelt werden durch die nicht ganz einwandsfreien Bemerkungen, welche die erste Publikation MAYER's[1]) über diesen Gegenstand enthält und die zu Missverständnissen Anlass gebende von ihm gebrauchte Bezeichnung »Fixsterntrabanten«. Die Astronomen standen übrigens den MAYER'schen Entdeckungen nicht gleichgültig gegenüber, was aus dem Umstand hervorgeht, dass im Berliner Jahrbuch für 1784, das im Jahre 1781 erschien, ein »Verzeichniss aller bisher entdeckten Doppeltsterne«, die »fast alle von Herrn Hofastronomen MAYER auf der Churfürstlichen Sternwarte zu Mannheim zuerst beobachtet worden sind«, abgedruckt ist. Dieses Verzeichniss enthält 79 Doppelsterne, und zwar zum grössten Theile begreiflicherweise sehr weite (bis 72″ Distanz). Es scheint sowohl MAYER, als auch dem Herausgeber des Jahrbuches BODE sehr fern gelegen zu sein, diese oder auch nur einen Theil dieser Doppelsterne als physische zu betrachten, denn es wird das astronomische Interesse an solchen Systemen ausdrücklich darin gefunden, dass die fortschreitende relative Eigenbewegung der beiden Fixsterne in Folge ihres scheinbaren Nebeneinanderstehens leichter bemerkt und genauer bestimmt werden könne, was offenbar nur bei optischen Doppelsternen einen Sinn hat. Von nicht wesentlich anderen Gedanken wurde W. HERSCHEL bei seinen ersten

---

[1]) Gründliche Vertheidigung neuer Beobachtungen von Fixsterntrabanten etc. 8°. Mannheim 1778.

Forschungen über Doppelsterne geleitet. Auch er dachte nur an optische Systeme und suchte nach solchen, ohne MAYER's Bemühungen zu kennen. Nun sollten enge Doppelsterne die Messung der jährlichen parallaktischen Verschiebungen erleichtern und also die Auffindung der ersten Werthe von Fixsternparallaxen ermöglichen. Von allem Anfang an waren seine Nachforschungen nach Doppelsternen sehr ergiebig, und bereits am 10. Januar 1782 konnte er der Royal Society einen Katalog von 269 Doppelsternen vorlegen. Die eigentliche Bedeutung der HERSCHEL'schen Entdeckungen erkannte aber erst MICHELL[1]), der das Vorkommen so vieler scheinbar nahe bei einander stehender Sterne als mit den Gesetzen des Zufalles unvereinbar erklärte und betonte, dass die meisten dieser Doppelsterne thatsächlich nahe bei einander stehende Weltkörper seien, die sich nach den Gesetzen der Gravitation um einander bewegen müssen. Diese Ansicht wurde durch die ferneren Arbeiten W. HERSCHEL's bestätigt, die in Folge dessen in dem Gebiete der Doppelsternastronomie von grundlegender Bedeutung geworden sind. HERSCHEL begnügte sich in der Folgezeit nicht damit, neue Doppelsterne zu entdecken. Vielmehr suchte er nach Verlauf eines angemessenen Zeitraumes die ihm bekannt gewordenen Doppelsterne wieder auf und konnte in mehreren Fällen eine Veränderung in der gegenseitigen Stellung beider Sterne nachweisen. Allerdings hätte diese auch eine Folge der als geradlinig anzusehenden Eigenbewegungen sein können, aber es waren so die Grundlagen gegeben, um (wenigstens theoretisch) durch eine dritte Messung auch den letzten Zweifel an dem Vorhandensein wirklicher Doppelsterne zu zerstören.

Endlich gebührt W. HERSCHEL das Verdienst, zuerst in klarer Weise erkannt zu haben, welcher Art die Beobachtungen sein müssen, um als Grundlage für Betrachtungen über etwaige Revolutionsbewegungen dienen zu können. MAYER hatte, ähnlich wie es durch die jetzt üblichen Meridianbeobachtungen geschieht, die Rectascension und Deklination der beiden Componenten bestimmt, ein Verfahren, das nicht die nöthige Genauigkeit gewähren konnte, bei engen Doppelsternen überdies kaum anwendbar ist. W. HERSCHEL dagegen bestimmte die gegenseitige Stellung beider Sterne mit Hilfe von Mikrometermessungen und zwar in einer Weise, welche auch die Folgezeit als die zweckmässigste anerkennen musste. Der hellere der beiden Sterne wurde als Hauptstern und als das Bezugsobject für die Angaben des Ortes des schwächeren betrachtet. Die letzteren enthielten die beiden Polarcoordinaten: Distanz und Positionswinkel. Distanz ist der scheinbare Abstand beider Sterne, und Positionswinkel der Winkel, den die Distanz mit einem festen, durch den Hauptstern gehenden grössten Kreis bildet. Den Positionswinkel hat W. HERSCHEL nicht immer von derselben Nullrichtung an gezählt und durch Angabe des Quadranten jeden Zweifel zu beheben gesucht. Die Folgezeit hat in dieser an sich ohne Frage nebensächlichen Angelegenheit ein vereinfachtes und allgemein angenommenes Verfahren ausgebildet. Man zählt seit W. STRUVE den Positionswinkel vom nördlichen Theile des Stundenkreises in der Richtung Ost, Süd, West, Nord. Steht also der Begleiter genau nördlich über dem Hauptsterne, so ist der Positionswinkel 0° zu notiren.

Die Resultate seiner Entdeckungen und Messungen hat W. HERSCHEL in den Jahren 1782, 1785 und 1804 zusammengestellt. Diese enthalten Angaben

---

[1]) MICHELL, on the means of discovering the distance, magnitude etc. of the Fixed Stars etc. Philosophical Transact. 1783, Nov. 27.

über etwa 700 Doppel- und mehrfache Sterne; eine sehr schätzbare Zusammenstellung dieser Resultate verdankt man J. HERSCHEL[1]).

Wie in vielen anderen Gebieten der Astronomie, setzte auch hier der Sohn die grossartige Thätigkeit des Vaters fort. JOHN HERSCHEL hat nicht nur den nördlichen Himmel in dieser Richtung, in der ersten Zeit in Gemeinschaft mit SOUTH, auf das eifrigste durchforscht, sondern die Gelegenheit, welche ihm sein so reich gesegneter Aufenthalt am Cap der guten Hoffnung darbot, auch für die Doppelsterne in der ergiebigsten Weise ausgenutzt. Die verschiedenen von ihm publicirten Zusammenstellungen beziehen sich auf etwa 6000 Doppelsterne, von denen etwa 2000 der südlichen Halbkugel angehören[2]).

Am meisten und nachdrücklichsten aber wurde nach W. HERSCHEL die Kenntniss der Doppelsterne gefördert durch W. STRUVE. Seine Bemühungen, durch Aufsuchen neuer Systeme und Bestimmung ihrer Positionen das Fundament für eine Astronomie der vielfachen Sterne zu legen, beginnen bereits um das Jahr 1813. In der ersten Zeit mit sehr beschränkten Hilfsmitteln arbeitend, konnte er seine weitreichenden Absichten erst voll ins Werk setzen, als er in FRAUNHOFER's berühmtem Refractor von 9 Zoll Oeffnung ein ausgezeichnetes, für die damalige Zeit sogar unvergleichliches Hilfsmittel erhielt. Der Plan, welcher im Laufe der folgenden Jahre wirklich zur Ausführung kam, erstreckte sich auf folgende Aufgaben:

1) möglichst alle vielfachen Sterne zwischen dem Nordpole und — 15° Deklination, deren Distanz kleiner als 32″ und deren schwächster Stern nicht schwächer als von der 9. Grösse ist, aufzusuchen und zu katalogisiren.

2) Die gefundenen Systeme mikrometrisch so genau und so oft als möglich auszumessen und hierbei Notirungen über das Aussehen der Sterne, namentlich ihre Farbe zu machen.

3) Die mittleren Orte aller dieser vielfachen Sterne mit dem Meridiankreise zu bestimmen.

Die zwei ersten Aufgaben hat STRUVE ganz allein mit grosser Energie durchgeführt, wie die berühmten Publikationen[3]) der gewonnenen Resultate zeigen. Bei der dritten Aufgabe musste er bald, von den beiden ersten völlig in Anspruch genommen, auf die Mitarbeiterschaft von PREUSS, später auch DÖLLEN rechnen. Für den vorliegenden Gegenstand bieten selbstverständlich die »Mensurae microm.« das grösste Interesse, es wird deshalb wohl angebracht sein, einige Einzelheiten über dieses Werk, wenn auch nur in grösster Kürze, zu erwähnen.

STRUVE hat die gefundenen Doppelsterne nach zwei Gesichtspunkten in Gruppen eingetheilt: erstens nach der Grösse der Distanz, indem er 8 Klassen in gleich zu erwähnender Weise unterschied, zweitens nach der Helligkeit der beiden Componenten. Er nennt die Doppelsterne entweder »*lucidae*« oder »*reliquae*«, je nachdem keiner der beiden Sterne schwächer als 8. Grösse oder dies wenigstens bei einem der Fall ist. Die Mens. Micr. enthalten nun folgende Anzahlen von Doppelsternsystemen:

---

[1]) A Synopsis of all Sir WILLIAM HERSCHEL's micrometrical Measurements etc. Memoirs of the R. Astr. Society London, vol. 35.

[2]) In vielen Bänden der Memoirs of the R. Astr. Society London. Dann auch in dem grossen Werke: »Results of Astronomical Observations of the Cape of Good Hope« 1847.

[3]) Catalogus novus stellarum duplicium etc. Dorpat 1827. Mensurae micrometricae stellarum etc. St. Petersburg 1837.

Klasse	Distanz	lucidae	reliquae
1 . . .	0″— 1″ . .	62 . .	29
2 . . .	1 — 2 . .	116 . .	198
3 . . .	2 — 4 . .	133 . .	402
4 . . .	4 — 8 . .	130 . .	452
5 . . .	8 —12 . .	54 . .	298
6 . . .	12 —16 . .	52 . .	179
7 . . .	16 —24 . .	54 . .	429
8 . . .	24 —32 . .	52 . .	
	Summa	653	1987

Hierzu kommen noch 72 Paare, welche, obwohl ausserhalb des Arbeitsprogrammes liegend, gemessen worden sind, nämlich 28, bei denen der Begleiter schwächer als 9. Grösse ist und 44 von einer Distanz $> 32''$. Diese 2712 Paare sind aber nur 2641 von einander verschiedene Systeme, weil die mehrfachen Sterne bei der vorgenommenen Klassifikation zugleich in mehreren Klassen erscheinen. Die ganze Eintheilung STRUVE's ist übrigens willkürlich und dürfte wohl kaum als praktisch anerkannt werden, sie wird auch in der neueren Zeit nicht mehr gebraucht.

Durch W. STRUVE's[1]) Arbeiten wurden die Doppelsterne in den Vordergrund des astronomischen Interesses gerückt und eine grössere Anzahl von Beobachtern widmet seither diesem Gebiete ihre Kräfte. Zuerst ist OTTO STRUVE[2]) zu erwähnen, welcher seit 1840 bis vor kurzer Zeit die Doppelsternwelt durchforschte und hierin seine Lebensaufgabe fand. Ihm schliessen sich in würdiger Weise an: DAWES[3]), DEMBOWSKI[4]), DUNÉR[5]) und in neuester Zeit SCHIAPARELLI[6]), A. HALL und H. STRUVE. Ferner sind noch als verdiente Doppelsternbeobachter u. A. zu erwähnen: MÄDLER, KAISER, SECCHI, FLETCHER, ENGELMANN, JEDRZEJEWICZ, GLASENAPP, LEWIS, SEABROKE, GLEDHILL, WILSON, die Beobachter der englischen Privatsternwarten VON BARCLAY, BISHOP und Lord WROTTESLY u. s. f.

Trotz so vielfacher Betheiligung war aber die Anzahl bekannter Doppelsterne in den letzten Jahrzehnten verhältnissmässig wenig grösser geworden. Es musste deshalb nicht geringes Aufsehen machen, als BURNHAM[7]) in den siebziger Jahren mit vergleichsweise geringen optischen Hilfsmitteln eine grössere Anzahl neuer, zum Theil sehr enger und lichtschwacher Doppelsterne auffand. Nicht selten waren es STRUVE'sche Doppelsterne, die sich durch Auffindung eines nahen oder lichtschwachen Begleiters als mehrfach erwiesen. Diese Entdeckungen, die sich später sehr vermehrten, als BURNHAM in dem 36zölligen Refractor der Lick Sternwarte ein überaus mächtiges Hilfsmittel erhielt, versprachen für die Zukunft eine reiche Ausbeute an schnell bewegten Doppelsternsystemen, haben

---

[1]) Stellarum fixarum imprimis duplicium etc. positiones mediae 1852.

[2]) Zahlreiche kleinere Arbeiten und Mittheilungen OTTO STRUVE's über Doppelsterne finden sich in den Schriften der Petersburger Akademie. Die zahlreichen Messungen engerer Doppelsterne sind zusammengestellt und eingehend bearbeitet in »Observations de Poulcova, Tome IX«.

[3]) Die Beobachtungen von DAWES sind gesammelt in Memoirs of the R. Astr. Society, London, Bd. 35.

[4]) Misure micrometriche di stelle doppie etc. Roma 1883 und 84.

[5]) Mésures micrométriques d'étoiles doubles. Lond. 1876.

[6]) Osservazioni sulle stelle doppie. Publicazioni del reale Osservatorio di Brera in Milano, No. XXXIII, 1888.

[7]) Memoirs of the R. Astr. Society, London. Bd. XLVII.

in den letzten Jahren auch schon zur Kenntniss sehr interessanter Objecte geführt. BURNHAM's verschiedene Kataloge enthalten bis jetzt etwa 1300 neue Objecte[1]). Im Ganzen werden gegenwätig an 12000 mehrfache Sterne bekannt sein, von denen etwa 10% mehr oder weniger deutliche Revolutionsbewegungen aufweisen. Diese Abschätzung beruht auf folgenden Angaben. J. HERSCHEL[2]) hat ein Verzeichniss der ihm bekannten mehrfachen Sterne hinterlassen, welches 10300 Objecte enthält. Nicht inbegriffen sind die BURNHAM'schen Sterne, sowie die, allerdings nicht zahlreichen, in den letzten Jahren von anderen Astronomen gefundenen. Noch mag erwähnt werden, dass man die Doppelsterne mit Vorliebe nach den von den um diesen Zweig der Astronomie verdientesten Astronomen bezeichnet, indem die Nummern der von ihnen herausgegebenen Kataloge citirt werden. Es ist üblich, W. STRUVE mit Σ, OTTO STRUVE mit $O\Sigma$, DAWES mit D, DEMBOWSKI mit Δ, DUNÉR mit Du, BURNHAM mit β, SCHIAPARELLI mit Sp zu bezeichnen. So wird z. B. ζ Cancri auch Σ 1196 benannt.

Viel ist, namentlich in früherer Zeit, über die Farben der Doppelsterne geschrieben worden. W. STRUVE hat, wie schon erwähnt, die Untersuchung dieses Gegenstandes in sein Arbeitsprogramm aufgenommen. Im Ganzen hat er unter 596 Systemen gefunden: 375 Paare von gleicher Farbe, 101 Paare von wenig verschiedener Färbung und 120 Paare, deren Componenten sehr verschieden gefärbt sind. Diese Aufzählung dürfte jedenfalls der vielfach ausgesprochenen Meinung entgegentreten, dass sehr verschiedene Färbung beider Componenten, namentlich in complementärem Sinne, das gewöhnliche Vorkommniss sei. DOPPLER[3]) hat in Verfolgung dieser Ansicht die Meinung ausgesprochen, dass bei Doppelsternen mit schneller Revolutionsbewegung die Neigung zu complementärer Färbung sich aus den Gesetzen der Wellenbewegung des Lichtes ableiten lasse. Wenngleich die Folgezeit diese Meinung als irrig erkannt und das dem erwähnten Gedanken zu Grunde liegende »DOPPLER'sche Princip« in einigen, allerdings nicht wesentlichen Punkten modificirt hat, so bildet dasselbe doch ein überaus wichtiges Fundament, welches in den letzten Jahren zu wichtigen und interessanten Ergebnissen und Entdeckungen geführt hat. — Zur Erklärung der Farbenverschiedenheit der beiden Componenten eines Doppelsternes dürfte es oftmals ausreichen, in Erinnerung zu behalten, dass an sich geringe Farbenunterschiede sehr nahe bei einander stehender Objecte leichter bemerkbar werden. Während allerdings einerseits durch Versuche an besonders auffällig gefärbten Sternpaaren gezeigt worden ist, dass die Contrastwirkung nicht Alles zu erklären vermag, muss andererseits hervorgehoben werden, wie unsicher bisher alle Angaben, welche sich auf die Sternfarben beziehen, sind. Der Fall kommt nicht selten vor, dass ein Beobachter sehr intensive Farben wahrzunehmen glaubt, die ein anderer nicht oder wenigstens nicht mit Sicherheit wahrnehmen kann. So hat sich ein so erfahrener Beobachter wie J. HERSCHEL stets sehr skeptisch gegenüber der ganzen Angelegenheit verhalten. Seiner Meinung nach kommen überhaupt nur Färbungen aus dem weniger brechbaren Theile des Spectrums (roth, gelb) bei Sternen in ausgesprochenem Grade vor, und blaue Sternfarben seien stets nur Folge der Contrastwirkung naher röthlicher

---

[1]) Eine Uebersicht über BURNHAM's Arbeiten giebt der 2. Band der »Publications of the Lick Observatory«, Sacramento 1894.

[2]) A Catalogue of 10300 multiple and double Stars. Memoirs of the R. Astr. Society, London, Vol. 40.

[3]) Ueber das farbige Licht der Doppelsterne etc. Prag 1842.

Sterne. Die Anwendung der Spectralanalyse wird auch in dieser Frage mit der Zeit Klarheit schaffen, da die Feststellung der für die Gesammtfarbe maassgebenden Zusammensetzung des Spectrums nicht subjectivem Urtheile preisgegeben ist. An sich ist nicht unwahrscheinlich, dass die Componenten der Doppelsterne sich häufig in sehr verschiedenen Stadien der Abkühlung befinden müssen Dann werden ihre Spectren verschieden sein und in Folge dessen auch ihre Färbung.

Von der grössten Bedeutung für die Astronomie wurden die Doppelsternmessungen, als sie anfingen, deutlich Revolutionsbewegungen zu enthüllen, und als es mit ihrer Hilfe gelang, die Einsicht zu erlangen, dass diese, ebenso wie alle Bewegungen im Planetensystem, durch die Folgerungen des allgemeinen Attractionsgesetzes dargestellt werden können. Die Aufgabe, aus den gemessenen Positionswinkeln und Distanzen die Elemente einer Doppelsternbahn abzuleiten, wurde auf Anregung von Seite ARAGO's zuerst von dem leider früh verstorbenen FELIX SAVARY[1]) und zwar in durchaus correkter Weise gelöst. Denselben Gegenstand hat später ENCKE[2]) behandelt, ohne indessen, ausser in weniger belangreichen Dingen, die SAVARY'sche Lösung zu überholen. Von den zum Theil primitiven graphischen Methoden J. HERSCHEL's[3]) und den Vorschriften, welche Y. VILLARCEAU[4]) im Anschluss an die in der Mécanique céleste zur Berechnung einer Planetenbahn gegebenen entwickelt hat, darf wohl behauptet werden, dass sie einen Fortschritt in dem vorliegenden Thema nicht gebildet haben. Dagegen hat J. HERSCHEL[5]) und unabhängig von ihm, wenn auch Jahrzehnte später, VILLARCEAU[6]) eine Methode entwickelt, die in den meisten Fällen in grosser Kürze und mit Sicherheit die Berechnung einer Doppelsternbahn, auszuführen erlaubt. Der Grundgedanke dieser Methode kommt im Folgenden zu kurzer Auseinandersetzung und führt in der elementarsten und einfachsten Weise zu äusserst leicht ausführbaren Rechenvorschriften. In neuerer Zeit hat das Problem durch KLINCKERFUES[7]) und THIELE[8]) beachtenswerthe Lösungen erfahren, die auch in der Praxis von Wichtigkeit werden können.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob die beobachteten Bahnbewegungen der Doppelsterne einen direkten Beweis für die Gültigkeit des NEWTON'schen Gravitationsgesetzes auch in jenen abgelegenen Fixsternräumen enthalten. Dass letzteres den Beobachtungen genügt, ist schon oben als bestätigt erwähnt worden. Die Untersuchung, ob kein anderes Gesetz dieselbe scheinbare Wirkung hat, gestaltet sich ganz anders, als bei den Planetenbewegungen, weil hier die Beobachtungen nur über die Ortsveränderungen in der auf der Gesichtslinie senkrechten Ebene Aufschluss geben und über die Bewegung im Visionsradius gar nichts aussagen. Die Aufgabe führt auf ein interessantes, mathematisches Problem. Dasselbe, von BERTRAND[9]) zuerst formulirt, wurde vollkommen gelöst von DARBOUX und HALPHÉN[10]) und im Anschluss an den letzteren in sehr

---

[1]) Connaissance des temps für 1830. Addit.

[2]) Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1832.

[3]) Memoirs of the R. Astr. Society, London, Band 5.

[4]) Connaiss. d. t. für 1852 add.

[5]) Memoirs of the R. Astr. Society, London, Band 18.

[6]) Connaiss. d. t. für 1877 add.

[7]) Theoretische Astronomie, Braunschweig 1877. Auch Astr. Nachr. No. 990.

[8]) Astr. Nachr., Band 104.

[9]) Compt. rend., Band 84.

[10]) Ebenda.

eleganter Weise von TISSERAND[1]). Nach diesen Arbeiten ist allerdings, wenn nur gewisse höchst plausible Annahmen hinzugezogen werden, nur das NEWTON'sche Gesetz im Stande, die beobachteten Doppelsternbewegungen zu erklären. Ganz anders gestaltet sich aber die Sachlage, wenn man auf den Umstand Rücksicht nimmt, dass die zu Grunde liegenden Messungen vermöge der bedeutenden Ungenauigkeiten, welche ihnen anhaften, durchaus nicht eine bestimmte Bewegungsform mathematisch genau definiren, vielmehr nur gewisse Grenzen anzugeben im Stande sind, innerhalb welcher die Abweichungen von der Theorie liegen müssen. Diese Grenzen sind aber ziemlich weite, weil bei engeren Doppelsternen z. B. Fehler in Distanz von $5-10\frac{0}{0}$ und darüber durchaus nicht selten vorkommen. Da man ferner etwaige Zweifel an der Allgemeingültigkeit des NEWTON'schen Gesetzes doch nur auf kleinere Abweichungen desselben von der Wahrheit beziehen wird, so muss man zugeben, dass die bisher berechneten Doppelsternbahnen durchaus nicht im Stande sind, in der besprochenen Frage beweiskräftig zu wirken. Im Folgenden wird ein hierher gehöriges Beispiel erwähnt werden. Der vielfache Stern ζ Cancri zeigt zum Theil Bewegungen, die, trotzdem dieselben in Wahrheit sehr verwickelte Störungsbewegungen sind, doch durch die KEPLER'schen Gesetze, wenigstens innerhalb längerer Zeiträume genügend dargestellt werden können.

Ehe man dazu schreiten kann, die vorhandenen Messungen eines Doppelsternes zu einer Bahnbestimmung heranzuziehen, muss überlegt werden, welche Correctionen man an sie anzubringen hat, um ein homogenes Material zu erlangen. Refraction, Aberration, Nutation haben auf die Messungen der engen Doppelsterne, welche hier in Frage kommen, nur einen verschwindend kleinen Einfluss. Ebenso kann in den meisten Fällen die Einwirkung der Präcession auf den Positionswinkel unbedenklich vernachlässigt werden. Dieselbe ist indessen so einfach zu berechnen, dass man die damit verbundene Mühe nicht scheuen wird. Bezeichnen p_0 und p die zu den Zeiten t_0 und t gehörigen Positionswinkel, α und δ Rectascension und Deklination des Doppelsternes, so hat man nämlich:

$$p = p_0 + 0°\cdot0056 \sin\alpha \sec\delta \,(t - t_0).$$

Ganz anders verhält es sich mit gewissen Messungsfehlern, die in systematischer Weise auftretend, der Person des Beobachters eigenthümlich sind und deshalb persönliche Fehler genannt werden. Es ist das Verdienst BESSEL's und W. STRUVE's, auf das Vorkommen solcher Fehler hingewiesen zu haben, als sie ihre gleichzeitigen Messungen gemeinsam beobachteter Objecte verglichen. Dann aber hat besonders O. STRUVE, die Wichtigkeit des Gegenstandes erkennend, zuerst eingehende Untersuchungen über die persönlichen Fehler, mit denen seine eigenen Beobachtungen in hohem Grade behaftet sind, angestellt. Es hat sich gezeigt, dass verschiedene Umstände, wie die Stellung des Sternpaares gegen die Verticale, die Grösse der Distanz, vielleicht auch die Helligkeit der Sterne maassgebend auf die Messung einwirken. Ferner hat sich die sehr unangenehme Thatsache herausgestellt, dass zeitliche Aenderungen in den persönlichen Fehlern nicht selten sind und manchmal in sehr merkbarem Betrage zum Vorschein kommen. THIELE[2]) konnte das bei mehreren Beobachtern in unzweideutiger Weise nachweisen. Es ist begreiflich, dass unter solchen Umständen die persön-

---

[1]) Bulletin astromique, Tome IV, 1887.

[2]) CASTOR, Calcul du mouvement relatif etc. Kopenhagen 1879.

lichen Beobachtungsfehler, die z. B. bei O. STRUVE den Positionswinkel unter Umständen um mehrere Grade verfälschen, genaueren Untersuchungen über die Bewegungen der Doppelsterne grosse Schwierigkeiten bereiten und dass der Berechner niemals unterlassen darf, auf sie gehörig Rücksicht zu nehmen. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit derselben sind solche Untersuchungen aber mit grossen Unsicherheiten behaftet, die nur durch vielfache Vergleichungen der Resultate verschiedener Beobachter verringert werden können. Solche Vergleichungen wurden in neuerer Zeit in der That angestellt, noch ist aber manche Lücke in dieser Beziehung auszufüllen.

Wie schon erwähnt, wird bei der Bahnberechnung eines Doppelsterns die unbedingte Gültigkeit des NEWTON'schen Gesetzes vorausgesetzt. Wir haben also anzunehmen, dass die beiden Componenten eines Doppelsternes sich nach den KEPLER'schen Gesetzen um einander bewegen. Diese Annahme können wir, da nur geschlossene Bahnen in Betracht gezogen werden sollen, so formuliren: der eine Stern beschreibt um den anderen (den Hauptstern) eine Ellipse und hält hierbei das Gesetz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit ein. Diese Bewegung wird von dem sehr weit entfernten Beobachter betrachtet und es werden demzufolge nur die Veränderungen in der gegenseitigen Stellung der Projectionen der beiden Sterne in einer Ebene bemerkbar sein, welche senkrecht zur Gesichtslinie steht. Es ist leicht zu sehen, wie sich diese scheinbare Bewegung gestaltet. Die scheinbare Bahn wird wieder eine Ellipse sein; der Hauptstern wird aber nicht in ihrem Brennpunkte, sondern irgendwo im Innern stehen. Das Gesetz der Flächen wird aber bekanntlich nach wie vor gelten. Die Kenntniss der scheinbaren Bewegung genügt aber, wie wir sehen werden, vollständig zur Bestimmung der wahren Bewegung.

Wir haben zunächst festzusetzen, wie viele und welche Bestimmungsstücke die wahre Bewegung bestimmen. Grösse und Gestalt der wahren Ellipsen sind gegeben durch die grosse Halbaxe a und die Excentricität e. Die Lage der Bahnebene wird bestimmt durch die Neigung i gegen die Projectionsebene und die Länge des Knotens Ω auf letzterer. Wir wollen Ω von demselben Anfang und in derselben Richtung wie die Positionswinkel zählen. Es mag gleich hier bemerkt werden, dass, falls i stets positiv und kleiner als 90° angenommen wird, Ω nicht eindeutig bestimmt werden kann. Da offenbar die scheinbare Bewegung entstehen kann durch eine wahre in einer Ebene mit der Neigung $= i$ oder auch $- i$, so ist es erlaubt, nach Belieben den Werth von Ω um 180° zu ändern. Man hat sich aber für einen der beiden gleichberechtigten Werthe von Ω zu entschliessen, alles andere ist dadurch unzweideutig gegeben. Die Lage der wahren Ellipsen in ihrer Ebene wird durch den Winkel λ bestimmt, welchen die grosse Axe mit der Knotenlinie bildet, und der Ort des Sternes in der Bahn durch die wahre oder mittlere Anomalie zu einer bestimmten Zeit. Man kann auch, und das soll im Folgenden geschehen, die Zeit τ angeben, zu welcher die beiden Sterne die kleinste Entfernung von einander haben. τ ist also die Zeit des Passirens des Periastrons. λ wird dann den Winkel zwischen Periastron und Knoten, vom Hauptstern gesehen, darstellen. Schliesslich muss noch die Umlaufszeit T bekannt sein, weil diese, wie wir sehen werden, nicht durch a, wie im Planetensystem, gegeben ist.

Zwischen den angeführten Grössen, der Zeit t, der wahren Anomalie v, der mittleren M und der excentrischen E finden die bekannten Beziehungen statt, die durch die KEPLER'schen Gesetze gegeben sind. Wir wollen eine dieser

Gleichungen näher betrachten. Es seien m und m_1 die Massen der beiden Sterne, k die Anziehungsconstante, dann ist bekanntlich

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{m + m_1}}. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$a = \left(\frac{Tk\sqrt{m + m_1}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Constante k ist hier natürlich in denselben Einheiten auszudrücken, wie die anderen vorkommenden Grössen. Ob bei den Doppelsternen k denselben Werth hat wie in unserem Planetensystem, ist eine Frage, die wohl discutirt werden kann und in der That discutirt worden ist. Ernstliche Zweifel dagegen hat man aber nicht vorbringen können. Dann gilt aber (1) auch z. B. für die Bewegung der Erde um die Sonne. Setzt man also die Sonnenmasse bezw. Erdmasse gleich 1 bezw. ν, die Umlaufszeit der Erde = 1, so ist

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \nu}},$$

wobei noch mit jedenfalls hinreichender Genauigkeit ν einfach fortgelassen werden kann. Man hat jetzt einfach

$$a = T^{\frac{2}{3}} (m + m_1)^{\frac{1}{3}}. \tag{2}$$

Hier ist also T in Jahren, m und m_1 in Sonnenmassen und a in mittleren Entfernungen Sonne — Erde auszudrücken. Nennt man p die Parallaxe des Fixsternes, a'' den scheinbaren Winkelwerth von a, so hat man in Folge von

$$a'' = ap$$

die Gleichung

$$p = \frac{a''}{[(m + m_1)T^2]^{\frac{1}{3}}}. \tag{3}$$

Da nun eine Doppelsternbahnberechnung nur a'' angeben kann, so enthält die Gleichung (3) eine Beziehung zwischen p und $m + m_1$, wenn auch noch T bekannt ist. Diese Gleichung ist demnach bei jenen Doppelsternen von besonderem Interesse, für welche Parallaxenbestimmungen vorliegen, denn sie gestattet die Bestimmung von Fixsternmassen. Als Beispiel mag hierfür der Doppelstern 70 Ophiuchi angeführt werden. Nimmt man — es sei dahingestellt, ob dies die beste Annahme ist — an.

$$T = 95{\cdot}97; \quad a'' = 4''{\cdot}958; \quad p = 0''{\cdot}162,$$

so ergiebt Formel (3) $m + m_1 = 3{\cdot}11$. Die Gesammtmasse des Systemes ist also etwa 3 Sonnenmassen gleich.

Nach dem Früheren wird also eine Doppelsternbahn durch 7 Elemente bestimmt. Als solche kann man die Grössen

$$a,\ e,\ \Omega,\ i,\ \lambda,\ T,\ \tau,$$

oder Combinationen aus ihnen wählen. Sind diese Elemente bekannt, so ist es eine sehr leichte Aufgabe, hieraus für eine gegebene Zeit t Positionswinkel p und Distanz ρ zu berechnen. Hält man die früher angeführten Bezeichnungen fest, so hat man zunächst die bekannten Formeln

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau)$$

$$E - e \sin E = M$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$$

anzuwenden. Hieraus ergiebt sich die wahre Distanz r der beiden Sterne

$$r = a(1 - e \cos E)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \tan(p - \Omega) &= \cos i \tan(\lambda + v) \\ \rho &= r \cdot \frac{\cos(\lambda + v)}{\cos(p - \Omega)} \end{aligned} \tag{4}$$

wozu noch zu bemerken ist, dass $p - \Omega$ und $\lambda + v$ in demselben Quadranten liegen.

Die umgekehrte Aufgabe, aus gegebenen p und ρ die sieben Bahnelemente zu bestimmen, ist natürlich viel complicirter. Offenbar muss im Allgemeinen aus 7 Daten eine Bahnbestimmung möglich sein. Man sieht aber sofort ein, dass Positionswinkel oder Distanzen allein hierzu nicht ausreichend sind, denn nach (4) ist p unabhängig von a, während ρ nicht von Ω abhängt. Sonst können die Daten in ganz beliebiger Weise combinirt werden. Es sind auch für einige dieser Combinationen Methoden, die wegen der transcendenten Form einiger der auftretenden Gleichungen Näherungsmethoden sein müssen, aufgestellt worden. Dieselben sind dem Wunsche entsprungen, die Lösung des Problems aus der gerade hinreichenden Anzahl von Daten zu erlangen, welcher Wunsch in rein theoretischer Hinsicht durchaus berechtigt ist. In der Praxis liegt die Sache anders. Bahnbestimmungen solcher Doppelsterne, deren Stellung nur durch wenige Positionswinkel und Distanzen festgelegt erscheint, haben meistens kein Interesse und können bei den bekannten Ungenauigkeiten der beobachteten Coordinaten auf irgend welche Zuverlässigkeit keinen Anspruch machen. Man wird deshalb wohl in allen Fällen, die eine Bahnberechnung überhaupt verdienen, annehmen dürfen, dass eine grössere Zahl von Messungen vorliegt. Es soll nun für das Folgende nur angenommen werden, dass entweder 5 zusammengehörige Positionswinkel und Distanzen direkt gegeben seien oder wenn es, was bei engeren Doppelsternen vorkommen kann, an letzteren fehlt, eine fortlaufende Reihe von Positionswinkeln gegeben sei, die erlaubt, für 5 Zeiten den Betrag des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ zu berechnen. Da nämlich der Flächensatz

$$\rho^2 \frac{dp}{dt} = const$$

gilt, so kann man jetzt für die fünf gegebenen Zeiten die zugehörigen ρ ableiten, wenn das einem und zwar unter den gegebenen beliebig ausgewählten Zeitmomente zukommende ρ gegeben ist, oder auch ganz beliebig angenommen wird. Man erhält in letzterem Falle die Dimensionen der wahren Ellipse natürlich in diesem willkürlichen Maassstabe ausgedrückt, sonst aber selbstverständlich alles andere eben so richtig, als wenn die eine erwähnte Distanz bekannt wäre. Durch die 5 Paare p und ρ sind auch die 5 Paare rechtwinkliger Coordinaten

$$x = \rho \cos p, \qquad y = \rho \sin p$$

gegeben. Diese aber müssen der Gleichung der scheinbaren Ellipse genügen, die sich den oben gemachten Bemerkungen gemäss in der allgemeinsten Form

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0 \tag{5}$$

darstellt. Da (5) eine Ellipse darstellen soll, so muss bekanntlich sein:

$$\beta > 0; \qquad \gamma > 0; \qquad \beta\gamma - \delta^2 > 0. \tag{5a}$$

Zur Bestimmung der 5 Constanten β, γ, δ, ε, ζ reichen 5 gegebene x und y aus. Man wird indessen niemals versäumen, etwa mehr vorhandene Daten mit zu benutzen und so viele Gleichungen anzusetzen, als zusammengehörige x und y

vorhanden sind. Aus allen wird man, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Werthe der β, γ etc. berechnen.

Ist dies geschehen, so lässt sich leicht die wahre Ellipse bestimmen. Die rechtwinklige Projection dieser letzteren ist die Ellipse (5) und der Coordinatenanfang, welcher mit dem Hauptsterne zusammenfällt, ist der Brennpunkt der wahren Ellipse. Diese geometrischen Bedingungen in passender Weise durch Formeln ausgedrückt, geben die einfache Lösung des Problemes.

(5) kann auch als Gleichung eines geraden Cylinders angesehen werden, dessen Axe mit der Z-Axe des Coordinatensystems, also mit der auf der Projectionsebene senkrechten Gesichtslinie zusammenfällt. Wir beziehen nun diesen Cylinder auf ein in demselben Anfang gelegenes Coordinatensystem der x'', y'', z''. Die x''-Axe soll in der Knotenlinie der wahren Ellipse liegen, die y''-Axe senkrecht darauf im Sinne der Bewegungsrichtung des Sternes um den Hauptstern. Dann hat man in sofort ersichtlicher Weise für die Transformation beider Coordinatensysteme:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i + z'' \sin \Omega \sin i \\ y &= x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i - z'' \cos \Omega \sin i \\ z &= \qquad\qquad + y'' \sin i \qquad + z'' \cos i \end{aligned}$$

Führt man dies in (5) ein und setzt $z'' = 0$, so erhält man den Durchschnitt des erwähnten Cylinders mit der wahren Bahnebene, also die wahre Ellipse. Ihre Gleichung ist also:

$$\begin{aligned} &\beta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)^2 + \gamma(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i)^2 \\ &+ 2\delta(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)\,(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) \\ &+ 2\varepsilon(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) + 2\zeta(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) - 1 = 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Andererseits ist aber die Gleichung der wahren Ellipse auf dieselben Axen bezogen

$$\frac{(ae + x'' \cos \lambda + y'' \sin \lambda)^2}{a^2} + \frac{(-x'' \sin \lambda + y'' \cos \lambda)^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{II}$$

wenn die kleine Halbaxe mit b bezeichnet wird. Die Gleichungen (I) und (II) müssen identisch für alle Coordinatenwerthe mit einander übereinstimmen. Es müssen demzufolge die Coëfficienten gleicher Potenzen der Coordinaten gleich sein. Bezeichnet deshalb ν einen zu bestimmenden Faktor, so findet sich sofort:

$$\nu\left(\frac{\cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{b^2}\right) = \beta \cos^2 \Omega + \gamma \sin^2 \Omega + 2\delta \sin \Omega \cos \Omega \tag{6}$$

$$\nu\left(\frac{\sin^2 \lambda}{a^2} + \frac{\cos^2 \lambda}{b^2}\right) = (\beta \sin^2 \Omega + \gamma \cos^2 \Omega - 2\delta \sin \Omega \cos \Omega) \cos^2 i \tag{7}$$

$$\nu \sin 2\lambda \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = (-\beta \sin 2\Omega + \gamma \sin 2\Omega + 2\delta \cos 2\Omega) \cos i \tag{8}$$

$$\nu \frac{e}{a} \cos \lambda = \varepsilon \cos \Omega + \zeta \sin \Omega \tag{9}$$

$$\nu \frac{e}{a} \sin \lambda = (-\varepsilon \sin \Omega + \zeta \cos \Omega) \cos i \tag{10}$$

$$\nu(e^2 - 1) = -1. \tag{11}$$

Aus (11) folgt $\nu = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$. Führt man noch den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ ein, so kann man (8) und (9) schreiben

$$\frac{e}{p}\cos\lambda = \varepsilon\cos\Omega + \zeta\sin\Omega$$
$$\frac{e}{p}\sin\lambda = (-\varepsilon\sin\Omega + \zeta\cos\Omega)\cos i. \tag{12}$$

Das doppelte Produkt dieser Gleichungen ist

$$\frac{e^2}{p^2}\sin 2\lambda = (-\varepsilon^2\sin 2\Omega + \zeta^2\sin 2\Omega - 2\varepsilon\zeta\cos 2\Omega)\cos i,$$

während (8) die Gestalt annimmt

$$\frac{e^2}{p^2}\sin 2\lambda = (\beta\sin 2\Omega - \gamma\sin 2\Omega + 2\delta\cos 2\Omega)\cos i.$$

Hieraus folgt sofort

$$\operatorname{tang} 2\Omega = \frac{2(\delta + \zeta\varepsilon)}{\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \zeta^2}. \tag{13}$$

Diese Gleichung giebt bereits ein Element, nämlich Ω. Die bestehende Vieldeutigkeit soll später erörtert werden. Die Differenz der Gleichungen (6) und (7):

$$-\frac{e^2}{p^2}\cos 2\lambda = (\beta\cos^2\Omega + \gamma\sin^2\Omega + 2\delta\sin\Omega\cos\Omega)$$
$$-(\beta\sin^2\Omega + \gamma\cos^2\Omega - 2\delta\sin\Omega\cos\Omega)\cos^2 i$$

verglichen mit der Differenz der Quadrate der Gleichungen (12)

$$\frac{e^2}{p^2}\cos 2\lambda = (\varepsilon\cos\Omega + \zeta\sin\Omega)^2 - (-\varepsilon\sin\Omega + \zeta\cos\Omega)^2\cos^2 i$$

giebt sofort

$$\cos^2 i = \frac{(\beta + \varepsilon^2)\cos^2\Omega + (\gamma + \zeta^2)\sin^2\Omega + 2(\delta + \zeta\varepsilon)\sin\Omega\cos\Omega}{(\beta + \varepsilon^2)\sin^2\Omega + (\gamma + \zeta^2)\cos^2\Omega - 2(\delta + \zeta\varepsilon)\sin\Omega\cos\Omega}. \tag{14}$$

Addirt man schliesslich zu (7) das Quadrat der zweiten Gleichung (12), so findet man:

$$\frac{1}{p^2\cos^2 i} = (\beta + \varepsilon^2)\sin^2\Omega + (\gamma + \zeta^2)\cos^2\Omega - 2(\delta + \zeta\varepsilon)\sin\Omega\cos\Omega. \tag{15}$$

Hiermit ist die wahre Ellipse vollständig bestimmt und es erübrigt nur noch, die Rechenvorschriften durch Einführung von Hilfsgrössen zu vereinfachen. Setzt man

$$\mu = \gamma + \zeta^2$$
$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$
$$\rho = \delta + \zeta\varepsilon$$
$$A = \mu\sin^2\Omega + \nu\cos^2\Omega + 2\rho\sin\Omega\cos\Omega$$
$$B = \mu\cos^2\Omega + \nu\sin^2\Omega - 2\rho\sin\Omega\cos\Omega,$$

also:

$$A + B = \mu + \nu,$$

so werden die Gleichungen (13), (14) und (15):

$$\operatorname{tang} 2\Omega = \frac{-2\rho}{\mu - \nu}; \quad \cos^2 i = \frac{A}{B}; \quad \frac{1}{p^2\cos^2 i} = B.$$

Hieraus ergiebt sich sofort

$$\frac{1}{p^2} = A; \quad \operatorname{tang}^2 i = \frac{B - A}{A} = (\mu + \nu)p^2 - 2.$$

Für A kann man noch etwas bequemer schreiben

$$A = \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2}\cos 2\Omega + \rho\sin 2\Omega.$$

Ehe wir die gewonnenen Formeln endgültig zusammenstellen, müssen wir noch auf die Vieldeutigkeit in der Bestimmung von Ω zurückkommen. Soll Gleichung (14) einen reellen Werth für i ergeben, so muss ihre rechte Seite stets positiv und kleiner als 1 sein. Aus den Bedingungen (5a) folgt aber sofort, dass in der That sowohl Zähler als auch Nenner des Bruches (15) positiv sind. Es muss also der Nenner grösser als der Zähler sein, d. h.

$$(\delta + \zeta\varepsilon) \sin 2\Omega < 0$$

oder $\sin 2\Omega$ muss das Zeichen von $-\rho$, also $\cos 2\Omega$ das Zeichen von $(\mu - \nu)$ haben. Hierdurch erscheint 2Ω eindeutig bestimmt. Ω selbst ist es aber nicht indem man es nach Belieben um 180° vergrössern darf oder nicht. Diese übrigbleibende Zweideutigkeit liegt aber, wie bereits oben auseinandergesetzt wurde, in der Natur der Sache und kann nicht gehoben werden. Man muss sich also für ein bestimmtes Ω entscheiden, weil dann erst Ω unzweideutig bestimmt ist.

Wir stellen nun alle Formeln zusammen, die, nach Ermittelung der Coëfficienten β, γ, δ, ε, ζ zur Bestimmung der wahren Bahnellipse zu berechnen sind.

$$\mu = \gamma + \zeta^2$$
$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$
$$\rho = \delta + \zeta\varepsilon$$
$$\tan 2\Omega = \frac{-2\rho}{\mu - \nu};$$

$\cos 2\Omega$ hat das Vorzeichen von $(\mu - \nu)$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2} \cos 2\Omega + \rho \sin 2\Omega.$$
$$\tan^2 i = (\mu + \nu)p^2 - 2$$
$$\frac{e}{p} \sin\lambda = (-\varepsilon \sin\Omega + \zeta \cos\Omega) \cos i$$
$$\frac{e}{p} \cos\lambda = \varepsilon \cos\Omega + \zeta \sin\Omega.$$

Will man für die Berechnung dieser höchst einfachen Formeln eine Controle haben, so findet man eine solche u. A. in der oben vorkommenden Formel:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2\lambda = \cos i \, [(\beta - \gamma) \sin 2\Omega - 2\delta \cos 2\Omega].$$

Es mag noch erwähnt werden, dass man die Gleichungen für p^2 und $\tan^2 i$ auch schreiben kann:

$$\frac{2}{p^2} = (\mu + \nu) - \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\rho^2}$$
$$\tan^2 i = p^2 \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\rho^2}$$

Man sieht hieraus, dass, wie es nach den getroffenen Festsetzungen auch sein muss, $\tan i$ immer reell wird, wenn es p ist. Dieses wird imaginär, wenn

$$\rho^2 > \mu\nu.$$

Das ist aber, wie man leicht einsieht, die Bedingung dafür, dass der Coordinatenanfang ausserhalb der scheinbaren Ellipse sich befindet, welcher Fall nicht eintreten kann, weil der Coordinatenanfang die Projection des Brennpunktes der wahren Ellipse sein muss.

Hat man auf diese Weise Grösse, Form und Lage der wahren Ellipse berechnet, so kann man aus jedem Positionswinkel p und der zugehörigen Zeit die mittlere Anomalie M berechnen, denn es ist:

$$tang\,(v + \lambda) = sec\,i\,tang\,(p - \Omega)$$

$$tang\,\frac{1}{2}\,E = tang\,\frac{1}{2}\,v\,\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$M = E - e\,sin\,E.$$

Da aber andrerseits

$$M = \frac{360^\circ}{T}\,(t - \tau)$$

ist, so giebt jedes M eine lineare Gleichung zwischen den beiden Unbekannten

$$\frac{360^\circ}{T} = n \quad \text{und} \quad n\tau = -\varepsilon$$

nämlich

$$M = nt + \varepsilon$$

Aus der Gesammtheit der vorliegenden Werthe für M ergeben sich dann, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die gesuchten Unbekannten.

Auf die angegebene Weise wird man in den allermeisten Fällen eine Bahnbestimmung erhalten, die sich dem verfügbaren Beobachtungsmaterial soweit anschmiegen wird, dass man sie zum Ausgangspunkt für eine consequente Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate wählen können wird. Zu diesem Zwecke wird man, ganz ähnlich wie bei Cometen- und Planetenbahnen die Beziehungen aufzustellen haben, welche zwischen kleinen Aenderungen der Bahnelemente und den zugehörigen Aenderungen der Beobachtungsgrössen bestehen. Hier sind also die kleinen Zunahmen dp und $d\rho$ durch die Differentiale der 7 Bahnelemente auszudrücken. In Folge der grossen Einfachheit der auszuführenden Operationen wird es wohl ausreichend sein, wenn nur das Resultat angeführt wird. Die benutzte Bezeichnung ist dieselbe wie früher, nur ist noch der Einfachheit wegen der Excentricitätswinkel φ, wo $sin\,\varphi = e$, eingeführt worden.

Man findet nun:

$$dE = \frac{a}{r}\,(t - \tau)\,dn - \frac{an}{r}\,d\tau + \frac{a}{r}\,sin\,E\,cos\,\varphi\,d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\,cos\,\varphi\,[(t - \tau)\,dn - n\,d\tau] + \frac{a^2}{r^2}\,sin\,E\left(\frac{r}{a} + cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a}\,da + \frac{a^2}{r^2}\,sin\,\varphi\,sin\,E\,[(t - \tau)\,dn - n\,d\tau] + \frac{a^2(e - cos\,E)}{r}\,cos\,\varphi\,d\varphi$$

und hiermit

$$\begin{aligned} dp = d\Omega - \frac{r}{\rho}\,sin\,(\lambda + v)\,cos\,(p - \Omega)\,sin\,i\,d\,i + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 cos\,i\,d\lambda\,+ \\ + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 cos\,\varphi\,cos\,i[(t - \tau)\,dn - n\,d\tau] + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 cos\,\,i\,sin\,E\left(\frac{r}{a} + cos^2\,\varphi\right)d\varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{sin^2\,i}{cos\,i}\,sin\,2(p - \Omega),$$

so wird die gesuchte Differentialgleichung für die Distanz

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{da}{a} - m\,d\lambda + \left(\frac{a}{r}\right)^2 (e\,sin\,E - m\,cos\,\varphi)[(t - \tau)\,dn - n\,d\tau]\,- \\ - tang\,i\,sin^2\,(p - \Omega)\,di - \left(\frac{a}{r}\right)^2\left[cos\,\varphi\,(cos\,E - e) + m\,sin\,E\left(\frac{r}{a} + cos^2\varphi\right)\right]d\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Diese beiden Gleichungen ermöglichen sofort die Aufstellung der Bedingungsgleichungen. Die Bildung der Normalgleichungen hängt von dem Gesetze ab,

nach welchem die Beobachtungsfehler dp und $d\rho$ von der Distanz ρ abhängen. Dass eine solche Abhängigkeit stattfindet, ersieht man aus dem Umstande, dass die Genauigkeit der Beobachtung der p schnell mit der Distanz ρ abnimmt. Man wird im Allgemeinen sagen können, dass beide Coordinaten gleich genau gemessen sind, wenn ρdp und $d\rho$ gleich gross sind. Trifft letzteres zu, so müsste man die Normalgleichungen nach der Bedingung

$$\Sigma \rho^2 dp^2 + \Sigma d\rho^2 = \text{Minim.}$$

bilden. Dies ist aber nicht, wenigstens nicht bei allen Beobachtern, der Fall und scheint namentlich bei kleinen Distanzen ($< 1''$) nicht zuzutreffen. Man wird, da die Sache namentlich mit Berücksichtigung der systematischen Fehler, die hier wie zufällige Fehler angesehen werden, bisher nicht genügend untersucht ist, vielleicht am besten thun, bei mässigen Distanzen die obige Minimumsbedingung festzuhalten, für ganz kleine Distanzen aber

$$\Sigma \rho^2 dp^2 = \text{Minim.}$$

zu setzen und die beobachteten Distanzen nur zur Ableitung der Dimensionen der wahren Ellipse, also zur Bestimmung von a zu benutzen. — Die auseinandergesetzte Methode reicht nicht aus, wenn i nahezu 90° ist. Ein Beispiel für diesen Fall bietet der enge Doppelstern 42 Comae, bei welchem die Annahme $i = 90°$ den Beobachtungen am besten zu genügen scheint. Hier hat man die Bahnbestimmung allein auf die Distanzmessungen zu gründen und der unveränderliche Positionswinkel bestimmt für sich die Knotenlänge der Bahn. Auf die Behandlung dieser Ausnahmefälle kann hier nicht näher eingegangen werden.

Die zu ferneren Untersuchungen über Bahnbewegungen tauglichen Doppelsternmessungen gehen bis auf W. STRUVE zurück. Die ersten Beobachtungen dieses Astronomen sind indessen mit grösseren und weniger gut ermittelten systematischen Fehlern behaftet, so dass man bei ihrer Benutzung öfters auf Schwierigkeiten stösst. Mit Sicherheit darf man sich aber der von 1828 an von $W\Sigma$ gelieferten Messungen bedienen, und man darf sie den besten neueren Beobachtungen an die Seite stellen. Die Beobachtungen W. HERSCHEL's, so überaus werthvoll wegen ihres Alters, dürfen nur mit grösster Vorsicht verwerthet werden. Die Angaben der Positionswinkel sind nicht selten durch grobe Versehen, z. B. falsche Angabe des Quadranten, entstellt, die Distanzen sind, wenn überhaupt angegeben, sehr wenig sicher. Aus diesen Gründen wird man diese Messungen nicht mit Vortheil in die Ausgleichungsrechnung einbeziehen, dagegen wird ihre Vergleichung mit dem Resultate der Bahnbestimmung unter Umständen sehr werthvoll sein zur Beurtheilung der Sicherheit der erhaltenen Umlaufszeit und man wird deshalb gut thun, diese Vergleichung nicht zu unterlassen. — Aus der verhältnissmässig kurzen Zeit, über welche sich die verfügbaren Messungen erstrecken, folgt von selbst, dass die Bahnen von mehreren Jahrhunderten Umlaufszeit auf Sicherheit keinen Anspruch machen können. Eine vollständige Uebersicht über die bisher berechneten Doppelsternbahnen soll hier nicht gegeben werden, eine solche würde auch bei der raschen Entwickelung unserer Kenntnisse in dieser Richtung schnell veralten.

Man findet u. A. eine solche Zusammenstellung neuesten Datums im »Annuaire pour l'an 1896«, während der Stand der Kenntnisse in dieser Richtung vor 20 Jahren in einem Werke von FLAMMARION[1]) und dem bekannten Handbuche von CROSSLEY, GLEDHILL und WILSON[2]) dargestellt ist. In der folgenden

[1]) C. FLAMMARION, Catalogue des étoiles doubles et multiples, Paris 1878.

[2]) A Handbook of double Stars, by CROSSLEY, GLEDHILL and WILSON, London 1879.

Tabelle sind jene 38 Doppelsternbahnen nach dem »Annuaire« angeführt, die Umlaufszeiten unter 100 Jahren haben. Ausser der Umlaufszeit werden noch die Helligkeiten der Componenten und die ein allgemeines Interesse darbietenden Elemente, *i*, *e* und *a* angegeben.

	Grösse	*T*	*i*	*e*	*a*
κ Pegasi	4·3— 5·0	11j·4	81°·2	0·49	0″·42
δ Equul.	4·5— 5·0	11·5	79·0	0·14	0·45
β 883	7·0— 9·0	16·4	28·5	0·48	0·24
85 Pegas. . . .	6·0— 9·0	17·5	66·7	0·16	0·80
ζ Sagitta. . . .	3·5— 4·0	18·7	58·8	0·17	0·53
20 Pers.	6·0— 7·0	20·8	73·6	0·48	0·25
9 Argus	6·0— 7·0	22·0	77·7	0·70	0·65
42 Com. Ber. . .	6·0— 6·0	25·7	90·0	0·48	0·66
β 416	7·0— 9·0	27·7	59·8	0·44	2·04
β 612	6·0— 6·0	30·0	23·0	0·13	0·28
β Delph.	3·5— 4·5	30·9	59·3	0·34	0·52
Σ 3121	7·5— 7·8	34·0	75·0	0·33	0·67
ζ Herc.	3·0— 6·5	35·0	44·9	0·46	1·31
τ Cygn.	5·6— 7·9	36·5	44·7	0·24	1·19
Procyon	1·0—	40·0	—	—	—
η Coron. Bor. . .	5·8— 6·2	41·3	59·6	0·25	0·87
Σ 2173	6·0— 6·0	45·4	80·7	0·13	1·00
μ^2 Herc.	9·5—10·5	45·4	67·0	0·21	1·37
O·Σ 269	6·8— 7·3	47·7	82·8	0·06	0·58
Sirius	>1·0—10·0	49·4	42·4	0·63	7·57
99 Herc.	6·0—11·5	53·5	38·6	0·79	1·12
γ Androm	4·5— 6·0	54·8	78·9	0·88	0·37
ζ Cancri	5·0— 5·7	59·1	11·1	0·38	0·86
ξ Urs. maj. . . .	4·0— 5·0	60·6	55·9	0·39	2·59
γ Cent	4·0— 4·0	61·9	84·1	0·63	1·50
O·Σ 234	7·0— 7·4	63·5	47·4	0·36	0·34
O·Σ 298	7·0— 7·3	65·2	57·6	0·53	0·86
α Cent	1·0— 2·0	81·1	79·7	0·52	17·71
O·Σ 149	6·5— 9·0	85·9	31·1	0·46	0·50
70 Ophiuch. . . .	4·1— 6·1	88·4	60·1	0·48	4·60
Σ 228	6·7— 7·6	88·7	71·0	0·53	0·98
γ Cor. Bor. . . .	4·0— 7·0	90·4	83·4	0·35	0·66
φ Urs. maj. . . .	5·0— 5·6	91·9	34·7	0·45	0·29
λ Cygn.	5·0— 6·3	93·4	58·8	0·60	0·51
8 Sext.	5·0— 6·0	93·9	31·8	0·47	0·52
O·Σ 235	6·0— 7·3	94·4	54·5	0·50	0·98
ξ Scorp.	4·9— 5·2	95·9	68·7	0·08	1·26
O·Σ 2[illegible]4	7·2— 9·2	96·1	49·8	0·58	0·42

Besondere Beachtung verdienen die mehrfachen Sternsysteme, von denen die beiden interessantesten ζ Cancri und ξ Scorpii in obiger Zusammenstellung

vorkommen. Die Bewegungen in dem ersteren Systeme, welches aus 3 nahezu gleich hellen und aus einem vierten bisher noch nicht gesehenen Sterne besteht, sind in neuerer Zeit eingehend[1]) studirt worden und haben zu Resultaten geführt, die hier ganz kurz, ohne näheren Nachweis, erwähnt werden sollen.

Von den 3 sichtbaren Sternen A, B, C, stehen zwei, A und B, in grosser Nähe beieinander. Sie beschreiben in etwa 60 Jahren einen vollen Umkreis um einander und halten hierbei eine Distanz von $0''\cdot6-1''\cdot1$ ein. Der Stern C dagegen beschreibt um die Mitte von A und B jährlich im Durchscheitt $0^{\circ}\cdot5$ im Positionswinkel bei einer nahezu constanten Distanz von $5\frac{1}{2}''$. Sowohl die Prüfung der Flächensätze, als auch die Berechnung einer elliptischen Bahn ergaben, dass man den Beobachtungen von A und B beinahe vollständig genügen kann, ohne auf eine Einwirkung des dritten Sternes Rücksicht zu nehmen. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dass der dritte Stern C keinen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung von B um A ausübt. Vielmehr hat sich ergeben, dass man für den Stern C sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden und dass man ziemlich bedeutende Massenwerthe annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten.

Die Beobachtungen des Sternes C zeigen Anomalien höchst merkwürdiger Art. C. Flammarion und Otto Struve haben vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass die Messungen mit grosser Deutlichkeit eine periodische Veränderung im Positionswinkel und Distanz ergeben, die beinahe vollkommen durch die Annahme fortgeschafft werden konnte, der Stern C bewege sich in etwa 18 Jahren in einer Kreisbahn vom Radius $0''\cdot2$ um einen Punkt, der wieder in einer Kreisbahn langsam um die Mitte von A und B fortrückt. In der That ist die durch diese Hypothese erzielte Uebereinstimmung so auffällig, dass an ihrer Berechtigung schon damals kaum zu zweifeln war. Indessen war doch eine erneute Prüfung aus verschiedenen, hier nicht näher zu erörternden Gründen, nöthig. Namentlich musste untersucht werden, ob die Annahme eines dunklen vierten Sternes nothwendig sei und die beobachtete Anomalie nicht durch eine andere Annahme ebenfalls erklärt werden könne. Die dahin gerichtete Prüfung hat nun eine vollständige Bestätigung der gemachten Annahme geliefert und es kann als eine bewiesene Thatsache angesehen werden, dass sich in grosser Nähe des Sternes C ein vierter Stern befindet.

Diese Untersuchungen über ζ Cancri führen uns auf den Fall eines Doppelsternes, bei dem nur die eine Componente sichtbar ist. Ein solcher Stern wird, also im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fixsternen eine Eigenbewegung zeigen, die ausser einem mit der Zeit proportionalen Fortschreiten am Himmel eine periodische Veränderlichkeit aufweist. Man sagt deshalb, ein solcher Stern habe eine veränderliche Eigenbewegung. Das Vorkommnis dunkler Fixsternbegleiter darf an sich nicht verwundern. Schon Bessel sprach die Meinung aus, dass die Leuchtkraft nicht nothwendiges Attribut stellarer Massen sei. Diese an sich unzweifelhalt richtige Ansicht hat den grossen Astronomen zu der epochemachenden Entdeckung eines solchen Falles geführt, indem er aus den periodischen Ver-

---

[1]) H. Seeliger, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri, Denkschriften der Wiener Akademie, Band 44, 1881. — Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der Münchener Akademie, Band 17, 1889. — Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri, Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1894.

änderungen der Rectascension des Sirius die wahre Sachlage erkannte[1]). Ihm war es nicht vergönnt, den Gegenstand weiter zu verfolgen und die Bahn, welche Sirius um den Schwerpunkt seiner und des Begleiters Masse beschreibt, abzuleiten. Diese Aufgabe hat später C. A. F. PETERS[2]) in mustergültiger Weise gelöst. Darauf behandelte AUWERS[3]) dasselbe Problem sehr eingehend, indem er nicht nur die Rectascensionen, sondern auch die Deklinationen in den Bereich seiner Betrachtungen zog. Diese umfangreiche Arbeit hat den unwiderleglichen Beweis für die Richtigkeit der BESSEL'schen Anschauungen erbracht. Noch war dieselbe aber nicht in die Oeffentlichkeit getreten, als es A. CLARKE am 31. Januar 1862 gelang, den genannten Begleiter wirklich zu sehen und zwar sehr nahe an dem Orte, welchen ihm die Theorie zugewiesen hatte. Die von AUWERS gefundenen Elemente sind

$$\begin{aligned} \tau &= 1843{\cdot}28 \\ \Omega &= 61^{\circ}{\cdot}97 \\ \lambda &= 18{\cdot}92 \\ i &= 47{\cdot}15 \\ e &= 0{\cdot}615 \\ a &= 2''{\cdot}33, \quad T = 49^{j}{\cdot}4. \end{aligned}$$

Diese beziehen sich auf die Bewegung des Sirius um den Schwerpunkt des Systemes. Sobald aber nur eine Beobachtung des Begleiters bekannt ist, kann man hieraus das Verhältniss beider Massen bestimmen. AUWERS hat aus den ersten bekannt gewordenen Beobachtungen gefunden, dass die Masse des Sirius 2·05 mal so gross ist wie die des Begleiters. Daraus folgt die Halbaxe der Bahn, welche Sirius um den Begleiter beschreibt gleich $7''{\cdot}1$. Da nun weiter die Parallaxe des Sirius zu etwa $\frac{1}{5}''$ angenommen werden darf, so folgt aus den oben mitgetheilten Formeln für die Masse des Sirius und des Begleiters 12 resp. 6 Sonnenmassen. Bringt man hiermit in Verbindung, dass der Begleiter als ein Sternchen von höchstens 9. Grösse erscheint, so liegt in der That ein auffälliges Beispiel dafür vor, wie wenig in speciellen Fällen die Grösse einer stellaren Masse mit ihrer Leuchtkraft zusammenhängt. Denn die Lichtquantität des Begleiters verhält sich zu der des Sirius wie 1 : 16000, während das Massenverhältniss beider nur 1 : 2 ist. Dieser Berechnung liegt nach SEIDEL die Annahme zu Grunde, dass Sirius uns etwa 10 Mal soviel Licht zusendet wie ein typischer Stern 1. Grösse und dass sich die Helligkeit eines Sternes der $m$ten Grösse zu der eines Sternes von der $(m+1)$ten Grösse verhält wie 2·5 : 1. Letztere Annahme ist gewiss nahezu richtig, die angegebene Helligkeit des Sirius vielleicht etwas zu gross, wogegen der Begleiter vielleicht zu hell angesetzt worden ist. — Bald nach seiner Entdeckung wurde der Siriusbegleiter ein verhältnismässig leicht zu beobachtendes Objekt und blieb es bis vor wenigen Jahren. Gegenwärtig (1896) steht er dem Hauptstern noch sehr nahe, die Entfernung vergrössert sich aber wieder, so dass er wahrscheinlich für die grossen Fernrohre bald erreichbar werden wird. — Die zahlreichen mikrometrischen Messungen, welche über die Stellung des Begleiters vorliegen, gestatteten den Versuch einer Bahnbestimmung, dies allerdings nur mit bedingter Zuverlässigkeit, da sich der Positionswinkel seit der Entdeckung bis 1890 nur um etwa 80 Grad verändert hat. In Anbetracht der

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 22, No. 514—516, Abhandlungen Band 2.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 32, No. 745—48.

[3]) Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen 1. Theil, Königsberg 1862, 2. Theil, Leipzig 1868.

schwierigen Umstände ist die Uebereinstimmung der Bahn mit der aus den Meridianbeobachtungen abgeleiteten recht befriedigend. AUWERS[1]) fand nämlich aus den Beobachtungen zwischen 1862 und 1890, bei angenommener Umlaufszeit, für die Bahn des Begleiters um den Hauptstern:

$$\begin{aligned} \tau &= 1844{\cdot}22 \\ \Omega &= 37{\cdot}51 \\ \lambda &= 39{\cdot}94 \\ i &= 42{\cdot}43 \\ e &= 0{\cdot}629 \\ T &= 49{\cdot}4 \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, ist die Bahn des Sirius am Himmel nicht das Stück eines grössten Kreises, sondern eine gewisse verschlungene cycloidische Curve, welche zu definiren zufolge der obigen Auseinandersetzungen leicht ist. Der Schwerpunkt des Siriussystems bewegt sich nach den mechanischen Grundsätzen in einer Geraden. Die scheinbare Bahncurve desselben Punktes ist also ein grösster Kreis, der mit gleichbleibender Geschwindigkeit beschrieben wird. Bezeichnet A_0 und D_0 Rectascension und Deklination des Schwerpunktes zur Zeit t_0 und A_0', D_0' die Eigenbewegungen in diesen beiden Coordinaten, so wird die Rectascension und Deklination desselben Punktes zur Zeit t sein:

$$A_0 + A_0'(t - t_0)$$

und

$$D_0 + D_0'(t - t_0)$$

Bedeutet p und ρ Positionswinkel und Distanz des Sirius gegen den Schwerpunkt und setzt man

$$\xi = \rho \cos p$$
$$\eta = \rho \sin p$$

so wird die Rectascension A und die Deklination D des Sirius durch die Formeln gegeben sein

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_0'(t - t_0) + \eta \sec D_0 \\ D &= D_0 + D_0'(t - t_0) + \xi. \end{aligned}$$

Nun genügen aber ξ und η der Gleichung der scheinbaren Ellipse. Man hat daher, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A_0 + A_0'(t - t_0) &= l \sec D_0 \\ D_0 + D_0'(t - t_0) &= m \end{aligned}$$

$$\gamma(A \cos D_0 - l)^2 + \beta(D - m)^2 + 2\delta(D - m)(A \cos D_0 - l) + 2\varepsilon(D - m) + 2\zeta(A \cos D_0 - l) - 1 = 0$$

In dieser Gleichung sind als Unbekannte die Grössen β, γ, δ, ε, ζ, l und m anzusehen, wobei sich die letzteren zwei aus vier zu bestimmenden Grössen zusammensetzen. Man wird diese Unbekannten durch ein Näherungsverfahren bestimmen, indem für l und m gute Näherungswerthe verhältnissmässig leicht zu erreichen sind Aus letzteren folgen aber strenge durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen die andern Unbekannten. Sind schliesslich die Versuche zu Ende geführt, so kann die wahre Bahnellipse und die Bewegung in ihr nach den oben gegebenen Formeln ins Werk gesetzt werden.

Ausser bei Sirius hat BESSEL[2]) noch in den Deklinationen des Procyon eine veränderliche Eigenbewegung constatirt, was ebenfalls die späteren Untersuchungen von AUWERS[3]) bestätigt haben. Die von letzterem berechnete Kreisbahn war:

---

[1]) AUWERS, Beiträge zur Kenntniss des Siriussystems. Astron. Nachr. Bd. 129.

[2]) Astron. Nachr. Bd. 22.

[3]) Astron. Nachr. No. 1371 1373.

Epoche des Min. in *A. R.* 1795·568
Umlaufszeit 39^{j}·97
Radius 1″·053

Die Auffindung des gesuchten Begleiters ist bisher nicht gelungen. Noch bei einigen andern Sternen (β *Orionis*, α *Hydr.*, α *Virg*) hat man einen dunklen Begleiter vermuthet, spätere eingehendere Untersuchungen haben aber diese Vermuthung nicht bestätigt, so dass wir dieses interessante Vorkommniss nur bei den 3 Sternen, Sirius, Procyon und ζ Cancri als erwiesen betrachten können. —

Hatte man schon durch die Burnham'schen Doppelsterne äusserst enge Systeme kennen gelernt, die in einigen Jahren einen vollen Umkreis umeinander beschreiben, so hat die Anwendung der neueren spectralanalytischen Messungen zur Kenntniss des Vorhandenseins so nahe beieinanderstehender Weltkörper geführt, dass ihre optische Trennung wohl niemals durch das Fernrohr erfolgen kann. Die Umlaufszeiten, die bei diesen Systemen auftreten, berechnen sich nach Tagen und zum Theil nach wenigen Stunden. Schon seit längerer Zeit war man geneigt, die veränderlichen Sterne vom Algoltypus als solche überaus enge Doppelsterne zu betrachten, bei denen die eine Componente gegenüber der andern wenig hell sein muss. Diese Hypothese ist für Algol selbst zur Gewissheit geworden, nachdem es H. C. Vogel gelungen ist, in den photographischen Spectralaufnahmen mit Sicherheit jene Linienverschiebungen nachzuweisen, welche infolge des Doppler'schen Principes mit der Bahnbewegung verbunden sein müssen. Aehnliche Verschiebungen der Spectrallinien wurden später auch bei nicht veränderlichen Sternen, z. B. bei α Virginis gefunden. Diese Verschiebungen ergeben die in der Richtung des Visionsradius liegende Componente der Geschwindigkeit des leuchtenden Sternes um den Schwerpunkt des Systemes, und hieraus kann man die hauptsächlichsten Elemente dieser Bewegung ableiten, was gleich gezeigt werden soll.

Aber auch, wenn beide Componenten des sehr engen Doppelsternes leuchtend sind, giebt die Spectralanalyse unter Umständen die Mittel an die Hand, eine Bahnbewegung zu constatiren. Es hat wohl zuerst Edward C. Pickering die Bemerkung gemacht, dass die Spectren einiger Sterne innerhalb kurzer Zeiträume Veränderungen aufweisen, indem gewisse Spectrallinien bald doppelt, bald einfach erscheinen. Dass diese Erscheinung zufolge des Doppler'schen Principes durch eine periodische Bewegung zweier Sterne um einander erklärt werden könne, war von Anfang an klar. Misst man nun zu verschiedenen Zeiten die Entfernungen der verdoppelten Linien von einander, so erhält man die im Visionsradius liegende Componente der relativen Geschwindigkeit der beiden Sterne des Systemes gegen einander. Solche Beobachtungen waren bisher mit Erfolg möglich u. A. bei den Sternen β *Aurig.* und ξ *Urs. maj.*, und es ist kaum zu bezweifeln, dass sich die Anzahl solcher Objecte in der nächsten Zeit schnell vermehren wird.

Der Zusammenhang zwischen den spectroskopischen Verschiebungen, welche in Kilometern ausgedrückte Geschwindigkeiten im Visionsradius angeben und den Bahnelementen ist sehr leicht aufzustellen. Nach Abzug des bekannten Einflusses der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Verschiebung der Spectrallinien giebt die Beobachtung im ersten der beiden betrachteten Fälle (Algol) die Geschwindigkeitscomponente des hellen Sternes gegen die Sonne. Legt man also die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfang in der Sonne

liegt, in die Fortsetzung des Visionsradius, nennt m und ζ die Masse und die ζ-Coordinate des hellen Sternes, m' und ζ' die analogen Grössen für den dunklen Körper und setzt $z = \zeta - \zeta'$, so giebt die spectroskopische Messung:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \Gamma + \frac{m'}{m + m'} \frac{dz}{dt}. \tag{19}$$

Hierin bedeutet Γ die relative Geschwindigkeitscomponente im Visionsradius des Schwerpunktes des Doppelsternsystems gegen die Sonne.

Im zweiten Falle (β *Aurig.* etc.) giebt die spectroskopische Beobachtung direkt $\frac{dz}{dt} = z'$. Mit den oben gebrauchten Bezeichnungen hat man:

$$z = r \sin(v + \lambda) \sin i$$

und mit Hilfe der Gleichungen

$$r\frac{dv}{dt} = \frac{na(1 + e\cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = na \cdot \frac{e \sin v}{\sqrt{1 - e^2}}$$

erhält man sofort

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos\lambda + \cos(v + \lambda)].$$

Bezeichnet man mit a_1 die grosse Halbaxe der Bahn, welche m um den Schwerpunkt von m und m' beschreibt, so ist

$$(m + m')a_1 = m'a$$

d. h.

$$z_1' = \frac{m}{m + m_1} \frac{dz}{dt} = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos\lambda + \cos(v + \lambda)]. \tag{20}$$

Da die Bahnen, welche m um m' einerseits und um den Schwerpunkt von m und m' andererseits beschreibt, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen sind, so erhält man z_1 einfach aus z', wenn man die Elemente der ersten Bahnbewegung durch die der zweiten ersetzt oder, was dasselbe ist, wenn man im Ausdrucke für z' an Stelle von a, a_1 setzt. Es ist deshalb unnöthig, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob nämlich z' oder $\frac{d\zeta}{dt}$ durch die Beobachtungen gegeben ist. Ist das letztere der Fall, so nimmt man, worüber das Nähere weiter unten folgt, den rein periodischen Theil z_1' von $\frac{d\zeta}{dt}$, welcher in Formel (20) genau in derselben Verbindung mit den Bahnelementen vorkommt, wie z' in der unmittelbar vorhergehenden Formel.

Die rechte Seite von (20) lässt sich durch die 5 Bahnelemente

$$a_1 \sin i,\ n,\ e,\ \tau,\ \lambda$$

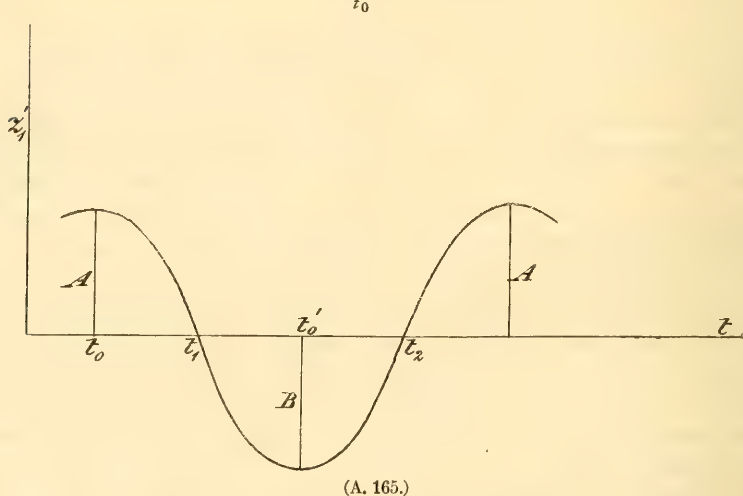
ausdrücken. Man kann also aus spectroskopischen Messungen nur diese 5 Elemente bestimmen. a_1 kann nicht von i getrennt werden und die Knotenlänge ist, wie von vornherein klar, gänzlich unbestimmt.

Liegen also zu 5 verschiedenen Zeiten gemessene z_1' vor, so kann man aus diesen die genannten 5 Bahnelemente ableiten. In dieser Allgemeinheit wird indessen die Lösung der Aufgabe von der Praxis wohl kaum jemals gefordert werden. Schon in Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Messungen wird es sich fast stets darum handeln, aus bereits als periodisch erkannten Veränderungen der Spectrallinien weitere Schlüsse zu ziehen, und man wird deshalb annehmen dürfen, dass aus zahlreich vorliegenden Beobachtungen n oder die Umlaufszeit

mit genügender Sicherheit bereits festgestellt ist. Ist aber n bekannt, dann wird sich die Bestimmung der übrigen Bahnelemente sehr einfach vollziehen, wie die Untersuchungen von A. RAMBAUT[1]) und R. LEHMANN-FILHÉS[2]) gezeigt haben. Der letzteren Arbeit folgen die weiteren Auseinandersetzungen, unter Hinweis auf sie in Bezug auf Einzelheiten, die hier nicht besprochen werden können.

Die beobachteten Werthe $\frac{d\zeta}{dt}$ in Formel (19) stelle man graphisch als Ordinaten dar, die zu den zugehörigen Zeitangaben als Abscissen gehören. Die Verbindung der einzelnen Punkte in möglichst gleichförmiger Weise ergiebt eine Curve. Von der Sicherheit, mit welcher diese Curve gezeichnet werden kann, hängt die Sicherheit der Bahnbestimmung ab, und es ist kaum zu bezweifeln, dass eine Bahnrechnung nur dann Aussicht auf Erfolg hat, wenn sich die genannte Curve mit einiger Sicherheit herstellen lässt. Zunächst wird der Curvenzug T oder n erkennen lassen, darauf wird man die Beobachtungen, welche zu Zeiten gehören, die sich um Vielfache der Umlaufszeit T unterscheiden, zusammenziehen und so die Sicherheit des Curvenzuges zwischen zwei Zeiten $t = t_0$ und $t = t_0 + T$ beträchtlich erhöhen. Mit Hilfe eines Planimeters oder ähnlicher Hilfsmittel kann dann sofort die Fläche angegeben werden, die zwischen der Curve und zwei beliebigen Ordinaten liegt. Da nun $\frac{dz}{dt}$ eine rein periodische Function von A mit der Periode T ist, so ergiebt sich aus (19):

$$\Gamma = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\zeta}{dt} \cdot dt.$$



(A. 165.)

Mit diesem Γ ergeben sich die periodischen Theile z_1' von $\frac{d\zeta}{dt}$ durch Subtraction, was übrigens nichts anderes aussagt, als dass nunmehr die Abscissenaxe in der Zeichnung so gelegt ist, dass die Ordinaten die periodischen Theile z_1' bedeuten. Setzt man noch zur Abkürzung

$$C = \frac{n a_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}},$$

so wird also

$$z_1' = C\,[e \cos\lambda + \cos(v + \lambda)]. \tag{21}$$

[1]) A. RAMBAUT, Monthly Notic., Bd. 51, pag. 316 ff.

[2]) LEHMANN-FILHÉS, Ueber die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spectroskopischen Messungen etc. Astron. Nachr., No. 3242.

Aus der Curve (Fig. 165) kann man leicht den grössten positiven Werth A und den absolut grössten negativen Werth $-B$ von z_1', welche den Zeiten t_0 und t_0' entsprechen sollen, entnehmen. Man hat also:

$$A = C(e \cos \lambda + 1)$$
$$-B = C(e \cos \lambda - 1),$$

woraus

$$2C = A + B, \quad A - B = 2 Ce \cos \lambda, \tag{22}$$

und die Gleichung (21) kann man jetzt schreiben:

$$z_1' = \frac{A - B}{2} + \frac{A + B}{2} \cos(v + \lambda).$$

Aus der Zeichnung nimmt man weiter die beiden aufeinanderfolgenden Zeiten t_1 und t_2, für welche $z_1' = 0$. Die diesen Zeiten entsprechenden wahren Anomalien seien: $v = v_1$ und $v = v_2$. Es wird also:

$$\cos(v_1 + \lambda) = \cos(v_2 + \lambda) = -e \cos \lambda = -\frac{A - B}{A + B}. \tag{23}$$

Die Anwendung eines Planimeters erlaubt die Grössen

$$\int_{t_0}^{t_1} z_1' dt = z_1; \quad \int_{t'_0}^{t_2} z_1' dt = z_2$$

anzugeben. Zwischen t_0 und t_1 ist z_1' positiv, d. h. die z-Coordinate nimmt zu. t_0 entspricht also der Zeit des Durchganges durch den aufsteigenden Knoten, t_1' dem absteigenden Knoten. Es ist demnach $\sin(v_1 + \lambda)$ positiv und $\sin(v_2 + \lambda)$ negativ anzusetzen. Daraus folgt also:

$$\begin{aligned} \cos(v_1 + \lambda) &= -\frac{A - B}{A + B} & \qquad \cos(v_2 + \lambda) &= -\frac{A - B}{A + B} = \cos(v_1 + \lambda) \\ \sin(v_1 + \lambda) &= +2\frac{\sqrt{AB}}{A + B} & \qquad \sin(v_2 + \lambda) &= -2\frac{\sqrt{AB}}{A - B} = -\sin(v_1 + \lambda) \end{aligned} \tag{24}$$

Da nun

$$z_1 = r_1 \sin(v_1 + \lambda) \sin i$$
$$z_2 = r_2 \sin(v_2 + \lambda) \sin i,$$

so ergiebt sich

$$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + e \cos v_2}{1 + e \cos v_1} = \frac{\sin(v_1 + \lambda) - e \sin \lambda}{\sin(v_1 + \lambda) + e \sin \lambda}$$

und hieraus

$$e \sin \lambda = \frac{2\sqrt{AB}}{A + B} \cdot \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}. \tag{24}$$

Dadurch sind die Grössen C, e und λ eindeutig bestimmt. τ kann man der Zeichnung entnehmen. Für $t = \tau$ wird $v = 0$, d. h.:

$$z_1' = C(1 + e) \cos \lambda.$$

Man sucht also die diesem z_1' entsprechende Zeit auf. Unter Umständen, nämlich in der Nähe von t_0 und t_0', wird dieses Verfahren aber ungenau. Es ist dann besser t_1 zu nehmen, für welches $z_1' = 0$ wird. Man kennt dann nach (24) $v_1 + \lambda$ und, da λ bekannt ist, ist es auch v_1. Man hat nun noch die Formeln anzuwenden:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} E_1 &= \tan \frac{v_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \\ t_1 - \tau &= \frac{1}{n}(E_1 - e \sin E_1). \end{aligned} \tag{25}$$

Auf diese Weise sind alle überhaupt bestimmbaren Elemente berechnet. Die weitere Verbesserung erfolgt nach bekannten Methoden, etwa nach der Methode

der kleinsten Quadrate. Die Aufstellung der Differentialformeln macht nicht die geringsten Schwierigkeiten und es wird deshalb genügen, diese Formel einfach anzuführen.

$$\begin{aligned} dz_1' = \frac{z_1'}{C} \cdot dC - C[e \sin\lambda + \sin(v+\lambda)] \cdot d\lambda \\ + \left[\cos\lambda - \frac{\sin v \sin(v+\lambda)}{1-e^2}(2 + e\cos v)\right] C \cdot de \\ + \frac{\sin(v+\lambda)\cdot(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} C[n d\tau - (t-\tau) dn]. \end{aligned} \tag{26}$$

Die spectroskopischen Messungen erlauben also nur die Bestimmung von 5 Bahnelementen. Andererseits aber ergänzen sie in zwei Richtungen die Bahnbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen. Zuerst ist klar, dass man durch die Angabe der Grösse von $\frac{dz}{dt}$ die Zweideutigkeit in der Bestimmung der Knotenlänge heben kann; hierzu genügen spectroskopische Beobachtungen, die nur eine solche Genauigkeit besitzen, dass sie über das Vorzeichen von $\frac{dz}{dt}$ eine Entscheidung treffen. Zweitens liefern aber die spectroskopischen Messungen dadurch eine neue Beziehung, dass sie die Geschwindigkeiten in absolutem Maasse (Kilometern) angeben. Hat man aus Mikrometerbeobachtungen die Doppelsternbahn abgeleitet, so geben in Verbindung mit ihnen die spectroskopischen Messungen die Parallaxe des Doppelsternes und die Summe beider Massen. Denn die ersteren geben a in Bogensecunden $= a''$, C dagegen bestimmt dieselbe Grösse in Kilometern. Die Parallaxe des Sternes in Secunden p'' ist dann

$$p'' = \frac{a''}{a} \cdot R,$$

wo R, die Entfernung Erde-Sonne, sowie a in Kilometern angesetzt ist. Die Gesammtmasse ist gegeben durch die Formel:

$$m + m' = \frac{n^2 a^3}{k^2}.$$

Wenn nur die Verschiebungen der Spectrallinien des einen Sternes beobachtet sind, so ist durch C und n nicht a, sondern nur

$$a_1 \sin i$$

gegeben, und man kann weitere Beziehungen nicht aufstellen, da auch die relative Stellung der beiden Weltkörper gegen einander der Beobachtung nicht zugänglich ist. Bei den Veränderlichen vom Algoltypus geben aber die photometrischen Beobachtungen, d. h. die Verfolgung der Lichtvariation, weitere Daten. So sind aus diesen Beobachtungen für Algol bestimmbar die Verhältnisse: $a : \rho : \rho'$, wo ρ und ρ' die Radien der beiden als Kugeln betrachteten Massen m und m' bedeuten; hierbei ist allerdings noch vorausgesetzt, dass die Masse m' ganz dunkel ist und die Masse m sich als eine überall gleich helle Scheibe darstellt. Als bekannt dürfen also angenommen werden:

$$\lambda = \frac{\rho'}{\rho} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{a}{\rho}.$$

Die beiden Gleichungen

$$n^2 a^3 = k^2(m + m_1); \qquad a_1 = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot a$$

kann man dann auch so schreiben:

Es bezeichne ν die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne, Δ die Entfernung Sonne — Erde, R den Sonnenradius und die Dichtigkeit der Sonne werde

$= 1$ gesetzt. Ist weiter D die mittlere Dichtigkeit der beiden Massen m und m', deren Dichtigkeiten δ und δ' sind, so giebt die erste der beiden genannten Gleichungen

$$D = \frac{\left(\frac{n}{\nu}\right)^2 \cdot R^3}{\Delta^3(1 + \lambda^3)} \cdot \alpha^3$$

die Dichtigkeit D und die zweite

$$a = a_1 \left(1 + \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Nimmt man z. B. in ganz roher Annäherung als Resultate der photometrischen Beobachtungen für Algol an: $\alpha = 6$, $\lambda^3 = \frac{1}{2}$, $\frac{n}{\nu} = 127{\cdot}4$, so ergeben diese für sich

$$D = 0{\cdot}237.$$

Die spectrometrischen Messungen ergeben unter Voraussetzung einer Kreisbahn und für $i = 90°$: $n a_1 = 42\ km$ in der Secunde, also:

$$a = 1656000\ km \left(1 + 2\frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Die weitere Annahme jedoch $\delta = \delta_1$, die oft gemacht wird, ist jedenfalls sehr gewagt; man kann freilich diese oder ähnliche Hypothesen bei völliger Unkenntniss über die wahre Sachlage kaum entbehren.

So enge Doppelsterne, wie Algol, werden sich nicht mehr in aller Strenge nach den einfachen KEPLER'schen Gesetzen um einander bewegen können. Da man diesen Weltkörpern einen Aggregatzustand zuschreiben muss, der jedenfalls von dem der völligen Starrheit verschieden ist, oder wenigstens in früheren Zeiten davon verschieden gewesen sein muss, so werden sie nicht unbeträchtliche Abweichungen von der Kugelform zeigen, und diese in Verbindung mit der Fluthreibung wird auf die Revolutionsbewegung einwirken müssen. Selbst wenn diese Einwirkungen an sich klein sind, werden dieselben mit der Zeit, nach Art säcularer Störungen, beträchtliche Veränderungen der Bahnen erzeugen können. So ist leicht einzusehen, dass unter Umständen bemerkbare säculare Bewegungen des Periastrons eintreten müssen, wie sich auch bei einigen Veränderlichen vom Algoltypus zu zeigen scheint. Es ist gegenwärtig nicht möglich zu sagen, wie sich diese Bahnveränderungen in unbeschränkt langer Zeit gestalten, ob die augenblicklich stattfindenden Bahnen dauernd umgestaltet, oder in langen Perioden früheren Bewegungszuständen wieder näher gebracht werden. Die Beantwortung dieser Fragen hängt wesentlich davon ab, wie man die fortschreitende Abkühlung der betreffenden Weltkörper vor sich gehen lässt, und schon hieraus lassen sich die grossen Schwierigkeiten abschätzen, welche hier zu überwinden sind. Man muss also die schwierige Frage nach der »Stabilität« solcher Systeme vor der Hand gänzlich offen lassen, und wenn man diese dadurch zu beantworten glaubte, dass man einfach die durch die allerelementarsten und bekanntesten Rechnungen darstellbare Thatsache, dass die Deformationen, welche die beiden Himmelskörper gegenseitig aufeinander hervorrufen, klein seien, wenn man die Massen als homogen annimmt und die höheren Potenzen der deformirenden Kräfte vernachlässigt, so beweist ein solches Verfahren sehr wenig Einsicht und Verständniss. Leicht kann man dagegen zeigen, dass in solchen engen Doppelsternsystemen, wenn nur die Fluthreibung eine gewisse Grenze nicht überschreitet und die Excentricität der Bahn nicht gross ist, die Umlaufszeit sich vergrössern muss, und dass dasselbe auch mit der mittleren Entfernung beider Sterne von

einander und der Excentricität der relativen Bahn geschieht. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Dinge näher einzugehen.

Zum Schlusse mag noch auf gewisse Betrachtungen hingewiesen werden, die zuerst von SAVARY angeregt worden sind. Die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bewirkt, sobald nur die wahre Doppelsternbahn nicht zufällig genau senkrecht auf dem Visionsradius steht, dass die scheinbare gegenseitige Stellung beider Componenten nicht der wahren zu irgend einer Zeit entspricht, vielmehr gehört der beobachtete Ort eines jeden der beiden Sterne einer anderen Zeit an, die man erhält, wenn man von der Beobachtungszeit die Lichtzeit abzieht. Diese ist aber für beide Sterne verschieden, weil ihre Entfernungen vom Beobachter ungleich sind. Letztere ändern sich aber periodisch, und wenn die Grösse dieses hierdurch entstehenden periodischen Einflusses durch die Beobachtungen festzustellen möglich wäre, so könnte man die Dimensionen der Doppelsternbahn in Lichtzeit angeben und hierdurch die Parallaxe des Doppelsternes finden, wie auch die Zweideutigkeit in der Knotenlängenbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen heben. Dieser auf den ersten Blick sehr bestechende Gedanke kann aber in Wirklichkeit nicht realisirt werden, wie die Untersuchungen von VILLARCEAU[1]), BIRKMAJER[2]) und des Unterzeichneten[3]) dargethan haben. SAVARY hat nämlich bei seinem Vorschlage übersehen, dass nicht der Hauptstern, in Bezug auf welchen die Bewegung des zweiten Sternes angegeben wird, sondern der Schwerpunkt des ganzen Systems sich gleichförmig im Raume bewegt. Hierdurch tritt eine neue Unbekannte, nämlich das Verhältniss der beiden Massen auf, und die Dimension der Bahn kann nicht mehr für sich bestimmt werden.

Noch mag erwähnt werden, dass man die Möglichkeit erwogen hat, ob nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Helligkeit der Lichtquelle abhänge. Solche Einflüsse sind, wenn auch nicht gerade besonders wahrscheinlich, so doch denkbar, allerdings können sie nur in sehr kleinem Maassstabe vorkommen, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte physikalische Messungen ergeben haben. In der Bewegung der Doppelsterne würden sich dadurch, dass die beiden Componenten sehr oft an Helligkeit überaus verschieden sind, sehr merkwürdige Unregelmässigkeiten bemerkbar machen, welche der Unterzeichnete a. a. O. näher untersucht hat. H. SEELIGER.

Excentricität. Der sogen. Excentricitätsfehler entsteht bei der Winkelmessung mittels getheilter Kreise dadurch, dass der Mittelpunkt der Kreistheilung nicht zusammenfällt mit dem Punkte, um welchen der Kreis unter der feststehenden Alhidade oder bei beweglicher Alhidade die Alhidade über dem Kreise gedreht wird. Da auch bei genau justirten Instrumenten eine Abweichung beider Punkte von einander um einen geringen Betrag kaum zu vermeiden ist, so ist die Berücksichtigung dieses Fehlers durch Anbringung einer Correction an die Ablesung oder die Eliminirung desselben durch geeignete Vorkehrungen stets von Nöthen. Wenn nämlich in Fig. 166 M der geometrische Mittelpunkt des Kreises ist, welcher sich in Folge fehlerhafter Justirung aber um den Punkt C drehen möge, ferner O der Anfangspunkt der Zählung auf dem Kreise, N der

---

[1]) Connaissance des temps für 1878 add.

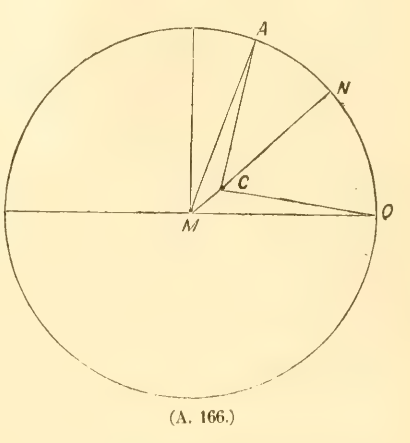
[2]) L. BIRKMAJER, Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten etc. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. II. Abth. Bd. 93. 1886.

[3]) H. SEELIGER, Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1889, pag. 19 ff.

Punkt, in welchem die Gerade MC die Peripherie trifft, so wird, wenn man durch Drehung des Kreises unter der feststehenden Alhidade um den Bogen OA, A statt O unter die Alhidade bringt, der wahre Betrag des Drehungswinkels durch den Winkel ACO dargestellt, während die Kreisablesung A unter der Alhidade nur den Winkel AMO anzeigt. Der Winkel ACO, dessen Grösse gesucht ist, ist aber um den Winkel $CAM + COM$ grösser als der abgelesene.

Der zweite Theil, der Winkel COM, die Correction für die Ablesung 0, ist allen Ablesungen auf dem Kreise gemeinsam und kann daher durchweg bei Seite gelassen werden. Betrachten wir also CAM als die sogen. Excentricitäts-correction für die Ablesung A, so haben wir, wenn der Radius des Theilkreises mit r, die Länge MC mit e bezeichnet wird, zu ihrer Bestimmung

$$r \sin(A - N) = AC \cdot \sin ACN$$
$$r \cos(A - N) = AC \cdot \cos ACN + e.$$



(A. 166.)

Dabei bezeichnet $A - N$ den durch die Differenz der Kreisablesungen A und N direkt gemessenen Winkel AMN. Die Multiplikation der ersten Gleichung mit $\cos(A - N)$, die der zweiten mit $\sin(A - N)$, ergiebt nach stattgehabter Subtraction

$$AC \cdot \sin[ACN - (A - N)] = e \sin(A - N);$$

da $ACN - (A - N) = CAM$ ist, so wird

$$AC \cdot \sin CAM = e \sin(A - N).$$

Analog erhält man durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin(A - N)$ und der zweiten mit $\cos(A - N)$ nach Addition

$$AC \cos CAM = r - e \cos(A - N),$$

also

$$\tang CAM = \frac{e \sin(A - N)}{r - e \cos(A - N)} = \frac{e}{r} \sin(A - N) \cdot \left[1 - \frac{e}{r} \cos(A - N)\right]^{-1}$$

Erinnert man sich nun noch, dass $\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots\ldots$, so wird bis zu den Gliedern dritter Ordnung

$$CAM = \frac{e}{r} \sin(A - N) + \frac{1}{2}\frac{e}{r} \sin 2(A - N)$$
$$- \frac{e^3}{r^3} \sin(A - N) \left[\frac{\sin^2(A - N)}{3} - \cos^2(A - N)\right];$$

da indess

$$\sin 3(A - N) = 3 \sin(A - N) \cos^2(A - N) - \sin^3(A - N),$$

so wird

$$CAM = \frac{e}{r} \sin(A - N) + \frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2} \sin 2(A - N) + \frac{1}{3}\frac{e^3}{r^3} \sin 3(A - N) + \ldots,$$

wo man aber praktisch in allen Fällen mit dem ersten Gliede ausreicht, das um CAM in Secunden auszudrücken noch mit $\sin 1''$ dividirt werden muss.

Zur numerischen Berechnung des Ausdrucks

$$x = CAM = \frac{e}{r} \cdot \frac{\sin(A - N)}{\sin 1''}$$

ist die Kenntniss $\frac{e}{r}$ und N erforderlich, während A, die zu verbessernde Kreisablesung, gegeben ist. Diese kann man nur erlangen durch vorübergehende Anbringung einer Hilfsalhidade, welche mit der festen einen Winkel einschliesst, der nahezu ein ganzzahliger Theil von 360° ist. Sei der Winkel zwischen beiden

Alhidaden auf dem Kreise gemessen durch den Bogen $\frac{360}{n} + \varepsilon$, wo ε ein sehr kleiner Winkel ist, so stellt man zuerst einen beliebigen Theilstrich, am besten 0 unter die feste Alhidade; wird dann an der beweglichen abgelesen $\frac{360}{n} + a_1$, so ist

$$a_1 + x_1 = \varepsilon.$$

Wird jetzt der Strich $\frac{360}{n}$ unter die feste Alhidade gebracht, so wird man an der beweglichen ablesen $2 \cdot \frac{360}{n} + a_2$, wo

$$a_2 + x_2 - x_1 = \varepsilon$$

ist. So fährt man fort, bis bei der $n$ten solchen Operation unter der festen Alhidade der Strich $\frac{n-1}{n} \cdot 360$ steht und an der beweglichen abgelesen wird $0 + a_n$, wodurch die Gleichung

$$a_n - x_{n-1} = \varepsilon$$

entsteht, x_ρ bedeutet dabei

$$\frac{e}{r} \sin \left(\rho \frac{360}{n} - N\right).$$

Aus der Gesammtheit dieser n Gleichungen erhält man zunächst durch Addition aller $\Sigma a = n\varepsilon$ und somit den Werth von ε und, wenn man diesen einsetzt, n Gleichungen für die verschiedenen x_ρ.

Setzt man nun

$$x_\rho = \frac{e}{r} \sin \rho \frac{360}{n} \cos N - \frac{e}{r} \cos \rho \frac{360}{n} \sin N,$$

so hat man für die beiden Unbekannten $\frac{e}{r} \cos N$ und $\frac{e}{r} \sin N$ $n - 1$ Gleichungen, aus welchen dieselben nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln sind, worauf man aus ihnen N und $\frac{e}{r}$ ableitet.

Beispiel. Anlässlich der Theilfehlerbestimmung am Karlsruher Meridiankreise wurde eine Hilfsalhidade ungefähr im Abstande von 60° gegen die feste Alhidade angebracht. Indem unter der festen Alhidade der Reihe nach die Striche 0, 60, 120, 180, 240, 300 lagen, gab die Ablesung an der Hilfsalhidade der Reihe nach

60°	−	0″·26
120°	−	1 ·19
180°	+	3 ·51
240°	+	11 ·07
300°	+	6 ·40
0°	+	6 ·01
	+	25 ·54

Daraus folgt die Summe der a zu $+ 25''\cdot54$ und der Werth von ε zu $+ \frac{25''\cdot54}{6} = + 4''\cdot26$, also war der Abstand der beiden Alhidaden 60° 0′ 4″·26.

Damit aber wird

$\frac{e}{r} \cos N \cdot \sin$ 60°	$- \frac{e}{r} \sin N \cdot \cos$ 60°	$= + 0\cdot866$	$\frac{e}{r} \cos N$	$- 0\cdot5 \frac{e}{r} \sin N$	$= + 4''\cdot52$
„ $\sin$ 120	„ $\cos$ 120	$= + 0\cdot866$	„	$+ 0\cdot5$ „	$= + 9\cdot97$
„ $\sin$ 180	„ $\cos$ 180	$= 0$	„	$+ 1\cdot0$ „	$= + 10\cdot72$
„ $\sin$ 240	„ $\cos$ 240	$= - 0\cdot866$	„	$+ 0\cdot5$ „	$= + 3\cdot91$
„ $\sin$ 300	„ $\cos$ 300	$= - 0\cdot866$	„	$- 0\cdot5$ „	$= + 1\cdot77$

Mittels der Methode der kleinsten Quadrate erhalten wir hieraus

$$4 \cdot 0{\cdot}866^2 \cdot \frac{e}{r} \cos N = 0{\cdot}866\,(4''{\cdot}52 + 9''{\cdot}97 - 3''{\cdot}91 - 1''{\cdot}77)$$

$$4 \cdot 0{\cdot}866 \cdot \frac{e}{r} \cos N = 3{\cdot}464\,\frac{e}{r} \cos N = 8{\cdot}81$$

und

$$2 \cdot \frac{e}{r} \sin N = -\tfrac{1}{2}(4''{\cdot}52 + 1''{\cdot}77) + \tfrac{1}{2}(9''{\cdot}97 + 3''{\cdot}91) + 10''{\cdot}72$$

$$\frac{e}{r} \sin N = -1''{\cdot}57 + 3''{\cdot}47 + 5''{\cdot}36 = +7''{\cdot}26$$

$$\frac{e}{r} \cos N = \qquad\qquad\qquad\qquad + 2''{\cdot}54,$$

daraus

$$\log tang\, N = 0{\cdot}45611 \qquad N = 70°\,43'{\cdot}2$$

$$\frac{e}{r} = 7''{\cdot}692 \sin 1'' = 0 \cdot 00003729,$$

d. h. die Linie vom Mittelpunkte der Theilung nach dem Mittelpunkte der Drehung trifft den Kreis in 70° 43'·2 seiner Eintheilung, und der Abstand der beiden Punkte ist 0·00003729 vom Radius des Kreises, also ein recht kleiner Bruchtheil, der aber doch Excentricitätsfehler bis zum Betrage von einigen Secunden erzeugt. Im vorstehenden ist vorausgesetzt, dass die sogen. Theilfehler des Kreises (s. d.) nicht in Betracht gezogen werden sollen, welche beim Karlsruher Meridiankreis freilich recht beträchtlich sind.

Aber die Art und Weise der Bestimmung der Excentricität giebt ein Mittel an die Hand, sie ganz unschädlich zu machen, indem man die Hilfsalhidade dauernd anbringt und zwar in einem geeigneten Winkelabstand von der festen. Sei dieser Winkel ω, so wird man für den Excentricitätsfehler der Ablesung der einen Alhidade haben

$$x(A) = \frac{e}{r \sin 1''} \sin (A - N) \text{ und für den der zweiten}$$

$$x(A + \omega) = \frac{e}{r \sin 1''} \sin (A + \omega - N),$$

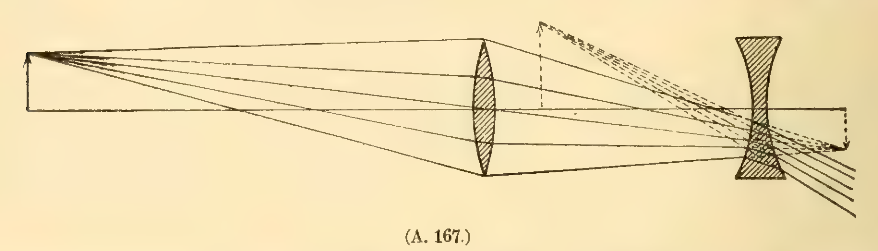
also für den des Mittels aus beiden Ablesungen

$$\frac{1}{2}\,[x(A) + x(A + \omega)] = \frac{e}{r \sin 1''} \sin \left(A - N + \frac{\omega}{2}\right) \cos \frac{\omega}{2}.$$

Wenn also der Winkel $\omega = 180°$ gewählt wird, verschwindet im Mittel der Excentricitätsfehler. Man verlängert daher die feste Alhidade über den Mittelpunkt der Drehung hinaus und bringt an ihrem anderen Ende über dem Kreise ebenfalls einen Nonius oder ein Mikroskop an, dann ist der Abstand beider Kreisablesungen stets sehr nahe gleich 180° und das Mittel derselben ist frei von der Excentricität, genau genommen nur von dem Gliede erster Ordnung derselben, was aber hinreicht, da das zweite Glied bei einigermaassen guter Construction der Kreise doch nie in Betracht kommt. Uebrigens wird jede Anordnung von Alhidaden, die in gleichen Abständen über den ganzen Kreis vertheilt sind, im Mittel aus deren Ablesungen die Excentricität verschwinden lassen, z. B. kann man 3 Alhidaden in je 120° Abstand anbringen oder 4 in je 90° Abstand. Im letzteren Falle werden auch die Excentricitätsfehler zweiter Ordnung eliminirt, wie man leicht aus dem Ausdrucke für x herleitet. Es geschieht indess die Anbringung so vieler und noch mehr Alhidaden dann nicht nur der Excentricität, sondern hauptsächlich der Theilfehler (s. d.) wegen. FR. RISTENPART.

Das Fernrohr. Definition. Fernrohr oder Teleskop heisst eine Zusammenstellung von Linsen oder von Linsen und Spiegeln in einem Rohre, welche in dessen Richtung gelegene Gegenstände unter einem grösseren Gesichtswinkel erscheinen lässt, als sie einem an ihrer Stelle befindlichen Auge erscheinen würden. Besteht sie nur aus Linsen, so heisst sie dioptrisches Fernrohr, Fernrohr schlechthin oder Refractor, besteht sie aus Linsen und Spiegeln, so wird sie katoptrisches Fernrohr, Teleskop oder Reflector genannt. Der optisch wirksame Theil, auf welchen die vom Gegenstand ausgehenden Strahlen direkt auffallen, ist das Objectiv oder der Objectivspiegel, der, durch welchen das Auge blickt, das Ocular.

Geschichte der Refractoren. Das älteste Fernrohr ist das holländische oder GALILEI'sche mit einer Sammellinse als Objectiv und einer Zerstreuungslinse als Ocular. Indem das letztere sich innerhalb der Brennweite des ersteren befindet, verhindert es das Zustandekommen des von dem ersteren sonst ent-



(A. 167.)

worfenenen Bildes und zerstreut, wie Fig. 167 zeigt, die in dasselbe hineinfallenden Strahlen in solcher Weise, dass dem Auge ein aufrechtes Bild des Gegenstandes erscheint. Das Instrument kam im Anfange des 17. Jahrhunderts bei den Brillenschleifern in Middelburg auf Seeland in Gebrauch, und da diese Handwerker nicht gewohnt waren, ihre Arbeiten dem Papiere anzuvertrauen, so hat nicht festgestellt werden können, in welchem Jahre und von wem es erfunden wurde. Das älteste, seine Erfindung behandelnde Aktenstück, welches wir besitzen, ist die Antwort, die die Generalstaaten der Niederlande am 2. October 1608 auf das Gesuch des Brillenschleifers HANS LIPPERSHEY[1]) ertheilten, ihm dies Fernrohr zu patentiren. Ob aber ihm oder seinem Handwerksgenossen ZACHARIAS JANSSEN die Erfindung gebührt, wird um so weniger auszumachen sein, als schon die 1655 von PETRUS BORELLUS[2]) angestellten Untersuchungen über den eigentlichen Erfinder zu keinem Ergebniss geführt haben[3]), obschon sie noch das Zeugniss der Schwester und des Jugendfreundes jenes ZACHARIAS anrufen konnten. Es ist nicht unwahrscheinlich, das JANSSEN das Mikroskop, LIPPERSHEY das Fernrohr zuerst herstellte[4]), sicher aber irrt CARTESIUS[5]), wenn er die Erfindung dem JACOB METIUS zueignet.

---

[1]) MOLL, Geschiedskundig onderzoek naar de uitvinder der verrekykers uit de aantekeningen van weyle den hoogleraar van Swinden. Nieuwe Verhandelingen van de 1. Klasse van het Kon. Instituut von Wetenschappen 1831. III. Mitgetheilt von SERVUS. Geschichte des Fernrohrs. Berlin 1886, pag. 117.

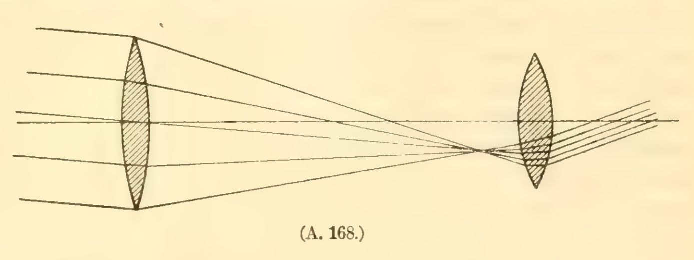
[2]) P. BORELLUS, De vero telescopii inventore. Hagae comitum 1655.

[3]) R. WOLF, Geschichte der Astronomie. München 1877, pag. 359; die Erfindung des Fernrohres und seine Folgen für die Astronomie. Zürich 1870, pag. 7. — P. HARTING, Oude optische werktuigen, toegeschreven aan ZACHARIAS JANSSEN. Album der Natuur. 1867, pag. 257.

[4]) GERLAND, Bericht über den historischen Theil der internationalen Ausstellung wissenschaftlicher Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876, herausg. von A. W. HOFMANN. Braunschweig 1878, pag. 45; Geschichte der Physik. Leipzig 1892, pag. 100.

[5]) RENATI CARTESII, Specimina Philosophiae. Ultima. Editio. Amstelodami 1692.

Ein Exemplar des neuen Instrumentes brachte PETER SCHOLIERS[1]) nach Venedig, von da nach Rom. In Venedig hörte GALILEI[2]), damals Professor in Pisa, von ihm und seinen wunderbaren Leistungen, und es gelang ihm, obwohl er über seine Einrichtung nichts erfahren hatte, durch eine Ueberlegung, deren Gang er uns aufbewahrt hat, den Apparat von Neuem zu erfinden, mit dem er in der Folgezeit seine grossen Entdeckungen am Himmel machen sollte. Sein bestes Fernrohr wies, wie er 1610 an KEPLER schrieb, eine 1000 malige Vergrösserung auf[3]). Für Beobachtungszwecke ist freilich das GALILEI'sche Fernrohr jetzt durch das KEPLER'che oder astronomische verdrängt, welches, wie die den Gang der hineinfallenden Strahlen darstellende Fig. 168 zeigt, aus zwei Sammellinsen besteht, deren eine das von der anderen entworfene reelle, aber umgekehrte Bild vergrössert. KEPLER kam durch eingehende dioptrische Studien, die ihn noch auf mehrere andere als Fernrohre brauchbare Linsencombinationen führten, auf seine Construction, scheint einen derartigen Apparat aber nicht selbst hergestellt zu haben, obwohl er früher ein GALILEI'sches Fernrohr sich gebaut hatte[4]). So war der Jesuitenpater SCHEINER[5]) der erste, welcher gegen 1613 das erste astronomische Fernrohr anfertigte und auch schon zur objectiven Darstellung des Sonnenbildes benutzte, der Pater SCHYRLAEUS[6]) im Kloster Rheit (de Rheita) aber führte mit geringer Aenderung — er nahm vier statt dreier Linsen — einen anderen Vorschlag KEPLER's zur Herstellung des terrestrischen oder Erdfernrohres aus.


(A. 168.)

Das astronomische Fernrohr verdrängte bald das GALILEI'sche, wenn es sich auch in verschiedener Hinsicht verbesserungsbedürftig, aber auch als verbesserungsfähig erwies. Da der Vorschlag des CARTESIUS[7]), die bei Anwendung einer Kugel von zu kleinem Radius entstehenden Verzerrungen des Bildes dadurch zu vermeiden, dass man nach parabolischen oder elliptischen Flächen gekrümmte Linsen herstellte, sich als unausführbar erwies, so blieb nichts übrig, als jene durch Anwendung grosser Radien der sphärischen Linsen möglichst klein zu machen. Noch vorhandene Linsen des als Mathematiker so tüchtigen Grafen TSCHIRNHAUS, des Hofmathematikus des Kurfürsten von der Pfalz, HARTSOEKERS[8]) u. A. zeigen, bis zu welchen riesenhaften Abmessungen man gelangte, aber alle Mühe war vergebens, Schlieren und Glasfäden machten die gewaltigen Glas-

[1]) HUYGENS, Oeuvres complètes. Bd. 2. La Haye 1889, pag. 490.

[2]) GALILEI, Il Saggiatore, ALBÈRI Opere complete di GALILEO GALILEI, Bd. 4, pag. 288; Uebersetzt in BIEDERMANN's Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate im South Kensington Museum zu London 1876. London 1877, pag.. 408.

[3]) ALBÈRI, Opere etc. di GALILEI, Bd. 6, pag. 116.

[4]) ALBÈRI, Opere etc. di GALILEI, Bd. 8, pag. 92.

[5]) SCHEINER, Rosa ursina. Bracciani 1626—1630.

[6]) SCHYRLAEUS, Oculus Enoch et Elisae sive Radius sidereo-mysticus. Antverp. 1645.

[7]) CARTESIUS, a. a. O.

[8]) CÖSTER u. GERLAND, Beschreibung der Sammlung astronomischer, geodätischer und physikalischer Apparate im Königl. Museum zu Kassel, 1878, pag. 44.

massen für die Zwecke des Fernrohres völlig unbrauchbar. So wurde man vor allen Dingen auf die Herstellung eines ganz gleichmässigen Glases und auf die Verbesserung der Methoden, es zu schleifen und zu poliren hingewiesen. Beides erreichte als einer der ersten GIUSÉPPE CAMPANI in Rom, wie die noch von ihm vorhandenen Linsen beweisen[1]). Indem er überdies seine Oculare aus drei Linsen zusammensetzte[2]), lieferte der römische Optiker Fernrohre, die Bilder von bisher unerreichter Güte gaben. Die Art aber, wie er seine grossen Objectivlinsen verfertigte, hielt er geheim, und es gelang HUYGENS trotz mehrfacher dringender Anfragen bei GIUSEPPE's Bruder MATTHEO nicht, die gewünschte Auskunft zu erhalten[3]). So blieb bei seinem Bestreben, grössere, brauchbare Linsen herzustellen, der niederländische Gelehrte auf eigene Arbeit angewiesen, deren Ergebnisse erst nach seinem Tode in seiner »Dioptrica[4])« und in seinen »Commentariis de formandis poliendisque vitris ad Telescopia[5])« veröffentlicht wurden. Die ersten Anweisungen dazu hatte er von dem Professor der Medicin nnd Botanik zu Löwen GERHARD VAN GUTSCHOVEN[6]) erhalten, der sie seinerseits den flandrischen Künstlern verdanken mochte, hatte dessen Verfahren aber wesentlich verbessert. Er liess anfangs eine kupferne, später eine gusseiserne Schüssel nach einer Kugelfläche so genau wie möglich ausdrehen und schliff sie dann, wie dies auch noch heute geschieht, so lange aus, bis ihre Form genügend regelmässig erschien. In ihr schliff er wiederum die Linse, welche durch einen von ihm selbst erfundenen Mechanismus, anstatt wie bisher üblich mit der Hand in die Form gedrückt wurde. Das Glas aber bezog er aus 's Herzogenbusch. So vollendete er die schöne Linse, die HARTING[7]) 1867 in Utrecht wieder gefunden hat, dieselbe, mit der er den ersten Saturnsmond entdeckte[8]) und den Ring dieses Planeten als solchen erkannte. Die übrigen noch vorhandenen, unter seinem Namen gehenden Linsen, rühren dagegen von seinem Bruder CONSTANTYN her[9]). In späterer Zeit suchte er einen Vorschlag HOOKE's auszubilden, die Linsen ohne Anwendung einer Form zu schleifen, indem er das Glas an eine, die eiserne ebene Schleifscheibe an eine andere von zwei in einem Kugelgelenk drehbaren Stangen befestigte[10]). Er vermuthete, dass auf solche Art CAMPANI seine Linsen geschliffen haben möchte[11]), SPINOZA aber, der damals in dem Dorfe Voorschoten bei Leiden vom Schleifen optischer Gläser lebte, versprach sich von diesen Bestrebungen nicht viel und zog es vor, die Gläser, wie er es gewohnt war, in eisernen Schüsseln mit der Hand zu schleifen[12]). Dem Beispiele von HUYGENS folgten HEVEL u. A., auch sie schliffen

---

[1]) CÖSTER u GERLAND, a. a. O., pag. 45.

[2]) HUYGENS, Oeuvres complètes. Bd. 4. 1891, pag. 266.

[3]) Ebendas. Bd. 5. 1893, pag. 151, 193, 557.

[4]) HUGENII, Opuscula posthuma. Amstelodami 1728. Dioptrica.

[5]) Ebendas. Commentarii etc.

[6]) HUYGENS, Oeuvres complètes Bd. 1. 1888, pag. 222.

[7]) HARTING, Album der Natuur. 1867, pag. 276.

[8]) HUYGENS, Oeuvres complètes, Bd. 1, pag. 332, 335; de Saturni luna observatio nova. Hagae Com. 1656. Neu abgedruckt in Opera varia, Bd. 3. Lugd. Bat. 1724, pag. 523.

[9]) KAISER, Jets over de kykers van de Gebroeders CHRISTIAAN en CONSTANTYN HUYGENS. Versl. en Mededel. van het Kon. Nederl. Instit. van Wetenschappen. 1846, pag. 396. Hiernach der Irrthum bei HELLER, Geschichte der Physik, Bd. 2. Stuttgart 1884, pag. 180 zu berichtigen.

[10]) HUYGENS, Oeuvres complètes Bd. 5. 1893, pag. 135.

[11]) Ebendas. Bd. 5, pag. 151.

[12]) Ebendas. Bd. 5, pag. 538.

ihre Linsen selbst. Als Künstler aber, die aus der Herstellung guter Fernrohre ein Gewerbe machten, werden namentlich EUSTACHIO DIVINI in Rom und JOHANN WIESSEL in Augsburg genannt[1]).

Je tadelloser die Linsen waren, deren Herstellung gelang, um so störender mussten die Unvollkommenheiten der von ihnen gelieferten Bilder werden, und es war wiederum HUYGENS, welcher zeigte[2]), dass die sphärische und chromatische Aberration die Ursache davon war. Wollte man aber, um bessere Bilder zu erhalten, Linsen von sehr grosser Brennweite verwenden, so ergab sich der Uebelstand allzu langer Rohre. Deshalb schlug HUYGENS 1662 vor, nur die untere Röhrenwand beizubehalten[3]), während im folgenden Jahr AUZOUT auch diese wegliess und Ocular und Objectiv jedes für sich befestigte[4]), ein Verfahren welches HUYGENS[5]) und später HARTSOEKER[6]) ebenfalls in Anwendung brachten, letzterer allerdings unter Umständen, welche es als durchaus unnötig erscheinen liessen.

Die Benutzung von Objectiven mit so grossen Brennweiten bot demnach solche Unbequemlichkeiten, dass es sich wohl der Mühe verlohnte, nach Mitteln zu suchen, die geeignet waren, namentlich die Farbenzerstreuung zu heben. Der dazu berufene Forscher war NEWTON[7]), der die Zerlegbarkeit des weissen Lichtes in die Farben des Spectrums entdeckt hatte. Trotzdem erwiesen sich seine Arbeiten für die Lösung jener wichtigen Aufgabe nur hinderlich. Wären sie wirklich die mustergiltigen, für welche man sie immer noch halten zu müssen glaubt, gewesen, so hätten sie doch das verschiedene Dispersionsvermögen der Stoffe nachweisen müssen, die er zu seinen Prismen verwendete. Indem er diesen Umstand aber übersah, kam er zu dem irrigen Schluss, dass es unmöglich sei, bei Benutzung zweier heterogener Prismen oder Linsen Strahlen zu erhalten, die wohl abgelenkt, aber nicht in ihre Farben zerlegt würden und so musste er folgerichtig die Möglichkeit wesentlicher Fortschritte in der Herstellung von Fernrohren nur in der Anwendung von Hohlspiegeln an Stelle der Objectivlinsen sehen.

Geschichte der Reflectoren. Beim Hohlspiegel liegt die Sache ähnlich, wie bei der Sammellinse. Auch er entwirft von entfernten Gegenständen ein reelles, verkleinertes, umgekehrtes Bild in der Nähe seines Brennpunktes, welches mittelst einer Sammellinse vergrössert werden kann, und so wollte bereits 1616 ZUCCHI ihn zur Herstellung eines Teleskops benutzen[8]). Misslich war dabei, dass der Beobachter dem Objecte den Rücken zukehrte und einen grossen Theil der auf den Spiegel fallenden Strahlen mit seinem Kopfe zurückhielt. Zwar hatte GREGORY[9]), um diesen Uebelstand zu beseitigen, 1616 in der Axe des Objectivspiegels einen kleinen Hohlspiegel angebracht, welcher, indem er jenem seine hohle Fläche zuwandte, hinter einer ihn durchsetzenden Durchbohrung das reelle Bild des Gegenstandes

---

[1]) Ebendas. Bd. 1, pag. 412.

[2]) HUYGENS, Dioptrica, Opuscula posthuma, pag. 155.

[3]) HUYGENS, Oeuvres complètes. Bd. 4, pag. 227.

[4]) Ebendas. Bd. 4, pag. 433.

[5]) HUYGENS, Journal des Sçavans 1684. Bd. 12. Amsterdam 1685 und Opera varia Bd. 1, pag. 261.

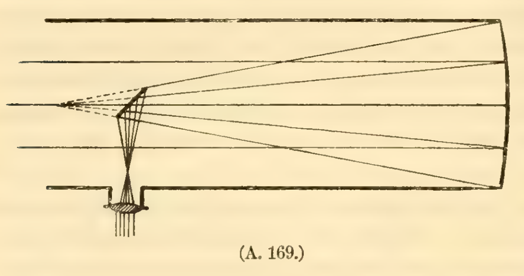
[6]) CÖSTER u. GERLAND, a. a. O., pag. 44.

[7]) NEWTON, An Account of a new catadioptrical telescope, invented by him. Philos. Trans. 1672.

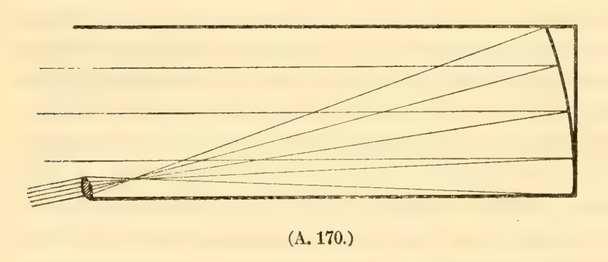
[8]) ZUCCHI, Optica philosophica. Lugd. Bat. 1652—56.

[9]) GREGORY, Optica promota. Londini 1663.

erzeugte, hatte 1672 CASSEGRAIN für dieselben Zwecke ein analog aufgestelltes erhabenes Spiegelchen genommen. Aber beide dem astronomischen und holländischen Fernrohr entsprechende Constructionen gaben nicht die gewünschten Resultate, da es sehr schwer war, den kleinen Spiegeln eine genügend genaue Form zu geben und so opferte NEWTON die Bequemlichkeit, in der Richtung des Fernrohres zu blicken, indem er statt jener Kugelspiegel einen kleinen Planspiegel nahm, welcher mit der Axe des grossen Spiegels einen Winkel von 45° bildete und das Bild des Gegenstandes seitlich entwarf. Den Gang der Strahlen in diesem Fernrohr stellt Fig. 169 dar und ein solches Instrument war es, mit dem W. HERSCHEL seine vielen Beobachtungen angestellt hat. Zu seiner Einstellung bedurfte er eines kleinen Refractors mit paralleler Axe, mittelst dessen ein Gehülfe die Einstellung des Reflectors besorgen und erhalten musste, und so wären HERSCHEL's zahlreiche Beobachtungen ohne die stets bereite Hilfe seiner Schwester CAROLINE nicht möglich gewesen.


(A. 169.)

Jede Reflexion ist mit Intensitätsverlusten verbunden. Könnte man also den kleinen Spiegel weglassen, so würde das Teleskop viel lichtstärkere Bilder geben. Das erreichte HERSCHEL, indem er den grossen Hohlspiegel ein wenig gegen die Axe des Rohres neigte und so das Instrument erhielt, welches in Fig. 170 dargestellt ist. Indem der Beobachter durch das seitlich angebrachte Ocular blickt, verdeckt sein Kopf nur einen unbedeutenden Theil des Gesichtsfeldes. So ist das 1844 vollendete Riesenteleskop des EARL OF ROSSE eingerichtet, dessen Leistungen indessen die von ihm gehegten Erwartungen nicht ganz rechtfertigten. Wenn auch nicht an Grösse, so übertrafen es die von dem englischen Privatmann WILLIAM LASSELL seit 1845 hergestellten an vollkommnerer Form ihrer Spiegel, die sie durch eine epicycloidische Bewegung der Polierscheibe erhielten und die durch wichtige Entdeckungen über die Structur der Nebelflecken und die Satelliten der Planeten wohlverdienten Ruhm erlangten[1]).


(A. 170.)

Geschichte der Achromasie. Unterdessen hatte man bereits in der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Wege gefunden, auf denen es möglich geworden ist, die Farbenzerstreuung bei Anwendung von Linsen so vollständig zu heben, dass durch sie die Güte der Beobachtungen kaum noch beeinträchtigt wird. Hatte NEWTON gefehlt, indem er die Ergebnisse seiner Beobachtungen nicht ohne Vorurtheil prüfte, so gerieth EULER[2]) auf den entgegengesetzten Abweg, indem er aus der unrichtigen Voraussetzung, dass das Linsensystem des menschlichen Auges keine Farbenzerstreuung zeige, achromatisch sei, den richtigen Schluss

[1]) SAFARICK, Centralzeitung für Optik und Mechanik 1894, pag. 209.

[2]) EULER, Sur la perfection des verres objectifs des lunettes. Mém. de l'Acad. de Berlin 1747, pag. 285.

zog, dass es achromatische Linsensysteme geben müsse. Aber so gross war bei ihm der Glaube an die Zuverlässigkeit von NEWTON's Arbeiten, dass er trotzdem dessen Ansichten für die zutreffenden halten zu müssen glaubte. JOHN DOLLOND[1]) andererseits bezweifelte die Achromasie des Auges und konnte sich deshalb EULER's Folgerungen nicht anschliessen. So befand sich die Frage, ob es achromatische Linsen geben könne, in der grössten Verwirrung, als es KLINGENSTIERNA[2]) gelang, den Fehler in NEWTON's Schlussfolgerung aufzudecken und das Mittel anzugeben, mit dessen Hilfe 1757 DOLLOND[3]) die erste achromatische Linse herzustellen. Dazu war nur nöthig eine Sammellinse aus Crownglas mit einer Zerstreuungslinse aus Flintglas zusammenzusetzen, welche letztere vermöge ihrer stärkeren brechenden Kraft wohl die Farbenzerstreuung, aber nicht die Ablenkung der durch die erstere hindurchgetretenen Strahlen aufzuheben im Stande war. EULER[4]) freilich war so sehr von dem Glauben an die Möglichkeit einer solchen Wirkung zurückgekommen, dass ihn erst ZEIHER's[5]) Versuche davon überzeugen konnten. Obwohl er, nachdem dies geschehen war, eine Reihe darauf bezüglicher theoretischer Arbeiten ausführte, so übten doch weder diese, noch die unter seiner Anleitung von seinem damaligen Gehülfen FUSS[6]), oder die von dem Jesuiten BOSCOVICH[7]) über denselben Gegenstand verfassten, einen Einfluss auf die angewandte Optik aus, da sie die Linsendicke vernachlässigten. Das aber erwies sich in der Praxis als unstatthaft, und so bildete sich ein wenig erfreulicher Gegensatz zwischen ihr und der Theorie aus, der unter anderem in dem Bedauern seinen Ausdruck fand, welches JOHANN III. BERNOULLI[8]) bei Uebernahme der väterlichen Werkstatt durch PETER DOLLOND darüber äusserte, dass der junge Künstler seine Ausbildung nur in ihr erhalten habe. Zu um so grösserer Ehre gereichte jener Werkstatt unter solchen Umständen der staunende Ausspruch BESSEL's[9]), dass die angewendeten Glassorten nicht grössere Fehler bei den achromatischen Fernrohren hervorgerufen hätten, wie sie thatsächlich beobachtet worden waren.

Dies ungünstige Verhältniss änderte sich erst, als es gelang, die in nicht sehr anschaulichen Formeln niedergelegten Ergebnisse der theoretischen Forschung in einfacher Weise geometrisch darzustellen. 1829 zeigte MÖBIUS[10]), dass dazu neben den Brennpunkten zwei andere Punkte geeignet waren, die 1840 GAUSS[11])

[1]) DOLLOND, Lettres relating to a theorem of LEONHARD EULER for correcting the objectiv glasses of refracting telescopes. Philos. Transact. 1753, pag. 286.

[2]) KLINGENSTIERNA, Kongl. Svenska vetenshaps academiens Handlingar 1754. In der deutschen Uebersetzung Bd. 16, pag. 300.

[3]) DOLLOND, An account of some experiments concerning the different refrangibility of Light. Philos. Transact. 1758.

[4]) EULER, Dioptrica. Petropolit. 1769. Berlin 1770—71.

[5]) ZEIHER, Abhandlung von denjenigen Glassorten, welche eine verschiedene Kraft, die Lichtstrahlen zu zerstreuen, besitzen. St. Petersburg 1763.

[6]) FUSS, Instruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les differentes espèces au plus haut degré de perfection dont elles sont susceptibles, tiré de la théorie dioptrique de Mr. EULER le Père. St. Petersbourg 1774.

[7]) BOSCOVICH, Dissertationes ad Dioptricam. Viennae 1767.

[8]) BERNOULLI, Lettres astronomiques. Berlin 1781.

[9]) BESSEL, Ueber die Grundformeln der Dioptrik. Astronom. Nachr. 1840. Bd. 18. pag. 97.

[10]) MÖBIUS, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systemes von Linsengläsern. CRELLE's Journal Bd. 5. 1830. Gesammelte Werke Bd. 4, pag. 479.

[11]) GAUSS, Dioptrische Untersuchungen. Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissenschaften in Göttingen Bd. 1, 1843. Gesammelte Werke Bd. 5, pag. 245 u. 309.

die Hauptpunkte nannte, und deren Einführung die Dioptrik in hohem Maasse förderte. Die von den genannten Forschern und in selbständiger Weise von BESSEL[1]) begründete Theorie führten MOSER[2]) und LISTING[3]) weiter, während HELMHOLTZ[4]) die Wirkungsweise des Auges untersuchte, NEUMANN[5]), FERRARIS[6]) u. A. sie für Linsen und aus ihnen bestehende Systeme in einfacher Weise darstellten. In voller Allgemeinheit löste neuerdings ABBE die einschlägigen Probleme, dessen Untersuchungen von CZAPSKI[7]) im Zusammenhang dargestellt wurden. Für die vorliegende Arbeit erwies sich der Anschluss an die Darstellungsweise von FERRARIS als das zweckmässigste.

Geschichte der optischen Gläser. Alle diese schönen Untersuchungen würden jedoch bedeutungslos geblieben sein, wenn nicht die Kunst, taugliche Glassorten herzustellen, in entsprechender Weise gefördert worden wäre. Noch zu Zeiten PETER DOLLOND's spielte dabei der Zufall eine grosse Rolle. Nach der Erzählung seines Schwagers RAMSDEN wurde der Block Flintglas, aus dem die zu ihrer Zeit alle anderen übertreffenden Objective hergestellt worden sind, bei dem Abbruch eines Jahre lang benutzten Glasschmelzofens in dessen innerem Raum gefunden, in den er durch eine schadhafte Stelle gelangt war, und seine Vortrefflichkeit dem öfteren Ausglühen zugeschrieben[8]). Ebenso blieb der Neufchateler Uhrmacher GUINAUD bei seinen Versuchen, Flintglaslinsen herzustellen, zunächst vom Zufall abhängig und konnte so dem 1804 von REICHENBACH und UTZSCHNEIDER gegründeten optischen Institut in Benedictbeuern, an das er 1805 berufen wurde, weniger Nutzen bringen als von dort ziehen. Nach mehrjährigem Aufenthalt in England kehrte GUINAUD 1813 nach der Schweiz zurück und setzte dort auf eigene Faust seine Versuche fort, welche nun zu immer brauchbareren Ergebnissen führten. Nach seinem Tode verband sich der eine seiner Söhne mit BONTEMPS zur Errichtung einer optischen Werkstätte, welche später FEIL übernahm, als BONTEMPS die Leitung der Werke von CHANCE BROTHERS in Birmingham übertragen wurde. Die Witwe GUINAUD's und ihr zweiter Sohn aber führten das väterliche Geschäft weiter, bis sie es an DAGUET in Solothurn abtraten.

Eine von GUINAUD an die astronomische Gesellschaft zu London zur Begutachtung eingesandte Flintglasscheibe von 15 *cm* Durchmesser war unterdessen Ursache geworden, dass diese gelehrte Körperschaft eine aus DOLLOND, FARADAY und HERSCHEL bestehende Commission eingesetzt hatte, welcher die Herstellung von Flintglas zur Aufgabe gemacht worden war. Das Ergebniss ihrer Arbeiten war das FARADAY'sche Glas[9]), ein schweres Flintglas aus borsaurem

---

[1]) BESSEL, a. o. O.

[2]) MOSER, Ueber das Auge. DOVE's Repertorium. 1844. Bd. 5. pag. 337 u. 373.

[3]) LISTING, Dioptrik des Auges. — WAGNER's Handwörterbuch der Physiologie. Bd. 4, pag. 451.

[4]) HELMHOLTZ, Physiolog. Optik. Leipzig 1867.

[5]) C. NEUMANN, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes. Leipzig 1866. 2. Aufl. 1893.

[6]) FERRARIS, Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Deutsch von LIPPICH. Leipzig 1879.

[7]) CZAPSKI, Theorie der optischen Instrumente nach ABBE. Breslau 1893, aus Handbuch der Physik. Bd. 3 1. Abth. herausg. von WINKELMANN.

[8]) LÖWENHERZ, Historische Notizen über die Herstellung optischen Glases. Zeitschr. für Instrumentenkunde. 1882, pag. 275.

[9]) FARADAY, Darstellung und Zusammensetzung verschiedener Glassorten. POGG. Ann. 1829. 15, pag. 251; 16, pag. 192.

und kieselsaurem Bleioxyd, welches sich aber nicht völlig farblos herstellen liess. Doch hatten diese Bestrebungen nicht besseren Erfolg, wie die nicht lange vorher von LITTROW[1]) ins Werk gesetzten, welche ein zur Herstellung der dialytischen Fernröhre von PLÖSSL in Wien benutztes, viel Borsäure und statt des Bleioxyds Zinkoxyd enthaltendes Glas ergeben hatten.

Der Aufschwung, den das optische Institut von REICHENBACH und UTZSCHNEIDER seit dem 1806 erfolgten Eintritt FRAUNHOFER's[2]) gewonnen hatte, war nicht geeignet, andere zu ähnlichen Bestrebungen aufzumuntern. Der ausserordentliche Mann, der 1819 an Stelle REICHENBACH's als Theilnehmer eintrat, wurde der Reformator in der Kunst der Herstellung optischer Gläser. Während man früher solche durch Auswählen möglichst gleichmässiger Stücke Spiegelglases erhielt[3]), die man prüfte, indem man die Sonnenstrahlen durch solche Platten auf weisses Papier fallen liess, so brachte es nunmehr FRAUNHOFER durch Einführung neuer Schmelztiegel dahin, Glasblöcke bis zu 4 Centner Gewicht herzustellen, welche fast durch die ganze Masse sich als brauchbar erwiesen. Er suchte vor allem die Wellen zu vermeiden, wie er die Fehler des Glases, die durch ungleichmässige Mischung seiner Bestandtheile hervorgerufen werden, nannte, sowie die durch zu rasches oder ungleiches Abkühlen entstehenden Verspannungen. Wurden sie doch Ursache der störendsten Verzerrung der Bilder, während im Glase gebliebene Luftbläschen oder Schichten solcher Luftbläschen, die Schlieren, sich als weniger schädlich erwiesen. Einige weitere seiner Erfahrungen, die sorgfältig geheim gehalten wurden, theilte später sein Nachfolger MERZ[4]) mit. FRAUNHOFER wusste bereits, dass Refraction und Dispersion sich im Verhältniss des Bleigehaltes ändern, dass das Blei die Dispersion mehr als die Refraction beeinflusst, und dass relative Vermehrung des Bleigehaltes Gläser von hohem Refractions- und Dispersionsvermögen ergiebt, ein Ueberschuss von Alkalien aber bleihaltige Gläser liefert, die ihre Politur leicht verlieren. Der frühe Tod FRAUNHOFER's wurde namentlich für Deutschland verhängnissvoll. Denn da seine Schüler, wie erwähnt, in das Ausland gingen, seine Nachfolger im optischen Institut aber nur für den eigenen Bedarf producirten, so waren die deutschen Optiker hinsichtlich des Bezugs optischer Gläser auf die Fabriken von DAGUET in Solothurn, BONTEMPS, SAUTTER, ROSETTE und FEIL in Paris und CHANCE BROTHERS in Birmingham angewiesen. Das Sachverhältniss änderte sich in einer für Deutschland äusserst erfreulichen Weise, als 1886 ABBE und SCHOTT das glastechnische Institut in Jena gründeten, von dem noch ausführlich die Rede sein wird. Neben den Refractoren haben aber auch die Reflectoren, namentlich in England, in neuerer Zeit eine hohe Ausbildung erfahren, da sie von gewissen Unvollkommenheiten jener frei sind. Das war der Grund, warum sie C. A. STEINHEIL und BESSEL empfahlen, und des letzteren Stimme fällt um so mehr ins Gewicht, als er lange Jahre mit einem solchen freilich recht unvollkommenen, das SCHRÖTER in Lilienthal besass, beobachtet hatte. Namentlich war es die Erfindung LIEBIG's, auf Glas einen dünnen Silberspiegel von grösster Reinheit niederzuschlagen, die wesentlich zu ihrer Verbesserung beitrug, eine Erfindung, welche es STEINHEIL

---

[1]) LITTROW, BAUMGARTNER's Zeitschr. für Physik und Mathematik 4, pag. 257, und Neue Folge Bd. 3, pag. 57. Vergl. auch Dioptrik, pag. 157.

[2]) Centralzeitung für Optik und Mechanik 1887. 8, pag. 73.

[3]) R. STEINHEIL, Allgemeines über die Herstellung optischer Instrumente Centralzeitung für Optik und Mechanik. 14, pag. 147.

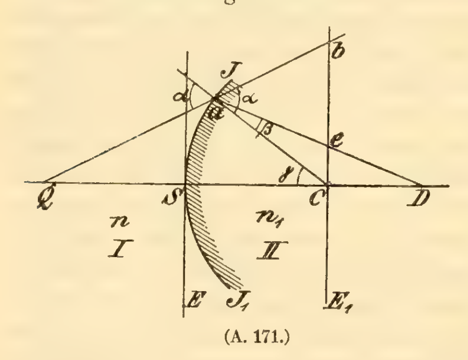
[4]) s. MERZ, Bayerisches Kunst- und Gewerbeblatt 1868, pag. 264 — DINGLER's polytechnisches Journal 1868. Bd. 181, pag. 483.

und nächst ihm FOUCAULT möglich machten, den Metallspiegel durch einen versilberten Glasspiegel zu ersetzen. Man konnte einem solchen die gewünschte Form mit den bei Linsen angewendeten Mitteln geben und, wenn die Silberschicht trübe geworden oder verletzt war, an ihre Stelle, ohne den Spiegel zu beschädigen, eine frische bringen. Wir werden also der eingehenderen Betrachtung der Refractoren, die der Reflectoren folgen lassen müssen.

Die Refractoren.

Brechung durch eine Kugelfläche. Die astronomischen Fernrohre bezwecken, Bilder von Gegenständen hervorzurufen mit Hilfe der Brechung der von den Punkten der letzteren ausgehenden Strahlen an den Grenzflächen verschiedener Medien, meist von Luft und Glas. Die Construction dieser Bilder kann auf analytischem oder geometrischem Wege erfolgen. Doch hielt man dabei an ihrer Abhängigkeit von physikalischen Vorgängen fest, bis ABBE zeigte, dass diese Beschränkung fallen gelassen werden kann und »dass alle die Sätze, welche Lage und Grössenverhältnisse optischer Bilder, sowie die dabei aufgestellten Definitionen betreffen, ihrem Wesen nach unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens[1])«. Bei der uns vorliegenden beschränkten Aufgabe sehen wir indessen von dieser Verallgemeinerung ab und betrachten zunächst die Brechung in einer Kugelfläche.

Es sei JSJ_1 (Fig. 171) der Schnitt der kugelförmigen Begrenzungsfläche zweier durchsichtiger Mittel mit den absoluten Brechungscoëfficienten n und n_1, QD die Axe, um welche sich JSJ_1 drehen muss, um die Kugelfläche zu erzeugen, dann ist nach dem SNELLIUS-schen Gesetze



(A. 171.)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n} = \nu,$$

wenn ν den Brechungscoëfficienten aus dem ersten in das zweite Mittel bedeutet. Legt man durch S und C zwei zur Axe senkrechte Ebenen E und E_1 und nimmt an, dass der Winkel JDJ_1 oder die Oeffnung der Kugelfläche so klein ist, dass die höheren Potenzen seines Sinus gegen die niederen vernachlässigt werden können, so wird wegen

$$\frac{\sin Cab}{\sin Cba} = \frac{Cb}{Ca} \quad \text{und} \quad \frac{\sin Cae}{\sin Cea} = \frac{Ce}{Ca}$$

sowie annähernd $Cba = Cea =$ sehr nahe 90°

$$\frac{\sin Cab}{\sin Cae} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{Cb}{Ce} = \frac{n_1}{n},$$

woraus sich eine einfache Construction des gebrochenen Strahles aus den Brechungscoëfficienten ergiebt. Da diese für alle von Q aus auf die brechende Fläche mit einer für die wirklichen Verhältnisse genügenden Annäherung fallenden Strahlen gilt, so werden sie in dem einen Punkt D vereinigt. D wird zum Bildpunkt des leuchtenden Punktes Q. Ebenso hat jeder andere Punkt Q_1 seinen Bildpunkt D_1. Zwei Punkte von solcher Eigenschaft, dass in dem einen Strahlen, die von dem andern ausgehen, nach der Brechung durch eine krumme

[1]) CZAPSKI, Handbuch der Physik, 3. Bd., 1. Abth., pag. 39.

Fläche vereinigt werden, heissen conjugirte Punkte. Sie befinden sich stets in einer durch den Mittelpunkt gehenden Linie. Alle Punkte, die auf einer zur Axe senkrechten Linie QQ_1 liegen, müssen also Bildpunkte haben, welche eine ebenfalls zur Axe senkrechte Linie DD' bilden, und das nämliche gilt von einer zur Axe senkrechten Ebene. Eine solche Ebene und ihre Bildebene sind conjugirte Ebenen, und die Punkte, in denen sie die Axe schneiden, heissen conjugirte Brennpunkte. Liegt die eine von zwei conjugirten Ebenen in unendlicher Entfernung, so heisst die andere Brennebene, erste, wenn die die Bildpunkte, zweite, wenn die die leuchtenden Punkte enthaltende Ebene in Unendlich liegt. Die Schnittpunkte der Brennebenen mit der Axe heissen Hauptbrennpunkte oder auch wohl schlechthin Brennpunkte, auch sie werden als erster und zweiter Hauptbrennpunkt unterschieden.

Die Entfernungen conjugirter Brennpunkte vom Scheitel ergeben sich aus den Dreiecken QJC und CaD. Es ist

$$\frac{QC}{Qa} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{CD}{aD} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

somit

$$\frac{QC}{CD} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{Qa}{aD}$$

mithin, wenn man $QS = x$, $DS = x'$ setzt und die Strecken auf der Axe in der Richtung, in der sich die Strahlen fortpflanzen vom Scheitel als Anfangspunkt aus gerechnet positiv nimmt

$$\frac{x - r}{x' - r} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{x}{x'}$$

oder

$$\frac{n}{x} - \frac{n_1}{x'} = \frac{n - n_1}{r}. \tag{1}$$

Setzt man hier $x' = \infty$, so wird $x = f =$ der ersten Hauptbrennweite, wogegen man die zweite für $x = \infty$ und $x' = f'$ erhält, somit

$$f = -\frac{nr}{n_1 - n}; \quad f' = \frac{n_1 r}{n_1 - n}. \tag{2}$$

Die Hauptbrennpunkte liegen also immer auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels. Erfolgt die Brechung aus dem optisch dünneren in das optisch dichtere Mittel und ist r positiv, so wird f negativ, f' positiv. Der erste Hauptbrennpunkt liegt also im ersten, der zweite im zweiten Mittel, und parallele Strahlen werden convergent, wenn die brechende Fläche ihnen ihre convexe Seite zukehrt. Ist die hohle Fläche nach ihnen hingerichtet, so kehren sich diese Verhältnisse um, parallele Strahlen werden nach der Brechung divergent. Aus (2) folgt sodann noch

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n_1}; \quad f + f' = r.$$

(A. 172.)

(A. 173.)

Die Fig. 172 und 173 geben unter Einhaltung der oben gemachten Voraussetzung die Bilder von Punkten ausserhalb der Axe, wie solche eine sphärische Fläche, deren Scheitel wieder S, deren Mittelpunkt C ist, für die beiden Fälle, dass der erste Hauptbrennpunkt F und der leuchtende Punkt sich

in demselben Mittel befinden, oder in verschiedenen Mitteln liegen, liefert. Nennt man die Coordinaten von Q und D x, y, und x', y' und nimmt die nach oben gerichteten Ordinaten als die positiven, so wird

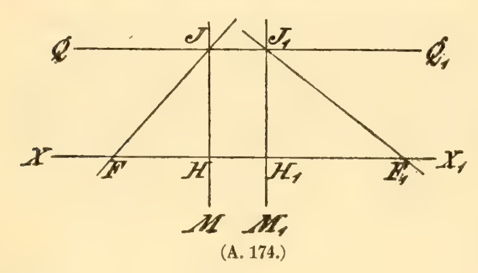
$$\frac{y}{y'} = \frac{x-r}{x'-r} = \frac{n_1 x}{n x'} \tag{3}$$

oder unter Benutzung von (1)

$$\frac{y}{y'} = 1 + \frac{n_1 - n}{n r} x.$$

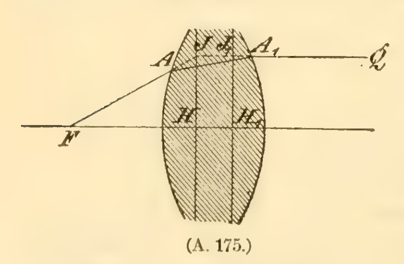
Liegt das Bild nicht in demselben Mittel, wie der leuchtende Punkt, so schneiden sich die dasselbe erzeugenden Strahlen, es ist reell; im anderen Falle schneiden sich deren Verlängerungen, es ist virtuell.

Brechung durch zwei Kugelflächen. Wir nehmen an, dass die Flächen centrirt sind, d. h. dass ihre Mittelpunkte auf einer geraden, der Axe oder Centralaxe des Systems liegen. Unter den vorhin gemachten Einschränkungen entwirft ein solches System von einem leuchtenden Punkt einen Bildpunkt, und es dürfen somit die obigen Bezeichnungen auch jetzt angewendet werden. Wenn es nun auch möglich ist, den Gang der durch zwei Flächen gebrochenen Strahlen nach dem SNELLIUS-schen Gesetze zu construiren, so lässt sich dieser Zweck weitaus einfacher durch die von GAUSS eingeführten Hauptebenen erreichen. Ist X, X_1



(A. 174.)

(Fig. 174) die Axe eines centrirten optischen Systems, dessen Brennpunkte F und F_1 sind, ist QQ_1 eine Gerade, mit der ein einfallender Strahl zusammenfällt, so geht dieser Strahl nach der Brechung durch F_1 und schneidet QQ_1 in einem Punkte J_1. Ebenso muss auf QQ_1 ein Strahl nach seinem Austritte liegen, der von F ausgegangen ist und QQ_1 in dem Punkte J geschnitten hat. Da somit durch J_1 zwei Gerade gehen, die nach ihrem Austritt aus dem System zwei sich in J treffenden, in das System eintretenden Geraden entsprechen, so ist J_1 das Bild von J, oder es sind J und J_1 conjugirte Punkte. Demnach sind auch die senkrecht zur Axe durch diese beiden Punkte gelegten Ebenen JM und $J_1 M_1$ conjugirt. Da $JH = J_1 H_1$, so ist für diese Ebenen das Verhältniss $y : y_1 = 1$, und diese Beziehung muss für jedes Paar conjugirter, in diesen Ebenen gelegenen Punkten L, L_1 oder M, M_1 gelten. Zwei solcher Ebenen, welche somit die Eigenschaft haben, dass eine jede der Axe parallele Gerade sie in conjugirten Punkten schneidet, können also dazu dienen, die Richtung der parallel der Axe auffallenden und der durch einen Brennpunkt gehenden



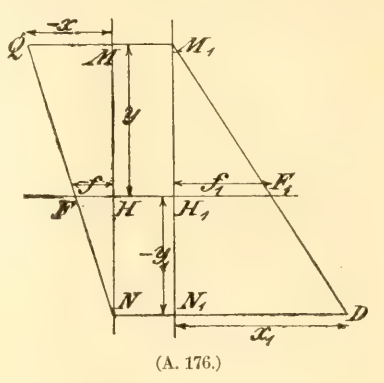
(A. 175.)

Strahlen nach der Brechung zu bestimmen und ein jedes System, welches Brennpunkte hat, besitzt deren nur zwei. Sie sind von GAUSS Hauptebenen genannt, ihre Durchschnittspunkte mit der Axe H und H_1 Hauptpunkte. Fig. 175 zeigt, in welcher Weise man z. B. mit ihrer Hilfe den Weg FAA_1Q_1 eines durch den Brennpunkt gehenden Strahles finden kann. Von den Hauptpunkten aus rechnet man die Brennweiten des Systems, welche für den in den Anwendungen gewöhn-

lichen Fällen, wo es zu seinen beiden Seiten dasselbe Mittel hat (sphärischer Glaskörper in Luft) gleich werden, also

$$f = -f'.$$

Ist hierbei f positiv, also f' negativ, so werden parallele Strahlen convergent austreten, das System ist ein positives, convergentes oder collectives, im anderen Falle werden sie divergent und man hat es alsdann mit einem negativen, divergenten oder dispansiven System zu thun.



(A. 176.)

Brennpunkte und Hauptpunkte heissen die Fundamentalpunkte des Systems. Kennt man sie, so ist es, wie aus Fig. 176 ersichtlich, leicht, für jeden einfallenden Strahl den austretenden, und somit für jeden leuchtenden Punkt Q den Bildpunkt D durch Construction zu finden. Ebenso leicht gelingt dies durch Rechnung. Es ist

$$\frac{FH}{QM} = \frac{NH}{NH + HM}; \qquad \frac{F_1 H_1}{D N_1} = \frac{M_1 H_1}{N_1 H_1 + H_1 M_1}$$

oder wenn man die aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen einführt,

$$\frac{f}{x} = -\frac{y_1}{y - y_1}; \qquad \frac{f_1}{x_1} = \frac{y}{y - y_1},$$

also wenn man beide Gleichungen addirt oder mit y bezw. y_1 multiplicirt

$$\frac{f}{x} + \frac{f_1}{x_1} = 1; \qquad \frac{fy}{x} = -\frac{f_1 y_1}{x_1}, \tag{4}$$

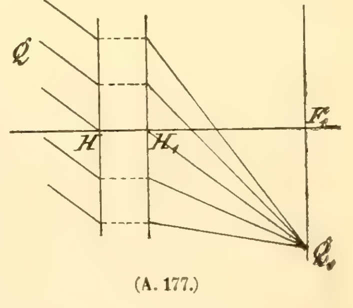
welche Beziehungen ermöglichen, für jedes x und y die zugehörigen x_1 und y_1 zu finden. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt ferner

$$\frac{x - f}{f} = -\frac{y}{y_1}; \qquad \frac{x_1 - f_1}{f_1} = -\frac{y_1}{y}, \tag{5}$$

also

$$(x - f)(x_1 - f_1) = f f_1. \tag{6}$$

Weiter folgt aus Construction und Rechnung, dass es jederzeit möglich ist, leuchtenden Punkt und Bildpunkt zu vertauschen.

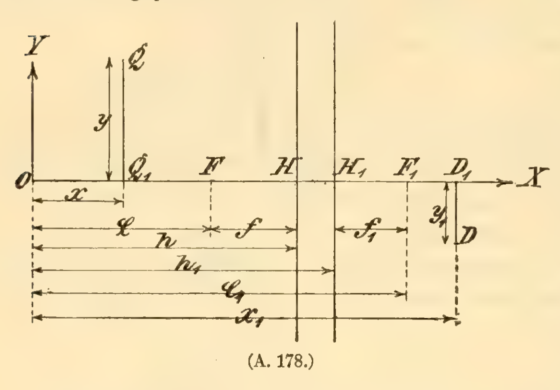


(A. 177.)

Es giebt nun noch zwei andere Punkte, die für diese Constructionen dann von Wichtigkeit sind, wenn vor und hinter dem System brechender Flächen sich wie im Auge verschiedene Medien befinden, die von Listing eingeführten Knotenpunkte. Sie sind die Durchschnittspunkte eines Strahles mit der Axe, der nach der Brechung seiner ursprünglichen Richtung parallel bleibt. Da sie aber im Falle der Gleichheit der beiden Medien mit den Hauptpunkten zusammenfallen, so haben wir nicht weiter auf sie einzugehen. Den Durchschnittspunkt eines Bündels parallel eintretender Strahlen nach der Brechung (Fig. 177) findet man somit, indem man in demselben den durch den ersten Hauptpunkt H gehenden Hauptstrahl QHH_1Q_1 zieht und seinen Durchschnitt mit der durch den Brennpunkt F_1 senkrecht zur Axe gelegten Ebene, der Brennpunktsebene, bestimmt. Diese Ebene ist der unendlich fernen

conjugirt, in ihr muss also der zu dem unendlich fernen Ausgangspunkt der Strahlen conjugirte Punkt Q_1 liegen.

Um die Fundamentalpunkte eines Systems zu bestimmen, ist es nur nöthig, die Lage zweier Paare conjugirter Punkte zu kennen. Ist ein solches Paar (Fig. 178) Q und D mit den Coordinaten x, y und x_1, y_1, so ist nach (4) für den Anfangspunkt O



(A. 178.)

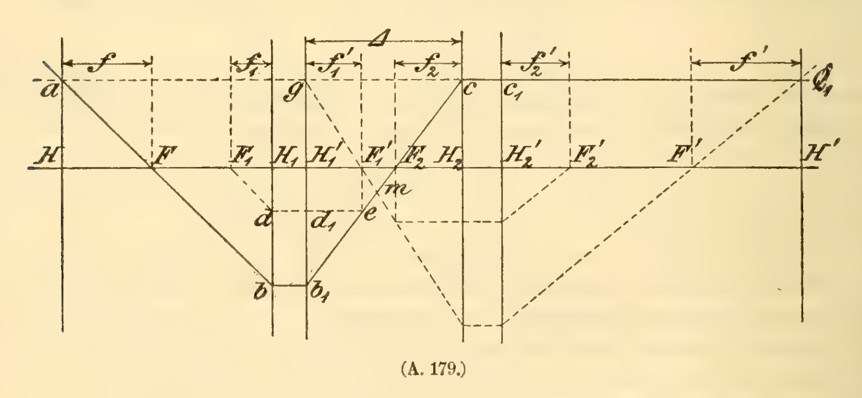
$$\frac{h-\varphi}{h-x} + \frac{h_1-\varphi_1}{h_1-x_1} = 1$$

und

$$\frac{(h-\varphi)y}{h-x} = \frac{(h_1-\varphi_1)y_1}{h_1-x_1},$$

wo h und h_1 die Abscissen der Hauptpunkte, φ und φ_1 die der Brennpunkte sind; zwei analoge Gleichungen erhält man mit Hilfe des zweiten Paares conjugirter Punkte, und kann somit die vier Grössen h, h_1, φ, φ_1 berechnen.

Brechung durch zwei von je zwei Kugelflächen begrenzte Systeme. Sind F_1, F_1' (Fig. 179) und F_2, F_2' die Brennpunkte, H_1, H_1' und H_2, H_2', die Hauptpunkte der beiden Systeme und ist cQ_1 ein parallel der Axe austretender Strahl, so muss dieser in der Richtung $b_1 F_2 c$ auf die Hauptebene



(A. 179.)

H_2 gefallen sein. Die Richtung des Strahles, welcher nach der Brechung im ersten System die Linie $b_1 c$ verfolgt, finden wir, wenn wir von dem Durchschnittspunkt e der durch F_1' gelegten Brennebene die der Axe Parallele $e d_1 d$ ziehen, d mit F_1 verbinden und bFa parallel zu $F_1 d$ legen, weil e nach Fig. 176 dem unendlich fernen Punkt, in welchem sich alle $F_1 d$ parallelen Strahlen schneiden, conjugirt ist. Der Durchschnitt F von ab mit der Axe giebt dann den ersten Brennpunkt des ganzen Systems und H seinen ersten Hauptpunkt. Ganz ebenso findet man durch Verfolgen des der Axe parallel eintretenden Strahles ag den zweiten Brennpunkt F' und zweiten Hauptpunkt H'. Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke HaF und $F_1 d H_1$

$$HF = H_1 F_1 \frac{Ha}{H_1 d} = H_1 F_1 \frac{H_2 c}{F_1' e} = H_1 F_1 \frac{H_2 F_2}{F_1' F_2}$$

also, wenn man die Bezeichnungen der Figur einsetzt und bedenkt, dass

$$H_1 F_1 = -f_1; \quad H_2 F_2 = -f_2; \quad H_1' F_1' = f_1'; \quad HF = f;$$
$$F_1' F_2 = H_1' H_2 - H_1' F_1' - H_2 F_2 = \Delta + f_2 - f_1'$$
$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta + f_2 - f_1'} \tag{7}$$

Linsen. Die dioptrischen Systeme, welchen wir in den für uns in Frage kommenden Anwendungen begegnen, sind im Allgemeinen von zwei Kugelflächen begrenzte Glaskörper, sogen. Linsen. Sie bestehen somit aus zwei von drei Mitteln gebildeten centrirten Systemen, von denen jedoch das erste und dritte Mittel gleichartig sind. Jedes dieser Systeme wird aber gebildet von nur einer brechenden Fläche, und es können auf sie die zuletzt ausgeführten Rechnungen angewendet werden, wenn man sich die Hauptebenen H_1, H_1' und H_2, H_2' nach Anleitung von Fig. 172 und 173 in je einen Punkt, den Scheitel der betr. Fläche, zusammenfallen denkt, und unter Δ die Linsendicke versteht. Sind ferner n_1 und n_2 die absoluten Brechungscoëfficienten der Luft und des Glases, ist $n = \frac{n_2}{n_1}$ also derjenige aus Luft in Glas, und sind r_1 und r_2 die Radien der Begrenzungsflächen der Linsen, so wird nach (2)

$$f_1 = -\frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1} = -\frac{r_1}{n-1}; \quad f_1' = +\frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} = +\frac{n r_1}{n-1}$$
$$f_2 = -\frac{n_2 r_2}{n_1 - n_2} = +\frac{n r_2}{n-1}; \quad f_2' = +\frac{n_1 r_2}{n_1 - n_2} = -\frac{r_2}{n-1}$$

und diese Werthe in Gleichung (7) eingesetzt

$$\varphi = f' = -f = -\frac{-\frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{n r_2}{n-1}}{\Delta + \frac{n r_2}{n-1} - \frac{n r_1}{n-1}} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)^2 \left[\Delta + \frac{n(r_2 - r_1)}{n-1}\right]} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{\rho}, \tag{8}$$

wenn $\rho = r_2 - r_1 + \frac{n-1}{n} \Delta$ ist. Da dann ferner $h_1 = HH_1$ (Fig. 179) und $h_2 = H' H_2'$ die Entfernungen der Hauptpunkte von den Linsenoberflächen sind, so lassen auch diese sich berechnen. Es wird

$$h_1 = -f + FF_1 + f_1$$

aber FF_1 nach (6) berechnet, indem man FF_1 für $(x - f)$, $F_1' F_2$ für $(x_1 - f_1)$, f_1 für f und f_1' für f_1 also

$$FF_1 = \frac{f_1 f_1'}{F_1' F_2} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta + f_2 - f_1'}$$

und somit unter Berücksichtigung von (7)

$$h_1 = \frac{f_1}{\Delta + f_2 - f_1'} (-f_2 + f_1' + \Delta + f_2 - f_1') = \frac{f_1 \Delta}{\Delta + f_2 - f_1'} \tag{9}$$

und ebenso

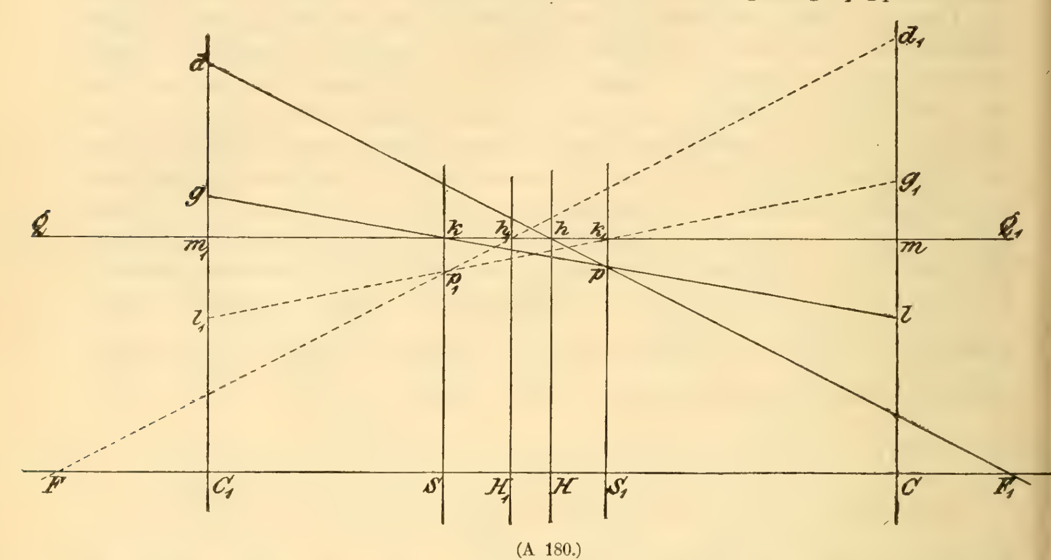
$$h_2 = \frac{f_2' \Delta}{\Delta + f_2 - f_1'} \tag{10}$$

oder wenn man die Werthe von f_1 und f_2 einsetzt

$$h_1 = -\frac{r_1 \Delta}{(n-1)\left[\Delta + \frac{n(r_2 - r_1)}{n-1}\right]} = -\frac{1}{n} \frac{r_1}{\rho} \Delta \tag{11}$$

$$h_2 = -\frac{r_2 \Delta}{(n-1)\left[\Delta + \frac{n(r_2 - r_1)}{n-1}\right]} = -\frac{1}{n} \frac{r_2}{\rho} \Delta. \tag{12}$$

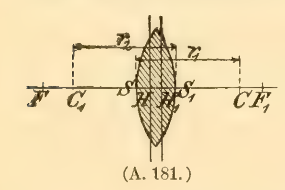
Sind (Fig. 180) die Scheitel S und S_1 und Mittelpunkte der Oberflächen C und C_1 einer Linse gegeben, so lassen sich leicht deren Brennpunkte FF_1 und deren Hauptpunkte H und H_1 bestimmen, indem man den Weg eines parallel zur Axe eintretenden Qk und den als seine Verlängerung $k_1 Q_1$ austreten-



(A 180.)

den Strahles bestimmt. Dies geschieht, indem man auf $Cm\,(C_1 m_1)\; Cl = \frac{1}{n}\, Cm$, also für $n = \frac{3}{2}$ beim Uebergange aus Luft in Glas $\frac{2}{3}\,Cm$ abträgt und $kl(k_1 l_1)$ zieht, ferner $Cd_1\,(C_1 d) = nCg_1\,(n \cdot Cg)$ oder $\frac{3}{2}\,Cg_1\,(\frac{3}{2}\,Cg)$ macht und $dpF_1\,(d_1 p_1 F)$ zieht; dann sind F und F_1 die Brennpunkte. Die Hauptpunkte H und H_1 aber ergeben sich, wenn man durch h_1 und h Senkrechte auf die Axe fällt.

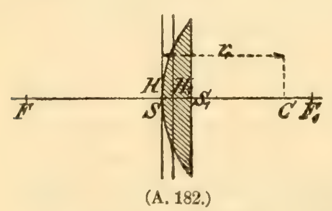
Die verschiedenen Arten von Linsen. Hat man die Brennpunkte und Hauptpunkte einer Linse bestimmt, so ist es leicht, ihre Wirkungsweise darzustellen.



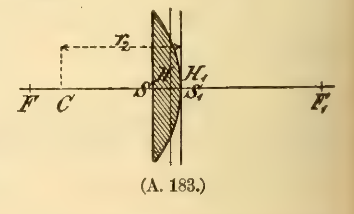
(A. 181.)

Da nun immer die Radien ihrer Oberflächen gegeben sind, so findet man die Brennpunkte am einfachsten mittelst (8), wobei zugleich das Zeichen von f erkennen lässt, ob sie ein positives oder negatives dioptrisches System verwirklicht, eine Sammellinse oder Zerstreuungslinse ist. Die Bezeichnung der Linse geschieht nach ihren Flächen.

1) Biconvexlinse Fig. 181. Da hier r_1 positiv, r_2 negativ ist, so hängt das Zeichen von f_1 von $(n - 1)\,\rho$ ab. Es wird für $n > 1$ positiv, wenn ρ negativ, also $r_2 - r_1$ negativ und $> \frac{n-1}{n}\,\Delta$, mithin $\Delta < \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$ ist. Für Glaslinsen von so geringer Dicke, wie sie in den Fernrohren zur Verwendung kommen, ist dies stets der Fall, und die Biconvexlinse ist also stets eine



(A. 182.)



(A. 183.)

Sammellinse. Für ein negatives ρ wird alsdann $h_1 = SH$ negativ, $h_2 = S_1 H_1$ positiv, die Hauptebenen erhalten also die in der Figur gezeichnete Lage.

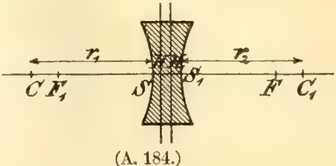
2) Bei der Planconvexlinse Fig. 182 und 183 ist r_1 positiv und $r_2\ \infty$ oder $r_1\ \infty$ und r_2 negativ, also

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1}; \quad h_1 = 0; \quad h_2 = -\frac{\Delta}{n}$$

oder

$$f_1 = \frac{r_2}{n-1}; \quad h_1 = \frac{\Delta}{n}; \quad h_2 = 0.$$

Auch sie ist stets eine Sammellinse und es geht eine Hauptebene durch den Scheitel.



(A. 184.)

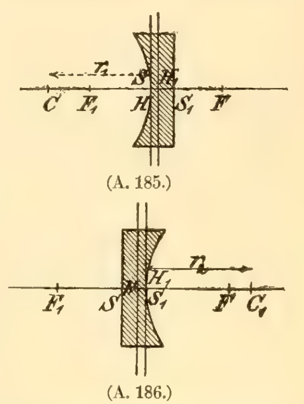
3) Dagegen ist die Biconcavlinse (Fig. 184) eine Zerstreuungslinse. Bei ihr ist r_1 negativ und r_2 positiv, aber ρ immer positiv, da $r_2 - r_1$ stets positiv ist. Es ist also f_1 negativ, $h_1 = SH$ positiv, $h_2 = S_1 H_1$ negativ.

4) Das nämliche gilt von den Planconcavlinsen (Fig. 185 und 186), da bei ihnen r_1 negativ und r_2 ∞ oder r_1 unendlich und r_2 positiv ist. Somit wird

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = -\frac{\Delta}{n}$$

oder

$$f_1 = -\frac{r_2}{n-1}, \quad h_1 = \frac{\Delta}{n}, \quad h_2 = 0.$$

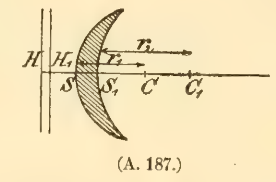

(A. 185.)

(A. 186.)

5) Die Convexconcavlinsen oder Menisken (Fig. 187 und 188) können Sammel- oder Zerstreuungslinsen sein, je nachdem die gewölbtere convexe Fläche dem Licht zugekehrt werden kann, oder die weniger gewölbte. Bei ihnen sind r_1 und r_2 von gleichen Vorzeichen, somit ist ihr Produkt immer positiv. Dagegen wird ρ positiv für $r_2 > r$, negativ für $r_1 > r_2$ und also im ersten Fall f_1 positiv, im zweiten negativ.

Für $n < 1$ kehren sich alle diese Verhältnisse um, die Sammellinsen werden zu Zerstreuungslinsen und umgekehrt.

Bis zu den dioptrischen Untersuchungen von GAUSS pflegte man die Linsendicke zu vernachlässigen und erhielt so freilich einfachere, aber für die Praxis nicht ausreichende Formeln. Indessen hat GAUSS[1]) gezeigt, dass es in den Fällen, in denen das erste Mittel dem letzten gleich ist, möglich ist, einem jeden gegebenen dioptrischen System eine einzige unendlich dünne Linse äquivalent zu setzen. Für diesen Fall wird in den Gleichungen (8), (11) und (12) $\Delta = 0$ und sie gehen über in


(A. 187.)

$$f' = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

oder

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (13)$$

und in

$$h_1 = 0, \qquad k_2 = 0.$$

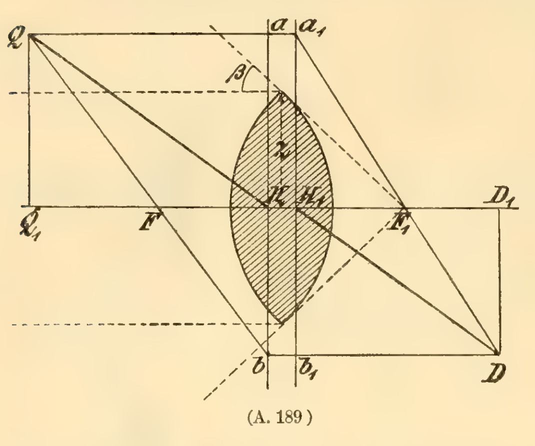
(A. 188.)

Die Fig. 189 und 190 ergeben die Construction des Bildpunktes D für einen leuchtenden Punkt Q für eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse unter Benutzung der Hauptebenen. Man zieht $Q a a_1$ parallel der Axe und $a_1 D$ durch F_1,

[1]) GAUSS, a. a. O., pag. 256.

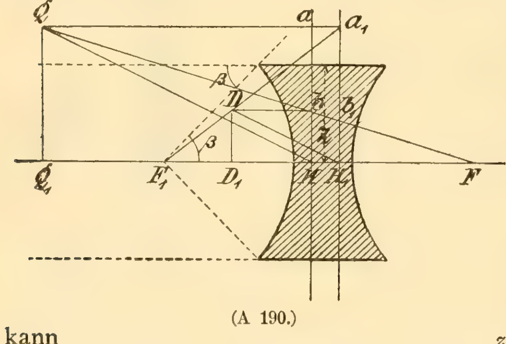
ebenso QFb durch F und bb_1D parallel der Axe, dann ist D der gesuchte Bildpunkt. Da QH parallel H_1D wird, so kann man auch diese Eigenschaft zur Construction oder zur Controlle benutzen. Die Coordinaten des Punktes D findet man, wenn man in (4) $-f_1$ für f einsetzt. Man erhält alsdann

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f_1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}. \quad (14)$$



(A. 189)

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein, die auf ein System von Linsen sofort übertragen werden können. Den Winkel β, den der in das System parallel zur Axe an seinem Rande einfallende Strahl mit seiner durch die Brechung erhaltenen Richtung macht, nennen wir den Oeffnungswinkel. Er werde von dem einfallenden nach dem rückwärts verlängerten gebrochenen Strahle gezählt und nach oben positiv genommen. Dem Umstande, dass er bei dem convergenten System also positiv, bei dem divergenten negativ ist, verdanken beide die oben erwähnten, von dem Zeichen des Oeffnungswinkels übertragenen Bezeichnungen. Ist der Oeffnungsradius der Linse z, so ist er gegeben durch



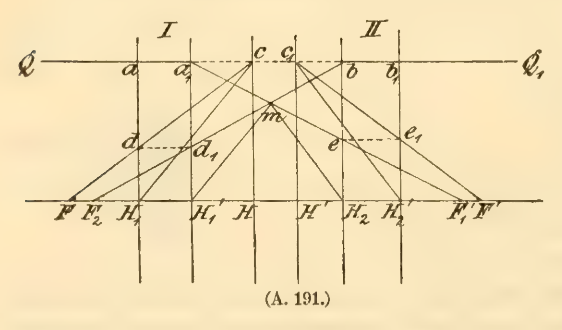
(A. 190.)

$$tang\, \beta = \frac{z}{f},$$

wofür man auch, da er immer nur einen sehr kleinen Werth hat, setzen kann

$$\beta = \frac{z}{f}.$$

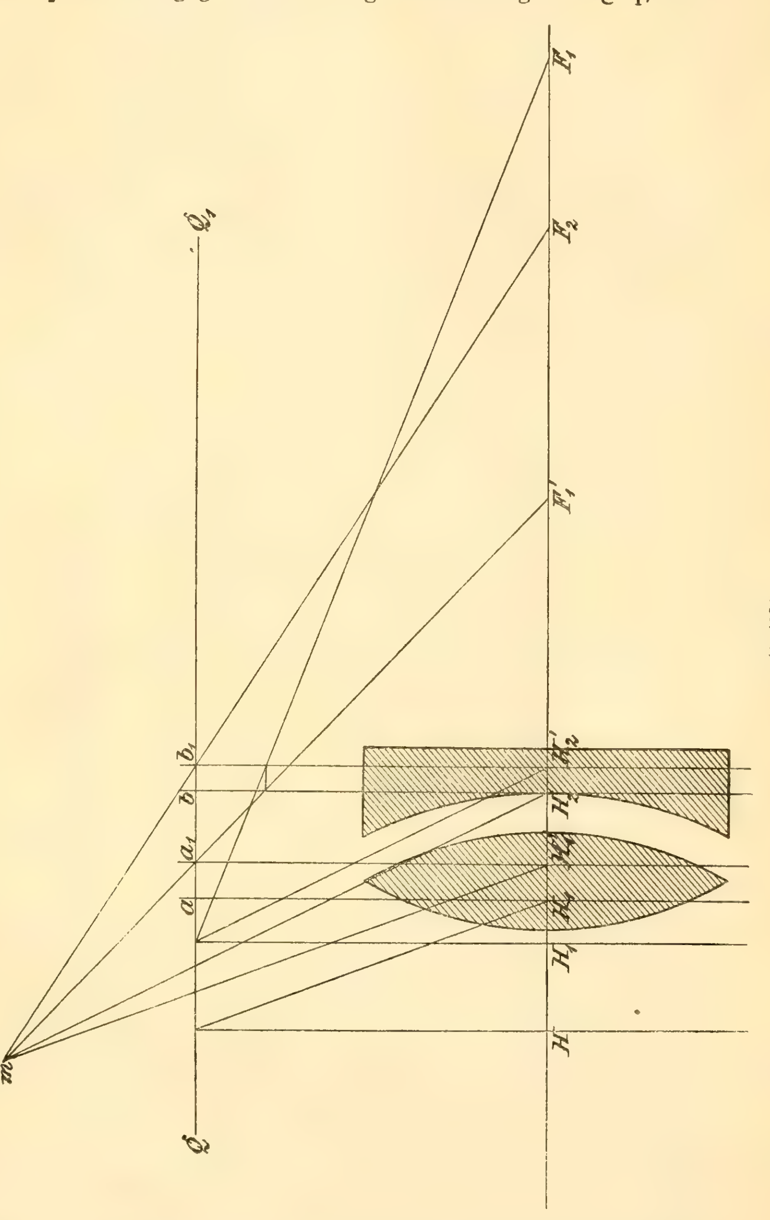
Dieser Ausdruck giebt zugleich die Helligkeit des Systems, welche durch den Oeffnungswinkel gemessen wird. Seine Vergrösserung ist das Verhältniss der Sehwinkel, unter denen ein Gegenstand bei Betrachtung mit blossem Auge und unter Anwendung des Linsensystems (Lupe, Fernrohr etc.) erscheint; sie ist also gegeben durch das Verhältniss der Bildweite D_1H_1 zur Objectweite Q_1H. Die Grösse des Bilddurchmessers aber giebt die Grösse des Gesichtsfeldes. Brennweite, Oeffnung und Bilddurchmesser bedingen demnach die Grösse und Helligkeit des Bildes und des Gesichtsfeldes, damit aber die Leistung des Systems.



(A. 191.)

Brechung durch zwei Linsen. Sind die Fundamentalpunkte der beiden gegebenen Linsen I und II (Fig. 191) bekannt, so lassen sich die einer einzigen beiden äquivalenten Linse folgendermaassen durch Construction finden. Ist Qa ein

auf I parallel zur Axe einfallender Strahl, so wird derselbe nach der Brechung die Richtung $a_1 F_1'$ einschlagen, wenn H_1 und H_1' die Hauptpunkte F_1' der zweite Brennpunkt von I sind. Ein von dem ersten Hauptbrennpunkt F_2 von II ausgehender Strahl $F_2 b$ wird dagegen die verlängerte Richtung von $Q a_1$, nämlich $b Q$, einschlagen, da H_2 und H_2' die Hauptpunkte von II sein sollen. Der Durchschnittspunkt m der Strahlen $F_2 b$ und $a_1 F_1'$ muss den Durchschnittspunkten der Linie $Q Q_1$ mit den gesuchten Hauptebenen der den Linsen I und II äquivalenten Linse conjugirt sein, wie sich sofort aus der Betrachtung der Fig. 179 ergiebt, wo die Hauptebenen des Systems ausserhalb der Hauptebenen der dasselbe zusammensetzenden Theile fallen. Indem man also $H_1' m$ und $H_2 m$ zieht und dazu die Parallelen durch H_1 und H_2' bis zum Durchschnitt mit $Q Q$, findet man die Durchschnitte $c c_1$ als Punkte der Hauptebenen Hc und $H' c_1$ der I und II äquivalenten Linse, zieht man dann durch d_1 und e die Parallelen zur Axe $d_1 d$ und $e e_1$, verbindet d mit c und c_1 mit e_1 und verlängert beide Linien bis zur Axe, so erhält man die Brennpunkte dieser Linse F und F'. Der Punkt m spielte früher als optischer Mittelpunkt des Systems eine wichtige, wenn auch nicht ganz berechtigte Rolle in der Dioptrik.



Mittelst der Formeln (7), (9) und (11) lässt sich die Lage der Brennpunkte und Hauptpunkte leicht berechnen. Setzt man, wie in Fig. 179, die Brennpunkte

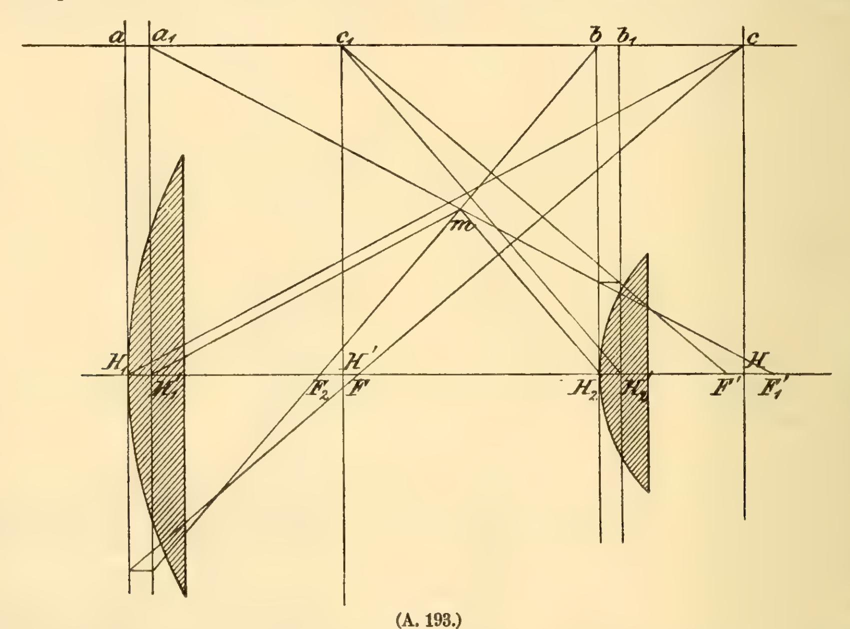
der ersten Linse $f_1' = -f_1 = \varphi_1$, die der zweiten $f_2' = -f_2 = \varphi_2$ und die des ganzen Systems $f' = -f = \varphi$, und nennt den Abstand $H_1'H_2$ wieder Δ, so erhält man

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \tag{15}$$

$$h_1 = \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \tag{16}$$

$$h_2 = -\frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}. \tag{17}$$

Objectiv und Ocular. Das von DOLLOND eingeführte achromatische Objectiv, Fig. 192, besteht aus einer convergenten biconvexen und einer divergenten planconcaven oder convexconcaven Linse. Die Construction der Fun-

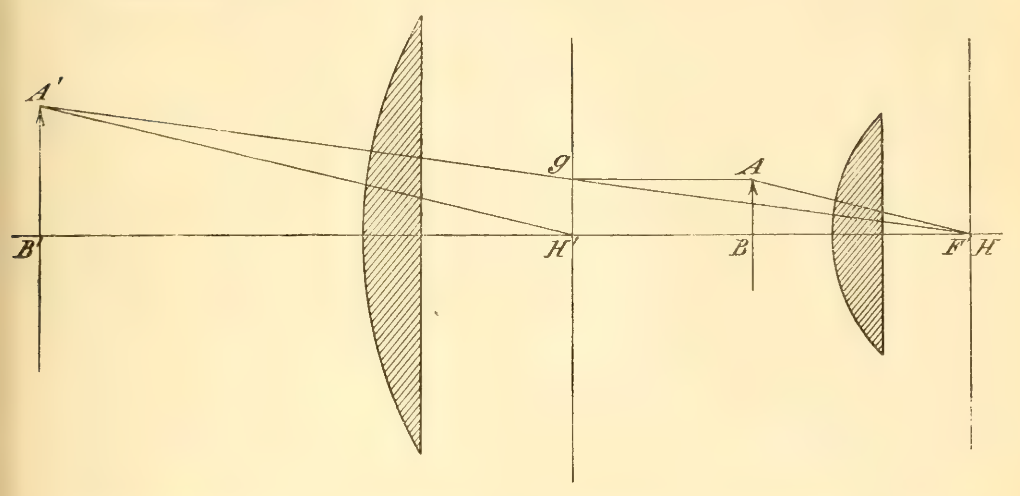


(A. 193.)

damentalpunkte ist aus der Figur zu ersehen. Da es einerlei ist, in welchem Abstand von der Axe man QQ_1 zieht, so ist diese Construction oberhalb der Linsen vorgenommen. Das HUYGENS'sche Ocular wird von zwei planconvexen Linsen gebildet, welche ihre convexen Seiten dem Objectiv zukehren und so angeordnet sind, dass F_2 zwischen beide Linsen fällt, F_1' hinter der letzten in geringer Entfernung liegt. Fig. 193 zeigt alsdann die Construction der Hauptpunkte des Systems, H_1 fällt ebenfalls zwischen die Linsen, während H hinter die letzte zu liegen kommt. Ist AB in Fig. 194 das von dem Objectiv entworfene reelle Bild, so erhält man das durch Einschalten des Oculars erzeugte virtuelle, indem man AH zieht, dazu parallel A_1H', darauf gA parallel zur Axe und endlich gF', welches $A'H'$ in dem Bildpunkt von A, nämlich A' schneidet.

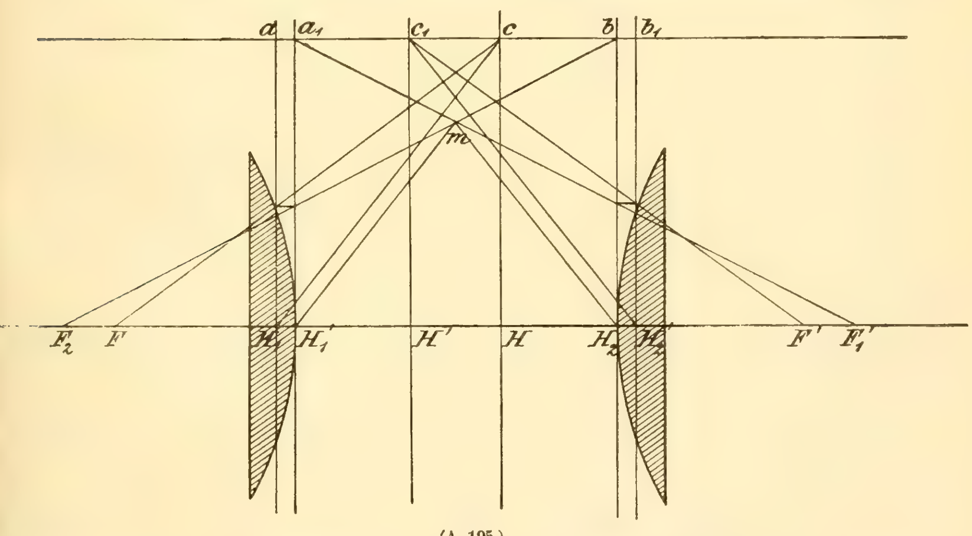
Nimmt man statt der beiden planconvexen Linsen des HUYGENS'schen Oculars zwei ebensolche, die aber so gestaltet und angeordnet werden, dass F_2 vor, F_1' ebensoweit hinter beide fällt, so erhält man das RAMSDEN'sche oder Mikrometer-Ocular, für welches Fig. 195 die Construction der Fundamentalpunkte giebt. Da es so aufgestellt wird, dass der Brennpunkt des Objectivs

ein wenig vor die erste Linse fällt, so giebt Fig. 196 die Construction des von ihm entworfenen Bildes.



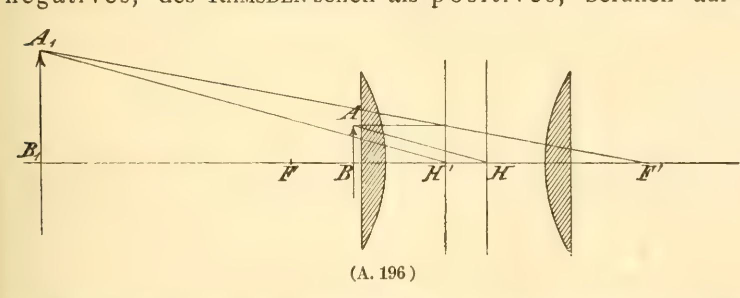
(A. 194.)

Die Bezeichnungen des HUYGENS'schen Oculars als Campanisches oder



(A 195.)

negatives, des RAMSDEN'schen als positives, beruhen auf missverstandenen Annahmen. Das CAMPANI'sche Ocular bestand vielmehr aus drei Linsen [1]).



(A. 196)

Das Fernrohr. Aus der Wirkung des Objectivs und Oculars ergiebt sich nun die Wirkung des aus ihnen zusammengesetzten Systemes,

[1]) HUYGENS, Oeuvres complètes IV, pag. 267.

des Fernrohres, ohne dass man nöthig hat, seine Fundamentalpunkte aufzusuchen. Sie liegen immer in grosser Entfernung von dem Apparate. Da das Ocular in einem besonderen Rohre befestigt ist und sich durch Zahnstange und Trieb mit diesem in dem das Objectiv haltenden Rohre etwas hin- und herschieben lässt, so ist es namentlich möglich, die Lage des ersten Brennpunktes zu ändern und die Strahlen convergent, divergent oder parallel austreten zu lassen, in welchem letzten Falle das Linsensystem ein teleskopisches heisst. Die verschiedene Bildung, welche die Augen der Beobachter haben können, zwang zur Einführung dieser Veränderlichkeit der Brennweite. Sie können normalsichtige (emmetropische), kurzsichtige (myopische) und übersichtige (hypermetropische) sein, je nachdem bei sonst gleichen Verhältnissen die Linse stärker oder weniger stark gekrümmt ist. Bei dem emmetropischen Auge ist diese Krümmung eine solche, dass parallel eintretende Strahlen ohne Accommodation auf dem empfindlichen Augenhintergrund, der Netzhaut, in einem Punkte vereinigt werden. In solchem Falle aber vereinigt das kurzsichtige Auge ein wenig divergirende, das übersichtige etwas convergirende Strahlen daselbst. Um einen Stern scharf zu sehen, muss für jenes das Ocular also herausgezogen, für dieses hineingeschoben werden.

Um das Fernrohr zu Messungen zu verwenden, bringt man im Brennpunkte seines Objectivs ein Netz von Spinnfäden oder von feinen, mit dem Diamant auf eine Glasplatte gezogenen Linien, das Fadenmikrometer, an, welches zugleich mit dem Bild scharf gesehen wird. Die Verbindungslinie seiner Mitte mit dem Austrittspunkte des die Mitte des Objects treffenden Strahles aus dessen zweiter Hauptebene heisst die optische Axe des Fernrohres. Fällt dieselbe auch nicht mit der geometrischen Axe des Rohres zusammen, so kann das Instrument doch zu Messungen benutzt werden, wenn sie nur ihre Lage auch bei geringen Verschiebungen des Objectivs beibehält. Bei Anwendung des RAMSDEN'schen Oculars kann somit das eingestellte Faden mikrometer seinen Platz ein für allemal behalten, bei dem HUYGENS'schen muss es nach jeder Verstellung des Oculars wieder berichtigt werden. Obwohl dies beschwerlich ist, so hat doch HUYGENS[1]) selbst das Mikrometer in Form eines keilförmigen Blättchens zur Messung der Planetendurchmesser als der erste angewendet, gegenwärtig bedient man sich für solche Zwecke lieber des RAMSDENschen Oculars.

Sphärische Aberration. Wir setzten bisher voraus, dass die Scheiteltangentenebene der Linse mit der brechenden Fläche zusammenfiele, ihre Oeffnung also nur eine sehr kleine sei. Andererseits nahmen wir an, dass die sämmtlichen einfallenden Strahlen den nämlichen Brechungscoëfficienten hätten. Beides ist in den Anwendungen nur unvollkommen verwirklicht; vielmehr hat die Oeffnung eine nicht zu vernachlässigende Grösse und besteht das weisse, in das Fernrohr fallende Licht aus Strahlen der verschiedensten Brechbarkeit. Die erhaltenen Ergebnisse sind demnach zu erweitern, und wir beschäftigen uns zunächst mit den wegen der Kugelgestalt nothwendigen Abänderungen.

Die auf eine Linse von grösserer Oeffnung parallel auffallenden Strahlen einfarbigen Lichtes treffen sich nicht alle in einem Punkte der Axe, vielmehr giebt der Schnitt des sie einhüllenden Conoids mit einer die Axe aufnehmenden

---

[1]) HUYGENS, Systema Saturnium. Hagae Comitum 1659. Siehe opera varia 2, Lugd. Bat. 1724, pag. 594. — AUZOUTS, Traité du micromètre erschien 1667 in Paris. Vergl. WOLF, Geschichte der Astronomie, München 1877, pag. 363, der GASCOIGNE die Erfindung des Mikrometers zuschreibt, ohne jedoch Belegstellen anzuführen.

Ebene die unter dem Namen Diakaustik bekannte Linie, die der Thatsache ihre Entstehung verdankt, dass der Vereinigungspunkt den Randstrahlen der Linse näher liegt, wie der der centralen. Hat somit auch die Linse einen Brennraum und nicht einen Brennpunkt, so behält man doch die letztere Bezeichnung für die Stelle bei, wo der senkrecht zur Axe gelegte ebene Schnitt des Conoids die kleinste Ausdehnung zeigt Ein Punkt wird demnach nie als Punkt, sondern immer als kleiner Kreis abgebildet, und darin beruht die Abweichung der Linse wegen ihrer Kugelgestalt oder sphärische Aberration, deren Länge durch den Abstand der Vereinigungspunkte der am Rande und in der Mitte der Linse auffallenden Strahlen gegeben ist. Früher begnügte man sich, diese Länge zu berechnen, und nannte ein Linsensystem, bei welchen für ein Paar conjugirter Punkte der Axe die sphärische Aberration aufgehoben war, ein aplanatisches. Demgegenüber hat aber ABBE[1]) gezeigt, dass man in diesen Begriff weit mehr hineinlegte, als ein solches System wirklich leistete. Sollte es doch von einem senkrecht sich erstreckenden Flächenelement mittelst Strahlenkegeln von endlicher Divergenz ein scharfes Bild entwerfen! Nun zeigt aber das Bild eines axialen Flächenelementes, welches durch nahe der Axe verlaufende Strahlen hervorgerufen wird, eine andere lineare Vergrösserung, als ein von solchen Strahlen entworfenes, welche mit der Axe einen grösseren Winkel bilden. Die Uebereinanderlagerung dieser Bilder giebt aber erst das wirklich beobachtete Bild, sie liegen keineswegs in einer Ebene. Ein wirklich aplanatisches System muss also nicht nur die sphärische Aberration für ein paar Punkte aufheben, es muss auch für alle Strahlen ein und dieselbe Vergrösserung ergeben. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Sinus der Neigungswinkel beiderseits entsprechender Strahlen im ganzen Umfang beider Büschel ein constantes Verhältniss zeigen[2]). Demnach sind aplanatische Punkte eines Linsensystems conjugirte Punkte der Axe, für welche die sphärische Aberration eines Strahlenkegels von endlicher Oeffnung gehoben und zugleich Proportionalität der Sinus der Neigungswinkel conjugirter Strahlen herbeigeführt ist. Weiter nennt ABBE das Produkt aus Brechungsexponent in den Sinus des halben Oeffnungswinkels eines Büschels oder für kleinere Winkel in den Winkel selbst die numerische Apertur des Büschels und findet, dass der Einfluss der sphärischen Aberration auf die Deutlichkeit der Abbildung mit der dritten Potenz der numerischen Apertur des einfallenden Büschels wächst.

Es lag nahe, die sphärische Aberration durch Einschränkung der Diakaustik zu vermindern, und in der That hat VON HOEGH[3]) allerdings nur in theoretischer Form dahin zielende Vorschläge gemacht, die von grossem Vortheil sein würden, wenn es gelänge, den Zerstreuungskreis in der Brennpunktsebene auf einen Punkt oder eine sehr kleine Fläche herabzubringen. Indessen verspricht sich davon C. MOSER[4]) nicht viel, weil ja trotz der vorhandenen Abweichung einer beträchtlichen Menge Strahlen die Schärfe des Bildes nicht wesentlich beeinträchtigt werde. In Verwirklichung jenes Vorschlages müsse aber die Dichtigkeit der

---

[1]) ABBE, Ueber die Bedingungen des Aplanatismus der Linsensysteme. — CARL's Repertorium 1880, 16, pag. 303.

[2]) Den Beweis s. CZAPSKI, Handbuch der Physik von WINKELMANN, 3. Bd. 1. Abth., (Encyclopädie der Naturwissenschaften), Breslau 1894, pag. 114.

[3]) VON HOEGH, Die sphärische Aberration und deren Correction speciell bei Fernrohrobjectiven. Zeitschr. für Instrumentenkunde 1888, 8, pag. 117.

[4]) MOSER, Referat über VON HOEGH's Arbeit in Centralzeitg. für Optik u. Mechanik 1888, 9, pag. 153.

Strahlen in den äusseren Theilen des Bildes vermehrt, in den inneren vermindert werden, wodurch die Wirkung der an der Abbildung theilnehmenden lediglich abgeschwächt werde. Auch zeigte CZAPSKI[1]), welche Schwierigkeiten dieser Weg biete, da, wenn man ihn einschlägt, die Interferenz und Beugung der Lichtwellen mit in Betracht gezogen werden müsse.

Auf der anderen Seite aber macht CZAPSKI[2]) darauf aufmerksam, dass die beschränkte Schärfe des Auges eine so vollkommene Correction überflüssig macht, und wir deshalb gezwungen sind, ein Ausgleichungsverfahren anzuwenden, welches darin besteht, den Bildfehler innerhalb eines bestimmten Gebietes möglichst klein zu machen. Dabei kommt es uns beim Fernrohr sehr zu statten, dass dieser Fehler in ihm weitaus geringer ist, wie z. B. im Mikroskop, und es ist in der That längst gelungen, Objective herzustellen, welche in den erforderlichen Grenzen aplanatisch sind. Im Ocular aber bringt man ihn durch die Anwendung zweier Linsen auf einen nicht mehr störenden Werth herab.

Die Länge der sphärischen Aberration ist vielfach berechnet worden. Man drückt sie am Besten durch eine Reihe aus, die nach den geraden Potenzen des Sinus des Winkels (oder des Winkels selbst), den der aus dem Mittelpunkte der vorderen Linsenfläche nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser mit der Axe bildet, fortschreitet unter Vernachlässigung dieser Potenzen von der vierten an. Bestimmt man dann den Coëfficienten des ersten Gliedes, so lassen sich Linsenformen mit kleiner oder geringer sphärischer Aberration auf der Axe berechnen[3]). Da diese Rechnungen zeitraubend sind, so hat bereits HERSCHEL eine Tafel hergestellt, die PRECHTL[4]) mit den sich daraus ergebenden Linsenformen mittheilte, welche für die Brechungsverhältnisse verschiedener Glassorten das beste Verhältniss der Krümmungsradien finden lässt. Die von ihnen angegebenen Linsenformen stimmen mit den FRAUNHOFER'schen Achromaten überein[5]). Die Krümmungen der Flächen werden dabei nicht gross, und da sich die der äusseren Flächen eines Doppelobjectivs, von gegebener Brennweite für die verschiedenen bei denselben vorkommenden Brechungsverhältnisse innerhalb enger Grenzen halten, so konnte HERSCHEL die Regel aufstellen, dass ein solches Objectiv sehr nahe aplanatisch ist, wenn der Halbmesser der äusseren Fläche der Crownglaslinse = 6·72, der der Flintglaslinse = 14·2 für eine Gesammtbrennweite = 10 gemacht und die Krümmungshalbmesser der inneren Flächen so berechnet werden, dass die Brennweiten der zugehörigen Linsen ihren Brechungsverhältnissen proportional sind.

Nun hat aber GAUSS[6]) ein Ausgleichsverfahren angegeben, bei welchem weniger Gewicht auf das Bild gelegt wird, welches sehr nahe bei der Axe auffallende Strahlen erzeugen, als darauf, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objectivs unter sich besser zusammengehalten werden. Um die nöthige Rechnung durchzuführen, denkt sich GAUSS eine zur Axe senkrechte

---

[1]) CZAPSKI, Bemerkungen zu VON HOEGH's Arbeit in Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1888, 8, pag. 203.

[2]) CZAPSKI, Handbuch der Physik etc., 3 Bd., 1. Abth., pag. 111 ff.

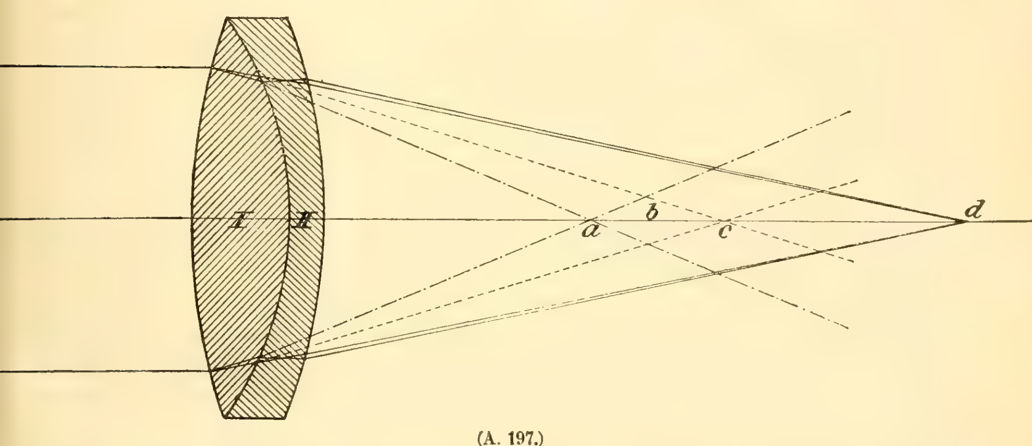
[3]) SCHMIDT, Lehrbuch der analytischen Optik, herausg. von GOLDSCHMIDT, Göttingen 1834, pag. 465, vergl. auch DIPPEL, Grundzüge der allgemeinen Mikroskopie, Braunschw. 1885, pag. 25.

[4]) PRECHTL, Praktische Dioptrik, Wien 1828, pag. 79.

[5]) SAFARIK, Vierteljahrsschr. der astronom. Gesellschaft. 17. Jahrg. Leipz. 1882.

[6]) GAUSS, Brief an BRANDES. GEHLER's physikal. Wörterbuch. Leipz. 1831, 6, pag. 437. Gesammelte Werke, 5, pag. 509.

Ebene durch den von der Linse gebildeten Strahlenkegel gelegt, die eine nicht gleichmässig beleuchtete Kreisfläche abscheidet. Ist nun y die Entfernung eines Elementchens ds dieser Fläche von ihrem Mittelpunkt, i die Lichtintensität daselbst, so ist der Werth $\int y^2\, i\, ds$ als Maass der Totalundeutlichkeit zu nehmen. GAUSS bestimmt nun den Abstand von der Linse, in dem dies Integral ein Minimum wird. Er findet, dass dies dann der Fall ist, wenn sich die Strahlen schneiden, die in der Nähe der Axe auffallen, und die im Abstand von $\sqrt{\frac{6}{5}}$ ihres Radius die Linse treffen. Da solche Strahlen aber nicht mehr von der Linse aufgefangen werden, so würde dies Minimum in der Praxis nicht zu erreichen sein. Doch lassen sich Bedingungen einführen, die den Werth des Integrals herabdrücken[1]). Die Grösse der sphärischen Aberration ist übrigens geringer, wenn die Linse dem Object die stärker gekrümmte Fläche zuwendet, als umgekehrt.



(A. 197.)

Die chromatische Aberration. Dieselbe Wirkung, wie die sphärische Aberration, zeigt in noch höherem Maasse die chromatische, die im Auge die Erscheinungen der Irradiation verursacht und auch Farbenzerstreuung oder Farbenfehler heisst. Sie wird ebenfalls Ursache, dass das durch eine Linse entworfene Bild eines weisses Licht aussendenden Punktes als kleiner heller Kreis erscheint. Die von einem solchen ausgehenden verschieden farbigen Strahlen werden von der biconvexen Linse I (Fig. 197) verschieden stark gebrochen. Ist a z. B. der Brennpunkt der violetten Strahlen, so liegt der der rothen in grösserer Entfernung von der Linse etwa in c. Der Raum ac aber ist dann mit den Brennpunkten der dazwischen liegenden Farbenstrahlen erfüllt. Bei a erscheint also das Bild eines Sternes mit gelbrothem, bei c mit einem blauen Rande, während es bei b, etwa im Brennpunkt der grünen Strahlen als weisses Scheibchen gesehen wird. Von der Grösse dieses Scheibchens hängt die Undeutlichkeit eines unendlich entfernten Objektes ab und ist nach CZAPSKI bei einer gegebenen Construction dem Verhältniss der Oeffnung zur Brennweite einfach proportional, in ihrem Winkelwerth aber von der Grösse der Brennweite unabhängig[2]). Den Farbenfehler könnte man, wie CZAPSKI[3]) weiter gezeigt hat, ver-

---

[1]) SCHMIDT, a. a. O., pag. 516, und GAUSS, a. a. O.

[2]) STEINHEIL und VOIT, Handbuch der angewandten Optik I. Leipz. 1891, pag. 58.

[3]) CZAPSKI, Handbuch der Physik. II, Bd. 1. Abt., pag. 139.

meiden, wenn man der hinteren Begrenzungsfläche der Linse eine entsprechende Form gäbe. Indessen hat man seit DOLLOND ausschliesslich das andere Mittel angewendet, was, wie wir bereits sahen, denselben Zweck zu erreichen erlaubt, der Sammellinse eine Zerstreuungslinse aus einer starken brechenden Substanz zuzufügen, welche, wie Fig. 197 zeigt, wenn auch nicht alle, so doch wenigstens zwei Farben in einem Punkte d vereinigt. Als solche Gelb und Blau zu nehmen, wie PRECHTL und LITTROW wollten, erwies sich als nicht zweckmässig, weil der übrig bleibende gelblich grüne Saum eine störende Lichtstärke behielt. FRAUNHOFER zog es deshalb vor, die hellsten Strahlen des Spectrums zu compensiren und so als Bild eines weissen Punktes von einem kaum merklichen bläulich violetten Saum umgeben zu erhalten. Diesen Saum nannte BLAIR das secundäre Spectrum. Man bezeichnet jetzt wohl auch mit diesem Worte den Farbenfehler überhaupt und nimmt dann als Länge dieses Spectrums den äussersten Abstand der Spitzen der beiden nicht compensirten farbigen Strahlenkegel.

Versuche, die optischen Gläser durch andere Stoffe zu ersetzen, die einen Theil der Strahlen absorbiren, haben zu keinem günstigen Resultat geführt. In linsenförmige Gefässe eingeschlossene Flüssigkeiten gaben in Folge der in ihnen auftretenden unvermeidlichen Strömungen undeutliche Bilder, und auch der Vorschlag MITTENTZWEI's[1]), die Lösung des Fluorescins in Glycerin zu verwenden, welches in Schichten von 0·02—0·03 *mm* das bläulich violette secundäre Spectrum auslöscht, bewährte sich nicht. Erst mit der Gründung des glastechnischen Institutes in Jena hat man den richtigeren Weg zur Vernichtung des secundären Spectrums, möglichst viele Strahlen in einem Brennpunkt zu vereinigen, mit gutem Erfolg betreten.

Correction der sphärischen und chromatischen Aberration. Bei der Herstellung einer Linse hat man als erste Bedingung die zu erfüllen, dass die Linse eine bestimmte Brennweite besitzt. Soll sie aplanatisch sein, so müssen zwei von einem Punkt der Axe ausgehende Strahlen, von welchen der eine die Linse in der Nähe des Randes, der andere in der Nähe des Centrums durchsetzt, nach der Brechung wieder in einem Punkt der Axe zusammentreffen. Soll sie endlich auch keine Farbenzerstreuung zeigen, so müssen auch die Axenstrahlen der zwei zu compensirenden Farben denselben Vereinigungspunkt auf der Axe haben. Ein Doppelobjectiv besitzt nun vier Flächen, denen eine bestimmte Gestalt gegeben werden kann. Die Formen, die man dreien derselben giebt, gestatten dann, dass jene drei Bedingungen erfüllt werden, die vierte kann man zur Verwirklichung irgend einer vierten Bedingung benutzen. Man suchte mit ihrer Hilfe eine sehr vollkommene Correction der sphärischen Aberration zu erreichen, bis GAUSS[2]) vorschlug, die seitdem nach ihm genannte vierte Bedingung zu verwirklichen, dass sich auch ein Randstrahl der zweiten Farbe mit dem gleichfarbigen Centralstrahl nach der Brechung auf der Axe vereinigen solle. Um das Verhältniss dieser GAUSS'schen Bedingung zu den oben genannten klarzulegen, verfährt KRÜSS[3]) folgendermaassen. Ist a der Abstand des Punktes, in welchem ein Strahl nach seinem Durchgang durch das Objectiv die Axe schneidet, ist n das Brechungsverhältniss der Linsensubstanz, r der

---

[1]) MITTENTZWEI, Astron. Nachr., No. 2523 und 2524.

[2]) GAUSS, Ueber die achromatische Doppellinse, Zeitschr. für Astron. 4, pag. 345, Werke 5, pag. 507.

[3]) KRÜSS, Die Farbencorrectionen der Fernrohr-Objective von GAUSS und FRAUNHOFER, Zeitschr. für Instrumentenkunde 1888, 8, pag. 7.

Abstand des Punktes, in welchem der Strahl die erste brechende Fläche trifft, von der Axe, wobei dieser Abstand oberhalb einer durch die Axe gelegten Horizontalebene positiv, unterhalb einer solchen negativ genommen werde, so ist:

$$a = f(r,\ n).$$

Geht man nun zu einem zweiten Strahl desselben Büschels über, der im Abstand $r + \Delta r$ von der Axe die Linse trifft und dessen Farbe das Brechungsverhältniss $n + \Delta n$ zukommt, so begegnet dieser der Axe in einem Abstand

$$a' = f(r + \Delta r,\ n + \Delta n).$$

Sind die Strahlen und Farben benachbart, so sind Δr und Δn sehr klein und der Wert von a' kann nach der TAYLOR'schen Reihe entwickelt werden, also:

$$\begin{aligned} a' = a &+ \frac{df}{dr}\Delta r + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2 f}{dr^2}\Delta r^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3 f}{dr^3}\Delta r^3 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{df}{dn}\Delta n + \frac{d^2 f}{dr\cdot dn}\Delta r\cdot\Delta n + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^3 f}{dr^2\cdot dn}\Delta r^2\cdot\Delta n + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2 f}{dn^2}\Delta n^2 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3 f}{dr\cdot dn^2}\Delta r\cdot\Delta n^2 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3 f}{dn^3}\Delta n^3 + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo die Zahlenwerthe der Differentialquotienten $\frac{df}{dr}, \frac{df}{dn} \ldots$ sich aus den anfänglich für r und n gesetzten ergeben. Fällt nun der zuerst betrachtete Strahl in der Axe auf, so wird $r = 0$ und Δr der Abstand des zweiten Strahles von der Axe. Da aber die Strahlen symmetrisch zu dem Axenstrahl liegen, so müssen die Werthe von a', welche nun gleichviel über und unter der Axe liegen, gleich gross sein, aber entgegengesetztes Zeichen haben, oder es müssen die Glieder, welche mit ungeraden Potenzen von Δr multiplicirt sind, verschwinden. Es wird somit:

$$\begin{aligned} a_1' = a &+ \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dr^2}\Delta r^2 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{df}{dn}\Delta n + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^3 f}{dn\cdot dr^2}\Delta n\cdot\Delta r^2 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dn^2}\Delta n^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^3 f}{dn^3}\Delta n^3 + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichung kann man zur Bestimmung der Werthe für $a' - a$ benutzen, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen.

Für die sphärische Aberration wird $\Delta n = 0$, also

$$a_1' - a = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dr^2}\Delta r^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4 f}{dr^4}\Delta r^4 \ldots\ldots \tag{19}$$

Behält man hier nur die zweite Potenz von Δr bei, so wird der durch sphärische Aberration entstehende Fehler Null, wenn

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = 0.$$

Die chromatische Aberration dagegen erhält man für einen in der Richtung der Axe auffallenden Centralstrahl, wenn in (18) $\Delta r^2 = 0$ wird, also

$$a_2' - a = \frac{df}{dn}\Delta n + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dn^2}\Delta n^2 + \ldots\ldots, \tag{20}$$

sie verschwindet, wenn man nur die ersten Potenzen Δn berücksichtigt, wenn

$$\frac{df}{dn} = 0.$$

Für einen seitwärts auffallenden Strahl der zweiten Farbe, der den Centralstrahl derselben Farbe in der Axe treffen soll, müssen Δr und Δn gleichzeitig von Null verschiedene Werthe haben. Sind aber bereits die Correctionen (19) und (20) angebracht, so sind die in ihnen enthaltenen Werthe bereits vernichtet und es bleibt somit nur noch übrig

$$a_3' - a = \frac{1}{2} \frac{d^3 f}{dn \cdot dr^2} \Delta n \cdot \Delta r^2 + \ldots . \tag{21}$$

Zur Erfüllung der GAUSS'schen Bedingung muss auch dieses verschwinden und sie ist somit dargestellt durch

$$\frac{d^3 f}{dn \cdot dr^2} = 0.$$

Sie darf als eine vollständigere Correction der sphärischen und chromatischen Aberration aufgefasst werden. Da aber der Werth von $a_3' - a$ im Vergleich zu den anderen $a_1' - a$ und $a_2' - a$ sehr klein ist, so ist die GAUSS'sche Bedingung durch die ersten beiden Correctionen sehr nahe mit erfüllt und es erscheint gerechtfertigt, dass FRAUNHOFER und andere Optiker keine Rücksicht darauf nahmen, sondern lieber, wie wir sahen, die Reihe (19) noch für einen anderen Werth verschwinden liessen, etwa für den Randstrahl oder für den in $\frac{2}{3}$ seiner Entfernung von der Axe auffallenden.

Die ausführenden Optiker pflegen die sphärische Aberration entweder von der Brechbarkeit der FRAUNHOFER'schen Linie D oder von der von F zu heben und haben damit, wie KERBER[1]) nachgewiesen hat, die sphärische Abweichung auch aller anderen Strahlen auf einen sehr kleinen Werth herabgedrückt.

Die Länge des secundären Spectrums auf der Axe lässt sich nach CZAPSKI[2]) unter der Voraussetzung von zwei zu einem System combinirten unendlich dünnen und unendlich nahen Linsen folgendermaassen berechnen. Ist die Brennweite der Combination f, ist der mittlere Brechungscoëfficient der Glasart, aus welcher die erste Linse besteht, n', der für einen bestimmten kleinen Theil des Spectrums (z. B. von C bis F) gültige dn', sind für das Glas der zweiten Linse die entsprechenden Werthe n'' und dn'', sind ferner r_1', r_2' und r_1'', r_2'' die Radien der vier Linsenflächen, so ist nach (15), da $\Delta = 0$ wird,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

wenn f_1 und f_2 die Brennweiten der das System zusammensetzenden beiden Linsen sind, also nach (13)

$$\frac{1}{f} = (n' - 1)\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) + (n'' - 1)\left(\frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r_2''}\right).$$

Soll die Linse achromatisch sein, so darf f für die verschiedenen Farben nur einen Werth haben; es muss also jede Aenderung von $\frac{1}{f}$ zu Null werden, oder

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) dn' + \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r_2''}\right) dn'' = 0.$$

Setzt man hier $\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} = k'$ und $\frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r_2''} = k''$, ferner $m = \frac{n-1}{dn}$

[1]) A. KERBER, Bestimmung des Brechungscoëfficienten, für welche die chromatische Abweichung zu heben ist. Centralzeitung f. Opt. u. Mech. 1887, 8, pag. 49 und 97.

[2]) CZAPSKI, Mittheilungen über das glastechnische Institut in Jena. Zeitschr. für Instrumentenkunde 1886, 6, pag. 335. Handb. d. Physik, 2. Bd., 1. Abth., pag. 140.

gleich dem inversen Werth des Zerstreuungsverhältnisses, so wird, wenn man die beiden Gleichungen nach k' und k'' auflöst

$$k' = \frac{1}{f(m' - m'')dn'}; \quad k'' = -\frac{1}{f(m' - m'')dn''}.$$

Sollen mithin Strahlen von der Brechbarkeit n_a und n_b gleiche Brennweiten haben, so muss sein

$$\frac{1}{f_a} = (n_a' - 1)k' + (n_a'' - 1)k'' = \frac{1}{f_b} = (n_b' - 1)k' + (n_b'' - 1)k''.$$

Für einen Strahl, dessen Brechungscoëfficient n_x ist, wird aber

$$\frac{1}{f_x} = (n_x' - 1)k' + (n_x'' - 1)k'',$$

also

$$\frac{1}{f_a} - \frac{1}{f_x} = \frac{n_a' - n_x'}{f(m' - m'')dn'} - \frac{n_a'' - n_x''}{f(m' - m'')dn''}.$$

Da f_a, f_b und f_x nur wenig von einander verschieden sind, darf man setzen $f_a \cdot f_x = f_b \cdot f_x = f^2$ und erhält dann

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{f_x - f_b}{f} = \frac{1}{m' - m''}\left(\frac{n_a' - n_x'}{dn'} - \frac{n_a'' - n_x''}{dn''}\right).$$

Das Jenenser glastechnische Laboratorium hat nun für die von ihm hergestellten Gläser eine Tabelle aufgestellt und veröffentlicht, welche die Werthe des Brechungsverhältnisses der FRAUNHOFER'schen Linie D, also n_D, weiter der gesammten oder mittleren Dispersion von C bis F, also $(n_F - n_C)$, sodann die Grösse $\frac{n - 1}{dn} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, ferner die partiellen Dispersionen der Strahlen von der Wellenlänge der roten Kaliumlinie A_1 bis D, also $(n_D - n_{A_1})$, von D bis F, also $(n_F - n_D)$ und von F bis zu der blauen Wasserstofflinie G_1, also $(n_{G_1} - n_F)$, und endlich die Verhältnisse dieser partiellen Dispersionen zu der gesammten Dispersion enthält[1]). Es ist dadurch für diese Gläser die Länge des secundären Spectrums leicht zu finden. Da bei einigen dieser neuen Glassorten bei beträchtlicher Verschiedenheit der mittleren relativen Dispersion proportionale Dispersion erreicht ist, so lässt sich mit ihrer Anwendung eine Achromasie höherer Ordnung erhalten, bei welcher für drei Strahlen verschiedener Wellenlängen gleich grosse Bilder an dem nämlichen Orte entworfen werden. Es bleibt dann noch ein tertiäres Spectrum, welches aber im Vergleich zu dem secundären, wie es die jetzt gebräuchlichen Linsen geben, völlig zu vernachlässigen ist. Vor Einführung des Jenenser Glases hätte zu diesem Zwecke eine dritte Linse angewendet werden müssen.

Fehler der Objective. Ein Fehler, den ein Linsensystem aufweisen kann, ist compensirt, wenn sein Werth auf Null gebracht ist. Er ist nicht compensirt, wenn er in dem Sinne auftritt, den eine einfache convergente Linse mit gleichen Krümmungshalbmessern bedingen würde, übercompensirt, wenn er in dem entgegengesetzten Sinne sich zeigt. Nicht compensirte Fehler werden mit dem positiven, übercompensirte mit dem negativen Zeichen versehen. Zur Prüfung eines gegebenen Linsensystems sucht man die Bilder zweier unendlich entfernter Objectpunkte, von denen der eine in der optischen Axe, der andere seitlich davon liegt und von beiden ausgehend je zwei Strahlen, einen,

---

[1]) Productions- und Preisverzeichniss der Glasschmelzerei für optische und andere wissenschaftliche Zwecke. (Glastechnisches Laboratorium SCHOTT und GENOSSEN), Jena, vergl. CZAPSKI, Zeitschr. für Instrumentenkunde 1886, 6, pag. 338.

der ungebrochen durch das System geht und einen zweiten, seitlich auffallenden, welcher starke Brechung erleidet. Beide Strahlen werden beim Eintritt in das System in ihre Farben zerlegt und man verfolgt nun je zwei dieser farbigen Strahlen, die beliebig sein können, am besten die von der Brechbarkeit der FRAUNHOFER'schen Linien D und F, indem man ihren Weg auf trigonometrischem Wege bestimmt[1]).

Die Formeln dafür nebst Rechnungsbeispielen haben STEINHEIL und VOIT[2]) zusammengestellt. Ist der Farbenfehler des Axenstrahles compensirt, so müssen sich seine beiden Theile in einem Punkte, dem Brennpunkt des Systems schneiden. Daraus folgt aber noch nicht, dass sie auch dieselben Brennweiten haben, vielmehr ist das nur dann erreicht, wenn beide Strahlen auch dieselben Hauptpunkte haben. Von den Brennweiten aber hängen die Bildgrössen ab und somit ist der Fehler durch Farbenzerstreuung nur dann compensirt, wenn die Hauptpunkte beider übereinstimmen. Durch Verfolgung des Weges beider verschiedenfarbiger Axenstrahlen erhält man also mit den Brennweiten den Maassstab des Systemes, den etwa vorhandenen Farbenfehler und Farbenzerstreuungsfehler des Axenstrahls.

Verfährt man ebenso mit einem an dem Rand der Oeffnung auffallenden Strahl und findet, dass sich die gleichfarbigen Axen- und Randstrahlen in dem nämlichen Punkte schneiden, so ist dies ein Zeichen dafür, dass auch der Kugelgestaltfehler des Systemes compensirt ist. Auch der GAUSS'schen Bedingung ist Genüge gethan, wenn der so gefundene Schnittpunkt auf der Axe liegt. Würden nun aber die Hauptpunkte der gleichfarbigen Axen- und Randstrahlen nicht zusammenfallen, so würden die letzteren, indem sie verschieden grosse Bilder entwürfen, eine Verzerrung des Gesammtbildes bewirken. Ist auch dieser Fehler vermieden, so ist das System stabil achromatisch, weil Strahlen von zweierlei Farben, welche vor der Brechung einem weissen Lichtstrahl angehören, nach der Brechung wieder zu einem weissen Strahl zusammentreten und, einerlei ob sie Axen- oder Randstrahlen sind, durch denselben Punkt gehen. So lässt die Verfolgung der Randstrahlen die Helligkeit $\frac{z}{f}$ (s. pag. 716) den Kugelgestaltfehler, den Fehler durch Verzerrung, den Farbenfehler und den Farbenvergrösserungsfehler für einen Randstrahl finden.

Ebenso verfolgt man dann vier von dem seitlich gelegenen Objectpunkte ausgehende Strahlen, von denen der eine, der Hauptstrahl, ungebrochen durch das System hindurchgeht, der zweite oben, der dritte unten und der vierte an der Seite des Objectivs auffällt. Sie müssen sich in einem Punkte schneiden wenn das Bild deutlich sein soll. Es ist unverzerrt, wenn die Entfernung dieses Punktes von der Hauptebene der Brennweite gleich ist, weil der Punkt alsdann in der Bildfläche des Axenstrahles liegt. Schneiden sich dagegen der obere und untere Strahl nicht auf dem Hauptstrahl, so tritt der Kugelgestaltfehler ausser der Axe auf. Ist der letztere compensirt, liegt aber der Durchschnitt zweier seitlichen Strahlen in einem anderen Punkt des Hauptstrahles, wie der Durchschnittspunkt des oberen und unteren Strahles, so ist regelmässiger Astigmatismus vorhanden, der zum unregelmässigen wird, wenn der Durchschnittspunkt der seitlichen Strahlen oberhalb oder unterhalb des Hauptstrahles liegt. Stimmt der zweite Hauptpunkt und der zweite Brenn-

---

[1]) STEINHEIL und VOIT, a. a. O. I, pag. 57 ff.

[2]) Ebendas. I, pag. 79 ff.

punkt für den Strahl der zweiten der zur Untersuchung gewählten Farbe mit dem entsprechenden Punkt der ersten Farbe nicht überein, so muss auch für jenen die gleiche Arbeit vorgenommen werden. Auf diese Art erhält man also die Fehler durch Verzerrung, durch Undeutlichkeit, der sich in einer Bildkrümmung äussert, durch regelmässigen und unregelmässigen Astigmatismus und den Kugelgestaltfehler der Axe, sowie Fehler, die durch Combination der namhaft gemachten entstehen.

Für ausgedehnte Bilder eines Linsensystems lässt übrigens die Untersuchung des Bildpunktes in der Axe bereits erkennen, ob die am meisten störenden Fehler vermieden sind. Liegen nämlich der obere, untere und seitliche Strahl nach der Brechung symmetrisch, so geben sie ein deutliches Bild. Das ist aber dann der Fall, wenn ein Rand-, und ein Axenstrahl des der Axe parallelen Büschels proportinale Ablenkungswinkel und Austrittshöhen zeigen, wenn also für die beiden sich im Brennpunkt schneidenden Strahlen dasselbe Verhältniss der Sinus der Einfalls- und Ausfallswinkel besteht, da die Brechung dem Sinus dieser Winkel proportional stattfindet. Diese Bedingung nennen STEINHEIL und VOIT die Sinus-Bedingung.

Bestimmung der Brennweite des Objectivs. Von den vielen Methoden für die Bestimmung der Brennweite f einer Linse oder eines Linsensystemes, ist die folgende für das Fernrohr die geeignetste, da es bei ihrer Anwendung nicht nöthig ist, das Objectiv aus seinem Rohre zu nehmen. Man misst den Winkelabstand α zweier Fixsterne in gewohnter Weise und alsdann mit Hilfe des in der Brennebene des Objectivs befindlichen Mikrometers den linearen Abstand ihrer Bilder. Ist derselbe l, so ist nach (Fig. 189)

$$tang\, \alpha = \frac{l}{f}; \qquad f = \frac{l}{tang\, \alpha},$$

weil die Bilder der Sterne in der Brennebene liegen. Da nun α stets nur ein sehr kleiner Winkel sein kann, so ist die Brennweite des Objectivs gleich dem Verhältniss des linearen Abstandes und der scheinbaren Grösse ihrer Entfernung. Auch mit Hilfe der linearen und scheinbaren Grösse eines Planeten kann die Brennweite gefunden werden.

Fehler der Oculare. Die Anwendung zweier aus derselben Glasart bestehender Linsen macht die sphärische Aberration des Oculars so klein, dass sie vernachlässigt werden kann. Auf einen ebenso kleinen Werth lässt sich leicht die chromatische Aberration bringen. Ist Δ der Abstand der einander zugewendeten Hauptpunkte der beiden Linsen, deren Brechungsverhältnisse die Werthe n_1 und n_2 haben, deren Brennweiten f_1 und f_2 sind, so ist nach (15) die Brennweite des Systemes gegeben durch:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\Delta}{f_1 f_2}$$

oder wenn wir

$$\frac{1}{f} = \psi, \qquad \frac{1}{f_1} = \psi_1, \qquad \frac{1}{f} = \psi_2$$

setzen

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_1 \psi_2 \Delta.$$

Nun ist aber nach (13)

$$\psi_1 = (n_1 - 1)k_1, \qquad \psi_2 = (n_2 - 1) \cdot k_2,$$

wo

$$k_1 = \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}, \qquad k_2 = \frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r_2''},$$

somit

$$\psi = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2 - \Delta(n_1 - 1)(n_2 - 1)k_1 k_2.$$

Nehmen wir hier das vollständige Differential von ψ nach n_1 und n_2 und setzen es, um den Farbenzerstreuungsfehler zu compensiren, gleich Null, so wird

$$\frac{d\psi}{dn_1} + \frac{d\psi}{dn^2} = k_1 dn_1 + k_2 dn_2 - \Delta k_1 k_2 [dn_1 (n_2 - 1) + dn_2 (n_1 - 1)] = 0.$$

$$\Delta = \frac{k_1 dn_1 + k_2 dn_2}{k_1 k_2 [dn_1 (n_2 - 1) + dn_2 (n_1 - 1)]} = \frac{\frac{\psi_1 dn_1}{n_1 - 1} + \frac{\psi_2 dn_2}{n_2 - 1}}{\frac{\psi_1 \psi_2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)} [dn_1 (n_2 - 1) + dn_2 (n_1 - 1)]}$$

oder wenn wir wieder

$$\frac{dn}{n - 1} = \frac{1}{m}$$

setzen

$$\Delta = \frac{\frac{1}{m_1 f_1} + \frac{1}{m_2 f_2}}{\frac{1}{m_1 f_1 f_2} + \frac{1}{m_2 f_1 f_2}} = \frac{m_2 f_2 + m_1 f_1}{m_2 + m_1}.$$

Sind beide Linsen aus derselben Glasart hergestellt, so wird $m_1 = m_2$ und

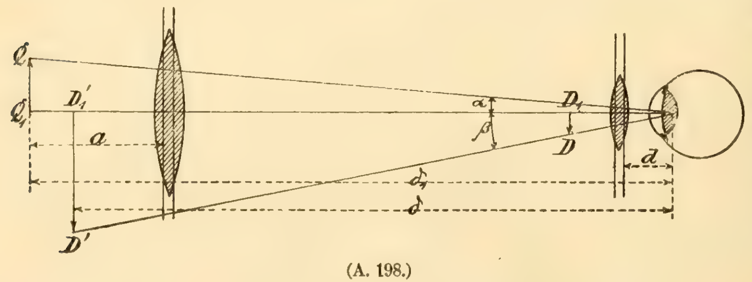
$$\Delta = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

also für ein achromatisches System

$$f = 2 \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \quad . \; . \; . \; . \tag{22}$$

In dem HUYGENS'schen Ocular verhält sich $f_2 : \Delta : f_1 = 2 : 3 : 4$. Es wird also $f_1 = 2 f_2$ und $\Delta = \frac{3}{2} f_2 = \frac{3}{4} f_1$ und somit ist die obige Bedingung erfüllt. Mit genügender Genauigkeit gilt dasselbe für das Ocular von RAMSDEN, wo sehr nahe $f_1 = \Delta = f_2$ ist. Völlige Gleichheit darf nicht bestehen, weil sonst der zweite Hauptbrennpunkt mit der unendlich dünnen Linse, die an Stelle der angewendeten ersten gesetzt werden kann, zusammen fiele. Macht man aber Δ etwas kleiner, wie f_1 oder f_2, so fällt das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes ein wenig vor das Ocular. Um trotzdem den Farbenzerstreuungsfehler ganz aufzuheben, ersetzte KELLNER in seinem orthoskopischen Ocular die dem Auge zugewandte Linse des Oculars durch eine achromatische, und nahm den Abstand beider Linsen gleich der Brennweite der letzteren, während er als erste eine biconvexe einsetzte. Indem er so etwas an Lichtstärke opferte, erhielt er ein grösseres Gesichtsfeld und eine geringere Verzerrung der Bilder.

Vergrösserung. Sind (Fig. 198) O und O_1 Objectiv und Ocular eines Fernrohrs, ist QQ_1 der durch dasselbe betrachtete Gegenstand, DD_1 das von dem Objectiv entworfene reelle, $D'D_1'$ das virtuelle Bild, unter welchem er dem in das Fernrohr blickenden Auge erscheint, K der Kreuzungspunkt



(A. 198.)

(Knotenpunkt), der in das Auge fallenden Strahlen, δ der Abstand, auf welchen das durch das Fernrohr blickende Auge, δ_1 derjenige, auf welchen das unbewaffnete, den Gegenstand fixirende Auge accommodirt ist, ist endlich a die

Enfernung des ersten Hauptpunktes des Objectivs vom Gegenstand, d die des Knotenpunktes des Auges vom zweiten Hauptpunkte des Oculars, so ist die Vergrösserung

$$v = \frac{\beta}{\alpha}$$

oder wenn wir statt der kleinen Winkel ihre Tangenten nehmen,

$$v = \frac{D'D_1'}{\delta} : \frac{QQ_1}{\delta_1} = \frac{D'D_1'}{QQ_1} \cdot \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{D'D_1'}{DD_1} \cdot \frac{DD_1}{QQ_1} \cdot \frac{\delta_1}{\delta}.$$

Sind nun φ_1 und φ_2 die Brennweiten des Objectivs und Oculars, so ist nach (5)

$$\frac{DD_1}{QQ_1} = -\frac{\varphi_1}{a - \varphi_1}; \qquad \frac{D'D_1'}{DD_1} = \frac{\delta - d + \varphi_2}{\varphi_2},$$

da $(\delta - d)$ negativ zu nehmen ist. Somit

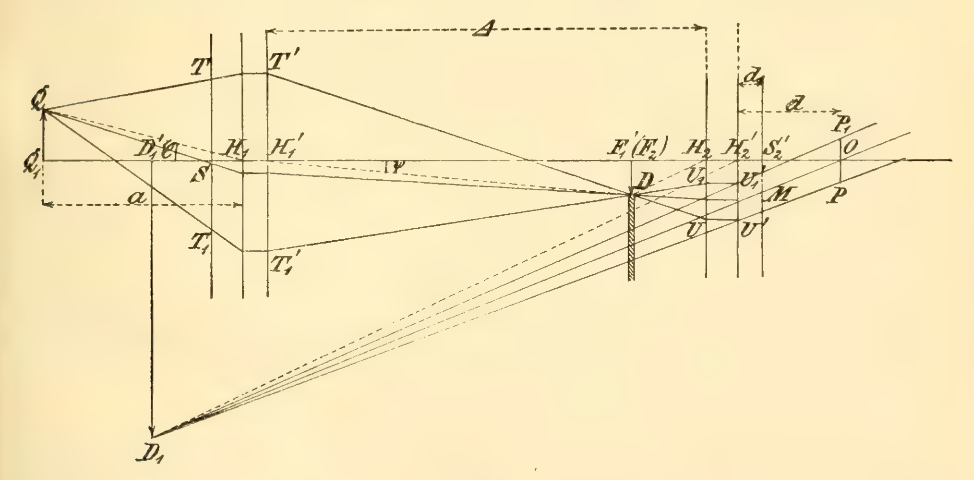
$$v = -\frac{\varphi_1}{a - \varphi_1} \cdot \frac{\delta - d + \varphi_2}{\varphi_2} \cdot \frac{\delta_1}{\delta} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{\delta_1}{a - \varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right) \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Da nun a und δ_1 sehr gross im Vergleich zu φ_1, d und φ_2 sehr klein sind, so wird $a - \varphi_1 = \delta_1$ und der Klammerausdruck $= 1$ und es ergiebt sich

$$v = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

wo das negative Zeichen der Ausdruck dafür ist, dass die Bilder umgekehrt erscheinen.

Ocularkreis. Augenpunkt. Stellt QTT_1 (Fig. 199) den Strahlenkegel vor, welcher vom Punkte Q ausgehend auf das Objectiv mit den Hauptpunkten



(A. 199.)

$H_1 H_1'$ auffällt, so setzen sich die ihn bildenden Strahlen in den Kegeln $T' T_1' D$ $D U_1 U$, und $U_1' U' P' P$ fort und es ist, wenn man den Axenstrahl $QSDO$ verfolgt, O der zu S conjugirte Punkt. Dasselbe gilt von den Punkten T und P, sowie T_1 und P_1, wobei T und T_1 an der Grenze des Objectivs gelegene Punkte seien, ebenso für alle Punkte des Begrenzungskreises der Basis des einfallenden Lichtkegels, und endlich für alle Punkte der Basisfläche. Es ist somit der Kreis $P_1 OP$ ein Bild der Oeffnung TST_1, und da das nämliche für alle von anderen Punkten des Objectes ausgehenden Strahlenkegel in derselben Weise gilt, so müssen alle durch TST_1 eintretenden Strahlenbüschel durch die Ebene $P' OP$ hindurchgehen. Sie nennt Biot den Augenkreis, Abbe die Aus-

trittspupille, auch die Bezeichnungen RAMSDEN'scher, BIOT'scher und Ocular-Kreis sind dafür in Gebrauch, während für den Kreis TST_1 von ABBE der Namen der Eintrittspupille in Vorschlag gebracht worden ist. Soll demnach eine möglichst grosse Lichtmenge in das Auge gelangen, so muss man es in der Entfernung $S_2'O$ vom Ocular aufstellen, wenn S_2' dessen Scheitel ist. Um dies mit Sicherheit zu erreichen, verlängert man das Ocularrohr bis etwa nach O und schliesst es durch eine kreisförmige Oeffnung vom Radius OP ab, auf solche Weise durch den Augendeckel den vortheilhaftesten Platz für das Auge bestimmend. Ebenso bringt man in F_1' eine Blende an, welche noch etwa übrig gebliebene zerstreute Lichtstrahlen zurückhält, und befestigt an ihr das Fadenkreuz.

Um die Lage des Augenpunktes zu berechnen, darf man beim Fernrohr SH_1 gegen $H_1'H_2$ vernachlässigen und erhält dann, indem man in (4) $x = -\Delta$, $x^1 = d$ und $-f = f_1 = \varphi_2$ setzt,

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{d} = \frac{1}{\varphi_2} \quad \ldots\ldots \tag{25}$$

und da beim astronomischen Fernrohr $\Delta - \varphi_2 = \varphi_1$ ist

$$d = \frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1}.$$

Bezeichnen wir ferner den Radius der Oeffnung des Objectivs mit R, den Abstand DF_1' mit R_1, den Radius des Ocularkreises mit r, so ist, wenn wir in (5) für $-f$ den Werth φ_1, bezw. φ_2 einsetzen,

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\varphi_1 - SH_1}{\varphi_1} = 1 - \frac{SH_1}{\varphi_1}; \qquad \frac{r}{R_1} = 1 - \frac{d}{\varphi_2}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_1 - SH_1}{\varphi_2 - d} \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

oder unter Vernachlässigung von SH_1

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - d} = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \dfrac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - \varphi_2}} = -\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2} = -\frac{\Delta(\Delta - \varphi_2)}{\Delta \varphi_2} = -\frac{\Delta}{d}$$

$$r = -\frac{d}{\Delta} R,$$

wo das Zeichen — bedeutet, dass für ein positives d der Ocularkreis ein umgekehrtes Bild der Oeffnung ist. Wegen $\Delta - \varphi_2 = \varphi_1$ wird auch

$$\frac{R}{r} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = v,$$

wo v die Vergrösserung ist, eine Beziehung, die zuerst von LAGRANGE aufgestellt wurde. Wird die Pupille des Auges nach P_1P gebracht, so wird in dieses alles durch die Eintrittspupille des Fernrohres gehende Licht einfallen. Das sollte, wenn es angeht, bei der Bestimmung des Durchmessers des Objectivs für eine beabsichtigte Vergrösserung berücksichtigt werden. Nimmt man z. B. den Radius der Pupille des Auges zu 1·5 *mm* an, so wird für eine zehnfache Vergrösserung der Objectivdurchmesser 3 *cm*, für eine 50fache 15 *cm*, für eine 100fache 30 *cm* betragen müssen, wobei freilich unberücksichtigt gelassen ist, dass sich die Pupille bei Betrachtung eines Sternes zusammenzieht, beim Anblicken des dunklen Himmels aber erweitert.

Die **Helligkeit** oder **Lichtstärke** eines Fernrohres ist das Verhältniss der Helligkeiten bei Beobachtungen mit freiem Auge und durch das Fernrohr. Sie

wird den möglichst grossen Werth erhalten, wenn der Ocularkreis gleich oder kleiner ist, wie die Pupille des beobachtenden Auges. Es muss demnach die von dem Auge aufgenommene Lichtmenge bei Benutzung des Fernrohres soviel mal grösser sein, als die Objectivöffnung grösser ist, wie die Oeffnung der Pupille. Ist also der Radius der Oeffnung wieder R, der der Pupille ρ, so nimmt sie im Verhältniss von $R^2 : \rho^2$ zu. Bei Objecten, welche wie der Mond oder die Planeten durch das Fernrohr vergrössert werden, wird sie aber wieder geringer im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der linearen Vergrösserung. Mithin ist die Lichtstärke des Fernrohres

$$L = \frac{R^2}{v^2 \rho^2} = \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2,$$

wobei ρ dem Durchmesser des Ocularkreises r gleich wird, wenn dieser die Grösse der Pupille erhielt. Fixsterne, welche im Fernrohr nie vergrössert erscheinen, werden also nur heller im Verhältniss von $R^2 : \rho^2$. Da aber, wenn man sie durch das Fernrohr betrachtet, zugleich die Helligkeit des Himmelsgrundes, auf welchem sie gesehen werden, mit dem Quadrat der Vergrösserung abnimmt, so wird ihre Sichtbarkeit durch starke Vergrösserungen doch erhöht. Für die Betrachtung lichtschwacher Sterne ist also die Anwendung starker Vergrösserungen vortheilhaft, dagegen wird man sich mässiger Vergrösserungen bedienen, wenn es sich um Körper von merklicher scheinbarer Grösse handelt. Da aber Lichtpunkte in Folge von Aberrationsresten oder Beugungserscheinungen flächenhaft ausgedehnt erscheinen, so hat auch bei ihnen die Anwendung starker Vergrösserungen ihre Grenze.

Gesichtsfeld. In Fig. 199 bildet der vom Punkte Q ausgehende Lichtkegel QTT_1 die Begrenzung der Strahlen, welche in das Auge gelangen, wenn der Radius von dessen Pupille OP oder kleiner als OP ist. Die Strahlen von Punkten, welche in grösserem Abstand von der Axe, wie QQ_1 liegen, werden von dem Diaphragma bei D zurückgehalten. Schlägt man nun mit $F_1'D$ einen Kreis um F_1', so enthält dessen Fläche die Spitzen aller der kegelförmigen Strahlenbüschel, welche nach ihrem Durchgang durch das Ocular so durch den Augenkreis gehen, dass sie denselben gleichmässig erfüllen. Der durch die Diaphragmaöffnung begrenzte doppelte Winkel $F_1'H_1'D = 2\psi$ wird also die Ausdehnung des mittelst des Fernrohres überblickten Complexes von Gegenständen ergeben, er führt den Namen des Gesichtsfeldes. Da er sehr klein ist, so darf man statt seiner seine Tangente nehmen und erhält somit

$$\psi = \frac{F_1'D}{F_1'H_1'}.$$

Verbindet man nun D mit H_2, so ist, wenn Q in unendlicher Entfernung liegt, auch der Abstand des Punktes D_1 unendlich gross und die Linien DH_2, $U_1'P_1$, MO und $U'P$ werden parallel. Da dieser Fall im Fernrohr verwirklicht ist, so wird Dreieck $F_1'DH_2 \sim S_2'MO$ und somit

$$F_1'D = F_1'H_2 \frac{S_2'M}{S_2'O}$$

$$\psi = \frac{F_1'H_2}{F_1'H_1'} \cdot \frac{S_2'M}{S_2'O} = \frac{\varphi_2(R_1 - r)}{(\Delta - \varphi_2)(d - d_1)}$$

wenn R_1 die halbe Oeffnung der letzten Ocularlinse, $d_1 = H_2'S_2'$ der Abstand ihres Scheitels von ihrem zweiten Hauptpunkte ist. Nun ist die Ebene des Objectes bezüglich des Objectivs conjugirt der Ebene $F_1'D$, also ist, wenn man in (4) $-f = f_1 = \varphi_1$, $x = -a$, $x' = \Delta - \varphi_2$ setzt,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta - \varphi_2} = \frac{1}{\varphi_1}; \quad \frac{1}{\Delta - \varphi_2} = \frac{a - \varphi_1}{a \varphi_1},$$

somit

$$\psi = \frac{R_1 - r}{d - d_1} \cdot \frac{a - \varphi_1}{a} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{R_1 - r}{d - d_1} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

da φ_1 gegen a vernachlässigt werden darf. Die Vergrösserung der Linsenöffnungen giebt also nicht ein beliebig vergrössertes Gesichtsfeld, da der durch $\frac{R_1 - r}{d - d_1}$ gegebene Winkel $S_2'OM$ eine gewisse Grösse nicht übersteigen darf, weil sonst zuviel sich nicht, wie centrale verhaltende Strahlen in das Auge gelangen. Man nimmt deshalb als äusserste Grenze die Tangente dieses Winkels zu $\frac{1}{4}$ an. Da mit dem Kleinerwerden von d der Winkel ψ wächst, so wächst das Gesichtsfeld mit der Annäherung des Augenkreises an das Ocular. Nach (25) wird dies erreicht, wenn φ_2 kleiner wird. Demnach sind, wie ein Blick auf die Fig. 193 und 195 zeigt, die aus zwei Linsen bestehenden Oculare einem aus einer Linse bestehenden vorzuziehen, muss das Gesichtsfeld des Huygens'schen Oculars grösser sein, wie das des Ramsden'schen.

Centriren und Fassen der Linsen. Ehe die Linsen in ihre Fassung gebracht werden können, müssen sie centrirt werden, d. h. ihr Rand muss so abgeschliffen werden, dass die Mittelpunkte der Krümmungshalbmesser der beiden Flächen in eine Gerade zu liegen kommen, welche mit der optischen Axe und der Drehungsaxe der Spindel, auf welcher centrirt wird, zusammenfällt. Es geschieht dies bei grossen Linsen vor dem Poliren, bei kleinen nachher. Dazu[1]) kittet man die Linse mit Siegellack auf ein Eisenfutter, die Centrirspindel, welches ungefähr die Hälfte der Linse deckt und so eingerichtet ist, dass man es in zwei zu seiner Drehungsaxe senkrechten Richtungen verschieben kann. Darauf legt man zwei Fühlhebel einander gegenüberstehend, den einen an ihre vordere, den anderen an ihre hintere Fläche an, und versetzt das Futter in Drehung. Bewegen sich alsdann die Fühlhebel während einer Umdrehung mit einander, so fällt die Linsenaxe nicht in die Drehungsaxe, muss also in der Spindel verrückt werden. Bewegen sie sich gegen einander, so ist die Linse nicht centrirt und die Beobachtung der Stellen der grössten Annäherung und Entfernung der Fühlhebel lässt die Richtung erkennen, in der sie verschoben werden muss. Erst wenn die Fühlhebel während einer Umdrehung ihre Lage nicht ändern, oder wenn die beiden an ihrer vorderen und hinteren Fläche entworfenen Spiegelbilder, z. B. eines Fensterkreuzes, während ihrer Drehung still zu stehen scheinen, ist die Lage der Linse die richtige und es kann mit dem Abschleifen begonnen werden. Ist es beendet, so muss der abgeschliffene Rand überall gleich dick sein.

Mit ebenso grosser Sorgfalt muss die Linse gefasst werden, da eine falsche Fassung dieselben Fehler ergeben kann, wie unregelmässige Kugelgestalt. Die Linse darf aber, wenn Verbiegungen verhindert werden sollen, in der Fassung nur an drei Punkten unterstützt sein. Am besten lässt man sie am vorderen Ring der Fassung aufliegen, während sie von dem hinteren mit drei Füsschen gehalten wird. Bei kleineren Linsen macht man diese Ringe aus Messing oder Aluminium, bei grösseren aus Stahl, dessen Ausdehnungscoëfficient dem des Glases näher kommt, wie der des Messings. Solche Linsen mit einer Feder zu

---

[1]) R. Steinheil, Centralzeitschr. für Opt. u. Mech. 1899. 14, pag. 159. — Schüli, ebendas. 1888. 8, pag. 182.

befestigen, welche die ungleiche Ausdehnung zwischen Glas und Stahl reguliren soll, empfiehlt sich aber deshalb nicht, weil dies nur auf Kosten der Centrirung geschehen kann, die dann um so weniger zu erhalten ist, als auch die Ausdehnungscoëfficienten von Crownglas und Flintglas nicht die nämlichen sind (0·00000954 und 0·00000788). R. STEINHEIL[1]) schlägt deshalb vor, die Befestigung beider Linsen in der Fassung durch radial gestellte Zinkstäbchen vorzunehmen, deren Länge den Unterschied der Ausdehnung der Gläser und des Stahles aufhebt. Ist α der Ausdehnungscoëfficient der Linse, α_1 der des Stahlringes, sind r und ρ die Radien beider und ist α_2 der Ausdehnungscoëfficient der Zinkstäbchen von der Länge $l = \rho - r$, so ist

$$\rho\alpha_1 t - r\alpha t = (\rho - r)\alpha_2 t = l\alpha_2 t$$

$$l = \frac{\rho\alpha_1 - r\alpha}{\alpha_2}$$

oder für $r = 1$, $\rho - 1 = l$,

$$l = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

(A. 200.)

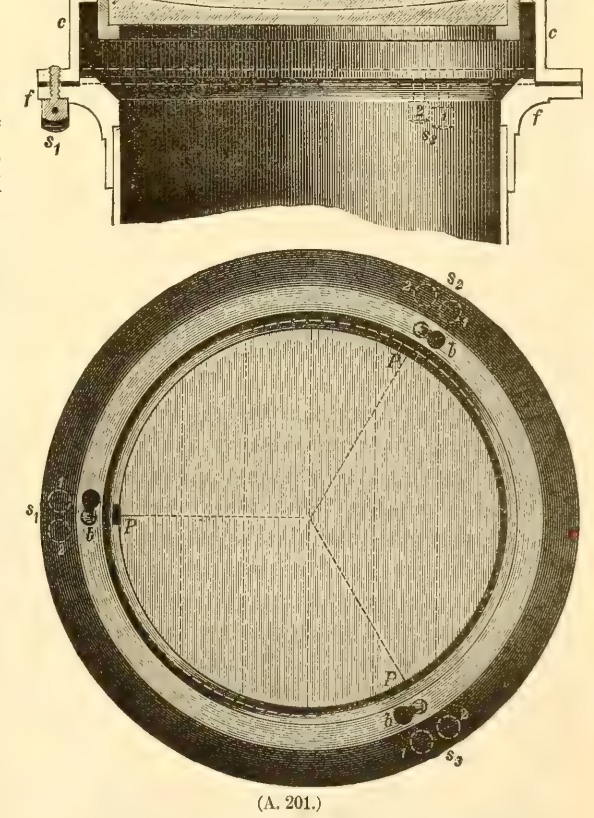
Für die angegebenen Brechungscoëfficienten in gusseiserner Fassung, deren Brechungscoëfficient $\alpha_1 = 0·00001061$, wird, da $\alpha_2 = 0·00002918$ ist, für die Flintglaslinse

$$l_f = \frac{1061 - 788}{2918 - 1061} = 0·147$$

und für die Crownglaslinse

$$l_c = \frac{1061 - 954}{2918 - 1061} = 0·0576.$$

so dass für $r = 25$ *cm*, $l_f = 3·675$ *cm*, $l_c = 1·440$ *cm* wird. Die Fassung dieser Linse wird am besten in drei Abstufungen abgedreht, von denen die äusserste und grösste einen Durchmesser von 57·35 *cm*, die mittlere für die Crownglaslinse einen solchen von 52·88 *cm* erhalten muss; der Halbmesser der innersten wird um soviel kleiner, als zur Auflage nothwendig ist, also etwa 50 *cm*. Fig. 200 zeigt den Wanddurchschnitt dieser Fassung. *a* und *b* sind die Linsen. Eine Fassung, die zugleich Drehungen der Linse um zwei zu einander und zur Fernrohraxe parallele Axen gestattet, zeigt Fig. 201 im Querschnitt und Grundriss. Sie ist von der Firma COOKE & SÖHNE in York angegeben. Auf



(A. 201.)

den Flantsch f des Fernrohres passt der Ring c, der durch drei Schraubenpaare s_1, s_2 und s_3 daran befestigt ist. Indem die mit 1 bezeichnete Schraube eines

[1]) R. STEINHEIL, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1893. 14, pag. 171.

jeden Paares in f festsitzt, die mit der Zahl 2 versehene dagegen durch f in c reicht, ist es möglich, durch Anziehen der einen und Lockern der anderen den Ring um eine der drei im Grundriss punktirten Linien zu drehen. Auf dem Ringe ist die Fassung des Objectivs durch drei Schrauben b befestigt. Sie halten b an c mittelst eines Bajonettverschlusses, so dass man zur Befestigung des Objectivs seine Fassung auf den Ring aufzusetzen und es ein wenig zu drehen hat, um es durch Anziehen der Schrauben b mit dem Fernrohr fest verbinden zu können.

Bestimmung der Vergrösserung und des Gesichtsfeldes. Nach dem oben Gesagten ergiebt sich leicht, wie es möglich ist, Vergrösserung und Gesichtsfeld eines Fernrohres durch Messung der Constanten seiner einzelnen Theile zu bestimmen. Doch kann dies auch leicht durch Beobachtungen geschehen, bei denen das Fernrohr nicht auseinander genommen zu werden braucht. Kommt es nicht auf die äusserste Genauigkeit an, so erhält man die Vergrösserung, indem man das Fernrohr auf einen in angemessener Entfernung senkrecht aufgestellten Maassstab richtet und ihn mit dem einen Auge durch dieses, mit dem anderen unmittelbar betrachtet. Beide Bilder werden zusammen gesehen, und man erhält die Vergrösserung ohne Weiteres in der Anzahl von Theilen, die in dem von unbewaffnetem Auge entworfenen Bild auf einen Theil des im Fernrohr gesehenen kommen. Dies Verfahren hat v. WALTENHOFEN [1]) dahin abgeändert, dass er vor dem Objectiv des auf grosse Entfernungen eingestellten Fernrohres eine schwache Sammellinse von etwa 2 *m* Brennweite befestigt und dann gerade so, wie eben verfährt. Die Vergrösserung ist dann, wie sich aus (5) und (24) leicht ergiebt, das Produkt der Quotienten der durch das Fernrohr und mit blossem Auge erhaltenen Theilstriche und der Abstände des Maassstabes vom Objectiv und vom Auge [2]). Man erhält so auch die Grösse des Gesichtsfeldes. Bei dem astronomischen Fernrohr kann man das Objectiv des auf Unendlich eingestellten Instrumentes durch ein Kartenblatt mit kleiner ausgeschnittener rechteckiger Oeffnung oder durch einen durchsichtigen Maassstab ersetzen. Das Verhältniss der Länge des Rechteckes oder eines Theiles des Maassstabes zu der Länge des von ihm durch das Ocular entworfenen Bildes ist dann die Vergrösserung. Misst man den Winkelabstand zweier Objecte mit dem Theodoliten zuerst direkt und dann den ihrer im Fernrohre sichtbaren Bilder, so erhält man ebenfalls die Vergrösserung. Um dies ins Werk zu setzen, benutzte GAUSS [3]) die Bilder der Gegenstände, welche erscheinen, wenn das Auge durch das Objectiv des Fernrohres blickt, während PORRO [4]) den Theodolithen so stellte, dass er den Winkel der aus dem Ocular tretenden, von jenen Gegenständen ausgehenden Strahlen maass, bei welcher Verfahrungsweise freilich viel Licht verloren geht. Auch mittelst des Satzes von LAGRANGE, dass die Vergrösserung gleich dem Verhältniss der Radien oder Durchmesser der Eintrittspupille (Objectivöffnung) und Austrittspupille (Augenkreises) ist, kann man die Vergrösserung finden. Dazu hat man den Durchmesser der Objectivfassung mit dem Zirkel zu messen, was keine Schwierigkeit hat, und sodann das Bildchen dieser Fassung, welches erscheint, wenn man das Auge vom Ocular des auf unendlich eingestellten Fernrohres zurückbewegt. Diese letztere Messung ist nicht leicht, sie gelingt aber ohne Weiteres mit Hilfe

---

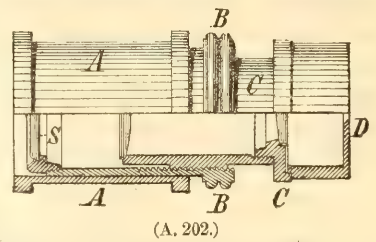
[1]) v. WALTENHOFEN, CARL's Repertorium für Experimentalphysik 8, pag. 184. 1872.

[2]) FR. KOHLRAUSCH, Leitfaden der praktischen Physik, 6. Aufl. Leipz. 1887, pag. 148.

[3]) GAUSS, Astronomische Nachrichten 1873. 2. Vergl. Dioptr. Unters., pag. 17.

[4]) FERRARIS, die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Leipz. 1879, pag. 195.

des in Fig. 202 dargestellten Dynameters von RAMSDEN, eines Apparates, der richtiger Dynamometer heissen müsste. Er besteht aus einer mit der Blende *D* versehenen zusammengesetzten Lupe *C*, die in der Hülse *B* vor- und zurückgeschraubt werden kann, und der in dieser Hülse befindlichen, auf Glas angebrachten Skala *S*. Die Hülse *B* kann in der weiteren *A* hin- und herbewegt werden. Um die Eintrittspupille zu messen, stellt man *C* auf *S* ein, setzt *A* auf das Ocularende des Fernrohres auf und verschiebt *B* so lange in *A*, bis das Bildchen auf der Scala sichtbar wird[1]).



(A. 202.)

Prüfung der Centrirung, Achromasie und des Astigmatismus. Mit einem gut centrirten (justirten) Objectiv ist es möglich, einen mässig hellen, ziemlich hoch stehenden Stern so einzustellen, dass er in der Mitte des Fadenkreuzes als Punkt erscheint. Verschiebt man nun das Ocular ein wenig, so treten um das Bild des Sternes Interferenzringe auf, in die es aufgelöst erscheint, und welche bei gelungener Centrirung symmetrisch um den Ort des Sternes liegen. Erscheinen dagegen die Ringe in der Weise, wie sie Fig. 203 zeigt, unsymmetrisch, so ist das Objectiv auf der schmaleren und helleren Seite dem Ocular zu nahe und muss also ein wenig gedreht werden[2]).


(A. 203.)

Zur Prüfung der Achromasie richtet man das Fernrohr am besten auf den Polarstern, indem man eine Vergrösserung anwendet, welche gleich dem 20- bis 30fachen Betrage der in Centimetern ausgedrückten Oeffnung ist. Ist nun das Objectiv in solcher Weise chromatisch übercorrigirt, dass dadurch die Farbenzerstreuung im Ocular und im Auge compensirt wird, so sieht man, nachdem das Ocular so weit eingeschoben worden ist, dass zwei bis drei Interferenzringe um den Ort des Sternes auftreten, eine gelbliche Scheibe mit schmalem, rothem Saume, eine Erscheinung, die bei herausgezogenem Ocular ebenso, nur ohne den rothen Saum auftritt. Bei vorsichtigem Herausziehen des Oculars erscheint der Stern in dem Augenblick, wo er sich auszubreiten beginnt, als kleines, hellrothes Scheibchen, welches bei weiterem Herausziehen blau wird. Beim Auftreten von fünf bis zehn Interferenzringen erscheint das gelblich weisse Ringsystem von einem blauen Schimmer überdeckt, welcher die äusseren Ringe indessen nicht erreicht. Der Polarstern empfiehlt sich für solche Prüfung, weil er stets hoch genug steht und von weisser Farbe ist, bei farbigen Sternen sind diese Erscheinungen natürlich andere. Ist hierbei die Centrirung mangelhaft, so erscheint das Ringsystem auf der einen Seite stärker roth, als auf der anderen, bei hellen Objecten kann auf der anderen Seite grün auftreten, ja es kann ein vollständiges Spectrum erscheinen. Aus solchen Beobachtungen hat man zu schliessen, dass das Centrum der Flintglaslinse nach der Seite des rothen Saumes gegen das des Crownglases verschoben ist.

Um sodann zu bestimmen, welche Farben im Fernrohr compensirt sind, bringt C. W. VOGEL[3]) einen geradsichtigen Prismensatz vor dem Ocular an, nachdem

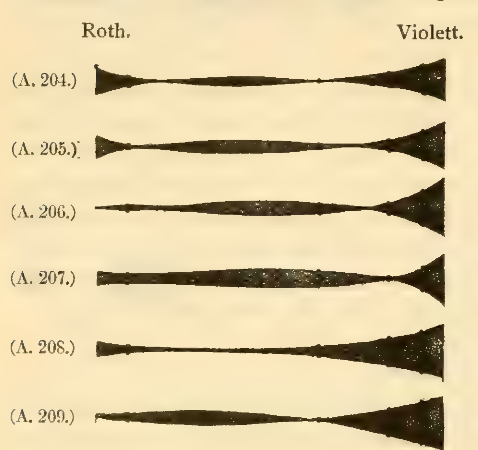
---

[1]) GEHLER's physikal. Wörterb. Bd. 9, pag. 1779. — CZAPSKI, Handbuch der Physik, herausg. von WINKELMANN, Bd. 2, 1. Abth., pag. 301.

[2]) COOKE & SÖHNE, Die Justirung und Prüfung von Fernrohrobjectiven. Deutsch von STRAUBEL, Zeitschr. für Instrumentenkunde 14, pag. 113. ff. 1894.

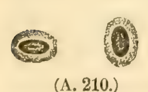
[3]) VOGEL, Ueber eine einfache Methode zur Bestimmung der Brennpunkte und der Abweichungen eines Fernrohrobjectivs für Strahlen verschiedener Brechbarkeit. Berl. Monatsber. April 1880. Vergl. Zeitschr. für Instrumentenkunde 1, pag. 70. 1888.

das Fernrohr möglichst scharf auf einen Stern eingestellt worden ist. Man erblickt dann in dem Prismensatz das Bild des Sternes in der Form der Fig. 204, ein Spectrum, welches an den Punkten zusammengezogen ist, an welchen compensirte Strahlen liegen. Da die FRAUNHOFER'schen Linien gut sichtbar bleiben, so lässt sich die Lage dieser Punkte völlig scharf bestimmen. Zieht man alsdann das Ocular ganz wenig heraus, so erhält man die Spectren Fig. 205—207. Bringt man am Auszugsrohre des Oculars eine Theilung an, so erhält man aus der Verschiebung, welche nöthig ist, um die Einschnürung vom Blau nach dem Violett zu verlegen, die Entfernung der Vereinigungspunkte der blauen und violetten Strahlen und kann dann die Grösse der Zerstreuungskreise berechnen. Während Fig. 204—207 mit dem SCHRÖDER'schen Objectiv des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam erhalten worden sind, ergaben sich Fig. 208 und 209 auf dieselbe Weise am FRAUNHOFER'schen Refractor der Berliner Sternwarte und bestätigen das, was über die Art, wie FRAUNHOFER die Achromasie seiner Fernrohre erhielt, gesagt wurde. Auch lässt sich mittelst dieser Methode eine genaue Focaleinstellung eines Fernrohres erreichen. Bei Objectiven unter fünf Zoll Oeffnung macht sich jedoch der Einfluss des chromatischen Fehlers des Oculars und des Auges bemerklich, und deshalb hat VOGEL[1]) auf CZAPSKI's Vorschlag zunächst mit dem zu benutzenden Ocularspectroskop die scheinbare Abweichung des von einem Quecksilbertröpfchen reflektirten Sonnenbildchens für sich bestimmt und von dem am Objectiv erhaltenen Resultat in Abzug gebracht.

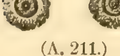


(A. 204.) (A. 205.) (A. 206.) (A. 207.) (A. 208.) (A. 209.)

Mit der Untersuchung, ob das Ocular Astigmatismus hat, muss die Prüfung des Beobachters auf denselben Fehler Hand in Hand gehen. Dazu benutzt er am besten eine geringe Vergrösserung, richtet das Auge auf einen in der Nähe des Zeniths befindlichen, nicht funkelnden Stern und verschiebt das Ocular. Wird das Bild des Sternes elliptisch und drehen sich die Axen der Ellipse bei Drehung des Kopfes, so besitzt das Auge Astigmatismus, den man übrigens auch nach den in HELMHOLTZ's physiologischer Optik angegebenen Methoden finden kann. Dreht sich die Ellipse mit Drehung des Oculars, so hat dieses Astigmatismus. In der nämlichen Weise erhält man den Astigmatismus des Objectivs, untersucht dann aber bei starker Vergrösserung. Ist solcher vorhanden, so zeigt sich die in Fig. 210 dargestellte Lichtvertheilung vor und hinter dem Brennpunkt.

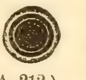

(A. 210.)

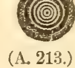
Das Vorhandensein von sphärischer Aberration wird durch Untersuchung der Bilder eines Sternes von mässiger Helligkeit ausserhalb der Brennebene bei geringer Vergrösserung gefunden. Fehlt sie, so erhält man auf beiden Seiten des Brennpunktes die nämlichen Erscheinungen, wie sie in Fig. 211 abgebildet sind, wenn der oben erwähnte blaue


(A. 211.)

[1]) VOGEL, Das secundäre Spectrum von Objectiven, die C. BAMBERG aus neuen Jenenser Gläsern hergestellt hat. Vierteljahrsschrift der astron. Gesellsch. 1888, 22, pag. 142. Vergl. CZAPSKI, Zeitschr. für Instrumentenkunde 8, pag. 246. 1888.

Schein durch Vorhalten eines gelben Glases weggenommen wird, abgesehen von dem ebenfalls erwähnten rothen Rande, der sichtbar wird, wenn sich das Ocular innerhalb der Brennweite befindet. Treten diese Erscheinungen dagegen in anderer Weise auf und ist demnach das Vorhandensein sphärischer Aberration zu befürchten, so wählt man zur genaueren Untersuchung die Einstellungsebene am besten so, dass drei oder vier Interferenzringe sichtbar werden. Ist die Befürchtung begründet, so erscheinen innerhalb der Brennweite die beiden äusseren Ringe massiver und heller, als die inneren, wie dies Fig. 212 darstellt, während ausserhalb die entgegengesetzte durch Fig. 213 vor Augen geführte Erscheinung eintritt. Das deutet darauf hin, dass, da die Randstrahlen kürzere Vereinigungsweiten haben, wie die Centralstrahlen, positive Aberration vorliegt. Bei negativer kehren sich die Erscheinungen um. Sind Zonen von verschiedener Brennweite vorhanden, so verfährt man ebenso, stellt aber das Ocular so ein, dass eine grössere Anzahl von Interferenzringen auftritt. Vorhandene zonale Abweichung kennzeichnet sich alsdann dadurch, dass einzelne Ringe sehr schwach, andere sehr stark erscheinen und ihre Rolle vertauschen, wenn das Ocular nach der anderen Seite des Brennpunktes verschoben wird, wie Fig. 214 und 215 dies darstellen. Endlich können in den Gläsern vorhandene Spannungen durch Verzerrungen der Ringe erkannt werden. Da aber ein jedes seine Temperatur ändernde Objectiv solche zeigt, so muss ihm längere Zeit gelassen werden, bis es nach eingetretener Erwärmung oder Abkühlung eine gleichmässige Temperatur wieder angenommen hat.


(A. 212.)


(A. 213.)


(A. 214.)


(A. 215.)

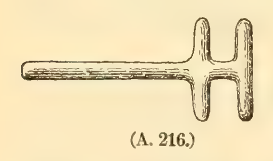
Herstellung optischer Gläser. Einer der wichtigsten Fortschritte, den FRAUNHOFER in der Herstellung optischer Gläser gemacht hatte, war die Herstellung gut gemischter, im Tiegel geschmolzener amorpher Glasstücke gewesen. Die frühere Methode, aus Spiegelglasscheiben zu diesem Zwecke homogene Theile auszusuchen, wurde dadurch beseitigt. Auch in der zu seiner Zeit grossen Einförmigkeit in der Zusammensetzung der Gläser, für die nur Kieselsäure, Kali, Kalkerde, Blei und wohl noch Thonerde verwendet wurde, scheint er Wandlung geschaffen zu haben, doch hinderte sein früher Tod ein Bekanntgeben und Fortbilden der von ihm gemachten Erfahrungen, und so blieb, bis auf die Versuche von STOKES und HARCOURT[1]), die fälschlich der Titansäure eine Wirkung zuschrieben, welche der Phosphorsäure zukam, und dadurch für die angewandte Optik ergebnisslos blieben, alles bis zur Gründung des glastechnischen Instituts im Jahre 1884 durch SCHOTT und ABBE beim Alten.

Die neue Anstalt, die von der preussischen Regierung mit dem bedeutenden Betrag von 60000 Mark unterstützt worden war, fand zunächst durch vielfache Versuche, dass ausser den früher gewöhnlich benutzten Stoffen auch noch andere in Zusätzen von nicht unter 10$\frac{0}{0}$ dem Glase einverleibt werden konnten, nämlich Bor, Phosphor, Lithium, Magnesium, Zink, Cadmium, Baryum, Strontium, Aluminium, Beryllium, Eisen, Mangan, Cer, Didym, Erbium, Silber, Quecksilber, Thallium, Wismuth, Antimon, Arsen, Molybdän, Niob, Wolfram, Zinn, Titan, Uran und Fluor. Zur Beseitigung des secundären Spectrums kamen aber nur wenige davon in Betracht, Borsäure, deren Zusatz zum Flintglas eine Contraction des blauen bei Erweiterung des rothen Endes des von ihm entworfenen Spectrums verursachte, und Phosphorsäure, welche im entgegengesetzten Sinn wirkte, also

[1]) CZAPSKI, Zeitschr. für Instrumentenkunde, 6, pag. 294, 346. 1886.

für das zugehörige Crownglas verwendbar war. Wohl hat ein Kalizusatz zum Crownglas dieselbe Wirkung, macht aber das Glas hygroskopisch, sodass es, ein Fehler, den namentlich die FEIL'schen Gläser zeigten, nach einigen Jahren des Gebrauchs erblindet. Andererseits ergab sich, dass hygroskopische Gläser durch Zusatz von Thonerde, Zinkoxyd oder Baryterde gegen den Einfluss der Atmosphäre widerstandsfähiger gemacht werden konnten. Die geringe relative Dispersion der Barytflintgläser liess dann einen so geringen Zusatz von Bleioxyd behufs Vermehrung ihres Brechungsvermögen zu, dass die frühere gelbliche Färbung derselben wegfiel. Den irisirenden dünnen Anflug auf dem Flintglas, aus dem sich mit der Zeit trübe Bleiflecken oder dendritische Bildungen zwischen den Gläsern des Objectivs entwickeln, dürften somit die Jenenser Gläser nicht erhalten[1]).

Die das Glas zusammensetzenden Stoffe mussten nun durch einen richtig geleiteten Schmelz- und Rührprocess zu einer gleichmässigen Masse vermischt werden. Dabei zeigte sich, dass die Zusammensetzungsgrenzen, innerhalb welcher die glasige Erstarrung eintritt, so eng gezogen sind, dass eine Anzahl Phosphat- und Boratgläser ausgeschlossen werden musste. Auch war zu vermeiden, dass die schmelzenden Substanzen die Wände des Schmelzgefässes bei den hohen Hitzegraden angriffen, und auch dieser Umstand musste bei der Wahl der zu mischenden Stoffe sorgfältig berücksichtigt werden. Die Erhitzung wird nach dem Regenerativsystem von FR. SIEMENS vorgenommen und die geschmolzene Masse durch einen Porcellanstab von der in Fig. 216 dargestellten Form, der eine rasch rotirende Bewegung ausführt, gleichzeitig aber um 5—10 *cm* gehoben werden kann, durcheinandergearbeitet. Nur so war es zu vermeiden, dass sich fadenförmige Streifen von anderer brechender Kraft, wie die Hauptmasse, dass sich Schlieren oder Wellen bildeten, andererseits mussten aber Stoffe sorgfältig ausgeschlossen werden, welche bei dem hohen Hitzegrad in Dampfform entweichen.



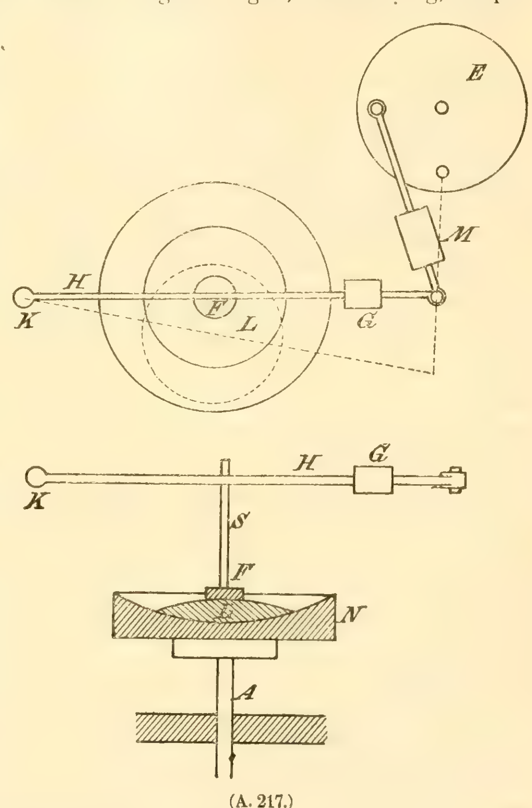
(A. 216.)

Fast noch grössere Schwierigkeit bot das Abkühlen der geschmolzenen Masse. Dabei musste sie frei von Trübungen, Krystallausscheidungen oder Bläschen bleiben, aber es durften auch ihre kleinsten Theilchen im Innern nicht in einen Zustand von Dehnung oder Pressung geraten, weil alsdann Stücke von verschiedenem Brechungsvermögen in demselben Glasstück auftreten konnten. Während man früher die von SCHOTT Rohkühlung genannte Art der Abkühlung ausschliesslich verwendete, wobei der Ofen den in ihm aufgespeicherten Wärmevorrat langsam an die Umgebung abgab, so führte das Jenenser Glasinstitut nunmehr die Feinkühlung ein, indem es Vorrichtungen traf, die erlaubten, die Gläser beliebig lange in einem Raum von genau bekannter Temperatur zu belassen und mit Hilfe einer selbstthätigen Vorrichtung sie einer beliebig langsamen Abkühlung zu unterwerfen. Indem die neuen Gläser nun auch ein Wiedererwärmen bis zur beginnenden Schmelzung ohne Schaden vertrugen, wurde es möglich, ihnen, wie es in Paris längst üblich war, dadurch ihre Gestalt zu geben, dass man sie in rothglühendem Zustande zwischen entsprechend geformten Metallmassen presste. Nachdem dann durch eingehende Versuche die Tempera-

[1]) SAFARIK, Ueber Construction von Teleskopspiegeln nach neuen Grundsätzen, Centralb. für Optik und Mechanik 15, pag. 230. 1894.

turen festgesetzt worden waren, in deren Nähe der Wärmeabfall auf das Sorgfältigste geregelt werden musste, wenn die Spannung beseitigt werden sollte, erhielt man Gläser, welche keine Spannungserscheinungen zeigten. Solche lassen sich leicht mit Hilfe zweier NICOL'scher Prismen nachweisen. Ist keine Spannung vorhanden, so erscheint das Gesichtsfeld bei parallelen Nicols gleichmässig hell, bei gekreuzten dunkel, regelmässige Spannung verräth sich bei der letzteren Stellung durch Auftreten eines regelmässigen dunkeln Kreuzes in der Mitte des Gesichtsfeldes, unregelmässige durch ein ebensolches verzerrtes Kreuz[1]).

Bearbeitung der optischen Gläser. Um den Linsen ihre genauere Form zu geben, schleift man sie zunächst in einer kugelförmigen, aus Messing, Kupfer oder Eisen hergestellten Schale, die nach einem etwa den Radius der Fläche gebenden Leerbogen ausgedreht ist. Als Schleifmittel dient grober Schmirgel oder Quarzsand. Um aber von der rauheren zur immer glatteren Fläche zu gelangen, muss immer feinerer Schmirgel verwendet werden, den man in den nöthigen Abstufungen durch vorsichtiges Schlemmen erhält. Man füllt zu dem Ende trocknen Schmirgel in ein etwa 30 *cm* hohes Gefäss bis zu einer Höhe von 2—3 *cm*, giesst Wasser darauf und rührt um. Zwanzig Minuten danach giesst man das Wasser ab und wiederholt diese Manipulation so lange, bis das Wasser klar bleibt. Der sich aus dem Wasser absetzende »zwanzig-Minuten-Schmirgel« ist der zarteste. Verfährt man dann ebenso, indem man nunmehr 10, dann 5, 3, 1 und ½ Minute stehen lässt, so erhält man immer gröberes



(A. 217.)

Schleifmaterial. Mit jeder dieser Schmirgelsorten schleift man dann das Glas so lange, bis seine ganze Fläche an keiner Stelle mehr ein gröberes Korn aufweist. Das Schleifen kann aus der Hand geschehen, indem man mittelst dazu hergestellter Leerbögen sich fortwährend überzeugt, ob die richtige Krümmung erreicht wird. Für das Ausschleifen von Hohlflächen benutzt man auch Frässrädchen von passendem Radius, erhaben zu schleifende Linsen kann man an eine nach allen Richtungen frei bewegliche Stange aufhängen, deren Länge gleich dem Radius der zu erhaltenden Kugel ist. In ähnlicher Weise schliff FRAUNHOFER seine Gläser. Seine dazu verwendete Maschine giebt Fig. 217. Die Linse

---

[1]) SCHOTT, der Einfluss der Abkühlung auf das optische Verhalten des Glases und die Herstellung gepresster Linsen in gut gekühltem Zustand. Zeitschr. für Instrumentenkunde 10, pag. 41. 1890; Studium einiger physikalischer Eigenschaften von Gläsern und über ein neues werthvolles Glas für die Thermometrie. Ebenda 11, pag. 330. 1891.

L ist mittelst des Futters F mit der Stahlstange S in Verbindung, welcher durch den Stahl H und die excentrische Scheibe E eine hin- und hergehende Bewegung ertheilt wird, während sie in die um A rotirende Schale N gedrückt wird. Der Druck, mit dem dies geschieht, wird durch das Gewicht G geregelt. Damit sie demselben folgen kann, ist das eine Ende des Hebels in dem Kugelgelenk K befestigt. Indem die Verbindungsstangen von H mit E mit entgegengesetztem Gewinde in die Muffe M geschraubt sind, ist es möglich, die hin- und hergehende Bewegung nach Bedürfniss zu vergrössern [1]. Grössere Linsen kittet man anstatt an das Futter mit Pech in eine Glasschale, um so Verbiegungen während des Schleifens zu vermeiden.

Linsen von sehr grossem Radius müssen aus der Hand geschliffen werden. Man prüft ihre Form mit dem Fühlhebel, oder wenn gute Probeflächen zur Verfügung stehen, was diese Prüfung sehr erleichtert, mit dem Sphärometer.

Damit nun die Linse durchsichtig werde, ist sie noch zu poliren. Dies geschieht mit Eisenoxyd, wie solches unter dem Namen Polirroth oder Kolkothar in den Handel kommt. Man trägt in die Schleifschale eine Schicht von Pech oder Kolophonium warm auf und drückt darin, so lange sie noch warm ist, die mit Wasser benetzte feingeschliffene Fläche ab. Darauf schneidet man Rinnen in die Pechschicht, um das Wasser und das Polirmittel zu verhindern aus der Form zu treten. Kleine Ungenauigkeiten können dann noch durch Poliren in eine Schale von anderer Grösse entfernt werden. Hat man Probegläser zur Verfügung, so findet man sie leicht, wenn man die Linse auf das Probeglas legt, welches die entgegengesetzte Krümmung hat. Ein Zusammendrücken beider an dem einen Ende ruft dann die NEWTON'schen Farbenringe hervor, die nur dann keine Unregelmässigkeiten zeigen, wenn die Krümmung beider Linsen dieselbe ist. Es versteht sich von selbst, dass man diese Prüfung erst dann vornehmen darf, wenn die Linse völlig abgekühlt ist [2]. H. SCHRÖDER [3] benutzt das Poliren auch noch dazu, die sphärische Abweichung in Doppelobjectiven in möglichst vollkommener Weise aufzuheben. Er stellt die drei dem Ocular abgekehrten Flächen streng sphärisch her, während er für die vierte unter der Voraussetzung, dass auch sie sphärisch sei, einen kleinen Rest sphärischer Uebercorrection in Rechnung lässt. Darauf berechnet er die Differenzen zwischen der noch unbekannten krummen Fläche und der sphärischen für eine Anzahl Zonen des Objectivs und schleift diese mittelst seiner Polirmaschine an, mit dem Spiegelfühlhebel immer wieder controlirend. Eines ähnlichen Verfahrens bedient sich auch CLARK. Kleinere Objective schleift SCHRÖDER so, dass das Minimum der sphärischen Aberration stattfindet und erreicht dadurch, unter Anwendung von Jenenser Gläsern (Crown, No. 16 und Flint, No. 65), dass die Innenflächen fast gleich werden, und da sie nur mit dem Rand aneinander liegen, die sonst zwischen sie zu bringenden Stanniolblättchen wegfallen können.

Theorie der Spiegelteleskope. Die Eigenschaft der Spiegel, keinen Achromatismus zu zeigen, welche, wie wir sahen, NEWTON bewog, ihnen den Vorzug vor den Refractoren zu geben, hat sie, namentlich in England, ihren Platz neben

---

[1]) MEISEL, Lehrbuch der Optik. Weimar, 1889. pag. 422.

[2]) R. STEINHEIL, Allgemeines über die Herstellung optischer Instrumente. Centralzeitung für Optik und Mechanik 14, pag. 158. 1893.

[3]) H. SCHRÖDER, Einige Bemerkungen über Teleskope. Zeitschr. für Instrumentenkunde 14, pag. 154. 1892.

jenen behaupten lassen, ja es hat den Anschein, als ob sie in neuerer Zeit noch mehr in Aufnahme kommen würden, wie früher. Für Winkelmessungen sind sie freilich nicht geeignet, wohl aber geben sie überaus scharfe, unverzerrte Bilder von den Himmelskörpern. Es sei (Fig. 218) JJ' der Durchschnitt einer sphärischen spiegelnden Fläche mit einer durch ihren Mittelpunkt C gehenden senkrechten Ebene, Q ein leuchtender Punkt, D dessen Bild, beide in der Axe, es sei ferner JP eine von J auf die Axe gefällte Senkrechte, dann ist $QJC = CJD = \alpha - \beta$, $JP = h = r \sin a$, $CP = r \cos a$ und

(A. 218.)

$$tang\, \beta = \frac{JP}{QP} = \frac{r \sin \alpha}{l + r \cos \alpha}.$$

Es ist weiter im Dreieck CJD wegen $JDP = 2\alpha - \beta$

$$r : CD = \sin(2\alpha - \beta) : \sin(\alpha - \beta)$$

$$CD = r - b = \frac{r \sin(\alpha - \beta)}{\sin(2\alpha - \beta)} = \frac{r(\sin \alpha - \cos \alpha\, tang\, \beta)}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\, tang\, \beta}$$

oder, wenn man den Werth von $tang\, \beta$ einsetzt und umformt

$$r - b = \frac{rl}{2l \cos \alpha + r} \quad \ldots \quad (26)$$

Setzt man hier $a - r$ für l, so wird

$$b = r - \frac{ar - r^2}{2(a - r)\cos \alpha + r} = r\, \frac{a(2\cos \alpha - 1) + 2r(1 - \cos \alpha)}{2(a - r)\cos \alpha + r}$$

oder da $h = r \sin \alpha$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{h_2}{r_2}} = 1 - \frac{h^2}{2r^2}$ unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{h^2}{r^2}$

$$b = r\, \frac{\left(a - \frac{h^2}{r^2} a\right) + \frac{h^2}{r}}{2(a - r)\left(1 - \frac{h^2}{2r^2}\right) + r^2} = r\, \frac{a - (a - r)\frac{h^2}{r^2}}{(2a - r) - (a - r)\frac{h^2}{r^2}}$$

und wenn man den Nenner nach der binomischen Reihe entwickelt und die höheren Potenzen von $\left(\frac{h^2}{r^2}\right)$ vernachlässigt,

$$b = \frac{ar}{2a - r} - \left(\frac{a - r}{2a - r}\right)^2 \frac{h^2}{r}.$$

Da nun die Brennweite des Spiegels $f = \frac{1}{2} r$ ist, so wird

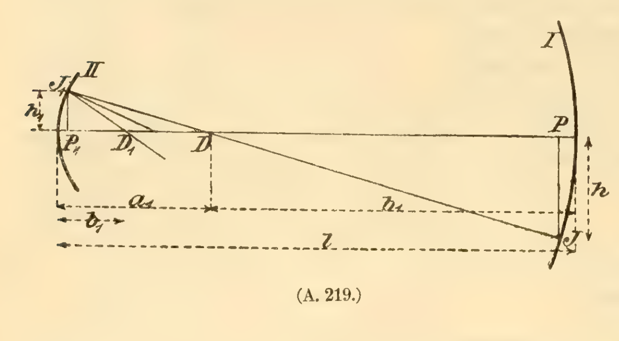
$$b = \frac{af}{a - f} - \frac{1}{8}\left(\frac{a - 2f}{a - f}\right)^2 \frac{h^2}{f} \quad \ldots \quad (27)$$

aus welcher Formel für $h = 0$ die für die Centralstrahlen des Hohlspiegels gültige folgt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \ldots \quad (28)$$

Die Spiegelteleskope bestehen nun aber meist aus zwei Spiegeln. Da die Brennweite des grösseren Hohlspiegels immer sehr gross ist, so kann h gegen f

vernachlässigt, Formel (28) also auf ihn angewendet werden. Ist nun JJ_1 ein von dem grossen Spiegel I, Fig. 219, auf den kleinen II reflektirter Strahl, und wird er von II längs $J_1 D_1$ reflektirt, so ist für diesen nach (27)



(A. 219.)

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - \frac{1}{8}\left(\frac{a_1 - 2f_1}{a_1 - f_1}\right)^2 \frac{h_1^2}{f_1}$$

und da sich mit genügender Genauigkeit verhält $h : b = h_1 : a_1$, so ist auch

$$h_1 = \frac{a_1}{b}\, h = \frac{a_1 (a - f)}{af}\, h,$$

wenn a der Abstand des Objectes ist und also

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - \frac{1}{8}\left(\frac{a_1 - 2f_1}{a_1 - f_1}\right)^2 \left(\frac{a - f}{a}\right)^2 \left(\frac{a_1}{f}\right)^2 \frac{h^2}{f_1}.$$

Da die Gegenstände stets in grosser Entfernung vom Spiegel I liegen, so darf man $b = f$ setzen und da dann $a_1 = l - f$ wird, f aber gegen a zu vernachlässigen ist, so ergiebt sich

$$b_1 = \frac{(l - f) f_1}{l - f - f_1} - \frac{1}{8}\left(\frac{l - f - 2f_1}{l - f - f_1}\right)^2 \left(\frac{l - f}{f}\right)^2 \frac{h^2}{f_1}.$$

Je nachdem hier f_1 positiv, unendlich oder negativ wird, gilt diese Formel für das Gregory'sche, Newton'sche und Cassegrain'sche Teleskop, da es bei dem an zweiter Stelle genannten Apparat hinsichtlich der Entfernung keinen Unterschied macht, dass die Strahlen durch den Planspiegel in eine um 90° gegen die Axe geneigte Bahn gelenkt werden. Die Bilder des kleinen Spiegels des Gregory'schen und Cassegrain'schen Teleskops werden dagegen im Scheitel des grossen Spiegels entworfen und es ist somit für sie $b_1 = l$, so dass sich für den Axenstrahl ergiebt, für welchen $h = 0$ wird

$$l(l - f - f_1) = (l - f) f_1$$

$$f_1 = \frac{l(l - f)}{2l - f}$$

(A. 220.)

und somit für einen in Abstand h von der Axe auf I auffallenden Strahl

$$b_1 = l - \frac{1}{8}\,\frac{2l - f}{l - f}\,\frac{h^2}{l}.$$

Die Grösse des von einem Hohlspiegel entworfenen Bildes ergiebt sich mit Hilfe von Fig. 220 folgendermaassen. Ist Q_1 ein ausserhalb der Axe liegender Lichtpunkt, so ist, da r sehr gross ist. DD_1 das Bild von QQ_1. Nun ist nach (26)

$$CD_1 = \frac{r l_1}{2\, l_1 \cos(\alpha + \beta) + r}$$

aber

$$y_1 = DD_1 = CD_1 \sin\beta = - \frac{r l_1 \sin\beta}{2 l_1 \cos(\alpha + \beta) + r} = - \frac{ry}{2l + r},$$

da α gegen β vernachlässigt werden darf, oder wenn man $a - r$ für l und $2f$ für r setzt

$$y_1 = -\frac{fy}{a-f} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (29)$$

Für astronomische Gegenstände darf man f gegen a vernachlässigen und erhält also

$$y_1 = -\frac{fy}{a} = -f\,tang\,\beta = -\beta f.$$

Für die beiden Spiegel des Teleskops von den Brennweiten f_1 und f_2 wird somit, wenn y_1 und y_2 die Grössen der von beiden entworfenen Bilder sind,

$$y_1 = -\beta f_1, \quad y_2 = -\frac{y_1 f_2}{a-f_2} = \frac{\beta f_1 f_2}{a-f_2}.$$

Ist endlich die scheinbare Grösse des Bildes, welches das Ocular, dessen Brennweite f_3 ist, entwirft, β, so wird

$$\beta_1 = \frac{y_2}{f_3} = \frac{\beta f_1 f_2}{f_3(a-f_2)}$$

und endlich die mittelst des Spiegeltelescops erreichte Vergrösserung

$$v = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{f_1 f_2}{f_3(a-f_2)}.$$

Bei den Kugelspiegeln ist die sphärische Aberration nie ganz zu vermeiden. Aus Formel (27) ergiebt sich, dass die Abstände der Bildpunkte vom Scheitel mit zunehmender Oeffnung des reflektirenden Kreises rasch abnehmen. In Folge davon zeigt das Bild immer eine Krümmung, die nur bei Spiegeln mit verhältnissmässig kleiner Oeffnung nicht merklich ist. Indessen kann man die Krümmung beseitigen, wenn man nach dem Vorschlage C. A. Steinheil's und Zenger's[1]) vor dem Ocular eine besonders berechnete Zerstreuungslinse anbringt oder mit Foucault[2]) den Spiegel entsprechend parabolisch anschleift.

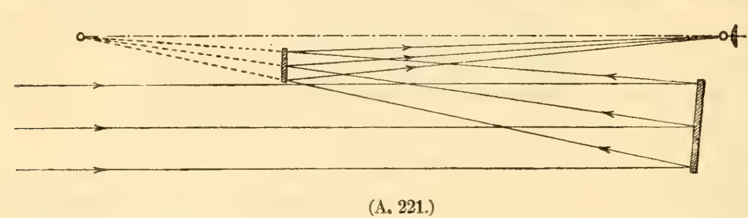
Lagerung der Spiegel, Herstellung der Rohre. Die Reflectoren haben vor den Refractoren ausser der Achromasie noch einige andere Vorzüge. Diese liegen in der verhältnissmässig kurzen Brennweite, in der Unabhängigkeit der Stellung des Kopfes des Beobachters von der Neigung des Rohres und namentlich in dem geringen Wärmeausstrahlungsvermögen des Spiegels, was ihn in feuchter Luft sich viel später beschlagen lässt, wie es unter den gleichen Umständen Linsen thun würden. Sollten aber diese Vorzüge voll ausgenutzt werden können, so musste der Spiegel so gelagert sein, dass bei verschiedenen Stellungen des Rohres sein Gewicht nicht Verbiegungen hervorruft. Man musste deshalb seine ebene hintere Fläche hinreichend unterstützen und legte sie zu diesem Zwecke auf ein Kissen, das aus einer Anzahl auf eine unbiegsame Planscheibe von Holz oder Eisen gebreiteten Flanellschichten bestand. Statt seiner bediente sich Foucault eines flachen Luftkissens von Kautschuk, in welches der Beobachter durch ein mit Hahn versehenes Kautschukrohr so lange Luft blies, bis das Bild seine grösste Schärfe erreichte. Bei grösserem Spiegel konnte man den nämlichen Zweck nur durch Anwendungen complicirterer Vorrichtungen erreichen. Die Rohre nimmt man nicht mehr aus Holz, sondern stellt sie aus parallelen, durch Querringe und Diagonalstreben versteiften Eisenstäben her oder aus Bandeisenstreifen

---

[1]) Zenger, Sitzungsberichte der Kgl. böhmischen Akademie der Wissenschaften in Prag 1875, pag. 21.

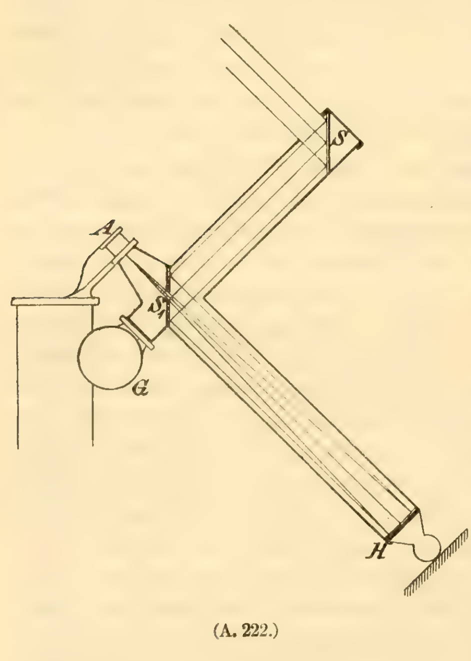
[2]) Foucault, Annalen der Pariser Sternwarte 1858, 5, pag. 197.

welche in zwei entgegengesetzten Schraubenlinien verlaufen und an den Kreuzungsstellen vernietet werden. Dadurch hat man das Entstehen von Luftströmungen im Rohre vermieden, die im Spiegelteleskop schädlichere Wirkungen haben, wie im Refractor, da die Strahlen es zwei, ja dreimal durchlaufen. Interferenzringe sind im Reflector störender, weil heller, wie im dioptrischen Fernrohr, lassen sich aber durch Anbringen centraler Diaphragmen beträchtlich verkleinern. So haben sich die in England auch noch in neuerer Zeit gebauten Teleskope mit Glasspiegeln gut bewährt, und wenn das von GRUBB 1866 für die Sternwarte in Melbourne hergestellte nicht das geleistet hat, was man erwartete, so lag die Schuld nicht am Instrumente [1]). Da die versilberten Glasspiegel sich nach der Erfahrung SAFARIK's [2]) in der Luft grösserer Städte schlecht hielten, ihre Silberschicht leicht abblätterte, so suchte sie der genannte Astronom durch versilberte Metallspiegel zu ersetzen. Die Anwendung neuer Legirungen setzte ihn in den Stand, Spiegel von gleichmässigem Korn, grosser Härte und Bruchfestigkeit zu liefern. Obgleich sie leicht zu bearbeiten waren, so blieb man aber im Allgemeinen doch bei den Glasspiegeln stehen.



(A. 221.)

Verschiedene Formen von Teleskopen. Die grosse Länge der Teleskope verursachte mancherlei Unbequemlichkeiten. Man hat diesen Uebelstand auf verschiedene Weise abzustellen versucht. So benutzt seit 1876 die Firma K. FRITSCH [3]) in Wien eine etwas veränderte CASSEGRAIN-sche Construction zur Herstellung ihrer Brachyteleskope, wie ein solches 1880 unter Leitung von FORSTFR auf der Marinesternwarte von Pola aufgestellt wurde, dessen Spiegel einen Durchmesser von 320 *mm* besitzt. Wie Fig. 221 zeigt, ist bei dieser Construction die Durchbohrung des Hohlspiegels dadurch vermieden, dass er seitlich angebracht wurde. Wenn auch auf solche Weise dem Verlust der centralen Strahlen vorgebeugt ist, so konnte die sphärische Aberration doch nicht gehoben werden. Fig. 222 giebt den Vorschlag, den LOEWY [4]) 1884 machte, durch Anwendung eines Spiegelteleskops ein stabileres Instrument, wie das gewöhnliche Aequatoreal zu erhalten, die Kuppeln überflüssig zu machen und den



(A. 222.)

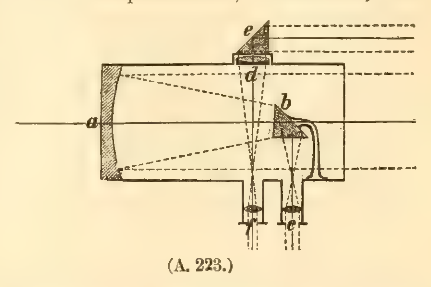
[1]) Vierteljahrsschrift der astron. Gesellsch. 1872, Bd. 7, pag. 58.

[2]) SAFARIK, Centralz. für Opt. u. Mech. Bd. 15, pag. 242. 1894.

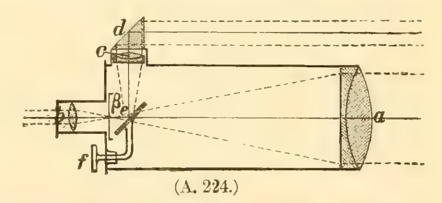
[3]) Centralz. für Opt. u. Mech. Bd. 2, pag. 242. 1881. Vergl. KONKOLY., Practische Anleitung zur Darstellung astron. Beobachtungen. Braunschw. 1883, pag. 400.

[4]) TISSERAND, Bulletin astronomique. Bd. 1, pag. 265. 1884.

Beobachter in den Stand zu setzen, ohne Schwierigkeit sein Instrument zu regeln. Die Planspiegel S und S_1, von denen der letztere durchbohrt ist, reflektiren die vom Object kommenden Strahlen auf den Hohlspiegel H, der ein Bild vor dem Ocular entwirft. Bei A befindet sich das Auge, G ist ein Gewicht, welches den nach oben gerichteten Theil des Rohres in Bezug auf die Axe äquilibrirt. Uebrigens hat LOEWY[1]) auch den Refractor in ähnlicher Weise abgeändert, um die nämlichen Vortheile zu erreichen (s. den Art. »Aequatoreal«). DRAPER[2]) hat im NEWTON'schen Teleskop den Planspiegel durch ein total reflektirendes Prisma in der Weise ersetzt, wie aus Fig. 223 ersichtlich ist. Mit Hilfe eines ebensolchen hat dann SCHRÖDER[3]) eine Einrichtung getroffen, die ermöglicht, dass das Ocular f des Suchers neben das c des Teleskops zu liegen kommt. Das Objectiv des Suchers ist d, das Prisma e wirft die parallel der Fernrohraxe einfallenden Strahlen darauf und der Beobachter kann somit mit grosser Bequemlichkeit die Einstellung immer wieder vornehmen und sich ihrer versichern. Noch zweckmässiger ist übrigens eine ähnliche von SCHRÖDER am Refractor angebrachte Verbesserung, welche Fig. 224 darstellt und welche erlaubt, das Ocular nach Belieben als das des Suchers und des Fernrohres zu benutzen. Das Objectiv des Suchers liegt seitwärts in c, die parallel der Fernrohraxe auffallenden Strahlen wirft das total reflektirende Prisma in dasselbe hinein, während sie der um die Axe f drehbare kleine Planspiegel e auf das Ocular reflektirt. Das Objectiv des Fernrohres ist a, und der Beobachter kann somit durch Drehen des Spiegels um die Axe f das Instrument nach Belieben als Sucher oder als Refractor benutzen.



(A. 223.)



(A. 224.)

Herstellung der Spiegel. Die Bearbeitung der sphärischen Spiegel erfolgt in derselben Weise, wie die der Linsen; doch ist das Poliren schwieriger, weil der Spiegel in Folge seiner grösseren Fläche dem auf ihm ausgeübten Druck leicht etwas nachgiebt und so Unregelmässigkeiten entstehen können. Auf die Stellung des Polirers, die Stärke des in jedem Augenblick von ihm ausgeübten Druckes, der Consistenz des meist als Kitt zur Befestigung des Spiegels an seiner Unterlage angewendeten Pechs kommt es deshalb sehr an. Umgekehrt hat LASSELL[4]) die Eigenschaft des Pechs, dem ausgeübten Drucke etwas nachzugeben und nach dessen Aufhören erst nach und nach seine ursprüngliche Form wieder anzunehmen, benutzt, um die äusseren Theile etwas stärker als die inneren ab zuschleifen, und indem er so dem Spiegel eine etwas paraboloidische Form gab, die sphärische Aberration zu vermindern, ein Ziel, das FOUCAULT durch sogen. Localretouche unter Controle genauer Messungen zu erreichen suchte. Schleift man den Spiegel mit Maschinen aus, die die nämliche Einrichtung, wie die

[1]) LOEWY, Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd. 4, pag. 132. 1888; Bd. 11, pag. 17. 1891.

[2]) MEISEL, Lehrbuch der Optik. Weimar 1889, pag. 358.

[3]) SCHRÖDER, Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd. 12, pag. 155. 1892.

[4]) On polishing the specula of Reflecting Telescopes. London 1875. Vergl. MEISEL a. a. O., pag. 440.

zum Schleifen der Linsen benutzten haben können, so kann man unter Wahrung derselben Vorsichtsmaassregel dem Spiegel dadurch, dass man die Belastung des Polirhebels regulirt, eine nahezu parabolische Form geben.

Nach dem Poliren wird der Spiegel versilbert. Vorher muss er auf das Sorgfältigste gereinigt werden. Zu dem Ende wäscht man zunächst seine Oberfläche mit Alkohol oder Schwefelsäure, dann mit heisser, starker Seifenlösung, reibt sie tüchtig mit einem Baumwollenbausch ab, bringt sie alsdann in eine mit starker Salpetersäure gefüllte Schale, um sie darin nochmals mit einem an einem Glasstab befestigten Baumwollenbausch tüchtig zu bearbeiten. Nachdem man die Säure wieder abgewaschen, bringt man den Spiegel in eine Schale mit Aetzkalilösung und verfährt ebenso. Nach abermaligem Abwaschen reibt man ihn mit präparirtem Kalk völlig trocken und lässt den Kalk so lange auf der Glasfläche, bis die Versilberung vorgenommen wird. Dann wäscht man ihn mit destillirtem Wasser ab, welches, wenn die Oberfläche völlig rein ist, überall benetzen muss[1]).

Für die Versilberung grösserer Spiegel, die hier allein in Betracht kommen, empfiehlt sich am meisten das Verfahren BRASHEAR's[2]), das in den gewerblichen Betrieben Englands und Nordamerikas allgemein im Gebrauche steht. Um es auszuführen, stellt man vier Flüssigkeiten her, zunächst die Silberlösung, bestehend aus Silbernitrat, darauf die Aetzkalilösung aus Aetzkali, welches in Alkohol gereinigt worden ist und sorgt dafür, dass beide Lösungen etwa 1 *gr* des gelösten Körpers in 100 *ccm* Wasser enthalten, sodann eine Lösung von Ammoniak in Wasser vom specifischen Gewicht 0·88; endlich die reducirende Lösung, indem man 90 *gr* Hut- oder Candiszucker in 1000 *ccm* destillirten Wassers löst, 175 *ccm* Alkohol und 4 *ccm* Salpetersäure vom specifischen Gewicht 1·22 zusetzt und die Mischung mindestens eine Woche stehen lässt. Die folgende Tabelle zeigt die quantitative Zusammensetzung der Versilberungsflüssigkeit aus diesen Bestandtheilen für verschiedene Spiegelgrössen. Man braucht für

Spiegel vom		Silbernitrat	Aetzkali	Ammoniak	Reductions-
Durchmesser	Flächeninhalt	$AgNO_3$	KOH	$NH_3 + H_2O$	flüssigkeit
30 *cm*	707 *qcm*	15 *gr*	7·5 *gr*	etwa 12 *ccm*	85 *ccm*
25 „	491 „	11 „	5·5 „	„ 9 „	65 „
20 „	314 „	7 „	3·5 „	„ 6 „	40 „
15 „	177 „	4 „	2·0 „	„ 3 „	25 „
10 „	78·5 „	1·8 „	0·9 „	„ 1·5 „	10 „
5 „	19·6 „	0·5 „	0·25 „	„ 0·5 „	3 „

Um die Versilberung auszuführen, wird etwa die Hälfte der Ammoniaklösung zu der Silberlösung gegeben, der Rest der ersteren mit destillirtem Wasser im Verhältniss von 1 : 5 verdünnt und von dieser dann langsam so lange zugefügt, bis sich der gebildete Niederschlag eben wieder auflöst. Gegen das Ende der Operation hin hat man die Lösung zu schütteln. Darauf fügt man die Aetzkalilösung zu und löst einen etwa entstehenden Niederschlag durch Zugiessen der verdünnten Ammoniakflüssigkeit wieder auf. Es muss nun Silberoxyd im Ueber-

[1]) WADSWORTH, Bemerkungen über Versilberungsflüssigkeit und Versilberung. Zeitschr. für Instrumentenkunde. Bd. 15, pag. 22. 1895.

[2]) Engl. Mechanic. 1880.

schusse vorhanden sein, wovon man sich durch die alsdann leicht bräunliche Farbe der Lösung überzeugt. Nach fünf Minuten langem Stehen filtrirt man die Lösung, falls es nöthig sein sollte, und fügt dann die Reductionsflüssigkeit hinzu. Mit nach oben gekehrter zu versilbernder Fläche taucht man nun den Spiegel ein, indem man die Oberfläche der Flüssigkeit fortwährend bewegt, um das Niedersetzen suspendirter Partikelchen zu verhindern. Bei einer Temperatur von 20° ist die Operation in 10—15 Minuten beendet, die versilberte Fläche wird mit Wasser gereinigt und mit einem baumwollenen Bausch so lange gerieben, bis sie spiegelnd wird. Sie erweist sich als glänzend und hart und bedarf einer weiteren Politur nicht mehr. Ganz ähnlich ist das von WADSWORTH und das von A. und L. LUMIÈRE[1]) angegebene Verfahren. BOAS[2]) will dagegen die Eigenschaft der Edelmetalle benutzen, als Kathode in einem Vacuumgefäss verwendet, sich zu verflüchtigen, wenn starke Wechselströme hindurchgeschickt werden, und an der gegenüberliegenden Gefässwand niederzuschlagen. Bei einem Drucke von 2 *mm* Quecksilberhöhe zerstäubt in solchem Falle die Kathode und schlägt sich in einer reducirenden Wasserstoffatmosphäre so gleichmässig wieder nieder, dass der entstandene Spiegel keiner Politur weiter bedarf. Die Kathode muss stabförmig sein und in einigem Abstand parallel zu der zu versilbernden Platte liegen, ihre abgewendete Hälfte wird, um unnützen Niederschlag zu vermeiden, mit einem Isolator bedeckt. Grössere Spiegel werden auf diese Art freilich nicht hergestellt werden können.

E. GERLAND.

Finsternisse. Die Erscheinung der Finsternisse entsteht dadurch, dass von zwei Gestirnen das eine durch das andere direkt oder indirekt durch den Schatten desselben unseren Blicken entzogen wird. Nach den in der Erscheinung zusammen wirkenden Körpern haben wir verschiedene Arten von Finsternissen zu unterscheiden. Unsere Erde selbst kann durch ihren Schatten zu Verfinsterungen Anlass geben; als verfinstertes Gestirn kommt aber nur der Mond in Betracht. Die entstehenden Finsternisse heissen Mondfinsternisse. Dieselbe Erscheinung kehrt auch im Jupiterssystem wieder, im Saturnssystem wird sie durch den Ring wesentlich complicirter. Bei den anderen Planeten kommt sie nicht in Frage, weil entweder, wie beim Mars, die lichtschwachen Trabanten in der Nähe der Planetenscheibe in den Strahlen derselben verschwinden oder weil, bei den entfernteren Planeten, die Schattengrenze sich zu wenig von dem Rande der Scheibe entfernt. Zweitens kann unser Mond Verfinsterungen bewirken. Tritt er zwischen Erde und Sonne, so entstehen Sonnenfinsternisse; gleiche Erscheinungen treten im Jupiters- und Saturnssysteme zu Tage und werden von uns wahrgenommen, während dieses in den anderen Planetensystemen bislang nicht gelungen und wegen der Kleinheit der Trabanten auch wohl nicht möglich ist. Durch das Dazwischentreten des Mondes werden weiter noch die Stern- und die Planetenbedeckungen erzeugt. Endlich können die übrigen Körper unseres Planetensystems in derselben Weise wirken. Durch die beiden inneren Planeten bewirkte Sonnenfinsternisse werden als Vorübergänge bezeichnet, und in den Bedeckungen von Fixsternen durch Planeten haben wir die zweite Art der Wirkung. Wegen der Schwierigkeit einer allgemeinen Lösung

---

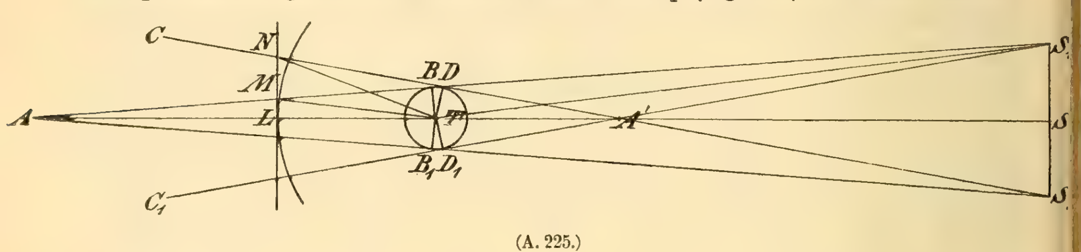
[1]) LUMIÈRE, Journal de Physique (3) Bd. 4, pag. 29. 1895. Vergl. Zeitschr. für Instrumentenkunde. Bd. 15, pag. 272. 1895.

[2]) BOAS, Deutsches Reichspatent No. 82247. Vergl. Zeitschr. für Elektrotechnik. Bd. 16, pag. 565. 1895.

der Aufgabe, die Figur und die Bewegung des von einem leuchtenden Körper erzeugten Schatten eines anderen zu bestimmen, erfordern alle diese Aufgaben eine besondere Behandlung. Wir beschäftigen uns zunächst mit den im System Sonne — Erde — Mond sich darbietenden Erscheinungen, den Mondfinsternissen, Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen.

Mondfinsternisse.

Die Erscheinung der Mondfinsternisse ist nur einer sehr rohen Beobachtung fähig und gestattet nur eine sehr unsichere Bestimmung der sie beeinflussenden Grössen; sie bedarf daher auch keiner bis an die Grenze der erreichbaren Genauigkeit gehenden Berechnung. Wir betrachten die Sonne wie auch die Erde als kugelförmige Körper. Die gemeinsamen Berührungslinien beider Kugeln erzeugen zwei Kegeloberflächen, deren eine BAB_1 (Fig. 225) der Kernschatten-



(A. 225.)

kegel heisst und den Raum begrenzt, in welchen auf geradlinigem Wege überhaupt keine Sonnenstrahlen dringen können, während der zweite $CA'C_1$ — der Halbschattenkegel — den Raum begrenzt, in dessen ausserhalb der Erdbahn liegenden Theil wenigstens nicht das Licht der ganzen Sonnenscheibe fallen kann. Nennen wir s und S die linearen Radien von Erde und Sonne, so ergiebt uns die Figur $AT = \frac{s}{S - s} \cdot \overline{TS}$. Verstehen wir aber unter $r_\odot$ den Winkel, unter welchem uns der Sonnenradius erscheint, unter $p_\odot$ ihre Horizontalparallaxe, so ist auch $s : S = \sin p_\odot : \sin r_\odot$ und $TS = \frac{s}{\sin p_\odot}$, so dass wir erhalten $AT = \frac{s}{(r_\odot - p_\odot) \sin 1''}$. Für $r_\odot = 959''\cdot63$ (nach Auwers) $p_\odot = 8''\cdot85$, wird $AT = 216\cdot9\, s$. Da nun die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde $= 58\, s$ ist, so wird also der Mond in den Kernschatten der Erde eintreten können. Schneiden wir die beiden Schattenkegel in der mittleren Entfernung des Mondes durch eine zu TS senkrechte Ebene, so entstehen als Schnittfigur zwei concentrische Kreise, und die Radien LM und LN dieser Kreise bestimmen den grössten noch möglichen Werth des Abstandes des Mondes vom Kreismittelpunkt, wenn er in die betr. Kegel eintreten soll. Es ist aber nach der Figur, wenn $p_☾$ die Horizontalparallaxe des Mondes ist,

$$\sphericalangle MTL = \sphericalangle BMT - \sphericalangle S_1TS + \sphericalangle BS_1T = p_☾ + p_\odot - r_\odot = u$$
$$\sphericalangle NTL = \sphericalangle DNT + \sphericalangle S'TS + \sphericalangle TS_1D_1 = p_☾ + p_\odot + r_\odot = u_1.$$

Der Punkt L ist, weil wir von der Breite der Sonne, die noch nicht $1''$ betragen kann, absehen können, ein Punkt der Ekliptik. Die Mondbahn schliesst mit der Ekliptik einen Winkel von etwa $5°$ ein, und es können also auch die von beliebigen Punkten der Ekliptik ausgehenden, die Mondbahn unter einem Winkel von $90°$ treffenden Bögen grössten Kreises, d. i. die kleinsten Abstände des Mondmittelpunktes von dem betr. Punkte der Ekliptik, mit dem Breiten-

kreise dieses Punktes einen Winkel von etwa 5° einschliessen. Ist also β die Breite des Mondes zur Zeit eines beliebigen in die Nähe der Knotenpunkte der Mondbahn fallenden Vollmondes, so ist $\beta \cos 5°$ der kleinst' mögliche Abstand des Mittelpunktes der Schattenkreise von der Mondbahn. Wenn also dieser Abstand, damit der Mond in den Kern- bezw. Halbschatten trete, höchstens $= p_{☾} + p_{⊙} \mp r_{⊙}$ sein darf, so darf die Breite des Mondes im Augenblick des Vollmondes nicht grösser sein als $(p_{☾} + p_{⊙} \mp r_{⊙}) \sec 5°$. Soll nicht nur der Mittelpunkt der Mondscheibe nicht in den Schatten treten, sondern überhaupt kein Punkt derselben, so sind die Grenzwerthe von LM und LN noch um den Mondradius $r_{☾}$ zu vergrössern. Wir erhalten also als Maximalwerthe der Breite des Mondes zur Zeit des Vollmondes die beiden Ausdrücke

$$\lim \beta_{☾} = (p_{☾} + p_{⊙} - r_{⊙}) \sec 5° + r_{☾}$$

oder

$$\lim \beta_{☾} = (p_{☾} + p_{⊙} + r_{⊙}) \sec 5° + r_{☾}.$$

Die Erfahrung lehrt nun, dass die nach diesen Ausdrücken berechneten Breiten des Mondes in Folge der Wirkung der Erdatmosphäre, die in einer Vergrösserung des Erdschattens besteht, zu klein sind. Nach TOBIAS MAYER setzt man gewöhnlich $\lim \beta_{☾} = (p_{☾} + p_{⊙} \mp r_{⊙}) \frac{61}{60} + r_{☾}$. Nach neueren Untersuchungen von HARTMANN hat man aber diesen sogen. Vergrösserungsfaktor besser $= \frac{1}{50 \cdot 8}$ zu setzen. (HARTMANN: Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen). Wegen der Veränderlichkeit der Werthe $p_{☾}$, $r_{☾}$ und $r_{⊙}$ schwanken auch u und u_1 zwischen bestimmten Grenzen. Man findet durch Einsetzen der Grenzwerthe

$$51' \, 57'' < u + r_{☾} < 64' \, 19'' \qquad 1° \, 24' \, 32'' < u_1 + r_{☾} < 1° \, 35' \, 54''.$$

Wenn also zur Zeit des Vollmondes die Breite des Mondes $< 51' \, 57''$ ist, so tritt der Mond gewiss in den Kernschatten der Erde ein; liegt die Breite zwischen $51' \, 57''$ und $64' \, 19''$, so hat man mit den für die Zeit des Vollmondes geltenden Werthen der Parallaxen und Radien den Ausdruck u zu berechnen, um zu entscheiden, ob eine Verfinsterung eintritt. Ist aber die Breite $> 64' \, 19''$, so tritt unter keinen Umständen eine Verfinsterung ein. Aehnliches gilt für den Halbschatten.

Da die Breite des zwischen den beiden Schattenkreisen liegenden Ringes $= 2 r_{⊙}$ ist, der Durchmesser des Mondes aber nahe gleich dem der Sonne ist, so ist es möglich, dass der Mond wohl ganz in dem Halbschatten verschwindet, ohne doch in den Kernschatten zu treten.

Die Vorausberechnung der Finsternisse fordert die Kenntniss der Zeiten, wann der Abstand der Mittelpunkte der Mondscheibe und der Schattenkreise $= u \pm r_{☾}$ bezw. $u_1 \pm r_{☾}$ ist. Wegen der Abplattung des Erdkörpers sind die Durchschnitte der Schattenkegel nun keine Kreise, sondern Ellipsen, deren Gestalt abhängt von der Stellung der Erdaxe zum Radiusvector der Erde im Augenblick der Verfinsterung. Man sieht aber von dieser Verwickelung ab wegen der Unbestimmtheit der ganzen Erscheinung, und weil man doch nicht die Wirkung der Erdatmosphäre, deren äussere Begrenzung man nicht kennt, gehörig berücksichtigen kann. Um mittleren Verhältnissen Rechnung zu tragen, führt man für die Horizontalparallaxen diejenigen Werthe ein, die einer Breite von 45° entsprechen. Es ist aber $\log \rho_{45°} = 9 \cdot 99929$. Nennen wir also Δ den Abstand der Mittelpunkte der Mondscheibe und des Erdschattens, so erhalten wir für

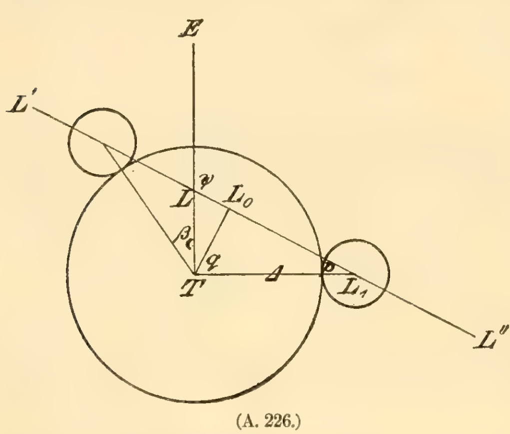
$\Delta = \frac{51}{50}([9{\cdot}99929](\pi_\odot + \pi_☾) + r_\odot) + r_☾$ Anfang und Ende der Finsterniss überhaupt,

$\Delta = \frac{51}{50}([9{\cdot}99929](\pi_\odot + \pi_☾) + r_\odot) - r_☾$ Anfang und Ende der totalen vom Halbschatten bewirkten Finsterniss,

$\Delta = \frac{51}{50}([9{\cdot}99929](\pi_\odot + \pi_☾) - r_\odot) + r_☾$ Erste und letzte Berührung mit dem Kernschatten,

$\Delta = \frac{51}{50}([9{\cdot}99929](\pi_\odot + \pi_☾) - r_\odot) - r_☾$ Anfang und Ende der totalen vom Kernschatten bewirkten Finsterniss.

Sei (Fig. 226) T der Mittelpunkt des Erdschattens, $L'L''$ der Weg des Mondmittelpunktes in Bezug auf T, und TE der Breitenkreis des Punktes T, also der Schnitt einer auf der Ebene der Ekliptik senkrechten, den Radiusvector der Erde enthaltenden Ebene mit der Sphäre. Nimmt der Mondmittelpunkt die Lage L ein, ist also seine Länge von derjenigen der Sonne um 180° verschieden, so haben wir Vollmond. LT ist die Breite des Mondes im Augenblick des Vollmondes $= \beta_☾$. Es sei nun $\Delta\lambda_☾$, $\Delta\beta_☾$ die stündliche Bewegung des Mondes in den beiden Coordinaten, $\Delta\lambda_\odot$ diejenige der Sonne, also auch die des Punktes T. Nennen wir μ den vom Monde in einer Stunde beschriebenen Bogen,



(A. 226.)

ψ den Positionswinkel der Richtung der Bewegung gegen den Breitenkreis, so ist

$$\sin\mu\,\sin\psi = \sin(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)\cos(\beta_☾ + \Delta\beta_☾)$$
$$\sin\mu\,\cos\psi = \sin(\beta_☾ + \Delta\beta_☾)\cos\beta_☾ - \cos(\beta_☾ + \Delta\beta_☾)\sin\beta_☾\cos(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)$$
$$= \sin\Delta\beta_☾ + 2\cos(\beta_☾ + \Delta\beta_☾)\sin\beta_☾\sin^2\tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)$$

oder genügend genau

$$\mu\sin\psi = (\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)\cos\beta_☾ \qquad \mu\cos\psi = \Delta\beta_☾ + \tfrac{1}{4}(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)^2\sin 2\beta_☾\sin 1''.$$

Ist der Mondmittelpunkt in L_0, so ist sein Abstand vom Punkte T ein Minimum, es tritt die grösste Phase oder die Mitte der Finsterniss ein. Zur Berechnung dieses Zeitpunktes haben wir im sphärischen Dreieck LL_0T $\tang LL_0 = -\tang\beta_☾\cos\psi$; durch Division mit μ ergiebt sich die Zeit in Stunden, die der Mond gebraucht, um diesen Weg zu durchlaufen. Ist demnach T die Zeit des Vollmondes, so ist die Zeit der Mitte der Finsterniss

$$T_0 = T - \frac{\beta_☾\cos\psi}{\mu} = T - \frac{\beta_☾\cos\psi\sin\psi}{(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot)\cos\beta_☾}.$$

Den kleinsten Abstand selbst finden wir durch $\sin TL_0 = \sin\beta_☾\sin\psi$. Nennen wir ihn Δ_0, so ist

$$\Delta_0 = \beta_☾\sin\psi.$$

Bezeichnen wir weiter im Dreieck L_0L_1T den Abstand der Centren durch Δ, die Dreieckswinkel in den Endpunkten durch p und q, so erhalten wir

$$\sin p = \frac{\sin\beta_☾\sin\psi}{\sin\Delta}$$

und

$$\sin^2\Delta = \sin^2 L_0L_1 + \cos^2 L_0L_1\sin^2 TL_0,$$

woraus folgt

$$\sin^2 L_0 L_1 = \sin^2 \Delta \left(1 - \frac{\sin^2 TL_0 \cos^2 L_0 L_1}{\sin^2 \Delta}\right).$$

Setzen wir daher

$$\sin \omega = \frac{\sin TL_0 \cos L_0 L_1}{\sin \Delta} = \frac{\sin TL_0}{\sin \Delta} \frac{\cos \Delta}{\cos TL_0} = \frac{\tang \Delta_0}{\tang \Delta},$$

so ist

$$L_0 L_1 = \Delta \cos \omega$$

und die zum Durchlaufen dieses Weges gebrauchte Zeit wird

$$\tau = \frac{\Delta \cos \omega \sin \psi}{(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot) \cos \beta_☾}.$$

Führen wir also für Δ die oben gegebenen Werthe ein, so erhalten wir die Zeit der betreffenden Phase durch

$$T_1 = T - \frac{\beta_☾ \cos \psi}{\mu} + \frac{\Delta \cos \omega}{\mu} = T - \frac{\beta_☾ \cos \psi \sin \psi}{(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot) \cos \beta_☾} + \frac{\Delta \cos \omega \sin \psi}{(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot) \cos \beta_☾}.$$

Da ω nur durch den *sin* bestimmt ist, bleibt uns die Wahl des Vorzeichens von $\cos \omega$ frei; das negative Vorzeichen giebt uns die Zeit der ersten, das positive die Zeit der letzten Berührung des Mondes mit dem betr. Schattenkreise. Der Abstand des nächsten Punktes der Mondscheibe vom Punkte T zur Zeit der grössten Phase ist $\beta_☾ \sin \psi - r_☾$, die grösste Breite des vom Monde durchlaufenen Segmentes des Schattenkreises folglich $= u - (\beta_☾ \sin \psi - r_☾)$. Man nennt diese Grösse, ausgedrückt in Theilen des Monddurchmessers, die Grösse der Finsterniss, und hat also

$$\text{Grösse der Finsterniss} = \frac{u + r_☾ - \beta_☾ \sin \psi}{2 r_☾}.$$

Für die Berechnung des Positionswinkels der Berührungsstelle am Mondrande sieht man ab von der Aenderung des Winkels ψ während des Verlaufs der Finsterniss und hat dann einfach

$$\text{Eintritt} \quad Q = \psi + p \qquad \text{Austritt} \quad Q = 180° + \psi - p.$$

Zur Untersuchung der Sichtbarkeitsverhältnisse haben wir nöthig die Kenntniss der Rectascension und Deklination des Mondes und der Sternzeit des Ephemeridenortes für die betr. Phase. Seien diese Grössen $\alpha_☾$, $\delta_☾$ und t, so ist $t - \alpha_☾$ der Stundenwinkel des Mondes im Augenblick der Phase und also $L = t - \alpha_☾$ die westlich positiv gerechnete Länge, $B = \delta_☾$ die geocentrische Breite jenes Ortes der Erdoberfläche, welcher im Augenblick der betr. Phase den Mond im geocentrischen Zenith sieht. Nennen wir r die Refraction im Horizont, so wird also der Mond sichtbar sein innerhalb eines um diesen Punkt mit $90° - \pi_☾ + r$ beschriebenen Kreises, und wir erhalten als Kriterium der Sichtbarkeit für einen Punkt der geocentrischen Breite φ' und der westlichen Länge λ die Bedingung

$$\sin \delta_☾ \sin \varphi' + \cos \delta_☾ \cos \varphi' \cos (t - \alpha_☾ - \lambda) \geq \sin (\pi_☾ - r).$$

Diese Gleichungen sind anzuwenden, wenn man zur Untersuchung der Erscheinung direkt auf die Tafeln zurückgehen muss. Für die zur Zeit im allgemeinen Gebrauch befindlichen Sonnentafeln von Leverrier und Mondtafeln von Hansen sind von Oppolzer nach Hansen's Formeln besondere Tafeln[1]) berechnet, deren Anwendung die Rechnung wesentlich erleichtert. Die Tafeln ergeben für jedes beliebige Datum für einen 5 Jahrtausende vor und $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende nach

[1]) Syzygien-Tafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung zum Gebrauche derselben von Prof. Th. von Oppolzer.

Christi Geburt umfassenden Zeitraum direkt die mittlere Greenwich-Zeit T des Vollmondes, ausserdem die Länge L' der Sonne im Augenblick T, die Zeitgleichung Z und die Schiefe der Ekliptik ε; diese Grössen sind nöthig zur Berechnung der Rectascension und Deklination des Mondes. Die oben angewandten Elemente erhält man aus den Tafelwerthen durch folgende Relationen

$$\beta_☾ = p \sin P \frac{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}{\sin 1''}$$

$$(\Delta\lambda_☾ - \Delta\lambda_\odot) = \Delta L \frac{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}{\sin 1''}$$

$$\Delta\beta_☾ = q \cos Q \frac{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}{\sin 1''}.$$

Durch den Faktor $\frac{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}{\sin 1''}$, für welchen wir, da die Tafeln nur 4 Decimalen geben, ohne weiteres $\pi_☾ - \pi_\odot$ setzen können, sind die Winkelgrössen ersetzt durch lineare, dem Erdradius als Einheit entsprechende Grössen gerechnet in einer Ebene, von der aus dieser Radius unter dem Winkel $\pi_☾ - \pi_\odot$ erscheinen würde. Wir haben daher auch den Radius des Schattenkegels in derselben Weise auszudrücken. Beschränken wir uns auf den Kernschatten, der allein sich einigermaassen sicher auffassen lässt, so haben wir demnach zu setzen

$$u = \frac{51}{50}\left(\rho_{45} \frac{\pi_☾ + \pi_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot} - \frac{r_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot}\right) \pm \frac{r_☾}{\pi_☾ - \pi_\odot}.$$

Da das Verhältniss $\pi_\odot : \pi_☾$ immer zwischen den Grenzen $\frac{1}{352}$ und $\frac{1}{423}$ liegt, sind die einzelnen Theile dieses Ausdrucks mit Ausnahme des Gliedes $\frac{r_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot}$ als constant zu betrachten. Die Syzygientafeln geben nun zur Berechnung von u eine Grösse u_a'. Diese bedeutet den Radius des Kreises, in welchem ein Sonne und Mond einhüllender Kegel, dessen Spitze zwischen beiden Körpern liegt, eine durch den Erdmittelpunkt gehende, zu seiner Axe senkrechte Ebene durchschneiden würde. Der Werth dieser Grösse ist, wie wir bei der Besprechung der Sonnenfinsternisse noch sehen werden,

$$u_a' = k + \frac{k \sin \pi_\odot + \sin r_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)},$$

wenn $k = \frac{\sin r_☾}{\sin \pi_☾}$ der Mondradius in Theilen des Erdradius ist. Durch Einführung dieses Werthes wird

$$u = \frac{51}{50}\left(\rho_{45} \frac{\pi_☾ + \pi_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot} + k + k \frac{\pi_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot} - u_a'\right) \pm \frac{r_☾}{\pi_☾ - \pi_\odot}$$

$$= \frac{51}{50}\left(\rho_{45} \frac{\pi_☾ + \pi_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot} + k + k \frac{\pi_\odot}{\pi_☾ - \pi_\odot}\right) - \frac{1}{50} u_a' \pm \frac{r_☾}{\pi_☾ - \pi_\odot} - u_a'.$$

Nach L. Struve ist $k = 0{\cdot}2725$ zu nehmen; in den Syzygientafeln ist mit $k = 0{\cdot}2730$ gerechnet und die diesen Tafeln entnommenen Werthe u_a' sind also um etwa 0·0005 zu gross. Berücksichtigen wir dieses, indem wir zu dem constanten Theil 0·0005 addiren und setzen die Zahlenwerthe ein, so wird

$$u = 1{\cdot}5648 - u_a' \quad \text{für Anfang und Ende der Finsterniss}$$
$$= 1{\cdot}0185 - u_a' \quad \text{für ,, ,, ,, der Totalität.}$$

Nehmen wir noch bei der Berechnung der Grenzwerthe Rücksicht auf den Faktor $\sec 5^\circ 9'$ (Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik), so haben wir folgende Rechnungsvorschriften, wobei sämmtliche zur Zeit T hinzuzufügenden Correctionen in Minuten ausgedrückt sind:

$$B > 1{\cdot}5690 - u_a' \quad \text{keine Finsterniss}$$
$$< 1{\cdot}5690 - u_a' \quad \text{partielle Finsterniss}$$
$$< 1{\cdot}0204 - u_a' \quad \text{totale Finsterniss}$$

$$60 \cdot \mu' \sin\psi = \Delta L \qquad 60 \cdot \mu' \cos\psi = q \cos Q \qquad p \sin P = B.$$

Zeit der Mitte der Finsterniss: $T_0 = T - \frac{1}{\mu'} B \cos\psi$

Anfang und Ende der Finsterniss: $\frac{B \sin\psi}{1{\cdot}5648 - u_a'} = \sin\omega_1 \quad T_1 = T_0 \mp (1{\cdot}5648 - u_a') \frac{1}{\mu'} \cos\omega_1$

Anfang und Ende der Totalität: $\frac{B \sin\psi}{1{\cdot}0185 - u_a'} = \sin\omega_2 \quad T_2 = T_0 \mp (1{\cdot}0185 - u_a') \frac{1}{\mu'} \cos\omega_2.$

Zur Erläuterung möge die Berechnung der Mondfinsterniss 1898 Januar 7 dienen. Wir finden nach pag. [6], [7] der Tafeln zu dem gegebenen Datum die Tageszahl des gregorianischen Kalenders = 2414297. Mit dieser Zahl als Argument ergeben die Tafeln folgende Zahlen:

Zeit des Vollmondes T = 2414297·5166 = 1898 Jan. 7 $12^h\ 23^m{\cdot}9$ m. Zt. Greenwich

Argumente I = 237°·24, II = 6°·82, III = 378°·1, IV = 230°·4,
V = 244°·1, VI = 330°, VII = 67°, VIII = 81°.

$L' = 287°{\cdot}801$, $Z = +\,1°{\cdot}59$, $P = 170°{\cdot}435$, $Q = 171°{\cdot}654$,
$\log p = 0{\cdot}7395$, $\log \Delta L = 9{\cdot}7056$, $\log q = 8{\cdot}7100$, $u_a' = 0{\cdot}5729$.

$\log q$	8·7100	$\log p$	0·7395	u_a'	0·5729
$\log \cos Q$	$9{\cdot}9954_n$	$\log \sin P$	9·2205	$1{\cdot}5648 - u_a'$	0·9919
	$8{\cdot}7054_n$	$\log B$	9·9600	$\log(1{\cdot}5648 - u_a')$	9·9965
$\log \Delta L$	9·7056	B	0·9120	$\log B \sin\psi$	9·9578
$\log \tan\psi$	$1{\cdot}0002_n$	Finsterniss partiell		$\log \sin\omega_1$	9·9613
ψ	95°·71	$\log B \cos\psi$	$8{\cdot}9577_n$	$\log \cos\omega_1$	9·6065
$\log 60\mu'$	9·7078	$\log 1/\mu'$	2·0704	$\log 1/\mu'$	2·0704
$\log 60$	1·7782	$\log \Delta T$	$1{\cdot}0281_n$	$\log(1{\cdot}5648 - u_a')$	9·9965
$\log \mu'$	7·9296	ΔT	$+\,10^m{\cdot}7$	$\log \Delta T_0$	1·6734
		Mitte = T_0	$= 12^h 34^m{\cdot}6$	ΔT_0	$\pm\,47^m{\cdot}1$

Anfang $11^h 47^m{\cdot}5$ Ende $13^h 21^m{\cdot}7$.

Hat man nicht auf die Sonnen- bezw. Mondtafeln selbst zurückzugehen, sondern kann eine Mondephemeride benutzen, so ist es einfacher, statt der Länge und Breite die Rectascension und Deklination einzuführen. Die Ephemeriden geben als Elemente der Mondfinsterniss die Zeit der Opposition des Mondes in Rectascension, die diesem Zeitpunkte entsprechende Rectascension und Deklination von Sonne und Mond, die stündliche Aenderung dieser Coordinaten, und die Radien und Horizontalparallaxen. Mit diesen Grössen ist die Rechnung nach denselben Formeln auszuführen, wie vorhin; nur ist an die Stelle der Breite des Mondes jetzt die Differenz der Deklinationen von Mond und Schattenmittelpunkt, d. i. die Summe der Deklinationen von Mond und Sonne, und an die Stelle von $\Delta\beta_☾$ jetzt $\Delta\delta_☾ + \Delta\delta_☉$ zu setzen. Die Formeln sind also folgende:

T Zeit der Opposition in AR.

$$60\,\mu \sin\psi = (\Delta\alpha_☾ - \Delta\alpha_☉) \cos\delta_☾$$
$$60\,\mu \cos\psi = \Delta\delta_☾ + \Delta\delta_☉ + \tfrac{1}{4}(\Delta\alpha_☾ - \Delta\alpha_☉)^2 \sin 2\delta_☾ \sin 1'' = \Delta\delta_☾ + \Delta\delta_☉ + \text{Corr. } \delta.$$

Mitte der Finsterniss: $T_0 = T - \frac{1}{\mu}(\delta_☾ + \delta_☉) \cos\psi.$

Partielle Finsterniss:

$$\Delta_1 = \frac{51}{50}[\rho_{4\,5}(\pi_{☾} + \pi_{\odot}) \mp r_{\odot}] + r_{☾};\quad \sin\omega_1 = \frac{(\delta_{☾} + \delta_{\odot})\sin\psi}{\Delta_1};\quad T_1 = T_0 - \frac{1}{\mu}\Delta_1 \cos\omega_1.$$

Totale Finsterniss:

$$\Delta_2 = \frac{51}{50}[\rho_{4\,5}(\pi_{☾} + \pi_{\odot}) \mp r_{\odot}] - r_{☾};\quad \sin\omega_2 = \frac{(\delta_{☾} + \delta_{\odot})\sin\psi}{\Delta_2};\quad T_2 = T_0 - \frac{1}{\mu}\Delta_2 \cos\omega_2.$$

Oberes Zeichen beim Kernschatten, unteres beim Halbschatten.
ω im 1. oder 4. Quadranten für Eintritte, im 2. oder 3. Quadranten für Austritte.

Bedingung für eine Finsterniss: $(\delta_{☾} + \delta_{\odot})\sin\psi < \Delta$.
Positionswinkel der Berührungsstelle am Mondrande: $Q = \psi + \omega$.

Grösse der Finsterniss: $\dfrac{\Delta - (\delta_{☾} + \delta_{\odot})\sin\psi}{2 r_{☾}}$.

Bereich der Sichtbarkeit:

$$\sin\delta_{☾}\sin\varphi' + \cos\delta_{☾}\cos\varphi'\cos(t - \alpha_{☾} - \lambda) \geq \sin(\pi_{☾} - r),$$

wobei t die den Zeiten T entsprechende Sternzeit, r die Refraction im Horizont, λ die westliche Länge, φ' die geocentrische Breite der Orte bedeutet.

Den Betrag der Correction, der an die Summen der Bewegungen in Deklination anzubringen ist, entnimmt man der folgenden Tafel. Die Correction hat das Vorzeichen von $\delta_{☾}$ und ist zu $\Delta\delta_{☾} + \Delta\delta_{\odot}$ zu addiren.

$\Delta\alpha_{☾} - \Delta\alpha_{\odot}$

$\delta_{☾}$	1200″	1300″	1400″	1500″	1600″	1700″	1800″	1900″	2000″	2100″	2200″	2300″	2400″
0°	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0	0″·0
5	0·3	0·4	0·4	0·5	0·5	0·6	0·7	0·8	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2
10	0·6	0·7	0·8	0·9	1·1	1·2	1·3	1·5	1·7	1·8	2·0	2·2	2·4
15	0·9	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2·0	2·2	2·4	2·7	2·9	3·2	3·5
20	1·1	1·3	1·5	1·8	2·0	2·3	2·5	2·8	3·1	3·4	3·8	4·1	4·5
25	1·3	1·6	1·8	2·1	2·4	2·7	3·0	3·4	3·7	4·1	4·5	4·9	5·4
30	1·5	1·8	2·1	2·4	2·7	3·0	3·4	3·8	4·2	4·6	5·1	5·6	6·1

Für die oben behandelte Finsterniss giebt der »Nautical Almanac« folgende Elemente:

T = 1898 Jan. 7 $12^h\ 9^m\ 49^s{\cdot}9$
$\alpha_{☾} = 7^h\ 17^m\ 7^s{\cdot}29$
$\delta_{☾} = +23°\ 6'\ 51''{\cdot}0$
$\delta_{\odot} = -22\ 16\ 11{\cdot}3$

$\Delta\alpha_{☾} = +32'\ 5''{\cdot}6$
$\Delta\delta_{☾} = -\ 6\ 41{\cdot}4$
$\Delta\alpha_{\odot} = +\ 2\ 43{\cdot}7$
$\Delta\delta_{\odot} = +\ 0\ 20{\cdot}1$

$\pi_{☾} = 54'\ 33''{\cdot}00$
$\pi_{\odot} = 0\ 9{\cdot}00$
$r_{☾} = 14\ 52{\cdot}00$
$r_{\odot} = 16\ 15{\cdot}87$.

$\Delta\alpha_{☾} - \Delta\alpha_{\odot}$	= 1761″·9	$\delta_{☾} + \delta_{\odot}$ . .	+ 3039″·7	$\pi_{☾} + \pi_{\odot}$	. 3282″·0
	3·2460		3·4828		3·5162
$\log\cos\delta_{☾}$ . .	9·9637	$\log\cos\psi$ . . .	$9{\cdot}3570_n$	$\log\rho_{4\,5}$ . .	9·9993
$\Delta\delta_{☾} + \Delta\delta_{\odot}$	− 381·3	$\log\sin\psi$ . . .	9·9885		3·5155
Corr. . .	+ 2·7	$(\delta_{☾} + \delta_{\odot})\sin\psi$.	2957″	$\rho_{4\,5}(\pi_{☾} + \pi_{\odot})$	3277″
$\log 60\mu\sin\psi$.	3·2097	Finsterniss partiell		$r_{\odot}$ . . .	976
$\log 60\mu\cos\psi$.	$2{\cdot}5782_n$	$\log(\delta_{☾} + \delta_{\odot})\cos\psi$	$2{\cdot}8398_n$		2301
$\log \tan\psi$ . .	$0{\cdot}6315_n$	$\log 1/\mu$	8·5570	$\frac{1}{50}$ . . .	46
ψ	103°·15		$1{\cdot}3968_n$	$r_{☾}$ . . .	892
$\log 60\mu$ . . .	3·2212	ΔT	− $24^m{\cdot}9$	Δ_1 . .	= 3239
$\log 60$ . . .	1·7782	T	$12^h\ 9^m{\cdot}8$	Δ_2 . .	= (1455)
$\log\mu$	1·4430	T_0	$12^h\ 34^m{\cdot}7$		

$log(\delta_{☾} + \delta_{\odot}) \sin\psi$	3·4713	$\Delta_1 - (\delta_{☾} + \delta_{\odot}) \sin\psi$	282″
$log\, \Delta_1$	3·5104	$2r_{☾}$	1784
$log \sin\omega$	9·9617	Quotient	0·16
ω . 66°·28 oder	113°·72		
$log \cos\omega$ . . .	9·6045	1. Berührung . . .	$11^h\ 47^m·7$
$log \frac{1}{\mu}$	8·5570	Pos. W.	169°
$log\, \Delta_1$	3·5104	Mitte d. F.	$12^h\ 34^m·7$
	1·6719	2. Berührung . . .	13^h 21·7
	$47^m·0$	Pos. W.	217°
	12^h 34·7	Grösse d. F. . . .	0·16
Zeit d. Phase	$11^h\ 47^m·7$ $13^h\ 21^m·7$		
Pos. W. . .	169°·4 216°·9.		

Wegen der grossen Unsicherheit, mit der die Beobachtungen der Mondfinsternisse wegen der Unbestimmtheit der Schattengrenzen verknüpft ist, ist es nicht möglich, aus denselben werthvolleres Material zur Correction der Rechnungselemente abzuleiten. Sie dienen aber zur Bestimmung des Betrages der Vergrösserung des geometrischen Schattens des Erdkörpers und zur genaueren Untersuchung der Ursache dieser noch wenig erforschten Erscheinung. Man vergleiche in dieser Hinsicht die citirte Arbeit von J. HARTMANN.

Sonnenfinsternisse.

Zur Zeit der Conjunction des Mondes mit der Sonne, des Neumondes, befinden sich die Mittelpunkte der drei Körper Sonne, Mond, Erde in ein und derselben zur Ekliptik senkrechten Ebene. Hinter dem Monde, von der Sonne aus gerechnet, entstehen in derselben Weise wie in Fig. 225 zwei Schattenkegel. Der Abstand der Spitze des inneren oder Kernschattenkegels berechnet sich nach der bei den Mondfinsternissen abgeleiteten Formel zu

$$\frac{k}{k+S}\cdot \text{ Entfernung Mond-Sonne.}$$

Setzen wir für k und S ihre numerischen Werthe

$$k = 0·2725 \qquad S = \frac{r_{\odot}}{\pi_{\odot}} = \frac{959·63}{8·85} = 108·4$$

ein und führen die Parallaxen ein, so wird jener Abstand

$$\frac{1}{397}\left(\frac{\pi_{☾}}{\pi_{\odot}} - 1\right)\cdot \text{ Entfernung Erde-Mond.}$$

Das Verhältniss $\pi_{☾} : \pi_{\odot}$ schwankt zwischen den Grenzwerthen 352 und 423 und folglich ist, wenn der Mond sich in der Erdnähe befindet, der Abstand der Spitze $\frac{422}{397}\,r = 1·063\,r$, wenn wir für den Augenblick mit r den Radiusvector des Mondes bezeichnen. Andererseits ist zur Zeit der Erdferne der Abstand $= \frac{351}{397}\,r = 0·884\,r$. In diesem letzteren Falle ist nun der Erdradius $= 0·015\,r$, also die Entfernung des nächsten Punktes der Erdoberfläche vom Mondmittelpunkte $= 0·985\,r$, und es kann also der Schattenkegel die Erdoberfläche nicht erreichen. Denken wir uns aber den Sonnenradius verkleinert, so wird damit gleichzeitig der Schattenkegel verlängert, seine Spitze also vom Monde entfernt. Bei einer gewissen Verkleinerung wird also diese Spitze die Erdoberfläche gerade berühren, und in diesem Punkte werden die verkleinerte Sonnen- und die Mond-

scheibe einander gerade verdecken. Auf den dem Monde näheren Punkten der Axe des Schattenkegels wird die Mondscheibe grösser als die Sonnenscheibe erscheinen, während sie auf den weiter entfernten Punkten kleiner erscheinen und die Sonnenscheibe nicht völlig verdecken wird. Es entsteht in diesem Falle eine ringförmige Finsterniss. Im ersten Falle ist der Erdradius $= 0{\cdot}017\, r$. Der dem Monde nächste Punkt der Erdoberfläche befindet sich daher im günstigsten Falle, nämlich wenn der Mond im Augenblicke der Finsterniss in der Ekliptik steht, in der Entfernung 0·080 von der Spitze des Schattenkegels. Dieser Kegel schneidet dann also aus der Erdoberfläche einen Kreis aus, dessen Radius nahe $= \frac{0{\cdot}080}{1{\cdot}063}\, 0{\cdot}2725 = 0{\cdot}020$ in Theilen des Erdradius, oder $= 1^\circ{\cdot}14$ ist. In analoger Weise findet sich die halbe Breite der Zone der Ringförmigkeit für die günstigsten Verhältnisse zu $\frac{0{\cdot}101}{0{\cdot}985}\, 0{\cdot}2725 = 0{\cdot}028$ Erdradius $= 1^\circ{\cdot}60$. Wir haben hiernach die Sonnenfinsternisse in folgender Weise zu unterscheiden:

1) Die Axe des Schattenkegels trifft die Erdoberfläche; die Schnittcurve, auf welcher die Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe sich für einen Augenblick decken, heisst die Curve der Centralität.

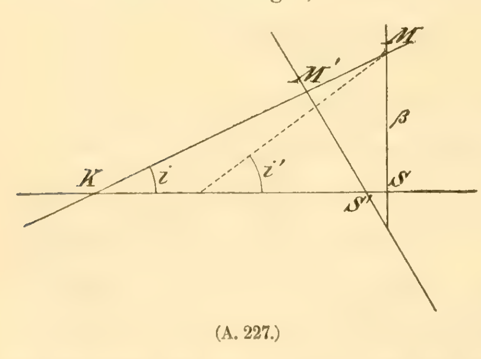
a) Die Spitze des Schattenkegels erreicht die Erdoberfläche; es entsteht eine totale centrale Finsterniss.

b) Die Spitze des Schattenkegels erreicht die Erdoberfläche nicht; es entsteht eine ringförmige centrale Finsterniss.

c) Die Spitze des Schattenkegels erreicht die Erdoberfläche nur in einem kleinen mittleren Stücke der Curve der Centralität, es entsteht eine ringförmig-totale centrale Finsterniss.

2) Die Axe des Schattenkegels trifft die Erdoberfläche nicht, die Erde tritt aber noch in den Kernschattenkegel oder seine Verlängerung ein; es entstehen totale, bezw. ringförmige, bezw. ringförmig-totale, nicht centrale Finsternisse.

3) Die Erde berührt den Kernschattenkegel überhaupt nicht, tritt dagegen in den Halbschattenkegel; es entsteht eine partielle Finsterniss.



(A. 227.)

In den unter 1) und 2) aufgezählten Fällen wird natürlich in einer die schmale Zone, innerhalb deren die totale oder ringförmige Finsterniss sichtbar ist, umschliessenden breiteren Zone eine partielle Finsterniss sichtbar sein.

Um jetzt die Bedingung des Eintrittes einer Finsterniss zu finden, müssen wir zunächst die Bedingung des Eintrittes des kürzesten Abstandes der Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe zur Zeit des Neumondes suchen.

Es seien (Fig. 227) M und S die geocentrischen Oerter des Mond- und Sonnenmittelpunktes im Augenblicke der Conjunction. Der Punkt S bewegt sich längs der Ekliptik SK, der Punkt M längs MK in der Ebene der Mondbahn. Der Winkel $MKS = i$, die Neigung der Mondbahn, beträgt etwa $5^\circ\, 9'$. Sei $\Delta\lambda_\odot$ die stündliche Bewegung des Punktes S, und $\Delta\lambda_☾$ die stündliche Aenderung der geocentrischen Länge des Mondes, sowie $\Delta\beta_☾$ die stündliche Aenderung seiner geocentrischen Breite.

Betrachten wir den Punkt S als ruhend, so führt der Punkt M eine relative Bewegung aus von $\Delta\lambda_{☾} - \Delta\lambda_{\odot}$ in der Richtung der Ekliptik und von $\Delta\beta_{☾}$ senkrecht dazu. Diese scheinbare Bewegungsrichtung bildet mit der Ekliptik den Winkel i', bestimmt durch

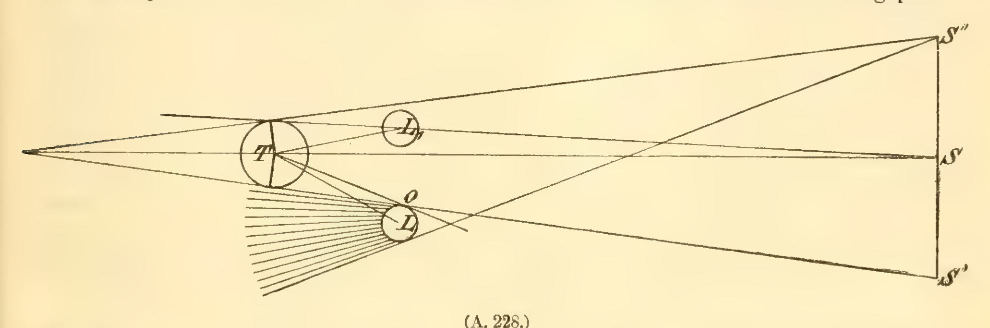
$$tang\, i' = \frac{\Delta\beta_{☾}}{\Delta\lambda_{☾} - \Delta\lambda_{\odot}} = \frac{\Delta\lambda_{☾}}{\Delta\lambda_{☾} - \Delta\lambda_{\odot}} \frac{\Delta\beta_{☾}}{\Delta\lambda_{☾}} = \frac{\Delta\lambda_{☾}}{\Delta\lambda_{☾} - \Delta\lambda_{\odot}}\, tang\, i.$$

Die kürzeste Distanz erhalten wir, indem wir von S aus ein Perpendikel auf die scheinbare Bewegungsrichtung fällen. Sie wird daher

$$S'M' = \beta \cos i'.$$

Aus dem Verhältniss der Umlaufszeiten von Mond und Erde finden wir den mittleren Werth $\dfrac{\Delta\lambda_{☾}}{\Delta\lambda_{☾} - \Delta\lambda_{\odot}} = 13{\cdot}4$ und damit den mittleren Werth von $i' = 5^\circ\, 34'$. Da $\Delta\lambda_{\odot}$, $\Delta\lambda_{☾}$ und i selbst veränderlich sind, ist es auch i'. Die extremen Werthe sind $5^\circ\, 17'$ und $5^\circ\, 52'$.

Denken wir uns nun in Fig. 228 die Ebene der Zeichnung gelegt durch die Mittelpunkte T und S der Erde und Sonne und durch den Berührungspunkt



(A. 228.)

der Mond- und Sonnenscheibe im Augenblicke des Anfangs oder Endes einer partiellen Sonnenfinsterniss. Die Ebene wird dann auch den Mittelpunkt L des Mondes enthalten. Der Winkel LTS ist der Winkel, unter dem vom Erdmittelpunkte aus die kleinste Entfernung der Mittelpunkte der beiden Scheiben erscheint. Wir entnehmen nun der Zeichnung sofort die Beziehung

$$\sphericalangle LTS = r_{☾} + \sphericalangle STO = r_{☾} + \pi_{☾} + (r_{\odot} - \pi_{\odot})$$

und finden so als Grenzwerth der Breite des Mondes im Augenblick des Neumondes

$$\beta \leqq (r_{☾} + r_{\odot} + \pi_{☾} - \pi_{\odot})\, sec\, i'.$$

Der grösstmögliche Werth, den $\beta_{☾}$ haben darf, wird hiernach

$$\beta_{☾} = (16'\, 46'' + 16'\, 18'' + 61'\, 32'' - 9'')\, sec\, 5^\circ\, 52' = 1^\circ\, 34'\, 57'',$$

der kleinstmögliche dagegen

$$= (14'\, 24'' + 15'\, 45'' + 52'\, 50'' - 9'')\, sec\, 5^\circ\, 17' = 1^\circ\, 23'\, 11''.$$

Ist also die Breite des Mondes im Augenblick des Neumondes $> 1^\circ\, 34'\, 57''$, so findet eine Finsterniss nicht statt, ist sie $< 1^\circ\, 23'\, 11''$, so findet eine Finsterniss gewiss statt, liegt sie zwischen beiden Grenzen, so ist die Bedingung des Eintritts einer Finsterniss

$$\beta_{☾} < r_{☾} + r_{\odot} + \pi_{☾} - \pi_{\odot} + 25''.$$

Die Vergrösserung des β durch den Faktor $sec\, i'$ liegt immer zwischen den Grenzen $21''$ und $30''$ und kann durch die Hinzufügung von $25''$ genügend berücksichtigt werden.

Um weiter zu entscheiden, ob die Finsterniss nur partiell oder ob sie total oder ringförmig sein wird, genügt es, zu wissen, ob die Axe des Schattenkegels die Erdoberfläche trifft oder nicht. Dies tritt ein, wenn der Mond in L_1 sich befindet. Dann ist aber nach der Zeichnung $\sphericalangle L_1 TS = \pi_☾ - \pi_⊙$. Folglich:

ist im Augenblick des Neumondes $\beta_☾ > 1° 1' 42''$, so ist eine centrale Finsterniss nicht möglich.

ist im Augenblick des Neumondes $\beta_☾ < 0° 52' 54''$, so findet eine centrale Finsterniss gewiss statt.

liegt $\beta_☾$ zwischen beiden Grenzen, so ist die Finsterniss central, wenn $\beta_☾ \leqq \pi_☾ - \pi_⊙ + 16''$ ist.

Alle diese Bestimmungen gelten nur unter der Voraussetzung einer kugelförmigen Erde. Die genauere Form der Bedingungen werden wir später kennen lernen.

Hat man in dieser Weise erkannt, dass mit einem bestimmten Neumonde eine Sonnenfinsterniss verbunden sein wird, so ist nun die Aufgabe zu lösen, die Momente der einzelnen Phasen zu berechnen. Wir nehmen zunächst an, man sei gezwungen, direkt auf die Sonnen- und Mondtafeln zurückzugehen, wir werden uns dann zur Darstellung am besten der Längen und Breiten der Gestirne bedienen. Bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts wählte man zur Behandlung dieser Aufgabe stets den sich direkt darbietenden Weg, aus der gegenseitigen Stellung der beiden Scheiben und der Aenderung derselben mit der Zeit den Verlauf der Erscheinung zu bestimmen; diese nach KEPLER benannte Methode wurde durch BOHNENBERGER vollständig entwickelt, sie findet sich ausführlich dargestellt im »Nautical Almanac« für 1836. LAGRANGE war der erste, der den Weg einer analytischen Behandlung des Problems betrat und durch BESSEL's und HANSEN's Arbeiten ist diese Methode völlig ausgebildet. Die Methode beruht auf der Untersuchung der beiden Sonne und Mond einhüllenden Kegeloberflächen.

Es seien $\lambda_⊙$, $\beta_⊙$, $\Delta_⊙$, $\lambda_☾$, $\beta_☾$, $\Delta_☾$ die geocentrischen Coordinaten und Entfernungen von Sonne und Mond, ferner l, b die Länge und Breite des Zielpunktes der Verbindungslinie des Mond- und Sonnenmittelpunktes und G der lineare Abstand beider Punkte; dann ist

$$\begin{aligned} G \cos b \cos l &= \Delta_⊙ \cos \beta_⊙ \cos \lambda_⊙ - \Delta_☾ \cos \beta_☾ \cos \lambda_☾ \\ G \cos b \sin l &= \Delta_⊙ \cos \beta_⊙ \sin \lambda_⊙ - \Delta_☾ \cos \beta_☾ \sin \lambda_☾ \\ G \sin b &= \Delta_⊙ \sin \beta_⊙ - \Delta_☾ \sin \beta_☾ . \end{aligned}$$

Führen wir die Horizontalparallaxen ein und nennen R den Radiusvector der Erde in Einheiten der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, so wird, wenn wir $\frac{1}{R} \frac{\sin 8''\cdot 85}{\sin \pi_☾} = \mu$ setzen

$$\begin{aligned} G \sin \pi_☾ \cos b \cos (l - \lambda_⊙) &= \frac{\cos \beta_⊙}{\mu} - \cos \beta_☾ \cos (\lambda_☾ - \lambda_⊙) \\ G \sin \pi_☾ \cos b \sin (l - \lambda_⊙) &= - \cos \beta_☾ \sin (\lambda_☾ - \lambda_⊙) \\ G \sin \pi_☾ \sin b &= \frac{\sin \beta_⊙}{\mu} - \sin \beta_☾ . \end{aligned} \tag{1}$$

Als lineare Einheit dient in diesen Ausdrücken der äquatoreale Erdradius.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Division und Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz

$$\tang (l - \lambda_⊙) = - \mu \frac{\cos \beta_☾}{\cos \beta_⊙} \sin (\lambda_☾ - \lambda_⊙) - \frac{\mu^2}{2} \frac{\cos^2 \beta_☾}{\cos^2 \beta_⊙} \sin 2 (\lambda_☾ - \lambda_⊙) \ldots .$$

Wir haben nun gesehen, dass die grösste Entfernung der Centren von Sonne und Mond bei einer Sonnenfinsterniss nur $1^\circ\ 35'$ sein darf; dies ist also auch der Grenzwerth von $\lambda_☾ - \lambda_⊙$. Da nun auch μ nur etwa $\frac{1}{400}$ beträgt, ist das zweite Glied der Entwickelung schon sehr klein, es kann höchstens $0''{\cdot}05$ ausmachen, wir können es aber, wie man durch die Entwickelung leicht erkennt, berücksichtigen, wenn wir setzen $tang\,(l - \lambda_⊙) = -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{cos\,\beta_☾}{cos\,\beta_⊙}\,sin(\lambda_☾ - \lambda_⊙)$. Dieser Ausdruck weicht vom strengen Werthe erst in den Gliedern 3. Ordnung ab, da aber der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente von derselben Ordnung ist, haben wir mit derselben Annäherung auch

$$l - \lambda_⊙ = -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{cos\,\beta_☾}{cos\,\beta_⊙}(\lambda_☾ - \lambda_⊙).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen des Systems (1) folgt weiter

$$G\,sin\,\pi_☾\,cos\,b = \frac{1}{\mu}\,cos\,\beta_⊙\,cos(l - \lambda_⊙) - cos\,\beta_☾\,cos(l - \lambda_☾).$$

Nun wird aber nach dem vorigen Ausdruck $l - \lambda_⊙$ im Maximum $= \frac{1}{400}\,(1^\circ\ 34') = 14''$, so dass $cos\,(l - \lambda_⊙)$ stets $= 1$ zu setzen ist. Der erste Theil von $G\,sin\,\pi_☾\,cos\,b$ ist also nahe $= 400$; der zweite Theil kann im Maximum $= 1$ werden, während sein Minimalwerth ist $cos\,1^\circ\ 34'\ cos\,\beta_☾ = 0{\cdot}99963\ cos\,\beta_☾$. Setzen wir hier gleichfalls $cos\,(l - \lambda_☾) = 1$, so begehen wir einen Fehler, der höchstens 4 Einheiten der 7. Decimale des Logarithmus betragen kann; wir haben also einfach $G\,sin\,\pi_☾\,cos\,b = \frac{1}{\mu}\,cos\,\beta_⊙ - cos\,\beta_☾$ und erhalten nun mit Hilfe der dritten Gleichung des Systems (1)

$$G\,sin\,\pi_☾\,sin(b - \beta_⊙) = -\,sin(\beta_☾ - \beta_⊙)$$

$$G\,sin\,\pi_☾\,cos(b - \beta_⊙) = \frac{1}{\mu} - cos(\beta_☾ - \beta_⊙)$$

und daraus in derselben Weise wie vorhin

$$b - \beta_⊙ = -\frac{\mu}{1-\mu}(\beta_☾ - \beta_⊙).$$

In dem ebenen Dreiecke zwischen den Mittelpunkten von Sonne, Mond und Erde ist streng

$$G^2 = \Delta_⊙^2 + \Delta_☾^2 - 2\Delta_⊙\,\Delta_☾\,cos\,STL = (\Delta_⊙ - \Delta_☾)^2 + 4\Delta_⊙\Delta_☾\,sin^2\,\tfrac{1}{2}STL.$$

Da nun $\sphericalangle STL$ höchstens $= 1^\circ\ 34'$ ist, ist das Correctionsglied unmerklich (es beträgt höchstens 6 Einheiten der 7. Decimale). Wegen $\Delta_⊙ = \frac{R}{sin\,8''{\cdot}85}$, $\Delta_☾ = \frac{1}{sin\,\pi_☾}$ wird daher $G = \frac{R}{sin\,8''{\cdot}85}\,(1 - \mu)$.

Wir erhalten hiernach zur Bestimmung des Zielpunktes der Kegelaxe und der linearen Entfernung von Sonne und Mond die Ausdrücke

$$l = \lambda_⊙ - \frac{\mu}{1-\mu}\frac{cos\,\beta_☾}{cos\,\beta_⊙}(\lambda_☾ - \lambda_⊙) \qquad b = \beta_⊙ - \frac{\mu}{1-\mu}(\beta_☾ - \beta_⊙)$$

$$G = \frac{R}{sin\,8''{\cdot}85}\,(1 - \mu) \qquad \mu = \frac{1}{R}\,\frac{sin\,8''{\cdot}85}{sin\,\pi_☾}.$$

Der Faktor $\frac{cos\,\beta_☾}{cos\,\beta_⊙}$ ist ohne Einbusse an Genauigkeit $= 1$ zu setzen; er ist nur beibehalten, um leichter von den Ekliptikalcoordinaten zu den äquatorealen übergehen zu können. Diesen Uebergang können wir durch einfache Buch-

stabenvertauschung ausführen. Die Rectascensionsdifferenz der Mittelpunkte der beiden Scheiben kann zwar $= 1° 35' \sec 23\frac{1}{2}° = 1° 44'$ werden, die Fehler der Ausdrücke werden daher etwas grösser sein, immer aber noch unmerklich. Wir erhalten also die Rectascension und Deklination des Zielpunktes der Kegelaxe durch

$$a = \alpha_{\odot} - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\cos \delta_{☾}}{\cos \delta_{\odot}} (\alpha_{☾} - \alpha_{\odot}) \qquad d = \delta_{\odot} - \frac{\mu}{1-\mu} (\delta_{☾} - \delta_{\odot}).$$

Die grosse Einfachheit, die durch BESSEL's Untersuchungen die Theorie der Finsternisse erhalten hat, beruht im wesentlichen auf der Einführung eines neuen Coordinatensystems. Wir legen durch den Erdmittelpunkt eine zur Kegelaxe parallele Gerade und machen diese zur Z-Axe; die X-Axe liegt in der Ebene der Ekliptik, ihre positive Richtung zielt auf den Punkt $\lambda = 90° + l$, $\beta = 0°$; die positive Y-Axe endlich zielt auf den Punkt $\lambda = 180° + l$, $\beta = 90° - b$.

Die Cosinus der Neigungswinkel der Axen des alten und des neuen Systems haben also folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{lll} \cos(XX') = \sin l & \cos(YX') = \cos l & \cos(ZX') = 0 \\ \cos(XY') = -\cos l \sin b & \cos(YY') = -\sin l \sin b & \cos(ZY') = \cos b \\ \cos(XZ') = \cos l \cos b & \cos(YZ') = \sin l \cos b & \cos(ZZ') = \sin b. \end{array}$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes im alten System sind

$$x = \Delta \cos \beta \cos \lambda \qquad y = \Delta \cos \beta \sin \lambda \qquad z = \Delta \sin \beta,$$

sie werden also im neuen System

$$\begin{aligned} x' &= -\Delta \cos \beta \cos \lambda \sin l + \Delta \cos \beta \sin \lambda \cos l \\ &= \Delta \cos \beta \sin(\lambda - l) \\ y' &= -\Delta \cos \beta \cos \lambda \cos l \sin b - \Delta \cos \beta \sin \lambda \sin l \sin b + \Delta \sin \beta \cos b \\ &= \Delta[\sin \beta \cos b - \cos \beta \sin b \cos(\lambda - l)] \\ z' &= \Delta \cos \beta \cos \lambda \cos l \cos b + \Delta \cos \beta \sin \lambda \sin l \cos b + \Delta \sin \beta \sin b \\ &= \Delta[\sin \beta \sin b + \cos \beta \cos b \cos(\lambda - l)]. \end{aligned}$$

Wir erhalten also, wenn wir durch ϑ und Φ die Länge und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes, mit ρ den Erdradius bezeichnen, für die Coordinaten des Mondes bezw. des Beobachtungsortes folgende Ausdrücke, in denen der äquatoreale Erdradius als Einheit gilt:

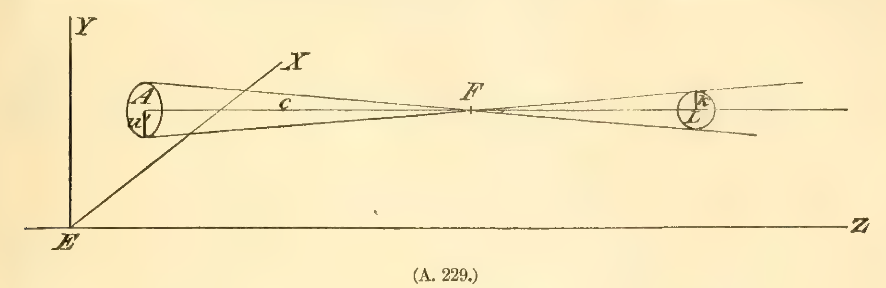
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \cos \beta_{☾} \sin(\lambda_{☾} - l) \\ y &= \frac{1}{\sin \pi_{☾}} [\sin \beta_{☾} \cos b - \cos \beta_{☾} \sin b \cos(\lambda_{☾} - l)] \\ z &= \frac{1}{\sin \pi_{☾}} [\sin \beta_{☾} \sin b + \cos \beta_{☾} \cos b \cos(\lambda_{☾} - l)] \\ \xi &= \rho \cos \Phi \sin(\vartheta - l) \\ \eta &= \rho [\sin \Phi \cos b - \cos \Phi \sin b \cos(\vartheta - l)] \\ \zeta &= \rho [\sin \Phi \sin b + \cos \Phi \cos b \cos(\vartheta - l)]. \end{aligned}$$

Die scheinbaren Coordinaten des Mondes in Bezug auf das Auge des Beobachters als Anfangspunkt sind dann

$$x' = x - \xi \qquad y' = y - \eta \qquad z' = z - \zeta.$$

Ist nun (Fig. 229) E der Erdmittelpunkt, der Anfangspunkt unseres Coordinatensystems, L der Mittelpunkt des Mondes und F die Spitze eines der beiden Schattenkegel, so bestimmen wir die Lage und die Grösse des Schattens durch Angabe der Coordinaten des Punktes F und des Oeffnungswinkels f des Schattenkegels. Der Punkt F ist ein Punkt der Kegelaxe, die der Z-Axe parallel ist; die Coor-

dinaten XY des Punktes F sind also denen des Mondmittelpunktes gleich. Die dritte Coordinate ist $AF = AL - FL = z - \frac{k}{\sin f}$, wenn k der lineare Mondradius ist. Dies gilt für den Kegel, dessen Spitze auf der Verlängerung der Verbindungslinie Sonnen-Mondmittelpunkt liegt, für den anderen Kegel wird



(A. 229.)

$AF = z + \frac{k}{\sin f}$. Zur Vermeidung des doppelten Zeichens rechnen wir für den Kernschattenkegel f negativ und haben dann allgemein $c = z + \frac{k}{\sin f}$. Der Schattenkegel schneidet die XY-Ebene in einem Kreise, der Radius dieses Kreises sei u' und es ist $u' = c \tang f$ oder

$$u' = \left(z + \frac{k}{\sin f}\right) \tang f.$$

Durch Angabe der Werthe von u', wobei der dem äusseren oder Halbschattenkegel zugehörige Werth durch u_a', der dem Kernschattenkegel zugehörige Werth durch u_i' bezeichnet wird, und von $\sin f$ ist der Schatten vollständig bestimmt; denn legen wir durch den Beobachtungsort eine der XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von dieser also $= \zeta$ ist, so ist der Radius des Schattenkreises in dieser Ebene $u = (c - \zeta) \tang f = u' - \zeta \tang f$. Den Oeffnungswinkel der Schattenkegel bestimmen wir auf geometrischem Wege. Ziehen wir durch den Mondmittelpunkt eine Parallele zur Kegeloberfläche, so schneidet dieselbe auf dem zugehörigen Radius des Sonnenkörpers, dessen linearer Werth S sei, beim Kernschattenkegel eine Strecke $= S - k$, beim Halbschattenkegel eine Strecke $= S + k$ ab, und es wird für den Halbschattenkegel, da G die Entfernung der beiden Mittelpunkte ist, $\sin f = \frac{S + k}{G}$, beim Kernschattenkegel, für welchen f negativ sein soll, $\sin f = \frac{k - S}{G}$. Nun war $G = \frac{R}{\sin 8''\cdot85}(1 - \mu)$ und $S = \frac{\sin r_\odot}{\sin \pi_\odot}$ wobei wir für $r_\odot$ und $\pi_\odot$ die der mittleren Entfernung entsprechenden Werthe $r_\odot = 959''\cdot63$ nach Auwers $\pi_\odot = 8''\cdot85$ zu setzen haben. Also ist

$$\sin f = \pm \frac{\sin r_\odot \pm k \cdot \sin 8''\cdot85}{R(1 - \mu)}$$ oberes Zeichen Halbschatten, unteres Zeichen Kernschatten.

Mit $k = 0\cdot272535$ nach L. Struve erhalten wir die Werthe (die eingeklammerten Zahlen sind Logarithmen):

$$\sin f_i = \frac{[7\cdot6665842_n]}{R(1 - \mu)}$$ für den Kernschatten

$$\sin f_a = \frac{[7\cdot6687673]}{R(1 - \mu)}$$ für den Halbschatten.

Der Werth von u' entscheidet über die Gattung der Finsterniss. Beim Halbschatten also für die partielle Finsterniss ist u_a' und u_a stets positiv. Liegt beim

Kernschatten die Spitze F des Kegels zwischen der XY-Ebene und dem Monde, dann erscheint in der XY-Ebene die Finsterniss ringförmig, da c positiv, $tang\,f$ negativ ist, wird u_i' negativ; soll die Finsterniss total sein, so muss auch c negativ sein, der Punkt F muss jenseits der XY-Fbene liegen, dann aber wird u_i' positiv. Ist c hinreichend klein, sodass F innerhalb des Erdkörpers liegt, so kann u_i für verschiedene Orte verschiedene Zeichen haben, die Finsterniss also theils ringförmig, theils total sein. Offenbar ist die Finsterniss auf der ganzen Erdoberfläche total, wenn die Spitze des Kernschattenkegels wenigstens bis zu der durch den Erdmittelpunkt gelegten Ebene reicht, wenn also für diesen Kegel

$$c = z + \frac{k}{sin\,f_i} = 0, \quad \text{also} \quad z = -\frac{k}{sin\,f_i}$$

ist. Setzen wir diesen Werth des z in den Ausdruck für u_a', so wird

$$u_a' = k\left(\frac{1}{sin\,f_a} - \frac{1}{sin\,f_i}\right) tang\,f_a = k\,sec\,f_a - k\,\frac{tang\,f_a}{sin\,f_i}.$$

Da $sec\,f_a = 1$, $log\,\dfrac{tang\,f_a}{sin\,f_i} = 0{\cdot}0022_n$ ist, wird $u_a' = 0{\cdot}5464$. Andererseits ist für die ganze Erdoberfläche die Finsterniss ringföımig, wenn die Spitze des Kernschattenkegels die Erdoderfläche überhaupt nicht erreicht, wenn also $c = +1$ ist. Diese Forderung giebt in derselben Weise

$$u_a' = tang\,f_a + sec\,f - k\,\frac{tang\,f_a}{sin\,f_i}.$$

Durch die Aenderungen, denen R und μ unterworfen sind, wird in $sin\,f_a$ nur die 4. Decimale um nicht ganz eine Einheit geändert; vernachlässigen wir dieses, so ist $u_a' = 0{\cdot}5511$. Also:

ist $u_a' < 0{\cdot}5464$, so ist die Finsterniss total
ist $u_a' > 0{\cdot}5511$, „ „ „ „ ringförmig

liegt u_a' zwischen den Grenzen 0·5464 und 0·5511, so ist die Finsterniss theils ringförmig, theils total.

Mit Rücksicht auf die Abplattung des Erdkörpers kann die Entfernung des dem Monde nächsten Punktes der Erdoberfläche zwischen den Grenzen 0·9990 und 1 liegen. Dadurch wird aber die oben gegebene Zahl nicht beeinflusst.

Die Grössen l, b, x, y, z, u_i', u_a', f_i, f heissen die Elemente der Finsterniss. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle Aufgaben der Theorie lösen. Soll ein Beobachter, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, die Erscheinung sehen, so muss er sich befinden auf der betreffenden Kegeloberfläche, und zwar auf dem Schnittkreise derselben mit der durch den Beobachtungsort gelegten der XY-Ebene parallelen Ebene. Die Coordinaten des Kreismittelpunktes sind x, y, der Radius ist $u' - \zeta\,tang\,f$, die zu erfüllende Bedingung ist also

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (u' - \zeta\,tang\,f)^2.$$

Seien x_0, y_0, u_0', ξ, η, ζ die für einen bestimmten Zeitpunkt geltenden Werthe der Coordinaten x', y', $\dfrac{d\xi}{dt}$, $\dfrac{d\eta}{dt}$ und $\dfrac{d\zeta}{dt}$ ihre Aenderungen, so bestimmt sich der Eintritt der betreffenden Phase durch die Gleichung

$$\left[(x_0 - \xi) + \tau\left(x' - \frac{d\xi}{dt}\right)\right]^2 + \left[(y_0 - \eta) + \tau\left(y' - \frac{d\eta}{dt}\right)\right]^2 = \left(u_0' - \zeta\,tang\,f - \tau\,\frac{d\zeta}{dt}tang\,f\right)^2.$$

Dies ist die Bessel'sche Gleichung, die als Grundlage der Theorie zu betrachten ist.

Für die Vorausberechnung der Erscheinung bringen wir die Grundgleichung in eine andere Form. Nennen wir den Positionswinkel des Schattenmittelpunktes A (Fig. 229) im Auge des Beobachters, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, gezählt in der gewöhnlichen Weise von der positiven Richtung der Y-Axe nach der positiven Richtung der X-Axe p_1, so ist in der Ebene der $\xi\eta$

$$u \sin p_1 = x - \xi \qquad u \cos p_1 = y - \eta,$$

wenn der Punkt $\xi\eta\zeta$ auf der Kegeloberfläche liegen soll. Dieses gilt für partielle und ringförmige Finsternisse, also stets wenn das Auge sich auf der Verlängerung des Kegels befindet. Bei totalen Finsternissen aber, bei denen wir u negativ rechnen, ist p_1 der Positionswinkel des Auges im Schattenmittelpunkte. Legen wir den Rechnungen die äquatorealen Coordinaten zu Grunde, so erhalten wir die BESSEL'sche Form der Gleichungen. Da die ZY-Ebene des neuen Coordinatensystems, in dem wir die x, y, z, ξ, η, ζ ausgedrückt haben, zusammenfällt mit der Ebene des Deklinationskreises des Zielpunktes der Kegelaxe, so ist hier unser Winkel p_1 direkt der Positionswinkel im gewöhnlichen Sinne, wir wollen ihn also durch p bezeichnen. Stellen wir die zur Rechnung zu verwendenden Ausdrücke zusammen, so lauten dieselben folgendermaassen:

θ = Sternzeit

$$\mu = \frac{1}{R}\frac{\sin 8''\cdot 85}{\sin \pi_{☾}} \qquad x = \cos\delta_{☾}\frac{\sin(\alpha_{☾} - a)}{\sin\pi_{☾}}$$

$$a = \alpha_{☉} - \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\cos\delta_{☾}}{\cos\delta_{☉}}(\alpha_{☾} - \alpha_{☉}) \qquad y = \frac{1}{\sin\pi_{☾}}\left[\sin(\delta_{☾} - d) + \frac{1}{2}\cos\delta_{☾}\sin d(\alpha_{☾} - a)^2 \sin^2 1''\right]$$

$$d = \delta_{☉} - \frac{\mu}{1-\mu}(\delta_{☾} - \delta_{☉}) \qquad z = \frac{1}{\sin\pi_{☾}}\left[\cos(\delta_{☾} - d) - \frac{1}{2}\cos\delta_{☾}\cos d(\alpha_{☾} - a)^2\sin^2 1''\right]$$

$$\xi = \rho\cos\varphi'\sin(\theta - a) \qquad A\sin B = \rho\sin\varphi'$$ [1]

$$\eta = A\sin(B - d) \qquad A\cos B = \rho\cos\varphi'\cos(\theta - a)$$

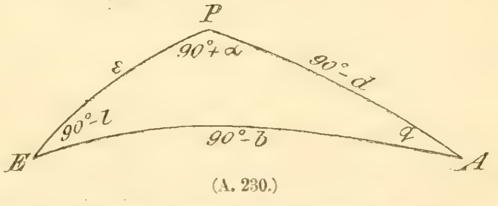
$$\zeta = A\cos(B - d)$$

$$\sin f_i = [7\cdot 666584_n]\frac{1}{R(1-\mu)} \qquad \sin f_a = [7\cdot 668767]\frac{1}{R(1-\mu)}$$

$$u' = \left(z + \frac{k}{\sin f}\right)\tang f \qquad u = u' - \zeta\tang f$$

$$u\sin p = x - \xi \qquad u\cos p = y - \eta.$$

Wählt man aber als Grundebene die Ebene der Ekliptik nach HANSEN's Vorgang, um Formeln zu erhalten, die für die direkte Anwendung der Tafeln bequemer sind, so fällt die YZ-Ebene des neuen Coordinatensystems zusammen mit der Ebene des Breitenkreises des Zielpunktes. Um aber in die Grundgleichungen wieder den Positionswinkel p der Kegelaxe im gewöhnlichen Sinne einführen zu können und um zugleich die Berechnung der Länge und Breite des Zeniths zu umgehen, nehmen wir eine Umformung der Gleichungen vor.



(A. 230.)

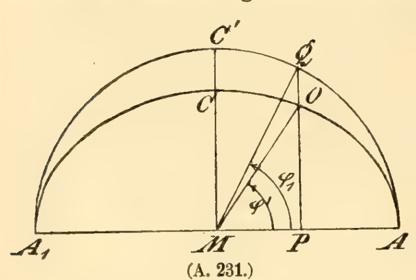
Sei in Fig. 230 A der Zielpunkt der Kegelaxe, der Z-Axe des neuen Coordinatensystems, ferner P der Pol des Aequators, E der Pol der Ekliptik. Die ZY-Ebene des neuen Coordinatensystems fällt, wenn der Aequator Grundebene ist, zusammen mit dem Deklinationskreise AP, ist dagegen die Ekliptik

[1] Ueber die Berücksichtigung der Refraction und Höhe des Beobachtungsortes, vergl. pag. 768.

Grundebene, so fällt sie zusammen mit dem Breitenkreise AE. Würden wir nun in dem letzteren Falle unser Coordinatensystem um die Z-Axe um den Winkel $EAP = q$ drehen, so würde es offenbar in das erstere Coordinatensystem übergehen. Nennen wir also x, y, z die Coordinaten in dem neuen ekliptikalen, x_1, y_1, z_1 dagegen in dem neuen äquatorealen Coordinatensysteme, so bestehen die Beziehungen

$$x_1 = x \cos q + y \cos (90° + q) = x \cos q - y \sin q$$
$$y_1 = x \cos (90° - q) + y \cos q = x \sin q + y \cos q$$
$$z_1 = z$$

Berechnen wir nach diesen Relationen aus den mit Hilfe der Längen und Breiten des Mondes gefundenen Coordinaten x, y, z die Coordinaten x_1, y_1, z_1, so können wir für ξ, η, ζ die Ausdrücke durch Sternzeit und Polhöhe beibehalten und unter p den Positionswinkel der Kegelaxe verstehen. In die Ausdrücke der Coordinaten des Erdortes führt HANSEN an Stelle der geocentrischen, die reducirte Breite ein. Ist in Fig. 231 ACA_1 ein Meridian des Erdkörpers, auf dem der Erdort O liegt, $AC'A_1$ dagegen ein Halbkreis mit dem äquatorealen Erdradius um den Erdmittelpunkt M beschrieben und verlängern wir die Ordinate OP des Punktes O, bis sie in Q den Halbkreis schneidet, so ist, wenn a und b die beiden Axen des Rotationsellipsoïds sind,



(A. 231.)

$$PQ = \frac{a}{b} OP$$

oder wenn wir die Abplattung $\alpha = \frac{a - b}{a}$ einführen, $PQ = \frac{1}{1 - \alpha} OP$. Der Winkel $QMA = \varphi_1$ heisst nun die reducirte Breite des Punktes O, während OMA die geocentrische Breite φ' ist. Betrachten wir den äquatorealen Erdradius als Einheit, so ist

$$(1 - \alpha) \sin \varphi_1 = \rho \sin \varphi' \qquad \cos \varphi_1 = \rho \cos \varphi'$$

und zur Berechnung von φ_1 haben wir

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{1}{1 - \alpha} \operatorname{tang} \varphi' = (1 - \alpha) \operatorname{tang} \varphi,$$

da zwischen der geocentrischen und der geographischen Breite φ die Beziehung $\operatorname{tang} \varphi' = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tang} \varphi$ besteht. Mit der BESSEL'schen Abplattung $\alpha = \frac{1}{299{\cdot}1528}$ wird logarithmisch

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = [9{\cdot}998546 - 10] \operatorname{tang} \varphi.$$

Eine Tafel der Werthe $\varphi - \varphi_1$ findet man z. B. in OPPOLZER's Syzygientafeln, pag. [50].

Durch die Einführung der reducirten Breite tritt an die Stelle der beiden abhängig Veränderlichen φ' und ρ die eine Veränderliche φ_1.

Bei der Anwendung der ekliptikalen Coordinaten können wir nun auch die Ausdrücke für die Coordinaten des Mondes noch wesentlich vereinfachen. Auf pag. 761 ist schon gezeigt, dass der Zielpunkt der Kegelaxe sich vom Sonnenmittelpunkte nur 14″ entfernen kann; es ist daher $\sin b \cos (\lambda_{☾} - l)$ stets $= \sin b$ und $\sin b \sin \beta_{☾} = 0$ zu nehmen, sodass einfach wird

$$x = \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \cos \beta_{☾} \sin (\lambda_{☾} - l) \quad y = \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \sin (\beta_{☾} - b) \quad z = \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \cos \beta_{☾} \cos (\lambda_{☾} - l).$$

Wir haben weiter nach pag. 761, wenn wir nur die Glieder erster Ordnung mitnehmen und unter $\pi_\odot$ die dem Augenblicke der Beobachtung entsprechende Sonnenparallaxe verstehen, bis auf höchstens $0''{\cdot}05$ genau

$$l = \lambda_\odot - \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\lambda_☾ - \lambda_\odot) \quad b = \beta_\odot - \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\beta_☾ - \beta_\odot).$$

Wir können daher in folgender Weise umformen:

$$x = \frac{1}{\sin \pi_☾} \cos\beta_☾ \sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot + \lambda_\odot - l) = \frac{1}{\sin \pi_☾} \cos\beta_☾ \sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot)\left(1 + \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}\right)$$

$$= \cos\beta_☾ \sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot) \frac{\sin^2 \pi_☾ - \sin^2 \pi_\odot}{\sin^2 \pi_☾ (\sin \pi_☾ - \sin \pi_\odot)} = \frac{\cos\beta_☾ \sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}.$$

Formen wir in gleicher Weise den Ausdruck für y um, so gehen also in die neuen Ausdrücke die Coordinaten des Zielpunktes gar nicht mehr ein und es wird dadurch wünschenswerth, die Ausdrücke für die ξ, η, ζ entsprechend umzuformen. Denken wir uns in Fig. 230 den Zielpunkt der Kegelaxe zunächst zusammenfallend mit dem Sonnenmittelpunkte, so sind seine äquatorealen Coordinaten $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$, und für q erhalten wir mit $\beta_\odot = 0$ einen Näherungswerth aus

$$\cos D_\odot \sin q_0 = \sin\varepsilon \cos\lambda_\odot \qquad \cos D_\odot \cos q_0 = \cos\varepsilon.$$

Die Differentialformeln angewandt auf das Dreieck APE ergeben weiter

$$da = \cos q \cos b \sec d\, dl - \sin q \sec d\, db$$
$$dd = \cos b \sin q\, dl + \cos q\, db$$
$$dq = -\sin d\, da + \cos d \tang b \cos q\, da + \tang b \sin q\, dd.$$

Setzen wir also

$$dl = l - \lambda_\odot = -\frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\lambda_☾ - \lambda_\odot) \qquad db = b - \beta_\odot = -\frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\beta_☾ - \beta_\odot),$$

so wird

$$a = \alpha_\odot - \cos q_0 \sec \delta_\odot \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\lambda_☾ - \lambda_\odot) + \sin q_0 \sec \delta_\odot \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\beta_☾ - \beta_\odot)$$
$$= \alpha_\odot - \cos q_0 \sec \delta_\odot \pi_\odot x + \sin q_0 \sec \delta_\odot \pi_\odot y$$
$$d = \delta_\odot - \sin q_0 \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\lambda_☾ - \lambda_\odot) - \cos q_0 \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾}(\beta_☾ - \beta_\odot)$$
$$= \delta_\odot - \sin q_0 \pi_\odot x - \cos q_0 \pi_\odot y$$
$$q = q_0 - \sin \delta_\odot (a - \alpha_\odot).$$

Rectascension und Deklination der Sonne haben wir aus den den Tafeln entnommenen Werthen der Länge und Breite und der Schiefe der Ekliptik zu berechnen. Vernachlässigen wir zunächst die Sonnenbreite, so ist näherungsweise

$$\cos D_\odot \cos A_\odot = \cos\lambda_\odot \qquad \cos D_\odot \sin A_\odot = \cos\varepsilon \sin\lambda_\odot \qquad \sin D_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot$$

und dann streng

$$\alpha_\odot = A_\odot - \sin q_0 \sec D_\odot \beta_\odot \qquad \delta_\odot = D_\odot + \cos q_0 \beta_\odot.$$

Für die Anwendung haben wir diese Ausdrücke für mehrere, man wählt in der Regel fünf, die Zeit des Neumondes umschliessende Zeitpunkte zu berechnen und aus den Differenzen der Grössen x und y ihre stündlichen Aenderungen x', y' zu bilden. Setzen wir nun

$$n \sin N = x' \qquad n \cos N = y'$$

so dass wieder — man vergleiche pag. 752, Fig. 226, — n die stündliche Bewegung des Schattenmittelpunktes gegen den Erdmittelpunkt, N ihr Positionswinkel gegen den Breitenkreis des Zielpunktes der Kegelaxe ist, so suchen wir ausgehend von einem beliebigen der angenommenen Zeitpunkte T_0 mit den Werthen x_0, y_0 die Zeit der Conjunction des Mondes mit dem Zielpunkt der Kegelaxe, die,

weil $\lambda_{\odot} = l$ erfordert, dass $\lambda_{\odot} = \lambda_{☾}$ sei, identisch ist mit der Zeit des Neumondes. Für diesen Zeitpunkt T wird also

$$0 = x_0 + (T - T_0)\, n \sin N \qquad y = y_0 + (T - T_0)\, n \cos N = y_0 - x_0 \operatorname{cotang} N.$$

Wir erhalten damit den kürzesten Abstand des Erdmittelpunktes von der Kegelaxe durch

$$\gamma = y \sin N = y_0 \sin N - x_0 \cos N$$

und die Zeit des kürzesten Abstandes

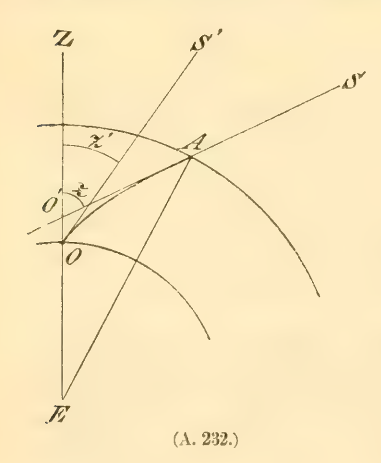
$$\tau = T - \frac{1}{n}\, y \cos N = T_0 - \frac{1}{n}(x_0 \sin N + y_0 \cos N).$$

Die Zeiten T_0 und τ beziehen sich auf den Meridian, für welchen die Tafeln gelten, sind also für HANSEN's Mondtafeln ausgedrückt in Greenwich-Zeit. Die östlich positiv gerechnete Länge des Beobachtungsortes sei $\Delta\lambda$, dann ist $t - \Delta\lambda$ die zur Ortszeit t gehörige Greenwich-Zeit, und weil zum Augenblick τ die Coordinaten $x = -\gamma \cos N$ und $y = \gamma \sin N$ gehören, erhalten wir allgemein:

$$x = -\gamma \cos N + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n \sin N \qquad y = \gamma \sin N + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n \cos N$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in die 2. und 3. der Grundgleichungen tritt in denselben der Winkel $N' = N - q$ auf, das ist aber der Positionswinkel der Bewegungsrichtung des Schattenmittelpunktes gegen den Deklinationskreis des Zielpunktes der Kegelaxe.

Die Aufstellung der strengen Gleichungen erfordert jetzt noch die Rücksichtnahme auf eine die Beobachtungen entstellende Fehlerquelle, nämlich die Refraction. Während es lange Zeit als ein Grundsatz galt, dass die Erscheinung der Finsternisse frei sei von den Störungen der Refraction, weil die beiden in Berührung gesehenen Punkte der Scheiben in gleicher Weise von derselben beeinflusst seien, hat HANSEN gezeigt, dass ein Einfluss doch vorhanden ist. Der in der Richtung SA (Fig. 232) von der Berührungsstelle der beiden Scheiben ausgehende Lichtstrahl treffe in A die Atmosphäre, er gelangt dann in der gebrochenen Linie AO in das Auge des Beobachters, für den die Berührungsstelle S erscheint in der Richtung OS' der Tangente an das letzte Element der Curve; ungebrochen dagegen würde der Lichtstrahl die Normale des Beobachtungsortes in O' schneiden.



(A. 232.)

Wenn also auch die Zeit der Berührung ungeändert bleibt, so sieht doch der Beobachter in O wegen der Refraction die Erscheinung so, wie sie ohne diese Wirkung ein Beobachter in O' wahrnehmen würde. Wir berücksichtigen demnach die Refraction dadurch, dass wir den Erdradius EO des Beobachtungsortes ersetzen durch EO', oder wenn wir $\frac{OO'}{OE} = x_1$ setzen, dadurch, dass wir die Coordinaten ξ, η, ζ multipliciren mit $(1 + x_1)$. Nennen wir μ den Brechungsexponenten der Luft in einem beliebigen Punkte des Weges des Lichtstrahls, Δ die Entfernung dieses Punktes vom Erdmittelpunkt und i den Einfallswinkel, so ist längs der ganzen Curve das Produkt $\mu\,\Delta \sin i$ constant. Im Punkte A ist $\mu = 1$, $\Delta \sin i = EA \sin O'AE = EO' \sin ZO'S = \rho(1 + x_1) \sin z$, wenn z die wahre Zenithdistanz bedeutet; andererseits ist im Punkte O der

mittlere Werth von μ nach BESSEL $\mu_0 = 1{\cdot}0002800$ und der Einfallswinkel gleich der scheinbaren Zenithdistanz z'. Wir haben daher

$$\rho(1 + x_1)\sin z = \mu_0\,\rho\,\sin z'$$

$$(1 + x_1) = \mu_0\,\frac{\sin z'}{\sin z}.$$

Nennen wir r die aus den Refractionstafeln zu entnehmende, der scheinbaren Zenithdistanz z' entsprechende Refraction, so wird

$$(1 + x_1) = \mu_0\,\frac{\sin(z - r)}{\sin z} = \mu_0(1 - \mathrm{cotang}\,z\ \ r\sin 1'')$$

$$x_1 = \mu_0(1 - \mathrm{cotang}\,z\ \ r\sin 1'') - 1.$$

Die Coordinate ζ ist die Projection des Erdradius auf die Kegelaxe. Da wir nun ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den Punkt S mit dem Zielpunkt der Kegelaxe vertauschen dürfen, so ist $\zeta = \rho\cos z$ oder da ρ von der Einheit um nicht mehr als $\frac{1}{300}$ abweicht, genügend genau $\zeta = \cos z$ und damit

$$x_1 = \mu_0\left[1 - \zeta(1 - \zeta)^{-\frac{1}{2}}\,r\sin 1''\right] - 1.$$

Hiernach kann man eine Tafel für x_1 mit dem Argument ζ berechnen. Legen wir die mittlere Refraction zu Grunde, was stets ausreicht, so ergeben sich folgende Zahlen.

Correction der 6. Decimale der $\log\ \xi, \eta, \zeta$ wegen Refraction.

$\log\zeta$	Corr.	$\log\zeta$	Corr.	$\log\zeta$	Corr.
= 9·6	+ 1	= 8·6	+ 37	= 7·6	+ 94
9·5	1	8·5	45	7·5	96
9·4	2	8·4	53	7·4	98
9·3	3	8·3	60	7·3	99
9·2	5	8·2	67	7·2	101
9·1	8	8·1	73	7·1	101
9·0	12	8·0	79	7·0	102
8·9	17	7·9	84	6·5	104
8·8	22	7·8	88	6·0	105
8·7	29	7·7	91	$\zeta = 0$	105

In ganz ähnlicher Weise können wir auch Rücksicht nehmen auf eine Erhebung des Beobachters über die sphäroidische Erdoberfläche. Sei dieselbe $= x_2$, so haben wir ρ zu multipliciren mit

$$\left(1 + \frac{x_2}{\rho}\right);$$

da aber

$$\log(1 + a) = 0{\cdot}43429\left(a - \frac{a^2}{2}\ \ldots\ldots\right)$$

ist, so erhalten wir als Correction des $\log\rho$:

$$0{\cdot}43429\left(\frac{x_2}{\rho} - \frac{x_2^2}{2\rho^2}\ \ldots\right).$$

Berücksichtigen wir nur das erste Glied und setzen $\rho = 6367000^M$, so wird

$$\Delta\log\rho = 0{\cdot}000000068\,x_2$$

oder wir haben für eine Erhöhung von je $14^M{\cdot}7$ den $\log\rho$ um 1 Einheit der 6. Decimale zu vergrössern.

Wir fassen beide Correctionen zusammen in einem den Coordinaten des Beobachtungsortes hinzugefügten Faktor $(1 + x)$. Die HANSEN'schen Grundgleichungen sind also nach folgenden Vorschriften aufzustellen:

Für die wahre Zeit T_0 des Ephemeridenortes ist zu berechnen:

$\cos D_\odot \cos A_\odot = \cos\lambda_\odot$ [1] $\quad \cos D_\odot \sin A_\odot = \cos\varepsilon \sin\lambda_\odot \quad \sin D_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot$

[1]) Die Berechnung von $A_\odot$ ist nur erforderlich, wenn man von der wahren Zeit auf Sternzeit übergehen will.

$$\cos D_\odot \sin q_0 = \sin \varepsilon \cos \lambda_\odot \qquad \mu = \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_☾} = \frac{1}{R}\frac{\sin 8''\cdot 85}{\sin \pi_☾} \qquad \sin f_i = [7\cdot 666584_n]\frac{1}{R(1-\mu)}$$

$$\cos D_\odot \cos q_0 = \cos \varepsilon \qquad \sin f_a = [7\cdot 668767]\frac{1}{R(1-\mu)}.$$

$$x_0 = \cos\beta_☾ \frac{\sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \qquad \Delta a = [\pi_\odot x_0 \cos q_0 - \pi_\odot y_0 \sin q_0 + \sin q_0 \beta_\odot] \sec D_\odot$$

$$y_0 = \frac{\sin(\beta_☾ - \beta_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \qquad \Delta d = \pi_\odot x_0 \sin q_0 + \pi_\odot y_0 \cos q_0 - \cos q_0 \beta_\odot$$

$$q = q_0 + \sin D_\odot \Delta a$$

x', y' stündliche Aenderungen von x_0 und y_0

$$z_0 = \frac{1}{\sin \pi_☾}\cos\beta_☾ \cos(\lambda_☾ - \lambda_\odot) \qquad n \sin N = x' \quad n \cos N = y' \quad N' = N - q$$

Kürzester Abstand: $\gamma = y_0 \sin N - x_0 \cos N$

$$u' = \left(z_0 + \frac{k}{\sin f}\right) \operatorname{tang} f$$

Zeit des kürzesten Abstandes: $\tau = T_0 - \frac{1}{n}(x_0 \sin N + y_0 \cos N)$

$$u = u' - (1+x)[(1-\alpha)\sin\varphi_1 \sin(D_\odot - \Delta d) + \cos\varphi_1 \cos(D_\odot - \Delta d)\cos(t+\Delta a)] \operatorname{tang} f$$

$$u \sin p = -\gamma \cos N' + (t - \Delta\lambda - \tau) n \sin N' - (1+x)\cos\varphi_1 \sin(t + \Delta a)$$

$$u \cos p = \gamma \sin N' + (t - \Delta\lambda - \tau) n \cos N' - (1+x)\left[\begin{matrix}(1-\alpha)\sin\varphi_1 \cos(D_\odot - \Delta d) \\ -\cos\varphi_1 \sin(D_\odot - \Delta d)\cos(t+\Delta a)\end{matrix}\right].$$

Dabei ist t die wahre Ortszeit, $\Delta\lambda$ die östliche Länge. Benutzt man zur Berechnung der Δa und Δd nicht die genäherte Deklination $D_\odot$, sondern die wirkliche $\delta_\odot$, so sind die von $\beta_\odot$ abhängigen Glieder zu unterdrücken.

Dieser strengen Formeln hat man sich zu bedienen bei der genauen Vorausberechnung oder bei der Darstellung genauer Messungen einer Finsterniss. Für eine genäherte Berechnung, wie sie namentlich für chronologische Zwecke fast immer ausreicht, kann man sich wesentliche Vereinfachungen gestatten. Man braucht nämlich die Correctionen Δa, Δd nicht zu berücksichtigen und kann die Refraction vernachlässigen. Für solche Zwecke geben die nach HANSEN's Entwickelungen unter Zugrundelegung seiner Mondtafeln und LEVERRIER's Sonnentafeln berechneten Syzygien-Tafeln für den Mond von TH. V. OPPOLZER ein sehr geeignetes Hilfsmittel. Die Tafeln ergeben die mittlere Greenwich-Zeit der Conjunction nebst der Zeitgleichung, den diesem Augenblicke entsprechenden Werth von y_0, dann die x', y', dann die Sonnenlänge $\lambda_\odot$ und die Werthe f_a und u_a'. Aus diesen beiden letzteren Werthen können wir die entsprechenden f_i und u_i' ableiten. Einerseits ist nämlich $\frac{f_i}{f_a} = [9\cdot 9978 - 10]_n$, andererseits nach den gegebenen Ausdrücken

$$u_i' + u_a' = z_0(\operatorname{tang} f_i + \operatorname{tang} f_a) + k(\sec f_i + \sec f_a)$$

oder da wir $\sec f = 1$, $\operatorname{tang} f = \sin f$ setzen dürfen

$$u_i' + u_a' = \frac{1}{\sin \pi_☾}\cos\beta_☾ 2k \frac{\sin \pi_\odot}{1-\mu} + 2k$$

$$= 2k\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\cos\beta_☾\right) = 0\cdot 5464.$$

Unter Benutzung der Bezeichnung der Syzygientafeln ergiebt sich also folgendes Rechnungsschema:

Sonnenlänge $\lambda_\odot = L$	$x_0 = 0$	$n \sin N = \Delta L$	$n \cos N = q \cos Q$
Wahre Zeit $T_0 = \mathrm{T} - Z$	$y_0 = p \sin P$	$\gamma = p \sin P \sin N$	
$\operatorname{tang} \alpha_\odot = \cos\varepsilon \operatorname{tang} L$	$x' = \Delta L$	$\tau = \mathrm{T} - Z - \frac{1}{n} p \sin P \cos N$	
$\sin \delta_\odot = \sin\varepsilon \sin L$	$y' = q \cos Q$	$\log \sin f_a$	$\log \sin f_i = 9\cdot 9978_n - 10 + \log \sin f_a$
$\operatorname{tang} q = \operatorname{tang}\varepsilon \cos L$ (q im 1. od. 4. Quadr.)		u_a'	$u_i' = 0\cdot 5464 - u_a'$.

Mit den Daten der Syzygientafeln sind nun durch OPPOLZER in seinem grossen Werke: »Canon der Finsternisse« die Elemente aller Sonnenfinsternisse zwischen 1207 v. Chr. und 2161 n. Chr. berechnet. Man wird also selten in die Lage kommen nach diesen Tafeln Elemente zu berechnen. Zur Erläuterung wollen wir daher die gegebenen Formeln anwenden zur genauen Berechnung der Elemente der Sonnenfinsterniss 1898 Januar 21.

Zunächst ist nach HANSEN's ekliptischen Tafeln oder nach den Syzygientafeln die Zeit des Neumondes zu berechnen; sie ergiebt sich zu Januar 21.8083 m. Z. Gr. Es sind jetzt den Sonnen- und Mondtafeln die Angaben über den Ort der Gestirne für 5 diesen Zeitpunkt umschliessende Augenblicke zu entnehmen. Der leichteren Interpolation wegen rechnen wir nach Decimaltheilen des Tages. LEVERRIER's Sonnentafeln und HANSEN's Mondtafeln corrigirt nach NEWCOMB ergeben folgende Zahlen:

M. Z. Gr.	Zeitgl.	wahre Z.	$\lambda_\odot$	$\beta_\odot$	R
Jan. 21·7	$-11^m\ 48^s{\cdot}4$	$16^h{\cdot}60322$	302° 14′ 38″·60	+0″·15	9·9931716
21·75	−11 49·2	17·80300	17 41·72	0·16	1739
21·8	−11 50·0	19·00277	20 44·85	0·16	1762
21·85	−11 50·8	20·20255	23 47·97	0·17	1785
21·9	−11 51·6	21·40233	26 51·10	0·18	1808

$\lambda_☾$	$\beta_☾$	$\pi_☾$
300° 45′ 37·6″	+0° 21′ 49″·9	60′ 14″·90
301 29 37·1	25 53·7	13·54
302 13 34·7	29 57·0	12·15
302 57 30·3	33 59·8	10·72
303 41 23·8	38 2·0	9·25

$\varepsilon = 23° 27' 12''{\cdot}9 \qquad \pi_\odot = 8''{\cdot}99.$

Um den Gang der Rechnung zu zeigen, ist dieselbe für den mittleren Zeitpunkt im folgenden vollständig wiedergegeben:

1) $\log \sin \lambda_\odot$	$9{\cdot}926772_n$	$\pi_☾ - \pi_\odot$	60′ 3″·16
2) $\log \sin \varepsilon$	9·599890	$\lambda_☾ - \lambda_\odot$	−0° 7′ 10″·15
3) $\log \cos \lambda_\odot$	9·728376	$\beta_☾ - \beta_\odot$	+0 29 56·84
4) $\log \cos \varepsilon$	9·962551	1) $\log \cos \beta_☾$	9·9999835
1 · 2) $\log \sin D_\odot$	$9{\cdot}526662_n$	2) $\log \sin (\lambda_☾ - \lambda_\odot)$	7·3191944
5) $\log \sin \varepsilon \cos \lambda_\odot$	9·328266	3) $\log \cos (\lambda_☾ - \lambda_\odot)$	9·9999991
5 : 4) $\log \operatorname{tang} q_0$	9·365715	4) $\log \sin (\beta_☾ - \beta_\odot)$	7·9400948
$D_\odot$	−19° 38′ 54″·6	5) $\log \operatorname{cosec} (\pi_☾ - \pi_\odot)$	1·7577636
q_0	+13 4 5·4	$1 \cdot 2 \cdot 5) = \log x_0$	9·0769415
$\log \sin 8''{\cdot}85$	5·632518	$4 \cdot 5) = \log y_0$	9·6978584
$\log 1/R$	0·006824	$1 \cdot 3) \cdot \operatorname{cosec} \pi_☾ = \log z_0$	1·7566641
$\log \operatorname{cosec} \pi_☾$	1·7566815	$\log k \operatorname{cosec} f_i$	$1{\cdot}7609320_n$
$\log \mu$	7·396024	$\log k \operatorname{cosec} f_a$	1·7587489
$\log \dfrac{1}{R(1-\mu)}$	0·007906	D	2·009702
		S	0·2999889
$\log \sin f_i$	$7{\cdot}674490_n$	$\log (z_0 + k \operatorname{cosec} f_i)$	$9{\cdot}751230_n$
$\log \sin f_a$	7·676673	$\log (z_0 + k \operatorname{cosec} f_a)$	2·0587378
		$\log \operatorname{tang} f_i$	$7{\cdot}6744951_n$
		$\log \operatorname{tang} f_a$	7·6766783
		$\log u_i'$	7·425725
		$\log u_a'$	9·7354161

1) $log\ sin\ q_0$	9·3543	x'	+0·680890
2) $log\ \beta_\odot$	9·2041	y'	+0·067652
3) $log\ cos\ q_0$	9·9886		9·833074
4) $log\ \pi_\odot\ sin\ q_0$	0·3081		8·830281
5) $log\ \pi_\odot\ cos\ q_0$	0·9424	$log\ tang\ N$	1·002793
6) $log\ x_0$	9·0769$_n$	N	84° 19′ 32″·8
7) $log\ y_0$	9·6979	$log\ (n)$	9·835208
+ 1 · 2)	+0″·04	log 1·19978	0·079101
+ 5 · 6)	−1·05	$log\ n$	9·756107
− 4 · 7)	−1·01	$log\ sin\ N$	9·997867
$log\ \Sigma$	0·3054$_n$	$log\ cos\ N$	8·995070
$log\ sec\ D_\odot$	0·0261	$y_0\ sin\ N$	+0·496278
Δa	−2″·15	$-\ x_0\ cos\ N$	+0·011803
$log\ tang\ D_\odot$	9·5527$_n$	$\Sigma = \gamma$	0·508081
Δq_0	+0″·7	$x_0\ sin\ N$	−0·118798
− 2·3)	−0″·16	$y_0\ cos\ N$	0·049309
+ 4·6)	−0·24	Σ	−0·069489
+ 5·7)	+4·37		8·841916$_n$
$\Sigma = \Delta d$	+4·0	$log\ \frac{1}{n}$	0·243893
			9·085809$_n$
			−0·12184
		T_0	19·00277
		τ	19·12461

Bezüglich der Bildung der Grössen x', y', der Differentialquotienten der Functionen x und y für die einzelnen Zeitpunkte hat man sich der Regeln der Interpolationsrechnung zu bedienen. Sind $w_1, w_2 \ldots w_5$ fünf in gleichen Intervallen auf einander folgende Werthe einer Function, so erhält man die zugehörigen Differentialquotienten aus den Differenzen der Functionswerthe nach folgenden Ausdrücken:

	Function u. Diff.				Differentialquotient
T_1	w_1				$\frac{1}{2}(w_3 - w_1)$
		$d'_{\frac{3}{2}}$			
T_2	w_2		d''_2		$w_3 - w_2$
		$d'_{\frac{5}{2}}$		$d'''_{\frac{5}{2}}$	
T_3	w_3		d''_3		$\frac{1}{2}(w_4 - w_2) - \frac{1}{12}(d'''_{\frac{5}{2}} + d'''_{\frac{7}{2}})$
		$d'_{\frac{7}{2}}$		$d'''_{\frac{7}{2}}$	
T_4	w_4		d''_4		$w_4 - w_3$
		$d'_{\frac{9}{2}}$			
T_5	w_5				$\frac{1}{2}(w_5 - w_3)$

(n) ist die dem Intervalle der Functionen x und y, hier also 1 ·19978 w. Z., entsprechende Bewegung. Die stündliche Bewegung n geht aus ihr durch Division mit diesem Intervalle hervor. Es ergeben sich so folgende Elemente der Finsterniss:

W. Zt. Gr.	d	Δa	N'	$log\ n$	γ
16^h·60322	−19° 40′ 17″·4	−0^s·97	71° 17′ 1″·7	9·756082	0·508092
17·80300	39 38·0	−0·56	16 10·7	107	87
19·00277	38 58·6	−0·14	15 26·7	107	81
20·20255	38 19·1	+0·27	14 43·5	089	76
21·40233	37 39·7	+0·68	13 53·2	046	72

τ	u_i'	u_a'	$log\ sin\ f_i$	$log\ sin\ f_a$
19^h·12450 w. Zt.	+0·002953	+0·543482	7·674494$_n$	7·676677
55	2791	3644	92$_n$	75
61	2665	3771	90$_n$	73
69	2575	3862	88$_n$	71
76	2520	3917	87$_n$	70

Der numerische Werth des γ, des kürzesten Abstandes der Kegelaxe vom Erdmittelpunkte, dient zur genauen Ermittelung der Art der Finsterniss. Wir haben schon auf pag. 764 die Grenzen kennen gelernt, innerhalb deren u_a' liegen muss, damit eine totale bez. eine ringförmige Finsterniss entstehe. Wir haben jetzt noch die Bedingung der Centralität hinzuzufügen. Der Weg des Zielpunktes des Schattenkegels schliesst, wie auf pag. 759 gezeigt ist, mit der Ekliptik einen Winkel ein, den wir im Mittel $= 5° 35'$ setzen können. Die Grenze zwischen centralen und nicht centralen Finsternissen ist bestimmt durch jenen Werth des γ, der einer Berührung der Erdoberfläche durch die Centrale entspricht. Bewegte der Mond sich in der Ekliptik, so erfolgte die Berührung in denjenigen Punkten der Erdoberfläche, in denen sie durch eine durch den Erdmittelpunkt gehende auf der Ebene der Ekliptik senkrechte Gerade geschnitten wird. Diese Schnittpunkte sind also Punkte der beiden Polarkreise. Wegen der Neigung der Mondbahn liegt der wahre Berührungspunkt von dem so bestimmten Punkte des Polarkreises um den Winkel $i' = 5° 35'$ auf dem Schnittkreise einer zum Radiusvector der Erde senkrechten, durch den Erdmittelpunkt gehenden Ebene entfernt. Der Abstand des Berührungspunktes vom Pole der Erde ergiebt sich also als dritte Seite eines sphärischen Dreiecks zu den Bögen ε und i', und es liegt also dieser Abstand zwischen den Grenzen $\varepsilon - i'$ und $\varepsilon + i'$. Daraus folgt, dass der Erdradius des Berührungspunktes, d. i. der Maximalwerth des γ, zwischen den Grenzen 0·9970 und 0·9974 liegt. Hiernach ist der Grenzwerth für centrale Finsternisse $\gamma = 0·9970$, der Grenzwerth für totale oder ringförmige Finsternisse $\gamma - u_i' = 0·9974$, der Grenzwerth für partielle Finsternisse $\gamma - u_a' = 0·9974$. Führen wir noch ein $u_i' = 0·5464 - u_a'$, so erhalten wir folgende Regeln:

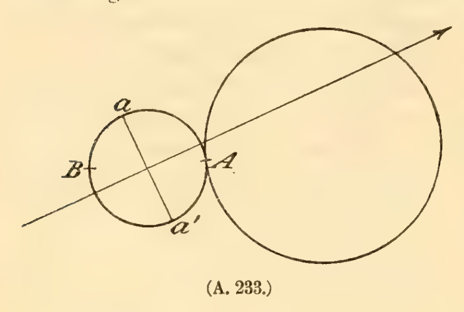
	$\gamma > 0·9974 + u_a'$	Finsterniss unmöglich
	$\gamma > 1·5438 - u_a'$	„ partiell
$u_a' > 0·5511$	$0·9970 < \gamma < 0·4506 + u_a'$	„ ringförmig nicht central
„ „	$\gamma < 0·9970$	„ ringförmig central
$0·5511 > u_a' > 0·5464$	$0·9970 < \gamma < 0·4506 + u_a'$	„ ringf.-total nicht central
„ „	$\gamma < 0·9970$	„ ringf.-total central
$u_a' < 0·5464$	$0·9970 < \gamma < 1·5438 - u_a'$	„ total nicht central
„ „	$\gamma < 0·9970$	„ total central.

Bei den ringförmig-totalen Finsternissen liegt der Abstand der Spitze des Kernschattenkegels von der XY-Ebene zwischen den Werthen 0 und 1. Hier sind also noch zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder verbleibt die Spitze des Schattenkegels während der ganzen Finsterniss ausserhalb des Erdkörpers, oder sie fällt im mittleren Theile der Finsterniss in denselben; im ersten Falle ist die Finsterniss überall ringförmig, im zweiten dagegen beim Beginne und beim Ende ringförmig, im mittleren Verlaufe aber total. Der Abstand der Spitze des Schattenkegels ist nach pag. 763 $c = \frac{u_i'}{tang f_i}$. Im Augenblicke des kürzesten Abstandes liegt das möglichst grösste Stück der Centralen im Erdkörper; es ist für eine sphärische Erde bestimmt durch $\sqrt{1 - \gamma^2}$. Ist also c kleiner als dieser Werth, so wird die Finsterniss theilweise total sein. Setzen wir $sin W = \gamma$, so ist also die zu erfüllende Bedingung für ringförmig-totale Finsternisse:

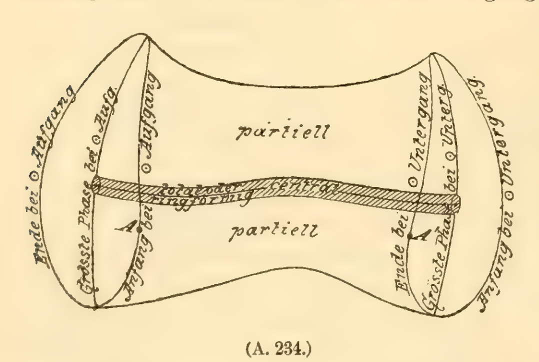
$$u_i' < cos W tang f_i.$$

Wir werden später sehen, wie W mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde zu berechnen ist.

Um den Verlauf der Erscheinung auf der Erdoberfläche zu erkennen, haben wir die Bewegung der Kegeloberflächen gegen die Erde zu verfolgen. Im Augenblicke, da der Halbschattenkegel in einem Punkte A die Erdoberfläche zum ersten Male berührt, sieht ein Beobachter in A als erster auf der Erde überhaupt eine Berührung der beiden Scheiben. Die Erscheinung erfolgt im Horizont bei Sonnenaufgang, weil der Schatten auf der Erdoberfläche von West nach Ost sich bewegt. Der Punkt A ist der Punkt des Anfangs der Finsterniss auf der Erde überhaupt. In einem dieser ersten Berührung folgenden Zeitpunkte ist diejenige Erzeugende der Kegeloberfläche, die in A die Erde berührte, auf der sich langsamer drehenden Erde nach Ost fortgerückt, und zwei weitere Erzeugende berühren jetzt die Erdoberfläche; diese neuen Berührungspunkte sehen wieder eine Berührung der Scheiben im Horizont bei Sonnenaufgang, während der Punkt A jetzt innerhalb des durch die drei Erzeugenden begrenzten Raumes auf der Erdoberfläche liegt und eine partielle Finsterniss sieht. In derselben Weise bestimmen die folgenden Punkte des Bogens aAa' (Fig. 233) des Schattenkreises, welcher begrenzt ist durch einen zur Bewegungsrichtung der Kegelaxe nahe senkrechten Durchmesser aa', auf der Erdoberfläche Punkte, die bei Sonnenaufgang die erste Berührung im Horizont sehen. Die nun folgenden Punkte des Bogens aBa' bestimmen gleichfalls auf der Erdoberfläche Punkte, die bei Sonnenaufgang eine Berührung wahrnehmen, da diese Punkte aber in den Schattenkegel nicht mehr eintreten können, sehen sie nichts als diese Berührung. Wir erhalten also zwei Grenzcurven: Der Bogen aAa' bestimmt eine Curve, auf der man den Anfang der Finsterniss bei Sonnenaufgang sieht, dieselbe enthält auch den Punkt A des Beginns der Finsterniss auf der Erde überhaupt; der Bogen aBa' ergiebt eine Curve, auf welcher man bei Sonnenaufgang das Ende der Finsterniss beobachtet. Die Punkte des Durchmessers aa' bestimmen eine Curve, auf der man im Augenblicke des Sonnenaufgangs den kürzesten Abstand oder die grösste Phase beobachtet. Verbinden wir die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der zu a und a' gehörenden Erzeugenden, so erhalten wir auf der Erdoberfläche die nördliche bez. südliche Grenzcurve, und schliesslich entstehen in ähnlicher Weise, wie beim Eintritt der Erde in den Schattenkreis, auch beim Austritt entsprechende Curven, auf denen die Erscheinung bei Sonnenuntergang beobachtet wird. Führen wir die Berechnung der Curven aus für beide Schattenkegel und für die Centrale, so erhalten wir eine Darstellung, aus der wir für einen beliebigen Ort der Erdoberfläche sofort sehen können, wie sich ihm die Finsterniss darstellen wird. Damit alle Curven reell werden, muss offenbar $\gamma + u_a' < 0{\cdot}9970$ sein, die entstehende Darstellung der Erscheinung veranschaulicht Fig. 234. Der Punkt A ist der Punkt, der als erster eine Berührung sieht, der Punkt A' der-



(A. 233.)



(A. 234.)

jenige, der sie als letzter auf der Erde überhaupt sieht. Ist $\gamma + u_a' > 0{\cdot}9970$, so wird ein Theil der Curven imaginär, weil die betreffenden Erzeugenden die Erdoberfläche nicht mehr treffen. Es gehen dann die östliche und westliche Grenzcurve an einer Seite in einander über und es entsteht eine einer ∞ ähnliche Figur.

Unsere Grundgleichungen drücken die Bedingung aus, dass der durch die reducirte Breite φ_1 und die östliche Länge $\Delta\lambda$ bestimmte Punkt der Erdoberfläche zur wahren Ortszeit t auf der Mantelfläche des Kegels liegt. Die Punkte der östlichen und westlichen Grenzcurve haben neben diesen Gleichungen noch der Bedingung zu genügen, dass im Augenblick der Berührung die Sonne im Horizont steht. Die weitere Forderung, dass $t - \Delta\lambda$ ein Minimum oder Maximum sei, bestimmt auf den beiden Curven die Punkte A und A' des frühesten Anfangs bez. spätesten Endes. Zur Ermittelung dieser Punkte führen wir in die Grundgleichungen folgende Hilfsgrössen ein:

$$\begin{aligned} &\delta \sin d_0 = \sin d && \cos\varphi_1 \sin(t + \Delta a) = \cos H \sin K \\ &\delta \cos d_0 = (1-\alpha)\cos d && \cos\varphi_1 \cos(t + \Delta a) = \cos d_0 \sin H - \sin d_0 \cos H \cos K \quad (1)\\ &\log(1-\alpha) = 9{\cdot}99855 - 10 && \sin\varphi_1 = \sin d_0 \sin H + \cos d_0 \cos H \cos K. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir für einen Augenblick die Abplattung α, so wird $\delta = 1$ und d_0 = der Deklination des Zielpunktes der Kegelaxe, dessen Stundenwinkel $(t + \Delta a)$ ist. Die Gleichungen lassen dann H und K erkennen als Höhe und parallaktischen Winkel dieses Punktes. Durch die Einführung dieser Hilfsgrössen erhält die erste der Grundgleichungen die Gestalt:

$$u = u' - (1 + x)\left[\frac{1-\alpha}{\delta}\sin H + \frac{\delta}{1-\alpha}(2\alpha - \alpha^2)\sin d_0 \cos d_0 \cos H \cos K\right] \tang f.$$

In dieser Gleichung dürfen wir die von $\alpha \tang f$ abhängigen Glieder vernachlässigen. Denn dieser Faktor ist $= \frac{1}{299} \cdot 0{\cdot}005 = 0{\cdot}00002$. Der Maximalbetrag der betreffenden Glieder ist also auf der Erdoberfläche $= 0{\cdot}00002\,\rho = 4''$. Wir müssen uns aber bei der Berechnung der Curven mit einer weit geringeren Genauigkeit, als sie solchen Gliedern entspräche, begnügen, schon aus dem Grunde, dass wir nur mit einer mittleren Refraction rechnen und die Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche nicht berücksichtigen können. Setzen wir aus demselben Grunde im Faktor von $\tang f$ $\delta = 1$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= u' - (1 + x) \sin H \tang f \\ u \sin p &= -\gamma \cos N' + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n \sin N' - (1 + x) \cos H \sin K \quad (2)\\ u \cos p &= \gamma \sin N' + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n \cos N' - (1 + x)\,\delta \cos H \cos K. \end{aligned}$$

p ist nach pag. 765 der Positionswinkel des Schnittpunktes der Kegelaxe, d. i. des Mittelpunktes des Schattenkreises, im Auge des Beobachters, es entspricht also jedem speciellen Werthe des p ein bestimmter Punkt der Peripherie des Schattenkreises, und wenn wir also die Gleichungen für einen beliebig gewählten Werth des p auflösen, so erhalten wir alle jene Punkte der Erdoberfläche, die einer bestimmten Erzeugenden zugehören. Zwei dieser Punkte liegen auf der westlichen bez. östlichen Grenzcurve, sie sind ausgezeichnet dadurch, dass in ihnen $(t - \Delta\lambda)$ ein Minimum bez. Maximum wird. Wir erhalten also diese Grenzcurven dadurch, dass wir die Grundgleichungen für einen constanten Werth des p nach der Zeit differentiiren und das Differential $d(t - \Delta\lambda)$ verschwinden lassen. Betrachten wir dagegen bei der Differentiation auch p als veränderlich, so erhalten wir diejenigen Punkte der beiden Grenzcurven, die die Erscheinung zuerst oder zuletzt sehen und die den vier Berührungspunkten der Kegelober-

fläche mit der Erdoberfläche entsprechen. Wegen der Kleinheit der Refractions correction x dürfen wir bei der Differentiation $x \cdot dH$ vernachlässigen. Setzen wir noch

$$F = \sin H - \frac{dx}{dH} \cos H \qquad G = \cos H + \frac{dx}{dH} \sin H,$$

so sind die beiden Gleichungssysteme folgende

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} du &= -G \tang f dH \\ \sin p\, du &= F \sin K dH - \cos H \cos K dK \\ \cos p\, du &= F \delta \cos K dH + \delta \cos H \sin K dK \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} du &= -G \tang f dH \\ \sin p\, du + u \cos p\, dp &= F \sin K dH - \cos H \cos K dK \\ \cos p\, du - u \sin p\, dp &= F \delta \cos K dH + \delta \cos H \sin K dK. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen dürfen wir unter H und K die Höhe und den parallaktischen Winkel des Zielpunktes der Kegelaxe verstehen. Eliminiren wir aus der zweiten und dritten Gleichung des Systems I das Differential dK und substituiren du aus der ersten Gleichung, so wird

$$-G \tang f (\delta \sin p \sin K + \cos p \cos K) = \delta F.$$

Wegen des Faktors $\tang f$ können wir den der Einheit nahen Faktor δ unterdrücken; mit Einführung der Werthe von F und G wird dann

$$\tang H = - \frac{\tang f \cos (p - K) - \frac{dx}{dH}}{1 + \tang f \cdot \cos (p - K) \frac{dx}{dH}}.$$

Die Correctionsgrösse x berücksichtigt Refraction und Erhebung des Beobachters über die sphäroidische Erdoberfläche. Bei der Vorausberechnung können wir natürlich nur die erstere Fehlerquelle in Betracht ziehen. Der auf pag. 769 gefundene Ausdruck für x_1 ergiebt durch Differentiation nach $z' = 90° - H$

$$\frac{dx}{dH} = - \mu_0 \sec^2 H r \sin 1'' - \mu_0 \tang H \frac{dr}{dH} \sin 1''.$$

Hier ist $\mu_0 = 1$ zu setzen, und da H die Höhe des Zielpunktes der Kegelaxe, den wir mit dem Sonnenmittelpunkte vertauschen dürfen, weil die Berührung im Horizont erfolgen soll, höchstens $= 16'$ sein kann, ist $\sec H = 1$, $\tang H = 0$ zu nehmen und es wird einfach

$$\frac{dx}{dH} = - r \sin 1''.$$

Wegen der Kleinheit dieses Werthes wird der Nenner unseres Ausdruckes für $\tang H = 1$ und wir haben schliesslich, wenn wir die Refraction im Horizont $r = 33'$ setzen

$$\tang H = - \tang f \cos (p - K) - 0{\cdot}009599.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung der östlichen und westlichen Grenzcurve.

Das Gleichungssystem II giebt, wenn wir in die zweite und dritte Gleichung du nach der ersten einführen und für F seinen auf beiden Grenzcurven geltenden Werth $F = - G \tang f \cos (p - K)$ setzen:

$$\begin{aligned} u \cos p\, dp &= - G \tang f [\cos (p - K) \sin K - \sin p]\, dH - \cos H \cos K dK \\ u \sin p\, dp &= G \tang f [\cos (p - K) \delta \cos K - \cos p]\, dH - \delta \cos H \sin K dK. \end{aligned}$$

Der Faktor von dH in der ersten Gleichung ist $= - \cos K \sin (p - K)$, in der zweiten $= \sin K \sin (p - K)$, Fügen wir in der zweiten Gleichung in

dem mit $tang\,f$ multiplicirten Theile im zweiten Gliede den Faktor δ hinzu, was erlaubt ist, so ergiebt sich durch Division

$$tang\,p = \delta\; tang\,K,$$

und dieses ist also die Bedingung der 4 Berührungspunkte.

In Fig. 235 sei S der Zielpunkt der Kegelaxe an der Sphäre, ein Punkt, der mit dem Mittelpunkte der Sonnenscheibe nahezu zusammenfällt. Die Ebene der Zeichnung stelle eine zur Kegelaxe senkrechte Ebene dar und es sei der Punkt O der Zielpunkt derjenigen Erzeugenden, welche die Erdoberfläche in dem zu bestimmenden Punkte der Grenzcurve trifft. SY sei der Schnitt des Deklinationskreises des Punktes S mit der Ebene. Der Winkel p ist nach pag. 765 der Positionswinkel des Schnittpunktes der Kegelaxe mit der Ebene der $\xi\eta$ im Auge des Beobachters, d. h. der Positionswinkel der Geraden OS, und daher $= \sphericalangle\, YSO'$. Ist ferner SS_1 die Richtung der Bewegung des Punktes S, so wollen wir den Winkel $S_1SO' = \psi$ setzen. Da wir unter N' den Positionswinkel der Richtung SS_1 verstehen, erhalten wir die Relation

$$p = N' + \psi.$$

(A. 235.)

Es sei ferner SZ der Verticalkreis des Punktes S, und der Winkel ZSS_1 sei $= W$. Weil $\sphericalangle\, YSZ$ der parallaktische Winkel im Punkte S ist, haben wir dann auch $N' = K + W$. Die Figur zeigt, dass für erste Berührungen, für welche der Punkt O auf der vorangehenden Seite des Schattenkreises liegt, ψ zwischen den Grenzen 90° und 270° liegt, während für zweite Berührungen $-90° < \psi < +90°$ ist. Wird ψ nahe $= +90°$ oder $= -90°$, so kann diese Regel unrichtig werden, weil die Richtung der Bewegung des Schattens und die der Erdrotation nicht zusammenfallen. Die entsprechenden Punkte werden später besonders behandelt. Durch Einführung von ψ und W geht die letzte Gleichung über in $sin\,(\psi + N')\,cos\,(N' - W) = \delta\, cos\,(\psi + N')\, sin(N' - W)$. Führen wir ein

$$\begin{aligned} e\, sin(N' + \nu) &= \delta\, sin\, N' \qquad & e'\, sin\,(N' + \nu') &= sin\, N' \\ e\, cos(N' + \nu) &= cos\, N' \qquad & e'\, cos\,(N' + \nu') &= \delta\, cos\, N' \end{aligned} \tag{3}$$

und entwickeln nach ψ, so ergiebt sich die Gleichung

$$tang\,\psi = -\frac{e'\, sin\,(W + \nu')}{e\, cos\,(W + \nu)}. \tag{4}$$

Andererseits geht aus der zweiten und dritten Grundgleichung, wenn wir ψ und W einführen, die neue Gleichung hervor

$$u\, sin\,\psi = -\gamma + (1 + x)\, cos\, H e\, sin\,(W + \nu) = -\gamma + e\, sin\,(W + \nu) \tag{5}$$

und aus diesen beiden Gleichungen sind ψ und W zu bestimmen. Vernachlässigen wir zunächst die Abplattung, setzen also $\delta = 1$, so wird $e = e' = 1$ und $\nu = \nu' = 0$ und daher nach der ersten Gleichung $tang\,\psi = -\,tang\,W$, das heisst $\psi = -W$ oder $= 180° - W$, und nach der zweiten Gleichung, weil wir $cos\,H = 1$ setzen und x vernachlässigen können, weil es selbst im Horizont nur $= 0{\cdot}0002426$ ist, und nach den Grundgleichungen auf pag. 775 noch $u = u'$ ist

$$sin\,(W + \nu) = \frac{\gamma}{e \pm u'}.$$

Die Formel ergiebt für $sin(W + \nu)$ 2 Werthe und mit diesen die Gleichung (5) für ψ 4 Werthe, die beiden im 2. oder 3. Quadranten liegenden gehören zum Eintritt, die im 1. oder 4. liegenden zum Austritt. Der Näherungswerth ist dann in die Gleichung für $tang\,\psi$ einzuführen, die zu einem verbesserten Werthe von ψ führt, der aus der Gleichung für $u\,sin\,\psi$ einen strengeren Werth von $W + \nu$ ergiebt. Die Differentiation der zweiten Gleichung giebt $d\psi = \frac{e}{u}\frac{cos(W+\nu)}{cos\,\psi}\,dW$, also näherungsweise $u'\,d\psi = dW$. Nach pag. 758 ist der Maximalwerth von $u_i' = 0{\cdot}028$; für den Kernschatten führt also die Operation sehr schnell zum Ziele, da den Aenderungen des ψ nur auf etwa den 40. Theil verkleinerte Aenderungen des W entsprechen. Für den Halbschattenkegel ergiebt sich ein sehr bequemes Verfahren aus dem Umstande, dass u_a' nahe $= 0{\cdot}5$ ist, einer Aenderung des ψ also nahe eine halb so grosse Aenderung des W entspricht. Berechnen wir also

$$sin(W_1 + \nu) = \frac{\gamma}{e \pm u_a'}, \qquad tang\,\psi_1 = -\frac{e'\,sin\,(W_1 + \nu')}{e\,cos\,(W_1 + \nu)}$$

und damit $u'\,sin\,\psi_1 = -\gamma + e\,sin\,(W_2 + \nu)$, so können wir die folgenden Näherungen von W finden durch $W_3 = \frac{1}{2}(W_2 + W_1)$, $W_4 = \frac{1}{2}(W_3 + W_2)$ u. s. w. Der Grenzwerth W', zu dem wir so gelangen, wird schon sehr genau sein, substituiren wir ihn aber in die Gleichung für $tang\,\psi$ und berechnen wieder einen Werth des ψ und damit einen Werth des W, so können wir auf diesen und W' dasselbe Verfahren noch einmal anwenden.

Mit den so bekannten Werthen von W und ψ finden wir die Coordinaten des Beobachtungsortes in folgender Weise. Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (2) folgt

$$u\,cos\,\psi = n\,(t - \Delta\lambda - \tau) - (1 + x)\,cos\,H\,(sin\,N'\,sin\,K + \delta\,cos\,N'\,cos\,K)$$

oder wenn wir $u = u'$ und $cos\,H = 1$ setzen und die Gleichungen (3) anwenden

$$t - \Delta\lambda = \tau + \frac{e'}{n}\,cos\,(W + \nu') + \frac{u'}{n}\,cos\,\psi, \tag{6}$$

wodurch also die wahre Zeit des Eintritts der Berührung an den gesuchten Punkten gefunden ist. Die Gleichungen (1) geben weiter

$$tang\,(t + \Delta a) = \frac{sin\,K}{cos\,d_0\,tang\,H - sin\,d_0\,cos\,K}.$$

Hier ist $K = N' - W$ und $tang\,H = -\,tang\,f\,cos\,(\psi + W) - r\,sin\,1''$, wir erhalten also $t + \Delta a$ durch

$$tang(t + \Delta a) = cos\,H'\,tang\,(N' - W)\,cosec\,(H' - d_0),$$

wobei

$$tang\,H' = -\,[tang\,f\,cos(\psi + W) + 0{\cdot}009599]\,sec(N' - W). \tag{7}$$

Durch (6) und (7) wird $\Delta\lambda$ bekannt und nun finden wir noch durch Division der 4. und 5. der Gleichungen (1)

$$tang\,\varphi_1 = cotang(H' - d_0)\,cos\,(t + \Delta a); \quad tang\,\varphi = \frac{1}{1-\alpha}\,tang\,\varphi_1 = [0{\cdot}00145]\,tang\,\varphi_1. \tag{8}$$

Die Gleichungen (1, 3—8) enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe der Ermittelung der 4 Berührungspunkte. Da d_0 sich im Verlaufe der Finsterniss ändert, so ist die Rechnung zunächst mit einem genäherten Werthe des d_0 der Mitte der Finsterniss entsprechend zu führen und sie wäre dann zu wiederholen mit den den gefundenen Näherungswerthen von $t - \Delta\lambda$ entsprechenden Werthen von d_0. Die Genauigkeit, die man bei diesen Vorausberechnungen erstrebt — man rechnet meistens nur mit 4stelligen Logarithmentafeln — wird aber schon vollständig durch die erste Näherung erreicht. Durch das gleiche Formelsystem

sind zugleich auch die westliche und östliche Grenzcurve bestimmt; es fällt nur die Gleichung (4) fort, die der Ausdruck der Bedingung war, dass die betreffende Berührung der Zeit nach die erste oder letzte sei. Der Winkel ψ ist also willkürlich anzunehmen und aus Gleichung (5) der zugehörige Werth des W zu rechnen, oder umgekehrt zu einem angenommenen Werthe von W der zugehörige Werth von ψ zu bestimmen. Zur Erläuterung soll für die Finsterniss, deren Elemente auf pag. 771 berechnet sind, einer der Berührungspunkte und ein Punkt der einen Grenzcurve berechnet werden. Stellen wir dazu das Formelsystem noch einmal zusammen:

Formeln zur Berechnung der Berührungspunkte und der östlichen und westlichen Grenzcurven.

a) $\delta \sin d_0 = \sin d \qquad e \sin(N' + \nu) = \delta \sin N' \qquad e' \sin(N' + \nu') = \sin N'$

$\delta \cos d_0 = [9{\cdot}99855_{-10}] \cos d \qquad e \cos(N' + \nu) = \cos N' \qquad e' \cos(N' + \nu') = \delta \cos N'$

b) Nährungswerth: $\sin(W + \nu) = \dfrac{\gamma}{e \pm u'}$

Strenge Formeln: $\begin{cases} \tang \psi = \dfrac{-e' \sin(W + \nu')}{e \cos(W + \nu)} \\ u' \sin \psi = -\gamma + e \sin(W + \nu). \end{cases}$

Bei Anwendung des + Zeichens im Näherungsausdruck ist ψ genähert $= - W$, bei Anwendung des — Zeichens $= 180° - W$. Der erstere Fall entspricht den äusseren, der andere den inneren Berührungen des Kegels mit der Erde. Für Punkte, die den Anfang der Finsterniss sehen, liegt ψ im 2. oder 3., für Punkte, die das Ende der Finsterniss sehen, im 1. oder 4. Quadranten· ψ nahe $= 90°$ oder $270°$ auszuschliessen.

c) $\tang H' = -[\tang f \cos(\psi + W) + 0{\cdot}009599] \sec(N' - W)$

$\tang(t + \Delta\alpha) = \cos H' \tang(N' - W) \operatorname{cosec}(H' - d_0)$ [$\sin(t + \Delta\alpha)$ hat gleiches Zeichen mit $\sin(N' - W)$]

$t - \Delta\lambda = \tau + \dfrac{1}{n} e' \cos(W + \nu') + \dfrac{1}{n} u' \cos \psi$

$\tang \varphi = [0{\cdot}00145] \operatorname{cotang}(H' - d_0) \cos(t + \Delta a).$

Auf der östlichen und westlichen Grenzcurve gilt von den Formeln b nur die dritte, aus der man zu einem angenommenen Werthe von ψ oder von W 2 zugehörige Werthe von W bezw. ψ findet. Von den entsprechenden Punkten liegt der eine auf der westlichen, der andere auf der östlichen Grenzcurve.

Beispiel. Sonnenfinsterniss 1898 Januar 21. Elemente siehe pag. 772.

$d = -19° 39'{\cdot}0 \quad N' = 71° 15'{\cdot}4 \quad \log \frac{1}{n} = 0{\cdot}2439 \quad \gamma = +0{\cdot}50808 \quad \tau = 19^h{\cdot}125$ w. Z. Gr.

$u_a' = 0{\cdot}54377 \quad \log \tang f_a = 7{\cdot}67667 \quad \Delta a = 0^h{\cdot}000.$

$\log \sin d$	$9{\cdot}5267_n$
$\log(1 - \alpha) \cos d$	$9{\cdot}9725$
$\log \tang d_0$	$9{\cdot}5542_n$
d_0	$-19° 42'{\cdot}8$
$\log \delta$	$9{\cdot}9987$
$\log \sin N'$	$9{\cdot}9763$
$\log \cos N'$	$9{\cdot}5070$

$\log e \sin(N' + \nu)$	$9{\cdot}9750$	$\log e' \sin(N' + \nu')$	$9{\cdot}9763$
$\log e \cos(N' + \nu)$	$9{\cdot}5070$	$\log e' \cos(N' + \nu')$	$9{\cdot}5057$
$N' + \nu$	$71° 12'{\cdot}1$	$N' + \nu'$	$71° 18'{\cdot}3$
ν	$-3'{\cdot}3$	ν'	$+2'{\cdot}9$
$\log e$	$9{\cdot}9988$	$\log e'$	$9{\cdot}9999$

e	0·9973		$\log e' \sin(W_1 + \nu')$	9·5204	9·5159
u'	0·5438		$\log e \cos(W_1 + \nu)$	9·9738	$9·9738_n$
$e + u'$	1·5411		ψ_1	−19° 23′·8	199° 12′·5
$\log \gamma$	9·7060		$\log u'/e$	9·7366	
$\log(e + u')$	0·1878		$\log \sin \psi_1$	$9·5213_n$	$9·5172_n$
[1]) $W_1 + \nu$	19° 15′·5 od.	160° 44′·5		−0·1811	−0·1794
$\nu' - \nu$	+6·2		γ/e	+0·5096	
$W_1 + \nu'$	19° 21′·7	160° 50′·7	$\sin(W_2 + \nu)$	0·3285	0·3302
			$W_2 + \nu$	19° 10′·6	160° 43′·1
Grenzwerth des arith. Mittels			$W + \nu$	19 12·2	160 43·6
			$W + \nu'$	19 18·4	160 49·8
			$\log e' \sin(W + \nu')$	9·5192	9·5163
			$\log e \cos(W + \nu)$	9·9739	$9·9737_n$
			ψ	−19° 20′·5	199° 13′·8

Die neuen Werthen von ψ führen auf die definitiven Werthe:

$W + \nu$	19° 12′·4	160° 43′·8	$\tang f \cos(\psi + W)$	0·00475	
ψ	−19 20·8	199 13·2	$r \sin 1''$	0·00960	
$W + \nu'$	19 18·6	160 50·0		0·01435	
W	19 15·7	160 47·1	$\log \tang H$	$8·1568_n$	
$W + \psi$	− 0 5·1	+ 0·3	$\log \sec(N' - W)$	0·2107	2·0845
$N' - W$	51 59·7	270 28·3		$8·3675_n$	$0·2413_n$
$\log e'/n$	0·2438		H'	− 1° 20′·1	−60° 9′·3
$\log \cos(W + \nu')$	9·9750	$9·9753_n$	$H' - d_0$	+18 22·7	−40 26·5
$\log \Delta\tau_1$	0·2188	$0·2191_n$	$\log \cos H'$	9·9999	9·6969
$\log u'$	9·7354		$\log \tang(N' - W)$	0·1072	$2·0845_n$
$\log 1/n$	0·2439		$\log \cosec(H' - d_0)$	0·5013	0·1880
$\log \cos \psi$	9·9748	$9·9751_n$		0·6084	1·9694
$\log \Delta\tau_2$	9·9541	$9·9544_n$	t	$5^h·077$	$17^h·959$
τ	$19^h·125$		$\Delta\lambda$	$7^h·397$	1·391
$\Delta\tau_1$	+ 1·655	−1·657	$\log \cotang H' - d_0$	0·4786	$0·0694_n$
$\Delta\tau_2$	+ 0·900	−0·900	$\log \cos t$	9·3788	$8·0306_n$
$t - \Delta\lambda$	21·680	16·568		0·0014	
w. Z. Gr.	$21^h\ 40^m·8$	$16^h\ 34^m·1$		9·8590	8·1014
m. Zt. Gr.	21 52·6	16 45·9	φ	35° 53′	0° 43′

Resultate: 1. Berührung = Anfang der Finsterniss auf der Erde überhaupt um $16^h\ 45^m·9$ m. Z. Gr. in 20° 51′ östl. v. Gr. + 0° 43′ geogr. Br.

4. Berührung = Ende der Finsterniss auf der Erde überhaupt um $21^h\ 52^m·6$ m. Z. Gr. in 111° 0′ östl. v. Gr. + 35° 53′ geogr. Br.

Für $\psi = 5°$ ergiebt die dritte Gleichung b) $W + \nu = 33° 50'·5$ bezw. $= 146° 9'·5$. Berechnen wir mit diesen Zahlen die Ausdrücke c), so werden wir auf folgende Punkte der Grenzcurven geführt.

$\psi = 5°$; $W = 33° 53'·8$; $t - \Delta\lambda = 21^h\ 43^m·6$ m. Z. Gr.; $\Delta\lambda = 104° 13'$ östl. v. Gr. $\varphi = +18° 55'$ = Punkt des westlichen Zweiges der östlichen Grenzcurve.

$\psi = 5°$; $W = 146° 12'·8$; $t - \Delta\lambda = 18^h\ 48^m·8$ m. Z. Gr.; $\Delta\lambda = 355° 37'$ östl. v. Gr. $\varphi = +14° 18'$ = Punkt des westlichen Zweiges der westlichen Grenzcurve.

[1]) Die Formel $\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e - u'}$ führt auf imaginäre Werthe. Die Erde berührt also von innen den Kegel nicht, sie taucht nur theilweise in den Kegel ein.

Die Berechnung der nördlichen und südlichen Grenzcurve der Finsterniss kann aufgefasst werden als ein specieller Fall einer allgemeineren Aufgabe. Theilen wir den Sonnendurchmesser in 12, Zolle benannte, Theile, so messen wir die Grösse der an einem beliebigen Punkte gesehenen Finsterniss nach der Anzahl solcher Theile des Durchmessers, die vom Monde verdeckt sind. Innerhalb des Bereichs der Finsterniss wächst diese Zahl vom Anfang der Finsterniss bis zu einem bestimmten Zeitpunkt, dem der grössten Phase. Verbinden wir alle Punkte der Erdoberfläche, welche zur Zeit der grössten Phase eine Verfinsterung von einer bestimmten Zahl μ von Zollen sehen, so erhalten wir die Curve der grössten Phase $= \mu$ Zoll und die nördliche und südliche Grenzcurve sind die Curven der Phase 0 Zoll. Die Berechnung aller dieser Curven ist in derselben Weise zu führen, da wir, um eine Verfinsterung $= \mu$ Zoll zu erzielen, uns nur aus der Sonnenscheibe eine kleinere Scheibe, deren Radius $= \frac{6 - \mu}{6}$ Sonnenradien ist, herausgeschnitten und den entsprechenden Schattenkegel construirt zu denken brauchen. Die Grundgleichungen drücken die Bedingungen aus, denen die Coordinaten des Beobachtungsortes zur Zeit t genügen müssen, damit der Ort die Erscheinung wahrnehme. Denken wir uns nun aus der Sonnenscheibe Scheiben herausgeschnitten mit den Radien: r, $\frac{5}{6}r$, $\frac{2}{3}r$ . . . so entspricht jedem dieser Werthe ein besonderer Werth des u_a'. Führen wir diesen Werth in die Grundgleichungen ein, so werden wir im allgemeinen 2 Werthe von t finden, für welche die Gleichungen befriedigt sind. Mit kleiner werdendem Werthe von u_a', rücken diese Werthe von t immer näher aneinander heran und schliesslich werden wir zu einem Werthe von u_a' gelangen, für welchen beide Werthe t zusammenfallen. Die Bedeutung der diesem Zusammenfallen der Zeiten entsprechenden Werthe des t und des u_a' ist dann offenbar die, dass zur Zeit t der Mond eine aus der Sonnenscheibe herausgeschnittene Scheibe, die dem zum Radius u_a' des Schattenkreises gehörigen Kegel entspricht, berührt. Für noch kleinere Werthe des u_a' wird t imaginär, und es bestimmt also jener letzte reelle Werth des t die Zeit der grössten Phase. Wenn die Finsterniss für den gegebenen Ort grösser als 6 Zoll ist, so wird es auch, wenn wir den Sonnenradius $= 0$ werden lassen, noch 2 Werthe des t geben, die die Gleichungen befriedigen. Lassen wir dann u_a' negativ werden, so geht unser Halbschattenkegel über in den Kernschattenkegel, und wir können die entsprechenden Erscheinungen auffassen als innere Berührungen des Mondes und der verkleinerten Sonnenscheibe. Die Zeit der grössten Phase ist also bestimmt durch den kleinsten Werth, den u_a' annehmen kann, damit den Grundgleichungen noch durch einen reellen Werth des t Genüge geleistet werde, und es folgt daraus, dass wir zur Bestimmung der grössten Phase das Minimum von u_a' in Bezug auf t zu suchen haben. Nun war

$$u' = \left[\frac{\cos\beta_{☾}\cos(\lambda_{☾} - \lambda_{\odot})}{\sin\pi_{☾}} + \frac{k}{\sin f}\right] \tang f.$$

Da $\beta_{☾}$ und $\lambda_{☾} - \lambda_{\odot}$ während der Finsterniss immer nahe $= 0$ sind, brauchen wir bei der Bildung von du' auf die Aenderungen dieser Grössen keine Rücksicht zu nehmen; wir erkennen dann sofort, dass du' nur $= 0$ werden kann, dadurch, dass $df = 0$ wird. Wenn wir mit Rücksicht hierauf unsere Grundgleichungen differentiiren und uns dabei zunächst auf Punkte der Curve beschränken, in denen wir die Refraction vernachlässigen, also x und $\frac{dx}{dt} = 0$ setzen können, so erhalten wir die Differentiale

$$du = tang\, f \cos\varphi_1 \cos d \sin(t + \Delta a) dt$$

$$du \sin p + u \cos p\, dp = n \sin N' \frac{dt}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \cos(t + \Delta a) dt \qquad \varkappa = \frac{15 \cdot 60 \cdot 60}{206265}$$

$$du \cos p - u \sin p\, dp = n \cos N' \frac{dt}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin d \sin(t + \Delta a) dt.$$

Eliminiren wir aus den beiden letzten Gleichungen dp und führen $\psi = p - N'$ ein, so erhalten wir durch Gleichsetzen der beiden Werthe von du

$$tang\, f \cos\varphi_1 \cos d \sin(t+\Delta a) = \cos\psi \left\{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 [\cos(t+\Delta a) \sin N' + \sin(t+\Delta a) \sin d \cos N']\right\}$$
$$- \sin\psi \cos\varphi_1 [\cos(t+\Delta a) \cos N' - \sin(t+\Delta a) \sin d \sin N'].$$

Entständen die Grenzcurven dadurch, dass der Mondschatten über eine nicht sich drehende Erde fortstriche, so würden dieselben beschrieben werden durch diejenigen beiden Erzeugenden, die zu einem zur Bewegungsrichtung des Schattenkreises senkrechten Durchmesser gehörten, für welche also $\psi = 90°$ oder $= 270°$ ist. Wäre andererseits der Schatten in Ruhe, während die Erde sich dreht, so wären die beiden Grenzcurven, die den Schattenkreis berührenden Parallelkreise und wir hätten $\psi = 180° - N'$ oder $= - N'$. In Wirklichkeit wird also ψ zwischen diesen extremen Werthen liegen. Da aber N' von $90°$ nur um $\varepsilon \pm i'$ verschieden sein kann, wird ψ sich von den Werthen $90°$ bezw. $270°$ auch nur um höchstens etwa $20°$ entfernen können, so dass $\sin\psi$ immer dem Werthe ± 1 nahe liegen wird. Wir können daher den Faktor $\sin\psi = \pm 1$ der linken Seite unserer Gleichung hinzufügen, die ja höchstens $= tang\, f$ werden kann. Wir führen dann noch die Hilfsgrössen ein:

$$\begin{aligned} \sin k \sin K &= \sin N' & \sin g \sin G &= \cos f \sin N' \sin d \mp \sin f \cos d \\ \sin k \cos K &= \cos N' \sin d & \sin g \cos G &= \cos f \cos N' \\ \cos k &= \cos N' \cos d & \cos g &= \cos f \sin N' \cos d \pm \sin f \sin d. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Oberes Zeichen für die nördliche Curve auf der $\psi = 90°$ ist, unteres für die südliche Curve, für welche $\psi = 270°$ ist. Dadurch wird

$$tang\, \psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin\varkappa \sin(K + \Delta a + t)}{\cos\varphi_1 \sin g \cos(G + \Delta a + t)} \cos f.$$

Die Grundgleichungen gehen durch Einführung von ψ und der Hilfsgrössen g und G über in

$$u = u' - [(1 - \alpha) \sin\varphi_1 \sin d + \cos\varphi_1 \cos d \cos(t + \Delta a)]\, tang\, f$$
$$u \sin\psi = -\gamma - \cos\varphi_1 [\cos N' \sin(t + \Delta a) + \sin d \cos(t + \Delta a) \sin N']$$
$$+ (1 - \alpha) \sin\varphi_1 \cos d \sin N'$$
$$u \cos\psi = (t - \Delta\lambda - \tau) n + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + \Delta a + t) - (1 - \alpha) \sin\varphi_1 \cos k.$$

Fügen wir in der ersten Gleichung in dem mit $tang\, f$ multiplicirten Gliede den Faktor $\sin\psi = \pm 1$ hinzu, und substituiren den Werth des u in die zweite Gleichung, so giebt diese

$$u' \sin\psi = -\gamma + (1 - \alpha) \sin\varphi_1 \cos g \sec f - \cos\varphi_1 \sin g \sin(G + \Delta a + t) \sec f.$$

Die Lösung ist demnach durch folgendes Formelsystem nebst den Gleichungen (α) gegeben:

$$\begin{aligned} i_1 &= (1 - \alpha) \sin d\, tang\, f & i_3 \cos J &= \cos g (1 - \alpha) \\ i_2 &= \cos d \cos(t + \Delta a)\, tang\, f & i_3 \sin J &= \sin g \sin(G + \Delta a + t) \\ i_4 &= \frac{1}{n} \sin k \cos(K + \Delta a + t) & i_6 &= \sin k \sin(K + \Delta a + t) \\ i_5 &= \frac{1}{n} \cos k (1 - \alpha) & i_7 &= \sin g \cos(G + \Delta a + t) \end{aligned} \qquad (\beta)$$

$$u = u' - i_1 \sin\varphi_1 - i_2 \cos\varphi_1$$

$$\sin(\varphi_1 - J) = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{i_3} \cos f$$

$$t - \Delta\lambda = \tau - i_4 \cos\varphi_1 + i_5 \sin\varphi_1 + \frac{u}{n} \cos\psi \qquad \log(1 - \alpha) = 9{\cdot}9985 \qquad (\gamma)$$

$$\tan g\,\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - i_6 \cos\varphi_1}{i_7 \cos\varphi_1} \cos f \qquad \log\frac{1}{\varkappa} = 0{\cdot}58204.$$

Bei der Anwendung dieser Formeln haben wir 2 Fälle zu unterscheiden. Aus den Gleichungen sind die zusammengehörigen Werthe der 4 veränderlichen Grössen t, $\Delta\lambda$, φ_1 und ψ zu bestimmen, von denen wir eine beliebig anzunehmen haben. Es eignen sich dazu die Grössen t oder φ_1. Verlaufen die Curven in nicht zu weitem Abstande vom Aequator, so entsprechen wegen der geringen Neigung der Bewegungsrichtung des Schattens grossen Aenderungen von t kleine Aenderungen von φ, und es ist daher t die geeignetste unabhängige Variable. Verlaufen indess die Curven in der Nähe der Pole, so tritt das Umgekehrte ein. In beiden Fällen haben wir für die mit der Zeit langsam veränderlichen Grössen d, N' und f bestimmte Werthe anzunehmen, und müssten, wenn wir äusserste Genauigkeit verlangten, später die Rechnung wiederholen mit den der gefundenen Zeit $t - \Delta\lambda$ entsprechenden Werthen. Hiervon wird man aber wohl stets Abstand nehmen. In dem ersteren allgemeineren Falle berechnet man mit den nach (α) sich ergebenden Hilfsgrössen und dem angenommenen Werthe t, die Hilfsgrössen i nach den Ausdrücken (β), findet dann zunächst einen Näherungswerth von φ_1 aus

$$\sin(\varphi_1 - J)_1 = \frac{\gamma \pm u'}{i_3} \cos f,$$

den man benutzt, um einen Näherungswerth für ψ abzuleiten, der nun seinerseits aus der strengen Gleichung für $\varphi_1 - J$ einen verbesserten Werth des φ_1 giebt; hat man so fortfahrend den genauen Werth von φ_1 und ψ gefunden, so geben die beiden anderen Gleichungen u und $\Delta\lambda$. Im zweiten Falle gehen wir aus von einem angenommenen φ_1, berechnen damit aus der Gleichung für $u' \sin\psi$, indem wir zunächst $\sin\psi = \pm 1$ setzen, einen Näherungswerth von t durch

$$\sin(G + \Delta a + t) = (1 - \alpha) \operatorname{cotang} g \tan g\,\varphi_1 - \frac{\gamma \pm u'}{\sin g \cos\varphi_1} \cos f,$$

mit dem wir dann die Hilfsgrössen i_6, i_7 und einen verbesserten Werth von ψ finden, der zu einem strengeren Werthe von t und schliesslich zur Kenntniss von $\Delta\lambda$ führt.

Es handelt sich nun noch darum, zu entscheiden, wann wir diese zweite Auflösung anzuwenden haben. Jeder Strahl des Kegels schneidet die Erde im allgemeinen in 2 Punkten, es giebt also zwei Werthepaare von t und φ_1, die bei gegebenem $t - \Delta\lambda$ den Grundgleichungen Genüge leisten. Von diesen Punkten hat allerdings nur der eine die Sonne über dem Horizont und kommt für uns in Betracht. Die vollständige Grenzcurve einer beliebigen Phase ist hiernach eine geschlossene Curve. So lange diese nun den Pol der Erde umschliesst, durchläuft t in stetiger Weise alle Werthe zwischen 0° und 360°, und kann als unabhängige Veränderliche benutzt werden. Sobald aber einer der Pole auf die Grenzcurven oder ausserhalb derselben fällt, hört dieses auf. Es liegt t dann zwischen einem Maximal- und Minimalwerth eingeschlossen, und wenn es in die Nähe dieser Werthe kommt, wird $\frac{d\varphi_1}{dt}$ gross und t kann nicht mehr unabhängig Veränderliche sein. Soll die Grenzcurve durch einen der

Pole gehen, so muss sein $\pm \cos J = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{i_3} \cos f$, oder wenn wir $\cos f = 1$ annehmen, $\pm \cos g (1 - \alpha) = \gamma + u' \sin\psi$. Ist aber $\pm \cos g (1 - \alpha) < \gamma + u' \sin\psi$, so wird $\sin(\varphi_1 - J) > 1$, also φ_1 imaginär, es giebt also Werthe des t, denen kein Curvenpunkt entspricht. Setzen wir auf der nördlichen Grenzcurve $\sin\psi = +1$, auf der südlichen $\sin\psi = -1$, so tritt also der Ausnahmefall ein, wenn $u' \pm \gamma \overline{\overline{>}} \cos g (1 - \alpha)$ ist. In diesem Falle haben wir in der Nähe der Grenzwerthe von t die Polhöhe φ_1 als unabhängige Veränderliche zu wählen. Den Grenzwerthen des t entspricht der Uebergang der reellen in die imaginären Werthe von φ_1, sie genügen also der Bedingung $\sin(\varphi_1 - J) = \pm 1$. Zur Bestimmung der Grenzwerthe des t haben wir daher $\pm i_3 = (\gamma + u' \sin\psi) \cos f$ oder, wenn wir $\cos f$ vernachlässigen,

$$\pm \sin(G + \Delta\alpha + t) = \frac{\sin J}{\sin g} (\gamma + u' \sin\psi),$$

wobei

$$\cos J = \pm \frac{(1 - \alpha) \cos g}{\gamma + u' \sin\psi}.$$

Wir haben also folgendermaassen zu verfahren. Nachdem die Endpunkte der Grenzcurven der einzelnen Phasen berechnet sind, die wir bislang des Einflusses der Refraction wegen ausgeschlossen haben, berechnen wir für jene Werthe von u', die der Bedingung genügen, $u' \pm \gamma < (1 - \alpha) \cos g$, die Punkte der Grenzcurven, indem wir für t als Variable einen beliebigen, innerhalb der in den Endpunkten stattfindenden Werthe liegenden annehmen. Für jene Werthe des u' aber, die $u' \pm \gamma > (1 - \alpha) \cos g$ werden lassen, hat man in der Nähe der Grenzwerthe des t die Polhöhe φ_1 als unabhängige Veränderliche zu wählen, während wir in weiterer Entfernung von den Grenzwerthen wieder t als unabhängige Veränderliche benutzen. Indem wir diese letztere Rechnung zuerst ausführen und die in den Endpunkten geltenden Werthe berücksichtigen, werden wir für φ_1 passende Annahmen machen können.

Zur Bestimmung der Endpunkte der Grenzcurven einer bestimmten Phase haben wir auszugehen von den Gleichungen (2), pag. 775. Durch Einführung von $\psi = p - N'$ und $W = N' - K$ (K = parallaktischer Winkel) gehen dieselben über in

$$\begin{aligned} u &= u' - (1 + x) \sin H \tang f \\ u \sin\psi &= -\gamma + (1 + x) e \cos H \sin(W + \nu) \\ u \cos\psi &= (t - \Delta\lambda - \tau) n - (1 + x) \cos H e' \cos(W + \nu'). \end{aligned}$$

Wir haben diese Gleichungen wieder nach der Zeit zu differentiiren und dann das Differential $\frac{du}{dt}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{df}{dt}$ verschwinden zu lassen. Durch Gleichsetzen der beiden Werthe von $\frac{du}{dt}$ aus der ersten und aus der zweiten und dritten Gleichung ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} -(1+x) \cos H \tang f \frac{dH}{dt} = \sin\psi \Big[&(1 + x) e \cos H \cos(W + \nu) \frac{dW}{dt} \\ &- (1+x) e \sin H \sin(W + \nu) \frac{dH}{dt} + e \cos H \sin(W + \nu) \frac{dx}{dt} \Big] \\ + \cos\psi \Big[&\frac{n}{\varkappa} + (1 + x) e' \cos H \sin(W + \nu') \frac{dW}{dt} \\ &+ (1 + x) \sin H \cos(W + \nu') \frac{dH}{dt} - e' \cos H \cos(W + \nu') \frac{dx}{dt} \Big]. \end{aligned}$$

Es ist aber $dW = -dK$, und die Differentiale des parallaktischen Winkels K und der Höhe H sind gegeben durch (pag. 775)

$$\cos H dK = -(\sin d_0 \cos H - \cos d_0 \sin H \cos K)\, dt \qquad dH = -\cos d_0 \sin K dt.$$

Die Produkte der kleinen Grösse x in die Differentiale $\frac{dW}{dt}$ und $\frac{dH}{dt}$ sind zu vernachlässigen; fügen wir auf der linken Seite wieder den Faktor $\sin\psi = \pm 1$ hinzu, was wegen des Faktors $tang\, f$ gestattet ist, so wird:

$$0 = \sin\psi \Big[e \sin d_0 \cos H \cos(W + \nu) - e \cos d_0 \sin H \cos(N' + \nu) + e \cos H \sin(W + \nu) \frac{dx}{dt}$$
$$\mp tang\, f \cos d_0 \cos H \sin(N' - W) \Big]$$
$$+ \cos\psi \Big[\frac{n}{\varkappa} + e' \sin d_0 \cos H \sin(W + \nu') - e' \cos d_0 \sin H \sin(N' + \nu')$$
$$- e' \cos H \cos(W + \nu') \frac{dx}{dt} \Big].$$

Wir fanden aber (pag. 776)

$$\frac{dx}{dH} = -r \sin 1'' \quad \text{und} \quad tang\, H = -tang\, f \cos(\psi + W) - r \sin 1''.$$

Da wir $tang\, H$ und $\sin H$ vertauschen und in dem Ausdrucke dieser Grösse $\psi = \pm 90°$ setzen können, ist

$$\frac{dx}{dt} = r \cos d_0 \sin(N' - W) \sin 1'' \qquad \sin H = \pm tang\, f \sin W - r \sin 1''$$

Führen wir diese Werthe ein, setzen ausserdem $\cos H = 1$ und vernachlässigen in den mit $tang\, f$ oder r multiplicirten Gliedern Grössen von der Ordnung der Abplattung, so wird schliesslich

$$0 = \sin\psi\, e \cos(W + \nu) [\sin d_0 \mp tang f \cos d_0 \sin N' + r \cos d_0 \cos(N' - W) \sin 1'']$$
$$+ \cos\psi \Big(\frac{n}{\varkappa} + e' \sin(W + \nu') [\sin d_0 \mp tang f \cos d_0 \sin N' + r \cos d_0 \cos(N' - W) \sin 1''] \Big).$$

Diese Gleichung zur Bestimmung von $tang\, \psi$ tritt an die Stelle der Gleichung (4), pag. 777, und führt in Verbindung mit der Gleichung (5), pag. 777, zur Bestimmung von ψ und W. Die Auflösung ist also folgende:

Die Hilfsgrössen sind zu berechnen nach den Gleichungen (a), pag. 779. Dann sind die Formeln zu verwenden:

$$V = \sin d_0 \mp tang f \cos d_0 \sin N' + 0{\cdot}009599 \cos d_0 \cos(N' - W) \quad \begin{matrix}\text{nördliche} \\ \text{südliche}\end{matrix} \Big\} \text{ Curve}$$

$$tang\, \psi = -\frac{\frac{n}{\varkappa} + e' V \sin(W + \nu')}{e V \cos(W + \nu)} \qquad \log \frac{1}{\varkappa} = 0{\cdot}58204. \qquad (b')$$
$$e \sin(W + \nu) = \gamma + u' \sin\psi.$$

Sind ψ und W gefunden, so geben die Formeln (c), pag. 779, die Coordinaten der Curvenpunkte. Zur Auflösung der Gleichungen (b') gehen wir aus von der der Annahme $\psi = \pm 90°$ entsprechenden Näherung

$$e \sin(W_1 + \nu) = \gamma \pm u'.$$

Es ist nun noch die Bestimmung der Grössen u' und f auszuführen. Handelt es sich um die Bestimmung der Grenzcurven der Finsterniss überhaupt, so sind die dem Halbschattenkegel entsprechenden Werthe u_a' und f_a einzusetzen.

Andererseits ergeben die Werthe u_i' und f_i die Grenzcurven der totalen bezw. ringförmigen Finsterniss. Die Grenzcurve der Phase μ Zoll entspricht der äusseren Berührung für eine Sonnenscheibe vom Radius $\left(1 - \frac{\mu}{6}\right) r_\odot$, wenn $\mu < 6$, bezw. der inneren Berührung bei einer Sonnenscheibe von $\left(\frac{\mu}{6} - 1\right) r_\odot$, wenn $\mu > 6$. Es war aber

$$sin f = \frac{\pm \sin r_\odot + k \sin 8''\cdot 85}{R(1-\mu)} \quad \begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix} \text{ Berührung.}$$

Führen wir nun für $r_\odot$ ein, einmal $\left(1 - \frac{\mu}{6}\right) r_\odot$, das andere Mal $\left(\frac{\mu}{6} - 1\right) r_\odot$ und setzen $\frac{\sin r_\odot}{R(1-\mu)} = \frac{1}{2}(\sin f_a - \sin f_i)$, so erhalten wir beide Male

$$\sin f_\mu = \sin f_a - \frac{\mu}{12}(\sin f_a - \sin f_i), \tag{d_1}$$

Es ist aber $u' = z \operatorname{tang} f + k \sec f$, also da $\operatorname{tang} f$ und $\sin f$ vertauscht werden dürfen,

$$u_\mu' = u_a' - \frac{\mu}{12}(u_a' - u_i') \tag{d_2}$$

und nach diesen beiden Formeln sind f_μ und u_μ' zu berechnen.

Lässt man μ alle Werthe zwischen 0 und 12 durchlaufen, so erhält man auf der Erdoberfläche eine Curve, welche jene Punkte verbindet, die die grösste Phase im Horizont bei Sonnenaufgang oder -Untergang sehen. Soll nur diese Curve, nicht aber die Grenzcurven der einzelnen grössten Phasen berechnet werden, so hat man die Formeln (b') und (d) in der Weise zu benutzen, dass man von einem beliebigen Werthe von W ausgeht und die zugehörigen Werthe von u_μ' und ψ nach (b') rechnet, indem man zuerst das von $\operatorname{tang} f_\mu$ abhängige Glied in V unterdrückt. Man rechnet dann nach (d_2) und (d_1) μ und $\sin f_\mu$ und wiederholt die Rechnung.

Beispiel. Berechnung der Endpunkte und eines dritten Punktes der südlichen Grenzcurve für die totale Sonnenfinsterniss 1898 Januar 21.

Den Elementen (pag. 772) und der Rechnung für die östlichen und westlichen Grenzcurven (pag. 780) haben wir folgende Daten zu entnehmen:

$$d = -19°39'\cdot 0 \quad N' = 71°15'\cdot 4 \quad \log\frac{1}{n} = 0\cdot 2439 \quad \gamma = +0\cdot 50808 \quad \tau = 19^h\cdot 125 \text{ w. Z. Gr.}$$

$$\Delta a = 0^h\cdot 000 \quad u_a' = 0\cdot 5438 \quad \log \operatorname{tang} f_a = 7\cdot 6767 \quad d_0 = -19°42'\cdot 8$$
$$\log e = 9\cdot 9988 \quad \log e' = 9\cdot 9999 \quad \nu = -3'\cdot 3 \quad \nu' = +2'\cdot 9.$$

Zuerst ist die Berechnung der Endpunkte auszuführen, wozu das Formelsystem (b') dient.

$\log \operatorname{tang} f_a$	7·6767	ψ_1	270°	
$\log \cos d_0$	9·9738	$\gamma - u'$	−0·0357	
$\log \sin N'$	9·9763		$8\cdot 5527_n$	
	7·6268	$\log e$	9·9988	
$\log r$	7·9822	$W_1 + \nu$	−2° 3'·1	oder 182° 3'·1
$\log r \cos d_0$	7·9560	$W_1 + \nu'$	−1 56·9	182 9·3
$\sin d_0$	−0·3373	W	−1 59·8	182 6·4
$\operatorname{tang} f \cos d_0 \sin N'$	+0·0042	$N' - W$	73 15·2	
V	= −0·3331			
	$+[7\cdot 9560] \cos(N' - W')$			

W	$-1^\circ\,59'\!\cdot\!8$	$-1^\circ\,39'\!\cdot\!1$
$\log\cos(N'-W)$	9·4596	9·4682
$\log$ Corr. V	7·4156	7·4242
V	−0·3305	−0·3304
	$9{\cdot}5191_n$	$9{\cdot}5190_n$
$\log e'\sin(W+\nu')$	$8{\cdot}5314_n$	$8{\cdot}4467_n$
$\log e\cos(W+\nu)$	9·9985	9·9986
$\frac{n}{\varkappa}$	2·1782	
$e'V\sin(W+\nu')$	+0·0112	+0·0092
	0·3403	0·3399
$\log eV\cos(W+\nu)$	$9{\cdot}5176_n$	$9{\cdot}5176_n$
$\log\operatorname{tang}\psi$	0·8227	0·8223
ψ	$261^\circ\,27'$	$261^\circ\,26'\!\cdot\!3$

ψ	$261^\circ\,27'$	$261^\circ\,26'\!\cdot\!3$
$\log\sin\psi$	$9{\cdot}9952_n$	$9{\cdot}9951_n$
$\log u'$	9·7354	
$u'\sin\psi$	−0·5378	−0·5377
$\gamma+u'\sin\psi$	−0·0297	−0·0296
	$8{\cdot}4740_n$	$8{\cdot}4725_n$
$\log e$	9·9988	
$W_2+\nu$	$-1^\circ\,42'\!\cdot\!4$	$-1^\circ\,42'\!\cdot\!1$
$W_2+\nu'$	−1 36·2	−1 35·9
W	−1 39·1	−1 38·8
$N'-W$	72 54·5	72 54·2

Von dem Näherungswerthe $W = 182^\circ\,6'\!\cdot\!4$ ausgehend erhalten wir in derselben Weise für den zweiten Endpunkt die strengen Werthe $W = 181^\circ\,44'\!\cdot\!3$ $\psi = 278^\circ\,43'\!\cdot\!5$. Mit den erlangten Werthen von ψ und W sind nun die schon früher erläuterten Formeln (c) pag. 779 aufzulösen; das Resultat ist:

Oestlicher Endpunkt: $\begin{cases} H' = -\,1^\circ\,42{\cdot}4; \quad t+\Delta a = 5^h{\cdot}638; \quad t-\Delta\lambda = 20^h{\cdot}735; \\ \Delta\lambda = 133^\circ\,33' \text{ östl. v. Gr.}; \quad \varphi = +\,16^\circ\,18'; \end{cases}$

Westlicher Endpunkt: $\begin{cases} H' = +\,1^\circ\,25'{\cdot}8; \quad t+\Delta a = 17^h{\cdot}488; \quad t-\Delta\lambda = 17^h{\cdot}518; \\ \Delta\lambda = 359^\circ\,33' \text{ östl. v. Gr.}; \quad \varphi = -\,19^\circ\,6'. \end{cases}$

Berechnung des zu $t = 20^h$ gehörigen Punktes der südlichen Grenzcurve (Formeln α, β, γ, pag. 782, 783.

$\log\sin N'$	9·9763
$\log\sin d$	$9\ 5267_n$
$\log\cos N'$	9·5070
$\log\cos d$	9·9739
$\log\sin k\sin K$	9·9763
$\log\sin k\cos K$	$9{\cdot}0337_n$
$\log\cos k$	9·4809
K	$96^\circ\,30'\!\cdot\!7$
$\log\sin k$	9·9791
k	$72^\circ\,23'\!\cdot\!0$

1) $\log\cos f$	0·0000
2) $\log\sin N'$	9·9763
3) $\log\sin d$	$9{\cdot}5267_n$
4) $\log\sin f$	7·6767
5) $\log\cos d$	9·9739
6) $\log\cos N'$	9·5070
1) + 2) + 3)	$9{\cdot}5030_n$
4) + 5)	7·6506
$\log\sin g\sin G$	$9{\cdot}4968_n$
$\log\sin g\cos G$	9·5070
1) + 2) + 5)	9·9502
− (3) + (4)	7 2034
$\log\cos g$	9·9510
G	$315^\circ\,40'\!\cdot\!4$
$\log\sin g$	9·6525
g	$26^\circ\,41'\!\cdot\!6$

$K+\Delta a+t)$	$=36^\circ\,30'\!\cdot\!7$
$\log\cos(K+\Delta a+t)$	9·9051
$\log\sin k$	9·9791
$\log\frac{1}{n}$	0·2439
$\log\cos k$	9·4809
$\log(1-\alpha)$	9·9985
$\log i_4$	0·1281
$\log i_5$	9·7233
$\log\sin k$	9·9791
$\log\sin(K+\Delta a+t)$	9·7744
$\log\cos(G+\Delta a+t)$	$9{\cdot}3935_n$
$\log\sin g$	9·6525
$\log i_6$	9·7535
$\log i_7$	$9{\cdot}0460_n$

$G+\Delta a+t$	$=255^\circ\,40'\!\cdot\!4$
$\log(1-\alpha)$	9·9985
$\log\sin d$	$9{\cdot}5267_n$
$\log\operatorname{tang} f$	7·6767
$\log\cos d$	9·9739
$\log\cos(t+\Delta a)$	9·6990
$\log i_1$	$7{\cdot}2019_n$
$\log i_2$	7·3496

$\log(1-\alpha)$	9·9985
$\log\cos g$	9·9510
$\log\sin g$	9·6525
$\log\sin(G+\Delta a+t)$	$9{\cdot}9863_n$
$\log i_3\cos J$	9·9495
$\log i_3\sin J$	$9{\cdot}6388_n$
J	$-26^\circ\,3{\cdot}5$
$\log i_3$	9·9960

$\gamma-u'$	−0·0357
	$8{\cdot}5527_n$
$\log i_3$	9·9960
φ_1-J	$-\ 2^\circ\,3'\!\cdot\!9$
J	−26 3·5
φ_1	−28 7·4
$\log\cos\varphi_1$	9·9455

$\frac{n}{\varkappa}$	2·1782	$log\ sin\ \varphi_1$	$9·6726_n$
$-\ i_6\ cos\ \varphi_1$	−0·5000	$log\ cos\ \varphi_1$	9·9457
	0·2248	$-i_1\ sin\ \varphi_1$	−0·0007
$log\ i_7\ cos\ \varphi_1$	$8·9915_n$	$-i_2\ cos\ \varphi_1$	−0·0020
$log\ tang\ \psi$	$1·2333_n$	u'	0·5438
ψ	273° 20′·7	u	=0·5411
$log\ sin\ \psi$	$9·9993_n$		9·7333
$log\ u'$	9·7354	$log\ 1/n$	0·2439
$u'\ sin\ \psi$	−0·5429	$log\ cos\ \psi$	8·7660
$\gamma + u'\ sin\ \psi$	−0·0348		8·7432
	$8·5416_n$	τ	$19^h·125$
$log\ sin(\varphi_1 - J)$	$8·5456_n$	$-\ i_4\ cos\ \varphi_1$	−1·185
$\varphi_1 - J$	− 2° 0′·8	$+\ i_5\ sin\ \varphi_1$	−0·249
φ_1	−28 4·3	$\frac{u}{n}\ cos\ \psi$	+0·055
φ	−28 8·8	$t - \Delta\lambda$	17·746
		$\Delta\lambda$	= 2·254

Resultat: $\Delta\lambda = 33° 49'$ östl. v. Gr. $\varphi = -28° 9'$.

Da wir bei der Berechnung der Grenzcurven der grössten Phase von μ Zoll die wahre Ortszeit als Ausgangspunkt nehmen, so liefern die Verbindungslinien der demselben Werthe dieser Veränderlichen entsprechenden Punkte Curven, auf welchen die grösste Phase zu einer bestimmten Zeit, z. B. im wahren Mittag eintritt, und auch diese Curven sind für die Orientirung von Wichtigkeit.

Die Berechnung der Grenzcurven der grössten Phasen ist für die Werthe $\mu = 0$ bis $\mu = 12$ auszuführen. $\mu = 0$ giebt die Grenzcurven der partiellen Finsterniss überhaupt, $\mu = 12$ die Grenzcurven der totalen bezw. ringförmigen Finsterniss. Dabei ist zu beachten, dass die nach den Formeln gefundene nördliche Grenzcurve der ringförmigen Finsterniss südlich von der südlichen Grenzcurve verläuft und umgekehrt.

Wenden wir endlich das für die Berechnung dieser Curven beschriebene Verfahren an unter der Annahme $f = 0$, so erhalten wir den von der Kegelaxe beschriebenen Weg auf der Erdoberfläche oder die Curve der Centralität. Wegen der besonderen Wichtigkeit dieser Curve stellen wir die Formeln im folgenden zusammen; die Hilfsgrössen g_0, G_0, k, K finden sich bei den Elementen z. B. im Berliner Jahrbuch aufgeführt.

Curve der Centralität.

$$\sin k \sin K = \sin N' \qquad \sin g_0 \sin G_0 = \sin N' \sin d \qquad i_3 \cos J = (1-\alpha) \cos g_0$$
$$\sin k \cos K = \cos N' \sin d \qquad \sin g_0 \cos G_0 = \cos N' \qquad i_3 \sin J = \sin g_0 \sin(G_0' + t)$$
$$\cos k = \cos N' \cos d \qquad \cos g_0 = \sin N' \cos d \qquad i_4 = 1/n \sin k \cos(K_0' + t)$$
$$K_0' = K + \Delta a \qquad G_0' = G_0 + \Delta a \qquad i_5 = 1/n (1-\alpha) \cos k$$
$$\log(1-\alpha) = 9·9985$$

$$\sin(\varphi_1 - J) = \frac{\gamma}{i_3} \qquad t - \Delta\lambda = \tau - i_4 \cos\varphi_1 + i_5 \sin\varphi_1.$$

Ist der absolute Werth $\gamma < (1-\alpha) \cos g_0$, so ist t als Argument zu wählen, ist aber $\pm\gamma > (1-\alpha)\cos g_0$, so verläuft die Curve theilweise in der Nähe eines der Erdpole, und auf diesem Stück ist dann φ_1 als Veränderliche zu benutzen und t zu berechnen durch

$$\sin(G_0' + t) = (1-\alpha) \operatorname{cotang} g_0 \operatorname{tang} \varphi_1 - \gamma \operatorname{cosec} g_0 \sec \varphi_1.$$

Für die Beobachter ist es von grosser Wichtigkeit, die Dauer der Totalität für den zur Beobachtung ausgewählten Punkt der Centralen zu kennen. Die Grundgleichungen gehen für die Curve der Centralität durch die oben eingeführten Hilfsgrössen über in

$$u = u' - [(1 - \alpha)\, sin\, \varphi_1\, sin\, d + cos\, \varphi_1\, cos\, d\, cos\, (t + \Delta a)]\, tang f$$
$$u\, sin\, \psi = -\gamma - cos\, \varphi_1\, sin\, g_0\, sin\, (G_0' + t) + (1 - \alpha)\, sin\, \varphi_1\, cos\, g_0$$
$$u\, cos\, \psi = (t - \Delta\lambda - \tau)\, n + cos\, \varphi_1\, sin\, k\, cos\, (K' + t) - (1 - \alpha)\, sin\, \varphi_1\, cos\, k.$$

Setzen wir in die Gleichungen $u = u_i$ ein, so ergeben sie den Anfang und das Ende der Totalität, während sie für $u = 0$ die Zeit der Centralität bestimmen. Durch Subtraction der beiden Gleichungen bestimmt sich also die halbe Dauer der Totalität ϑ, und zwar wird, wenn ϑ in Zeitminuten ausgedrückt ist

$$u_i\, sin\, \psi = cos\, \varphi_1\, sin\, g_0\, cos\, (G_0' + t)\, \frac{\vartheta}{2}\, 15{\cdot}60\, sin\, 1''$$
$$u_i\, cos\, \psi = \left(-\frac{n}{\varkappa} + cos\, \varphi_1\, sin\, k\, sin (K' + t)\right) \frac{\vartheta}{2}\, 15{\cdot}60\, sin\, 1'',$$

also

$$tang\, \psi = -\frac{cos\, \varphi_1\, sin\, g_0\, cos (G_0' + t)}{\frac{n}{\varkappa} - cos\, \varphi_1\, sin\, k\, sin\, (K' + t)}$$
$$\vartheta = \frac{u_i cos\, \psi\, \varkappa'}{cos\, \varphi_1\, sin\, k\, sin\, (K' + t) - \frac{n}{\varkappa}} \qquad \begin{array}{l} log\, \varkappa' = 2{\cdot}6612 \\ log\, \varkappa = 9{\cdot}4180 \end{array}$$
$$u_i = u_i' - [(1 - \alpha)\, sin\, \varphi_1\, sin\, d + cos\, \varphi_1\, cos\, d\, cos\, (t + \Delta a)]\, tang f_i.$$

In der Regel genügt es, $\psi = \pm 90°$ zu setzen.

Zur Ausführung dieser Berechnungen der Sichtbarkeitsverhältnisse einer Sonnenfinsterniss werden in den astronomischen Jahrbüchern jetzt die Hilfsmittel gegeben, und zwar im »Berliner Jahrbuch« in der den Formeln zu Grunde liegenden HANSEN'schen Form, so dass eine unmittelbare Verwendung der Angaben in unseren Formeln möglich ist. Der »Nautical Almanac« und die »Conn. d. Temps« dagegen geben die Elemente in der BESSEL'schen Form, nämlich die rechtwinkligen Coordinaten des Mondes und ihre Aenderungen in der Zeitminute, die Deklination (d) und den Stundenwinkel (μ bezw. H) des Zielpunktes der Kegelaxe, sowie die Radien der Schattenkreise. Um mit diesen Angaben die angegebenen Formeln berechnen zu können, ist noch die Kenntniss von N', n, γ, τ nöthig, wozu die folgenden Formeln führen:

$$n\, sin\, N' = x' \qquad \gamma = y\, sin\, N' - x\, cos\, N'$$
$$n\, cos\, N' = y' \qquad \tau = T - \frac{1}{n}(x\, sin\, N' + y\, cos\, N') + \text{Zeitgleichung (w. Z. — m. Z.)}.$$

Ist nach diesen allgemeinen Vorschriften entschieden, ob und in welcher Weise an einem gegebenen Orte eine Sonnenfinsterniss sichtbar sein wird, so muss für die Beobachtung die Zeit des Eintritts der einzelnen Phasen genauer bestimmt werden. Häufig wird man hierbei nur auf die Sonnen- und Mondtafeln angewiesen sein, denen man die geocentrischen Coordinaten und Parallaxen von Sonne und Mond für die Zeit des Neumondes und die stündlichen Aenderungen entnimmt. Man verfährt dann am einfachsten folgendermaassen. Man berechnet nach den im Artikel »Parallaxe« gegebenen Vorschriften für zweckmässig gewählte Zeitpunkte die scheinbaren Coordinaten und Radien, und leitet aus diesen eine Tafel des Positionswinkels und der Länge Δ' des Bogens grössten Kreises ab, der die Mittelpunkte beider Scheiben verbindet. Durch Interpolation zwischen den Werthen dieser Tafel findet man dann leicht die Zeiten der

äusseren Berührungen, für welche $\Delta' =$ der Summe der scheinbaren Radien, die Zeiten des Anfangs und Endes der Totalität, für welche $\Delta' =$ der Differenz der Radien ist, sowie die übrigen Daten.

In den astronomischen Ephemeriden werden häufig in derselben Weise, wie für die Mondfinsternisse, auch für die Sonnenfinsternisse angegeben die Zeit der Conjunction T_0, die diesem Zeitpunkte entsprechende gemeinsame AR, $\alpha_{\odot} = \alpha_{☾}$ und die Deklination beider Gestirne $\delta_{\odot}$ und $\delta_{☾}$, sowie die stündlichen Bewegungen $\Delta\alpha_{\odot}$, $\Delta\delta_{\odot}$, $\Delta\alpha_{☾}$, $\Delta\delta_{☾}$, die Parallaxen $\pi_{\odot}$ und $\pi_{☾}$ und Radien $r_{\odot}$, $r_{☾}$ Aus diesen können wir die Zeit des Eintritts der Phasen in folgender Weise berechnen. Zunächst ist von den geocentrischen Coordinaten auf die scheinbaren, nach den im Artikel »Parallaxe« gegebenen Vorschriften überzugehen. Statt aber die Parallaxe für die beiden Gestirne getrennt zu berechnen, kann man auch, wie eine leichte Umformung der Reihenentwickelung für die Parallaxenwirkung zeigt, sogleich die relative Parallaxe berechnen, indem man als Coordinaten einführt

$$a = \alpha_{☾} - \frac{\pi_{\odot}}{\pi_{☾} - \pi_{\odot}}(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾}) \quad \text{bezw.} \quad d = \delta_{☾} - \frac{\pi_{\odot}}{\pi_{☾} - \pi_{\odot}}(\delta_{\odot} - \delta_{☾})$$

und als Parallaxe die Differenz der Parallaxen von Mond und Sonne nimmt. Die Rechnung ist also nach folgenden Formeln auszuführen:

$$P_0 = (\pi_{☾} - \pi_{\odot})(1 - \alpha\, sin^2\varphi) \qquad A = \frac{sin\, P_0\, cos\, \varphi'}{cos\, d} \qquad D = \frac{sin\, P_0\, sin\, \varphi'}{sin\, \gamma}$$

$$cotang\, \gamma = cotang\, \varphi' \frac{cos\left(a - \Theta + \frac{\Delta a}{2}\right)}{cos\, \frac{1}{2}\Delta a} \qquad \text{(a)}$$

$$\Delta a = (\alpha'_{☾} - \alpha'_{\odot}) - (\alpha_{☾} - \alpha_{\odot}) = A\frac{sin(a-\Theta)}{sin\, 1''} + \frac{1}{2}A^2\frac{sin\, 2(a-\Theta)}{sin\, 1''} + \ldots$$

$$\Delta d = (\delta'_{☾} - \delta'_{\odot}) - (\delta_{☾} - \delta_{\odot}) = D\frac{sin(d-\gamma)}{sin\, 1''} + \frac{1}{2}D^2\frac{sin\, 2(d-\gamma)}{sin\, 1''} + \ldots$$

$\Theta =$ Ortssternzeit im Augenblick T_0

Bezeichnen wir mit $d\Delta a$ und $d\Delta d$ die stündlichen Aenderungen dieser Parallaxenwirkung, so können wir bei ihrer Berechnung uns auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf P_0 beschränken und $cotang\, \gamma = cotang\, \varphi'\, cos\, (a - \Theta)$ setzen. Für die einer Stunde mittlerer Zeit entsprechende Aenderung des Stundenwinkels des Punktes a, d können wir den mittleren Betrag derselben Grösse für den Mond setzen, welcher ist $= 14°\, 29'{\cdot}5 = 52170''$. Damit wird dann

$$d\Delta a = [9{\cdot}4030]\, P_0\, cos\, \varphi'\, sec\, d\, cos(a - \Theta) \qquad d\Delta d = -[9{\cdot}4030]\, P_0\, cos\, \varphi'\, sin\, d\, sin(a - \Theta).$$

Zu einer beliebigen Zeit $T = T_0 + \tau$ sind also die scheinbaren Entfernungen der Mittelpunkte der beiden Scheiben gegeben durch die Ausdrücke:

$$\delta'_{\odot} = \delta_{\odot} + \Delta d \frac{\pi_{\odot}}{\pi_{☾} - \pi_{\odot}}$$

$$r'_{☾} = r_{☾}\frac{sin\,(d + \Delta d - \gamma)}{sin\,(d - \gamma)} \qquad r'_{\odot} = r_{\odot}\frac{sin(d + \Delta d - \gamma)}{sin\,(d - \gamma)}$$

$$m\, sin\, M = \left(\alpha_{☾} - \alpha_{\odot} + A\frac{sin\,(a - \Theta)}{sin\, 1''} + \frac{1}{2}A^2\frac{sin\, 2\,(a - \Theta)}{sin\, 1''} + \ldots\right) cos\, \delta'_{\odot} \qquad \text{(b)}$$

$$m\, cos\, M = \delta_{☾} - \delta_{\odot} + D\frac{sin(d - \gamma)}{sin\, 1''} + \frac{1}{2}D^2\frac{sin\, 2\,(d - \gamma)}{sin\, 1''} + \ldots$$

$$n\, sin\, N = \{\Delta\alpha_{☾} - \Delta\alpha_{\odot} - [9{\cdot}4030 - 10]\, P_0\, cos\, \varphi'\, sec\, d\, cos\,(a - \Theta)\}\, cos\, \delta'_{\odot}$$

$$n\, cos\, N = \Delta\delta_{☾} - \Delta\delta_{\odot} + [9{\cdot}4030 - 10]\, P_0\, cos\, \varphi'\, sin\, d\, sin(a - \Theta)$$

$$\Delta^2 = (m\, sin\, M + \tau n\, sin\, N)^2 + (m\, cos\, M + \tau n\, cos\, N)^2.$$

Für Anfang und Ende der partiellen Finsterniss muss $\Delta = r'_☾ + r'_\odot$, für Anfang und Ende der Totalität oder Ringförmigkeit $\Delta = \pm (r'_☾ - r'_\odot)$ werden, und es bestimmt sich daher τ durch die Gleichung:

$$\sin\psi = \frac{m}{r'_☾ \pm r'_\odot} \sin(M - N) \qquad (\psi \text{ im 1. oder 4. Quadranten})$$

$$\tau = -\frac{m}{n}\cos(M - N) \mp \frac{r'_\odot \pm r'_☾}{n}\cos\psi = \mp \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N \pm \psi)}{\sin\psi}. \qquad \text{(c)}$$

Damit diese Ausdrücke schon in erster Näherung zu hinreichend genauen Werthen führen, ist es nothwendig, dass wir die Ausdrücke (b) berechnen für einen der Zeit der scheinbaren Conjunction am Beobachtungsorte naheliegenden Zeitpunkt. Sei diese Zeit $T = T_0 + t$, wobei also T_0 die Zeit der geocentrischen Conjunction bedeutet, so haben wir genähert

$$\text{zur Zeit } T_0:\ \alpha'_☾ - \alpha'_\odot = A\frac{\sin(a - \Theta)}{\sin 1''}$$

$$\text{„ „ } T:\ \alpha'_☾ - \alpha'_\odot = A\frac{\sin(a - \Theta)}{\sin 1''} + t\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_☾ - \Delta\alpha_\odot \\ -[9{\cdot}4030 - 10]P_0 \cos\varphi' \sec d \cos(a - \Theta) \end{Bmatrix}$$

und da zur Zeit T $\alpha'_☾ - \alpha'_\odot = 0$ sein soll, so folgt

$$T = T_0 - \frac{60 \cdot \sin(a - \Theta)}{(\Delta\alpha_☾ - \Delta\alpha_\odot)\dfrac{\cos d}{P_0 \cos\varphi'} - [9{\cdot}4030 - 10]\cos(a - \Theta)} \text{ Zeitminuten.} \qquad \text{(d)}$$

Die Ausdrücke (a) bis (d) ergeben die Zeit der Berührungen. Zur Bestimmung der Zeit der grössten Phase haben wir den Ausdruck für Δ^2 zu differentiiren und dann die Bedingung $d\Delta = 0$ zu stellen. Es ergiebt sich:

$$\text{Zeit der grössten Phase } T_0 + t^* \qquad t^* = -\frac{m}{n}\cos(M - N).$$

Als Näherungswerth für t^* können wir ausgehen vom Mittel der 1. und 4. oder der 2. und 3. Berührung oder auch vom Werthe T nach (d). Durch Einsetzen des Werthes t^* in den Ausdruck für Δ^2 erhalten wir für den Augenblick der grössten Phase

$$\Delta^* = \pm m \sin(M - N)$$

oder in Zollen ausgedrückt

$$\text{Grösste Phase} = 12\frac{r'_\odot + r'_☾ - \Delta^*}{2r'_\odot}.$$

Zur Berechnung des Positionswinkels der Berührungsstelle im Mittelpunkte der Sonnenscheibe haben wir

$$\operatorname{tang} Q = \frac{m \sin M + \tau n \sin N}{m \cos M + \tau n \cos N}.$$

Da $\cos\psi$ stets positiv ist, entspricht dem Eintritte der Werth

$$\tau = -\frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi},$$

dem Austritte aber der Werth

$$\tau = +\frac{m}{n}\frac{\sin(M - N - \psi)}{\sin\psi}.$$

Führen wir diese Ausdrücke für τ ein, so erhalten wir durch Umformung für den Eintritt

$$\operatorname{tang} Q = -\frac{\sin(\psi - N)}{\cos(\psi - N)} = \operatorname{tang}[180° - (\psi - N)],$$

dagegen für den Austritt

$$tang\, Q = \frac{sin\,(\psi + N)}{cos\,(\psi + N)} = tang\,(\psi + N);$$

folglich:

$$\text{Eintritt} \quad Q_1 = 180° + N - \psi$$
$$\text{Austritt} \quad Q_2 = N + \psi.$$

Beispiel: Berechnung der 4. Berührung bei der Sonnenfinsterniss 1898 Januar 21 für Berlin.

Der »Nautical Almanac« giebt die folgenden für die Zeit der Conjunction in AR geltenden Angaben:

$$T_0 = \text{Januar 21. } 19^h\, 37^m{\cdot}45 \text{ M. Z. Gr.:}$$

$\alpha_{☾} = \alpha_{\odot} = 20^h\, 18^m\, 32^s{\cdot}86$	$\Delta\alpha_{☾} = 36'\, 56''{\cdot}0$	$\Delta\delta_{☾} = +\, 11'\, 34''{\cdot}0$
$\delta_{☾} = -\, 19°\;\; 6'\, 26''{\cdot}9$	$\Delta\alpha_{\odot} = \;\; 2\;\; 37{\cdot}8$	$\Delta\delta_{\odot} = +\;\; 34{\cdot}5$
$\delta_{\odot} = -\, 19\;\; 38\;\; 39{\cdot}9$	$\pi_{☾} = 60'\, 11''{\cdot}65$	$\pi_{\odot} = \;\; 8''{\cdot}99$
	$r_{☾} = 16'\, 24''{\cdot}30$	$r_{\odot} = 16'\, 14''{\cdot}83.$

Für Berlin haben wir $\varphi' = 52°\, 19'{\cdot}15$ $log\, \rho = log\,(1 - \alpha\, sin^2 \varphi) = 9{\cdot}9991$, $\Delta\lambda = +\, 53^m\, 34^s{\cdot}91$. Mit der Sternzeit im mittleren Gr. Mittage $= 20^h\, 3^m{\cdot}49$ ergiebt sich zunächst die zu T_0 gehörige Sternzeit Berlin $\theta = 16^h\, 37^m{\cdot}74$, also $a - \theta = 3^h\, 40^m{\cdot}81$; ferner ist $d = -\, 19°\, 6'{\cdot}37$, $P_0 = 59'{\cdot}92$.

$\Delta\alpha_{☾} - \Delta\alpha_{\odot} =$	$34'{\cdot}30$			$log\, 60$	$1{\cdot}7782$	$T_0\; 19^h 37^m{\cdot}45$ M.Z.Gr.
	$1{\cdot}5353$			$log\, sin(a-\theta)$	$9{\cdot}9143$	$-1\;\; 6{\cdot}52$
$log\, cos\, d$	$9{\cdot}9754$				$1{\cdot}6925$	$T = 18^h\, 30{\cdot}93$
$log\, \frac{1}{P_0}$	$8{\cdot}2224$	$log\, cos(a-\theta)$	$9{\cdot}7564$	log 1) − 2)	$9{\cdot}8696$	
				$log\, \Delta T_0$	$1{\cdot}8229$	
$log\, sec\, \varphi'$	$0{\cdot}2138$		$9{\cdot}4030$			
1)	$9{\cdot}9469$	2)	$9{\cdot}1594$			

Für den Näherungswerth $18^h\, 31^m{\cdot}45$ M. Z. Gr. $= 15^h\, 31^m{\cdot}56$ St.-Z. Berlin finden wir

$$\alpha_{☾} = 303°\, 57'{\cdot}59 \qquad \alpha_{\odot} = 304°\, 35'{\cdot}32 \qquad \alpha_{☾} - \alpha_{\odot} = -\, 37'{\cdot}73$$
$$a = 303°\, 57'{\cdot}50 \qquad a - \theta = 71°\, 4'{\cdot}10$$
$$\delta_{☾} = -\, 19°\, 19'{\cdot}17 \quad \delta_{\odot} = -\, 19°\, 39'{\cdot}30 \quad \delta_{☾} - \delta_{\odot} = +\, 20'{\cdot}13 \quad d = -\, 19°\, 19'{\cdot}12.$$

$log\, sin\, P_0$	$8{\cdot}2413$	$a - \theta + \frac{1}{2}\Delta a$	$71°\, 22'{\cdot}53$	$log\, D$	$8{\cdot}1525$
$log\, cos\, \varphi'$	$9{\cdot}7862$	$log\, cotang\, \varphi'$	$9{\cdot}8878$	$log\, sin(d-\gamma)$	$9{\cdot}9980_n$
$log\, sec\, d$	$0{\cdot}0252$	$log\, cos\left(a - \theta + \frac{\Delta a}{2}\right)$	$9{\cdot}5042$	$log\, cosec\, 1'$	$3{\cdot}5363$
$log\, A$	$8{\cdot}0527$				$1{\cdot}6868_n$
$log\, sin(a-\theta)$	$9{\cdot}9759$	$log\, sec\, \frac{1}{2}\Delta a$	$0{\cdot}0000$	$log\, \frac{1}{2} D^2$	$6{\cdot}0040$
$log\, cosec\, 1'$	$3{\cdot}5363$	$log\, cotang\, \gamma$	$9{\cdot}3920$	$log\, sin\, 2(d-\gamma)$	$9{\cdot}2791$
	$1{\cdot}5649$	γ	$76°\, 8'{\cdot}9$	$log\, cosec\, 1'$	$3{\cdot}5363$
$log\, \frac{1}{2} A^2$	$5{\cdot}8044$	$d - \gamma$	$-95°\, 28'{\cdot}0$		$8{\cdot}8194$
$log\, sin\, 2(a-\theta)$	$9{\cdot}7880$	$log\, sin\, P_0$	$8{\cdot}2413$		$-48'{\cdot}62$
$log\, cosec\, 1'$	$3{\cdot}5363$	$log\, sin\, \varphi'$	$9{\cdot}8984$		$+\; 0{\cdot}07$
	$9{\cdot}1287$	$log\, cosec\, \gamma$	$0{\cdot}0128$	Δd	$-48{\cdot}55$
	$+36'{\cdot}72$	$log\, D$	$8{\cdot}1525$	$\delta_{☾} - \delta_{\odot}$	$+20{\cdot}13$
	$+\; 0\, 13$				$-28{\cdot}42$
Δa	$+36{\cdot}85$				
$\alpha_{☾} - \alpha_{\odot} =$	$-37{\cdot}73$			$\delta'_{\odot}$	$= -19°\, 39'{\cdot}37$
	$-\;\; 0{\cdot}88$			$log\, cos\, \delta'_{\odot}$	$9{\cdot}9739$

$log\ P_0$	1·7776	$log\ m\ sin\ M$	$9·9184_n$	$M - N$	107° 6'·4
$log\ cos\ \varphi'$	9·7862	$log\ m\ cos\ M$	$1·4536_n$	$log\ sin(M - N)$	9·9803
	9·4030	$log\ cos\ M$	$9·9998_n$	$log\ m$	1·4538
1)	0·9668			$compl\ log(r'_☾ + r'_☉)$	8·4866
2) $log\ sec\ d$	0·0252	$log\ n\ sin\ N$	1·4668	$log\ sin\ \psi$	9·9207
3) $log\ cos(a - \theta)$	9·5111	$log\ n\ cos\ N$	0·9079	ψ	56°25'·0
4) $log\ sin\ d$	$9·5196_n$	$log\ sin\ N$	9·9841	$M - N - \psi$	50° 41'·4
5) $log\ sin(a - \theta)$	9·9759	M	181°40'·3	$log\ sin(M - N - \psi)$	9·8886
1) + 2) + 3)	0·5031	N	74 33·9	$log\ cosec\ \psi$	0·0793
1) + 4) + 5)	$0·4623_n$	$log\ m$	1·4538	$log\ \frac{m}{n}$	9·9711
$\Delta\alpha_☾ - \Delta\alpha_☉$	+34'·30	$log\ n$	1·4827		9·9390
	− 3·19	$log(r_☾ + r_☉)$	1·5139		0·8690
$n\ sin N\ sec\ \delta_☉$	+31·11	$log\ sin(d + \Delta d - \gamma)$	$9·9975_n$		$+ 52^m·14$
$\Delta\delta_☾ - \Delta\delta_☉$	+10·99	$log\ cosec\ (d - \gamma)$	$0·0020_n$		18^h 31·45
	− 2·90		1·5134		19 23·59 M.Z.G.
$n\ cos N$	+ 8·09				$= 20^h\ 17^m·2$ M.Z.B.

Es ergiebt sich demnach die Zeit der letzten Berührung $= 20^h\ 17^m·2$ M. Z. Berlin, der Positionswinkel der Berührungsstelle $N + \psi = 131°$. Wir dürften uns in diesem Falle mit der ersten Näherung nicht begnügen, denn die Berührung erfolgt, wenn die Sonne erst eben über dem Horizont ist — zur Zeit der grössten Phase ist die Sonne noch nicht aufgegangen. Der genaue Werth ist $T = 20^h\ 19^m·5$.

Eine wesentlich einfachere Darstellung der Formeln ergiebt die Bessel'sche Theorie. Die Ephemeriden geben in neuerer Zeit die Werthe der Coordinaten x, y, ihre Aenderungen x', y' entsprechend einer Zeitminute und die Grössen u' und f'; die Deklination d und den Stundenwinkel μ (H in der Conn. d. T.) des Zielpunktes der Kegelaxe. Wir sind dadurch in der Lage, die auf pag. 764 aufgestellte Bedingungsgleichung aufzulösen. Die Coordinaten des Beobachtungsortes und ihre Aenderungen in der Zeitminute ergeben sich durch die Formeln (vergl. pag. 765)

$$A\ sin\ B = \rho\ sin\ \varphi' \qquad \xi = \rho\ cos\ \varphi'\ sin\ (\mu + \Delta\lambda) \qquad \frac{d\xi}{dt} = [7·63992]\ A\ cos\ B$$

$$A\ cos\ B = \rho\ cos\ \varphi'\ cos\ (\mu + \Delta\lambda) \qquad \eta = A\ sin\ (B - d)$$

$$\zeta = A\ cos\ (B - d) \qquad \frac{d\eta}{dt} = [7·63992]\ \xi\ sin\ d$$

Die Auflösung ist dann durch folgende Ausdrücke gegeben, wenn T_0 die Zeit ist, für welche die Grössen x_0, y_0 etc. gelten

$$m\ sin M = x_0 - \xi \qquad n_1\ sin N_1 = x' - \frac{d\xi}{dt} \qquad u = u' - \zeta\ tang\ f$$

$$m\ cos\ M = y_0 - \eta \qquad n_1\ cos\ N_1 = y' - \frac{d\eta}{dt} \qquad sin \psi = \frac{m\ sin\ (M - N_1)}{u}$$

(ψ im 1. oder 4. Quadranten)

$$T = T_0 + \Delta\lambda \mp \frac{m}{n_1} \frac{sin\ (M - N \pm \psi)}{sin\ \psi}$$

(oberes Zeichen beim Eintritt, unteres beim Austritt)

Zeit der grössten Phase $T = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n} cos\ (M - N_1)$

Grösse der Finsterniss in Zollen $= 12\ \frac{u_a - u^*}{u_a - u_i}$

$u^* = \pm\ m\ sin\ (M - N_1)$ (stets positiv)

Positonswinkel der Berührungsstelle

Eintritt $Q = 180° + N_1 - \psi$

Austritt $\quad = N_1 + \psi$.

Als Ausgangswerth der Zeit können wir wieder die nach (d) pag. 791 berechnete Zeit der scheinbaren Conjunction benutzen oder einen solchen aus dem Verlaufe der Grenzcurven der Finsterniss entnehmen. Die Rechnung ist durch wiederholte Näherung zu führen, wenn man möglichst genaue Resultate verlangt. Bei der letzten Näherung können die ξ und η corrigirt werden wegen Refraction und Höhe des Beobachtungsortes nach pag. 769. Führen wir zur Erläuterung dieser Formeln nach denselben die zweite Näherung für das vorige Beispiel durch, so haben wir dem »Nautical Almanac« die Werthe der Hilfsgrössen für $T_0 = 19^h\,24^m$ m. Z. Gr. zu entnehmen.

$x_0 =$	$-0{\cdot}12103$	$x' =$	$+0{\cdot}008995$	$\log \sin d =$	$9{\cdot}52664_n$
$y_0 =$	$+0{\cdot}49547$	$y' =$	$+0{\cdot}003053$	$\log \cos d =$	$9{\cdot}97395$
$\mu =$	$288°\,2'{\cdot}5$	$u_a' =$	$0{\cdot}54378$	$\log tang f_a =$	$7{\cdot}67667.$

Für Berlin ist

$\Delta\lambda = +53^m\,34^s{\cdot}91 = +13°\,23'{\cdot}7$; $\quad \log \rho \sin \varphi' = 9{\cdot}89750$; $\quad \log \rho \cos \varphi'$ $9{\cdot}78532$

$\mu + \Delta\lambda$	$301°\,26'2$	$\log \xi$	$9{\cdot}71638_n$
$\log \sin (\mu + \Delta\lambda)$	$9{\cdot}93106_n$	Corr.	$+5$
$\log \rho \cos \varphi'$	$9{\cdot}78532$	$\log \eta$	9.92980
$\log \cos (\mu + \Delta\lambda)$	$9{\cdot}71730$	Corr.	$+5$
$\log \rho \sin \varphi'$	$9{\cdot}89750$	$\log \zeta$	$8{\cdot}53238$
$\log \rho \cos \varphi' \cos (\mu + \Delta\lambda)$	$9{\cdot}50262$	ξ^2	$0{\cdot}27087$
$\log tang B$	$0{\cdot}39488$	η_2	72377
$\log \sin B$	$9{\cdot}96735$	ζ_2	116
B	$68°\,3'{\cdot}5$		$0{\cdot}99580$
d	$-19\;\;38{\cdot}9$		$= \rho^2$
$B - d$	$87\;\;42{\cdot}4$	$\zeta \, tang f$	$+\;0\;00017$
$\log \sin (B - d)$	$9{\cdot}99965$	u_a	$0{\cdot}54361$
$\log A$	$9{\cdot}93015$	$\log u_a$	$9{\cdot}73529$
$\log \cos (B - d)$	$8{\cdot}60223$	$\log \xi \sin d$	$9{\cdot}24302$
$\log A \cos B$	$9{\cdot}50263$		$7{\cdot}63992$
	$7{\cdot}63992$	$\log d\eta$	$6{\cdot}88294$
$\log d\xi$	$7{\cdot}14255$		

x_0	$-0{\cdot}12103$	y_0	$+0{\cdot}49547$	x'	$+0{\cdot}008995$	y'	$+0{\cdot}003053$
ξ	$-0{\cdot}52051$	η	$+0{\cdot}85083$	$d\xi$	$+0{\cdot}001389$	$d\eta$	$+0{\cdot}000764$
	$+0{\cdot}39948$		$-0{\cdot}35536$		$+0{\cdot}007606$		$+0{\cdot}002289$

$\log m \sin M$	$9{\cdot}60150$	$M - N_1$	$58°\,24'{\cdot}2$
$\log m \cos M$	$9{\cdot}55067_n$	$\log \sin (M - N_1)$	$9{\cdot}93032$
$\log \sin M$	$9{\cdot}87342$	$\log m$	$9{\cdot}72808$
		$\log 1/u$	$0{\cdot}26471$
$\log n_1 \sin N_1$	$7{\cdot}88116$	$\log \sin \psi$	$9{\cdot}92311$
$\log n_1 \cos N_1$	$7{\cdot}35965$	ψ	$56°\,54'{\cdot}1$
$\log \sin N_1$	$9{\cdot}98117$	$M - N_1 - \psi$	$1\;\;30{\cdot}1$
		$\log \sin (M - N_1 - \psi)$	$8{\cdot}41840$
M	$131°\,39'{\cdot}3$	$\log cosec \psi$	$0{\cdot}07689$
N_1	$73\;\;\;15{\cdot}1$	$\log \frac{m}{n}$	$1{\cdot}82809$
$\log m$	$9{\cdot}72808$		
$og\, n$	$7{\cdot}89999$		$0{\cdot}32338$

T_0	$19^h\;24^m{\cdot}0$ m. Z. Gr.
ΔT	$+2{\cdot}11$
T	$19\;\;26{\cdot}11$ m. Z. Gr.
	$= 20\;\;19{\cdot}69$ m. Z. Berlin
$Q =$	$130°\,9'{\cdot}2.$

Zur Controlle der Rechnung benutzt man die Relationen:

$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$ und $(x_0 - \xi - \Delta T n \sin N)^2 + (y_0 - \eta - \Delta T n \cos N)^2 = u^2$.

Das »Berliner Jahrbuch« setzt die Anwendung der HANSEN'schen Grundgleichungen voraus. Derselben Methode aber hat man sich auch zu bedienen bei der Untersuchung historischer Finsternisse auf Grund ekliptischer Tafeln oder der »Syzygientafeln« oder des »Canon der Finsternisse«. Zur Ableitung der Formeln gehen wir aus von jenem Gleichungssystem, welches wir pag. 788 aufgestellt haben, vernachlässigen aber die Strahlenbrechung und die Grössen Δa und Δd, dann sind die Gleichungen:

$$\sin g \sin G = \sin \delta_\odot \sin N' \qquad \sin k \sin K = \sin N' \qquad \psi = p - N'$$
$$\sin g \cos G = \cos N' \qquad \sin k \cos K = \sin \delta_\odot \cos N' \qquad \xi = \cos \varphi_1 = \rho \cos \varphi'$$
$$\cos g = \cos \delta_\odot \sin N' \qquad \cos k = \cos \delta_\odot \cos N' \qquad \eta = (1 - \alpha) \sin \varphi_1 = \rho \sin \varphi'$$

$$u = u' - (\eta \sin \delta_\odot + \xi \cos \delta_\odot \cos t) \operatorname{tang} f$$
$$u \sin \psi = -\gamma + \eta \cos g - \xi \sin g \sin (G + t)$$
$$u \cos \psi = (t - \Delta\lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + t)$$

t = wahre Ortszeit bei der Beobachtung
μ = wahre Zeit des Ephemeridenortes für die grösste Phase, beides ausgedrückt in Graden.

Zerlegen wir nun $G + t$ zu $(G + t_0) + (t - t_0)$ so erhalten wir die Ausdrücke

$$\sin (G + t) = \sin (G + t_0) + \varkappa' \cos [G + \tfrac{1}{2}(t + t_0)] \frac{t - t_0}{15}$$
$$\cos (G + t) = \cos (G + t_0) - \varkappa' \sin [G + \tfrac{1}{2}(t + t_0)] \frac{t - t_0}{15}$$
$$\varkappa' = \frac{15 \sin \frac{1}{2}(t - t_0)}{\frac{1}{2}(t - t_0)}.$$

Damit erhalten wir folgendes Formelsystem für eine beliebige Ausgangszeit t_0:

$$u_1 = u' - (\eta \sin \delta_\odot + \xi \cos \delta_\odot \cos t_0) \operatorname{tang} f$$
$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + t_0)$$
$$m \cos M = (t_0 - \Delta\lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + t_0)$$
$$m' \sin M' = -\varkappa' \xi \sin g \cos [G + \tfrac{1}{2}(t + t_0)$$
$$m' \cos M' = n - \varkappa' \xi \sin k \sin [K + \tfrac{1}{2}(t + t_0)]$$
$$u = u_1 + \xi \varkappa' \cos \delta_\odot \operatorname{tang} f \sin \tfrac{1}{2}(t + t_0) \frac{t - t_0}{15}$$
$$u \sin \psi = -m \sin M + m' \sin M' \frac{t - t_0}{15}$$
$$u \cos \psi = m \cos M + m' \cos M' \frac{t - t_0}{15}.$$

Daraus ergiebt sich folgende Lösung

$$\sin (M' - \psi) = \frac{m}{u} \sin (M + M')$$

Eintritt $M' - \psi$ im 2. oder 3. Quadranten } wenn u positiv, bei negativen
Austritt „ 1. „ 4. „ } u umgekehrt

$$t = t_0 + 15 \frac{u}{m'} \cos (M' - \psi) - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M') \qquad u = m \frac{\sin (M + M')}{\sin (M' - \psi)}$$
$$= t_0 + 15 \frac{m}{m'} \frac{\sin (M + \psi)}{\sin (M' - \psi)}.$$

Das »Berliner Jahrbuch« giebt die Hilfsgrössen für fünf verschiedene Zeitpunkte; bei einer Vorausberechnung genügt es, wenn wir diejenigen Werthe benützen, die der Mitte der Finsterniss am nächsten liegen. Handelt es sich um die genaue Darstellung von Beobachtungen, so sind bei den aufeinanderfolgenden Näherungen bei der Berechnung von t stets die dieser Zeit entsprechenden

Werthe der Hilfsgrössen zu benützen. Die ekliptischen Tafeln geben die Hilfsgrössen für die Zeit der geocentrischen Conjunction.

Als bequemen Näherungswerth von t_0 benützen wir die Zeit des kürzesten Abstandes und haben dann folgende Formeln zu berechnen:

$$\xi = \rho \cos \varphi' \qquad \eta = \rho \sin \varphi' \qquad \tau = \mu + \Delta\lambda$$

1. Näherung

$$u_1 = u' - (\eta \sin \delta_{\odot} + \xi \cos \delta_{\odot} \cos \tau) \operatorname{tang} f$$

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + \tau)$$

$$m \cos M = - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + \tau)$$

$$m_1' \sin M_1' = - [9{\cdot}41797 - 10]\, \xi \sin g \cos (G + \tau)$$

$$m_1' \cos M_1' = n - [9{\cdot}41797 - 10]\, \xi \sin k \sin (K + \tau)$$

$$\sin (M_1' - \psi_1) = \frac{m}{u_1} \sin (M + M_1')$$

Eintritt $\cos (M_1' - \psi_1)$ negativ[1]
Austritt positiv

$$t_1 = \tau + 15 \frac{m}{m_1'} \frac{\sin (M + \psi_1)}{\sin (M_1' - \psi_1)}$$

2. Näherung

m und M wie in der ersten Näherung

$$u = u_1 + \varkappa' \xi \cos \delta_{\odot} \operatorname{tang} f \sin \tfrac{1}{2} (t_1 + \tau) \frac{t - \tau}{15}$$

$$m_2' \sin M_2' = - \varkappa' \xi \sin g \cos [G + \tfrac{1}{2} (t_1 + \tau)]$$

$$m_2' \cos M_2' = n - \varkappa' \xi \sin k \sin [K + \tfrac{1}{2} (t_1 + \tau)]$$

$$\sin (M_2' - \psi_2) = \frac{m}{u} \sin (M + M_2') \quad \text{(Quadrant wie vorhin)}$$

$$t_2 = \tau + 15 \frac{m}{m_2'} \frac{\sin (M + \psi_2)}{\sin (M'_2 - \psi_2)}\,.$$

Diese zweite Näherung wird in der Regel genügen.

Hat man den genauen Werth für t ermittelt, so giebt der zugehörige Werth von ψ durch die Relation $p = \psi + N'$ den Positionswinkel p des Schnittpunktes der Kegelaxe im Auge des Beobachters, d. i. den Positionswinkel der Verbindungslinie Sonnenmittelpunkt — Mondmittelpunkt, bei partiellen und ringförmigen Finsternissen; dagegen ist p der Positionswinkel der Linie Mondmittelpunkt — Sonnenmittelpunkt bei totalen Finsternissen. Es ist hiernach

für äussere Berührungen und innere Berührungen bei totalen Finsternissen Positionswinkel $p = \psi + N'$,

für innere Berührungen bei ringförmigen Finsternissen Positionswinkel $= \psi + N' + 180°$.

Für die Anwendung der Formeln bedürfen wir noch eine Tafel der Grösse $\varkappa'$; eine solche giebt HANSEN auf pag. 413 seiner »Theorie der Sonnenfinsternisse«. Sie ist folgende:

Tafel für $\log \varkappa'$ Argument $t - \tau$

0°	9·41797	10°	9·41742	20°	9·41576	30°	9·41300	40°	9·40912
1	796	11	730	21	553	31	266	41	867
2	795	12	717	22	530	32	231	42	820
3	792	13	704	23	505	33	195	43	773
4	788	14	689	24	479	34	158	44	725
5	783	15	673	25	452	35	119	45	675
6	777	16	656	26	424	36	080	46	624
7	770	17	637	27	395	37	41040	47	572
8	761	18	618	28	364	38	40998	48	519
9	752	19	598	29	332	39	956	49	465
10	742	20	576	30	300	40	912	50	410

[1]) Bei negativen Werthen von u ist beim Eintritt $\cos (M_1' - \psi_1)$ positiv, beim Austritt negativ.

Die Ausdrücke $m' \sin M'$ und $m' \cos M'$ sind, wenn wir $t - \tau$ verschwinden lassen, die Differentiale der Ausdrücke von $u \sin \psi$ und $u \cos \psi$, folglich ist die Gleichung $m' \sin M' \sin \psi + m' \cos M' \cos \psi = 0$ der Ausdruck der Bedingung $du = 0$, also die Gleichung der grössten Phase. Da m' nicht allgemein 0 sein kann, so ist also im Augenblicke der grössten Phase $\cos(M' - \psi) = 0$.

Zur Bestimmung der Zeit der grössten Phase können wir also dieselben Formeln benutzen wie vorhin mit den Bedingungen $t - \tau = 0$ und $\cos(M' - \psi) = 0$ und die fortgesetzten Näherungen müssen führen auf die Gleichung $t = \tau$, das heisst das Glied $15 \frac{m}{m'} \cos(M + M')$ im Ausdrucke für t muss gegen 0 convergiren und im Augenblicke der grössten Phase muss $\cos(M + M') = 0$ sein. In dem allgemeinen Ausdrucke $u = m \frac{\sin(M + M')}{\sin(M' - \psi)}$ ist also für die grösste Phase $\sin(M + M')$ und $\sin(M' - \psi) = \pm 1$ und es wird $u = m$. Wir haben hiernach folgendes Formelsystem zur Berechnung der grössten Phase:

Ausgangswerth $\tau = \mu + \Delta\lambda$ oder besser τ = Mittel der Zeiten der beiden äusseren Berührungen

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin(G + \tau)$$

$$m \cos M = (\tau - \Delta\lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(K + \tau)$$

$$m' \sin M' = -[9{\cdot}41797 - 10]\, \xi \sin g \cos(G + \tau)$$

$$m' \cos M' = n - [9{\cdot}41797 - 10]\, \xi \sin k \sin(K + \tau)$$

Zeit der grössten Phase $t^* = \tau - 15 \frac{m}{m'} \cos(M + M')$

Grösste Phase u^* = dem Endwerth von m

„ „ in Zollen $12 \frac{u_a' - m}{u_a' - u_i'}$.

Bei den folgenden Näherungen ist für τ der Werth t^* der voraufgehenden Näherung zu setzen.

Zur Erläuterung der Rechnungsvorschriften möge die Berechnung einer antiken Finsterniss dienen. Die als »Finterniss des Ennius« bekannte wird gelegt auf — 399 Juni 21. Der OPPOLZER'sche »Canon der Finsternisse« giebt die folgenden Werthe der Rechnungselemente, denen die GINZEL'schen Correctionen, deren Bedeutung später erklärt wird, beigefügt sind:

	u_a'	$\log \tang f$	μ	γ	$\log n$	G	K
Canon	0·5353	7·6628	85°·75	0·6504	9·7586	69°·82	86°·63
Corr. GINZEL	— 3	0	—1·98	— 24 — 8	+ 6	— 1	0
	0·5350	7·6628	83·77	0·6472	9·7592	69·81	86·63

	$\log \sin g$	$\log \sin k$	$\log \cos g$	$\log \cos k$	$\log \sin \delta_\odot$	$\log \cos \delta_\odot$
Canon	9·6252	9·9961	9·9574	9·1250	9·6024	9·9621
Corr. GINZEL	0	0	0	0	0	0

Für Rom ist $\Delta\lambda = 12°{\cdot}45$ östl. v. Gr. $\log \eta = \log \rho \sin \varphi' = 9{\cdot}8224$

$$\log \xi = \log \rho \cos \varphi' = 9{\cdot}8724.$$

Anfang der Finsterniss.

Erste Näherung $\tau = \mu + \Delta\lambda = 96^\circ{\cdot}22$

$G + \tau = 166^\circ{\cdot}03; \quad K + \tau = 182^\circ{\cdot}85.$

$log\, \varkappa'$	9·4180
$log\, cos\, (G + \tau)$	9·9870$_n$
$log\, \xi\, sin\, g$	9·4976
$log\, sin\, (G + \tau)$	9·3828
γ	+ 0·6472
$- \eta\, cos\, g$	— 0·6023
$+ \xi\, sin\, g\, sin\, (G + \tau)$	+ 0·0759
$m\, sin\, M$	+ 0·1208
$log\, \varkappa'$	9·4180
$log\, sin\, (K + \tau)$	8·6965$_n$
$log\, \xi\, sin\, k$	9·8685
$log\, cos\, (K + \tau)$	9·9995$_n$
$- \eta\, cos\, k$	— 0·0886
$+ \xi\, sin\, k\, cos\, (K + \tau)$	— 0·7379
$m\, cos\, M$	— 0·8265
$log\, m\, sin\, M$	9·0821
$log\, m\, cos\, M$	9·9172$_n$
M	171°·68
$log\, m$	9·9218
$log\, n$	9·7592
$log\, \varkappa'\, \xi\, sin\, k\, sin\, (K + \tau)$	7·9830$_n$
$log\, D = log\, m'\, cos\, M'$	9·7664
$log\, m'\, sin\, M'$	8·9026
	9·1362
M_1'	7°·79
$log\, m_1'$	9·7704
$M + M_1'$	179°·47

$log\, \xi\, cos\, \delta_\odot$	9·8345
$log\, cos\, \tau$	9·0348$_n$
	8·8693$_n$
$log\, \eta\, sin\, \delta_\odot$	9·4248
$log\, S$	9·2832
$log\, tang\, f$	7·6628
	0·0009
u_a'	0·5350
u_1	0·5341
$log\, u_1$	9·7276
$log\, \frac{m}{u_1}$	0·1942
$log\, sin\, (M + M_1')$	7·9660
	8·1602
$M_1' - \psi_1$	179°·17
ψ_1	188·62
$M + \psi_1$	0·30
$log\, 15$	1·1761
$log\, \frac{m}{m_1'}$	0·1514
$log\, sin\, (M + \psi_1)$	7·7190
$log\, cosec\, (M_1' - \psi_1)$	1·8398
	0·8863
$t_1 - \tau$	+ 7°·68
τ	96·22
t_1	103·90

Zweite Näherung.

$t_1 - \tau =$	7°·68
$\tau_1 = \frac{1}{2}(t_1 + \tau) =$	100°·06
$G + \tau_1 =$	169°·87
$K + \tau_1 =$	186°·69
$log\, \varkappa'$	9·4176
$log\, cos\, (G + \tau_1)$	9·9932$_n$
$log\, \xi\, sin\, g$	9·4976
$log\, m_2'\, sin\, M_2'$	8·9084
$log\, \varkappa'$	9·4176
$log\, sin\, (K + \tau_1)$	9·0664$_n$
$log\, \xi\, sin\, k$	9·8685
	8·3525$_n$
$log\, n$	9·7592
$log\, m_2'\, cos\, M_2'$	9·7759
M_2'	7°·73
$log\, m_2'$	9·7799
$M_2' + M$	179°·41

$log\, \varkappa'$	9·4176
$log\, \xi\, cos\, \delta_\odot$	9·8345
$log\, tang\, f$	7·6628
$log\, sin\, \tau_1$	9·9933
$log\, \frac{t_1 - \tau}{15}$	9·7093
	6·6175
	+ 0·0004
u_1	0·5341
u	0·5345
$log\, u$	9·7279

$log\, \frac{m}{u}$	0·1939
$log\, sin\, (M_2' + M)$	8·0127
	8·2066
$M_2' - \psi_2$	179·08
ψ_2	188°·65
$M + \psi_2$	0·33
$log\, 15$	1·1761
$log\, \frac{m}{m_2'}$	0·1419
$log\, sin\, (M + \psi_2)$	7·7604
$log\, cosec\, (M_1' - \psi_2)$	1·7934
	0·8718
$t_2 - \tau$	+ 7°·44
τ	96·22
t_2	103°·66

Grösste Phase.

Erste Näherung $\tau = \mu + \Delta\lambda = 96^\circ{\cdot}22$ giebt wie vorhin $M + M' = 179^\circ{\cdot}47$

$$log\, m = 9{\cdot}9218 \quad log\, m_1' = 9{\cdot}7704$$

und damit

$log\ 15$	1·1761
$log\ \frac{m}{m_1'}$	0·1514
$log\ cos (M + M_1')$	$0{\cdot}0000_n$
	$1{\cdot}3275_n$
	— 21·25
τ	96·22
t^*_1	117°·47.

Zweite Näherung $\tau = 117^\circ{\cdot}47$; $G + \tau = 187^\circ{\cdot}28$ $K + \tau = 204^\circ{\cdot}10$.

	9·4180
$log cos (G + \tau)$	$9{\cdot}9965_n$
$log\, \xi\, sin\, g$	9·4976
$log\ sin\ (G + \tau)$	$9{\cdot}1028_n$
$\xi\, sin g sin (G + \tau)$	— 0·0398
$\gamma - \eta\, cos\, g$	+ 0·0449
$m\, sin\, M$	+ 0·0051
$log\ m\ sin\ M$	7·7076
$log\ m\ cos\ M$	8·7050
M	5°·74
$log\ m$	8·7072
$log\ 15$	1·1761
$log\ \frac{m}{m'}$	8·8887
$log\ cos\ (M + M')$	9·9890
	0·0538
$t^*_2 - \tau$	— 1°·13
τ	117·47
t^*_2	116·34

	9·4180
$log\ sin\ (K + \tau)$	$9{\cdot}6110_n$
$log\, \xi\, sin\, k$	9·8685
$log\ cos\ (K + \tau)$	$9{\cdot}9604_n$
$\xi\, sin k\ cos\ (K + \tau)$	— 0·6743
$- \eta\, cos\, k$	— 0·0886
$(t_1^* - \tau)\frac{n}{15}$	+ 0·8136
$m\ cos\ M$	+ 0·0507
$log\ n$	9·7592
$log\, \varkappa\, \xi\, sin\, k\, sin\, (K + \tau)$	8·8975
$log\ D = log\ m' cos\ M'$	9·8151
$log\ m'\ sin\ M'$	8·9121
M'	7°·13
$log\ m'$	9·8185
$M + M'$	= 12°·87

$t_1^* - \tau$	21·25
$log\ \frac{1}{15}(t_1^* - \tau)$	0·1512
$log\ n$	9·7592
	9·9104

Grösste Phase

m	= 0·0114
u_a'	= 0·5350
u_i'	= 0·0123
$log\ 12$	1·0792
$log (u_a' - m)$	9·7190
	0·7982
$log (u' - u_i')$	9·7183
	0·0799
	12·02 Zoll

Eine weitere Näherung für die Zeit der grössten Phase führt auf die Endwerthe $log\, m = 8{\cdot}0555$, $t^* = 116^\circ{\cdot}34$; damit ist oben die grösste Phase berechnet, indem nach den Annahmen des Canon $u_i' = 0{\cdot}5473 - u_a'$ gesetzt wurde.

Resultate: Anfang der Finsterniss — 399 Juni 21 $6^h\ 54^m{\cdot}6$ w. Z. Rom. Grösste Phase $7^h\ 45^m{\cdot}4$ w. Z. Rom. Grösse der Phase 12·02 Zoll.

Die Beobachtung der Sonnenfinsternisse bietet ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung der Coordinaten des Mondes zur Zeit des Neumondes, wo direkte Beobachtungen ja unmöglich sind; sie wird weiter benutzt zur Bestimmung der Längendifferenzen. Die Beobachtung kann bestehen aus der Bestimmung der Berührungszeiten oder aus der Bestimmung der relativen Lage der beiden Scheiben während der Finsterniss.

Die Beobachtung der Berührungen ist grossen systematischen Fehlern unterworfen, welche daraus entstehen, dass der scheinbare Radius der Sonnenscheibe für verschiedene Beobachter und verschiedene Fernrohre verschieden ist. Ausser-

dem ist eine scharfe Auffassung des Momentes, in welchem die dunkle Mondscheibe beginnt oder aufhört aus der Sonnenscheibe ein Segment herauszuschneiden, nahezu unmöglich. Die beobachtete Zeit des Eintritts wird immer später, die des Austritts immer früher liegen als die wahren Berührungszeiten, der Abstand aber wird abhängig sein von der Güte der Bilder während der Beobachtung und von der Uebung des Beobachters Man ist daher gezwungen, bei der Verwerthung solcher Beobachtungen sich auf möglichst gleichartige zu beschränken und den Sonnenradius aus den Beobachtungen selbst abzuleiten. In der Regel wird man die Eintritts- und die Austrittsbeobachtungen für sich behandeln müssen. Um eine grössere Sicherheit zu erzielen, hat man auf TACCHINI's Vorschlag versucht, die Beobachtung der Berührungen mit dem Spectroskop auszuführen und das Verschwinden bezw. Wiedererscheinen der Chromosphären-Linie als Moment der Berührung aufzufassen. Solche Beobachtungen sind in den letzten Jahren namentlich von italienischen Astronomen ausgeführt; sie sind aber noch zu wenig zahlreich, um ein Urtheil zu gestatten.

Für die Aufstellung der Bedingungsgleichungen eignet sich am besten die BESSEL'sche Theorie. Die Elemente sind zu berechnen nach den Ausdrücken auf pag. 765. Die Formeln zur Berechnung der Berührungszeiten finden sich auf pag. 793. Es treten nur, weil wir für ξ und η sofort die wahren Werthe berechnen können, statt n_1 und N_1 die früheren Gleichungen auf, $n \sin N = x'$, $n \cos N = y'$. Bestimmen wir den Hilfswinkel ψ durch

$$u \sin\psi = m \sin(M - N)$$

und setzen jetzt zur Vermeidung des doppelten Zeichens fest, dass ψ beim Eintritt im 1. oder 4., beim Austritt im 2. oder 3. Quadranten liegen soll, so ist die Zeit der Berührung

$$T = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}.$$

Ist also θ_m die beobachtete mittlere Ortszeit der Berührung, so sind zunächst mit der zugehörigen Ortssternzeit θ die Ausdrücke ξ, η, ζ zu berechnen. Betrachten wir nun die Coordinaten und die Entfernung des Mondes als mit Fehlern behaftet, nehmen diese Fehler aber während der Dauer der Finsterniss als constant an, so ist N unveränderlich. Nennen wir also dM, dm, dn, du, $d\psi$ die Correctionen der veränderlichen Grössen, so lautet die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}\theta_m = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} - \frac{du\cos\psi}{n} + \frac{u}{n}\sin\psi\, d\psi \\ + \frac{m}{n}\sin(M - N)\, dM - \frac{dm}{n}\cos(M - N) - (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\frac{dn}{n}\end{aligned} \quad (*)$$

Die Definitionsgleichung für ψ ergiebt aber

$$\frac{u}{n}\sin\psi\, d\psi = \frac{m}{n}\cos(M - N)\operatorname{tang}\psi\, dM + \frac{dm}{n}\sin(M - N)\operatorname{tang}\psi - \frac{1}{n}\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}du$$

und damit wird

$$\begin{aligned}\theta_m = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} - \frac{du}{n}\sec\psi + \frac{m}{n}\sin(M - N + \psi)\sec\psi\, dM \\ - \frac{1}{n}\cos(M - N + \psi)\sec\psi\, dm - (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\frac{dn}{n}.\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen

$$m \sin M = x_0 - \xi \qquad m \cos M = y_0 - \eta$$

folgt

$$m\,dM = \cos M\,dx - \sin M\,dy,\quad dm = \sin M\,dx + \cos M\,dy$$

$$\theta_m = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} - \frac{du}{n}\sec\psi - \frac{dx}{n}\sin(N-\psi)\sec\psi$$
$$- \frac{dy}{n}\cos(N-\psi)\sec\psi - (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\frac{dn}{n}.$$

Bei der Ableitung der Differentiale dx, dy, du, dn können wir die strengen Ausdrücke von pag. 765 ersetzen durch genäherte. Die Grössen x und y gehen in derselben Weise, wie es auf pag. 766 für die auf die Ekliptik bezogenen Ausdrücke gezeigt ist, über in die genähert geltenden

$$x = \frac{\cos\delta_☾ \sin(\alpha_☾ - \alpha_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sin(\beta_☾ - \beta_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}.$$

Im Ausdruck von u bleibt das kleine Glied $\zeta\,tang\,f$ unberücksichtigt und u' ist zu ersetzen durch $\frac{1}{\sin\pi_☾}\,tang\,f + k$. Es ist weiter

$$tang\,f = \sin f = \frac{\pm\sin\pi_☾ \sin r_\odot + \sin r_☾ \sin\pi_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}$$

und damit wird

$$u' = \frac{1}{\sin\pi_☾}\left(\frac{\pm\sin\pi_☾\sin r_\odot + \sin r_☾\sin\pi_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} + \sin r_☾\right) = \frac{\sin r_☾ \pm \sin r_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}.$$

Durch Differentiation dieser Ausdrücke erhalten wir

$$dx = \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\cos\delta_☾\, d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) - x_0\, cotang(\pi_☾ - \pi_\odot)\, d(\pi_☾ - \pi_\odot)$$
$$dy = \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\, d(\beta_☾ - \beta_\odot) \qquad - y_0\, cotang(\pi_☾ - \pi_\odot)\, d(\pi_☾ - \pi_\odot)$$
$$du = \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}(dr_☾ \pm dr_\odot) \qquad - \frac{\sin r_☾ \pm \sin r_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\, cotang(\pi_☾ - \pi_\odot)\, d(\pi_☾ - \pi_\odot)$$

Endlich ist

$$dn = dx'\sin N + dy'\cos N = d^2x\sin N + d^2y\cos N$$
$$= -\,cotang(\pi_☾ - \pi_\odot)\,(dx\sin N + dy\cos N)\,d(\pi_☾ - \pi_\odot)$$
$$= -\,n\,cotang(\pi_☾ - \pi_\odot)\,d(\pi_☾ - \pi_\odot).$$

Die Zeiteinheit ist die Stunde mittlerer Zeit; soll also $\Delta\lambda$ in Zeitsecunden sich ergeben, so müssen wir den Faktor 3600 hinzufügen und

$$\theta^m - T_0 + \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}$$

gleichfalls in Zeitsecunden ausgedrückt annehmen. Die Differentiale $d\alpha$, $d\delta$, dr, $d\pi$ multipliciren wir mit $\sin 1''$, damit sie Bogensecunden bedeuten. Die Bedingungsgleichung lautet dann:

$$\varkappa = \frac{3600\sin 1''}{n\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}$$
$r_☾$, $r_\odot$ geocentrische Radien im Augenblick der Beobachtung

$$p = \varkappa\cos\delta_☾\sin(N-\psi)\sec\psi$$
u positiv: ψ für Eintritt 1. od. 4., für Austritt 2. od. 3. Quadr.

$$q = \varkappa\cos(N-\psi)\sec\psi$$
u negativ: „ „ 2. „ 3., „ 1. „ 4. „

$$r = \varkappa\sec\psi$$
x, y, Coordinaten im Augenblick der Beobachtung

$$s = \varkappa\sec\psi\cos(\pi_☾ - \pi_\odot)\left\{\begin{matrix} x_0\sin(N-\psi) + y_0\cos(N-\psi) \\ + (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\,n\cos\psi + \end{matrix}\ \frac{\sin r_☾ \pm \sin r_\odot}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\right\}$$

$$\theta_m - T_0 + \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}$$
$$= \Delta\lambda - p\,d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) - q\,d(\delta_☾ - \delta_\odot) - r(dr_☾ \pm dr_\odot) + s\,d(\pi_☾ - \pi_\odot)$$

Die Formeln zur Berechnung der Elemente und der Hilfsgrössen finden sich auf pag. 795 und 793.

Zur Berechnung des Coëfficienten s müssten wir $\Delta\lambda$ schon kennen. Man wird daher bei einer ersten Berechnung die Correction der Parallaxen unberücksichtigt lassen, wenn man $\Delta\lambda$ bestimmen will, und die Abhängigkeit des $\Delta\lambda$ von $d(\pi_{☾} - \pi_{\odot})$ erst in einer zweiten Ausgleichung berücksichtigen. Zur Erleichterung kann man den Coëfficienten s noch umformen durch Einführung der kürzesten Distanz γ und der Zeit τ derselben. Es ist:

$$x_0 \sin(N - \psi) + y_0 \cos(N - \psi)$$
$$= (-x_0 \cos N + y_0 \sin N) \sin\psi$$
$$+ (x_0 \sin N + y_0 \cos N) \cos\psi$$
$$= \gamma \sin\psi + (T_0 - \tau) n \cos\psi,$$

so dass wir erhalten:

$$s = \varkappa \cos(\pi_{☾} - \pi_{\odot})[\gamma \tang\psi + (\theta_m - \Delta\lambda - \tau) n + u' \sec\psi].$$

Die Formeln bleiben auch gültig, wenn die Beobachtung einer bestimmten Phase vorliegt. Man hat dann nur für $r_{\odot}$ und u die der Phase entsprechenden Werthe zu setzen.

Bei dem jetzigen Stande der Theorien der beiden in Frage kommenden Himmelskörper ist der Fehler der Parallaxen jedenfalls sehr klein im Vergleich zu den Fehlern der Coordinaten, und die Finsternissbeobachtungen können zur Bestimmung desselben kaum einen wesentlichen Beitrag liefern. Sie werden daher auch nur verwandt zur Bestimmung der Correctionen der Radien und der Coordinaten, wenn die Länge bekannt ist oder umgekehrt zur Bestimmung der Länge als Function der Correction der Coordinaten. Die Genauigkeit der Beobachtung der Berührung ist nun abhängig vom Positionswinkel der Berührungsstelle, also vom Winkel ψ. Die Beobachtung ist am sichersten bei centralem Vorübergange, für welchen $\psi = 0$ ist, und wird um so unsicherer, je näher ψ dem Werthe $\pm 90°$ kommt. Sollen also Beobachtungen von verschiedenen Orten oder Beobachtungen verschiedener Finsternisse mit einander verbunden werden, so ist auf diesen Gewichtsunterschied Rücksicht zu nehmen. Es ist aber, wenn wir unter $\Delta'\lambda$ die wahre Längendifferenz verstehen,

$$\theta_m - \Delta'\lambda - T_0 + \frac{m}{n} \frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}$$

die Zeit zwischen der beobachteten und der berechneten Berührung, andererseits ist n die stündliche lineare, $\frac{n}{3600} \frac{\sin(\pi_{☾} - \pi_{\odot})}{\sin 1''}$ die relative angulare Bewegung in einer Zeitsecunde der beiden Himmelskörper. Demnach ist

$$\frac{1}{\varkappa}\left(\theta_m - \Delta'\lambda - T_0 + \frac{m}{n} \frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}\right)$$

der Weg des Mondes gegen die Sonne in der zwischen der beobachteten und berechneten Berührung liegenden Zeit und, da ψ der Positionswinkel der Centralen gegen die Bewegungsrichtung ist,

$$\frac{1}{\varkappa}\left(\theta_m - \Delta'\lambda - T_0 + \frac{m}{n} \frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}\right) \cos\psi$$

der Abstand der beiden Ränder im Augenblick der berechneten Berührung. Die Beobachtung dieser Distanz wird nun durch die Beobachtungsfehler stets in gleicher Weise beeinflusst; wir erhalten also gleichwerthige Bedingungsgleichungen durch den Ausdruck

$$\frac{1}{r}\left(\theta_m - T_0 + \frac{m}{n}\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi}\right)$$
$$= \frac{1}{r}\Delta\lambda - \frac{p}{r}d(\alpha_☾ - \alpha_☉) - \frac{q}{r}d(\delta_☾ - \delta_☉) - (\Delta r_☾ \pm \Delta r_☉) + \frac{s}{r}d(\pi_☾ - \pi_☉).$$

Da die Beobachtung der äusseren Berührungen bei Sonnenfinsternissen mit verhältnissmässig grossen Fehlern behaftet ist, die Beobachtung der inneren Berührungen nur in einer eng begrenzten Zone auf der Erdoberfläche möglich ist, beschränkt man sich nicht auf die Wahrnehmung dieser Berührungen, sondern sucht auch in der zwischen ihnen liegenden Zeit die gegenseitige Stellung von Mond und Sonne durch die Beobachtung zu bestimmen. Man beobachtet dazu die gegenseitige Lage der beiden Hörner des durch den Eingriff des Mondes erzeugten Ausschnitts, indem man entweder mittels des Heliometers den Abstand dieser Hörner und den Positionswinkel ihrer Verbindungslinie bestimmt, oder indem man am Fadenmikrometer die Differenz der Rectascension und Deklination der Spitzen beobachtet. Statt der direkten Beobachtung kann man natürlich die erforderlichen Angaben auch aus den während des Verlaufs der Erscheinung angefertigten Photographien entnehmen.

Die Formeln für die Ausgleichung der Messungen von Positionswinkel und Distanz der Hörnerspitzen sind von WICHMANN, Astr. Nachrichten No. 787, abgeleitet. Nennen wir den Abstand der Mittelpunkte der beiden Scheiben σ, die Positionswinkel im Sonnen- und Mondmittelpunkte $p_☉$ bezw. $p_☾$, so ergeben die GAUSS'schen Gleichungen die strengen Ausdrücke

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(p_☉ + p_☾) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'_☉ - \alpha'_☾)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'_☉ + \delta'_☾)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(p_☉ + p_☾) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'_☉ - \alpha'_☾)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'_☉ - \delta'_☾).$$

An ihre Stelle können wir mit stets ausreichender Genauigkeit die Näherungswerthe setzen

$$x = \sigma \sin\tfrac{1}{2}(p_☉ + p_☾) = (\alpha'_☉ - \alpha'_☾)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'_☉ + \delta'_☾)$$
$$y = \sigma \cos\tfrac{1}{2}(p_☉ + p_☾) = \delta'_☉ - \delta'_☾.$$

Nennen wir n und N die Winkel, unter welchen die halbe gemeinsame Sehne im Mond- bezw. Sonnenmittelpunkte erscheint, und s die Länge der gemeinsamen Sehne, so ist

$$\sin n = \frac{s}{2r'_☾}, \qquad \sin N = \frac{s}{2r'_☉}, \qquad \sigma = r'_☉ \cos N + r'_☾ \cos n.$$

Die Winkel n bezw. N sind für das grössere Gestirn stets spitz, für das kleinere sind sie spitz vom Anfange der Finsterniss bis zu dem Augenblicke, in welchem die gemeinsame Sehne gleich dem Durchmesser des kleineren Gestirnes ist, bleiben stumpf, bis die Sehne diesen Werth zum zweiten Male annimmt, und sind später wieder spitz.

Aus den Gleichungen

$$r'^2_☉ = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r'_☉ \cos N)^2 \quad \text{und} \quad r'^2_☾ = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r'_☾ \cos n)^2$$

ergiebt sich noch

$$(r'_☉ + r'_☾)(r'_☉ - r'_☾) = \sigma(r'_☉ \cos N - r'_☾ \cos n).$$

Durch Differentiation der Ausdrücke

$$s = 2r'_☾ \sin n \quad \text{und} \quad r'^2_☉ = \sigma^2 + r'^2_☾ - 2r'_☾\sigma\cos n$$

erhalten wir

$$\sigma r'_{☾} \sin n\, dn = r'_{⊙} dr_{⊙} + (\sigma \cos n - r'_{☾}) dr_{☾} + (r'_{☾} \cos n - \sigma) d\sigma$$

$$ds = 2r'_{☾} \cos n\, dn + 2 \sin n\, dr_{☾}$$

$$= \frac{2r'_{⊙}}{\sigma} \operatorname{cotang} n\, dr_{⊙} + 2\frac{\sigma - r'_{☾} \cos n}{\sigma \sin n} dr_{☾} + 2\frac{r'_{☾} \cos n - \sigma}{\sigma} \operatorname{cotang} n\, d\sigma$$

$$= \frac{2r'_{⊙}}{\sigma} \operatorname{cotang} n\, dr_{⊙} + 2\frac{r'_{☾}}{\sigma} \operatorname{cotang} N\, dr_{☾} - 2\frac{r'_{⊙}}{\sigma} \cos N \operatorname{cotang} n\, d\sigma.$$

Nennen wir den Positionswinkel in der Mitte der Centralen p_0, so ist strenge

$$\tfrac{1}{2}(p_{⊙} + p_{☾}) = p_0 + \frac{\sigma^2}{16} \sin 2p_0 \sin 1'' \left[1 + 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾})\right]$$

$$p_{☾} - p_{⊙} = \sigma \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾}) \sin p_0.$$

Den extremen Werthen $\sigma = 32'$ und $\frac{1}{2}(\delta_{⊙} + \delta_{☾}) = 24°$ entspricht

$$\tfrac{1}{2}(p_{⊙} + p_{☾}) - p_0 = 1''{\cdot}4 \sin 2p_0.$$

Diese Differenz verschwindet also hier vollständig. Da nun der Abstand des Schnittpunktes der gemeinsamen Sehne und der Centralen vom Mittelpunkte der Centralen

$$= \frac{\sigma}{2} - r_{☾} \cos n = \tfrac{1}{2}(r_{⊙} \cos N - r_{☾} \cos n)$$

ist, ist der Positionswinkel der Centralen in diesem Punkte $= \frac{1}{2}(p_{⊙} + p_{☾}) + \frac{1}{2}(r_{⊙} \cos N - r_{☾} \cos n) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾}) \sin p_0$. Der Positionswinkel der gemeinsamen Sehne unterscheidet sich hiervon um 90°. Bei der Bestimmung der Abhängigkeit des beobachteten Positionswinkels von den Fehlern der angenommenen Coordinaten können wir die an $\frac{1}{2}(p_{⊙} + p_{☾})$ anzubringende Reduction als streng ansehen, weil sie nur wenige Bogensecunden betragen kann. Es ist also $\Delta p = \frac{\Delta x \cos p_0 - \Delta y \sin p_0}{\sigma}$. Die beobachteten Werthe s der Sehnenlänge und p des Positionswinkels führen also zu folgenden Bedingungsgleichungen

$$\sigma \sin p_0 = (\alpha'_{⊙} - \alpha'_{☾}) \cos \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾}) \qquad \sigma \cos p_0 = \delta'_{⊙} - \delta'_{☾}$$

$$\sigma = r'_{⊙} \cos N + r'_{☾} \cos n$$

$$\frac{(r'_{⊙} + r'_{☾})(r'_{⊙} - r'_{☾})}{\sigma} = r'_{⊙} \cos N - r'_{☾} \cos n$$

$$s_0 = 2r'_{☾} \sin n = 2r'_{⊙} \sin N$$

$$s = s_0 + 2\frac{r'_{⊙}}{\sigma} \operatorname{cotang} n\, dr_{⊙} + 2\frac{r'_{☾}}{\sigma} \operatorname{cotang} N\, dr_{☾}$$

$$- 2\frac{r'_{⊙}}{\sigma} \cos N \operatorname{cotang} n \sin p_0 \cos \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾})\, d(\alpha_{⊙} - \alpha_{☾})$$

$$- 2\frac{r'_{⊙}}{\sigma} \cos N \operatorname{cotang} n \cos p_0\, d(\delta_{⊙} - \delta_{☾})$$

$$p = p_0 - 90° + \tfrac{1}{2}(r'_{⊙} \cos N - r'_{☾} \cos n) \sin p_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾})$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \sin 1' \cos p_0 \cos \tfrac{1}{2}(\delta'_{⊙} + \delta'_{☾})\, d(\alpha_{⊙} - \alpha_{☾})$$

$$- \frac{1}{\sigma} \sin 1' \sin p_0\, d(\delta_{⊙} - \delta_{☾}).$$

Dabei ist angenommen, dass die Correctionen sämmtlich in Bogensecunden ausgedrückt sind. Benutzt man zur Beobachtung ein Heliometer, so hat man in die Bedingungsgleichungen noch Glieder aufzunehmen, welche auf die persönlichen Einstellungsfehler und auf die Distanz der Objectivhälften Rücksicht nehmen. Man vergleiche darüber die citirte Arbeit von WICHMANN, sowie eine neuere von AUWERS A. N. 2669.

Man kann die Beobachtungen auch in anderer Weise verwenden, wenn wir analog früheren Untersuchungen die Erscheinung auffassen als eine Berührung des Mondes mit einer verkleinerten Sonnenscheibe. Wir können dann die für äussere Berührungen aufgestellte Bedingungsgleichung anwenden, wenn wir nur für den Sonnenradius den verkleinerten Werth einführen. Sei derselbe $\mathfrak{r}'_{\odot}$, so ist offenbar

$$\pm\, \mathfrak{r}'_{\odot} = \sigma - r'_{☾} = r'_{\odot}\cos N - r'_{☾}(1 - \cos n).$$

Mit diesem Werth ist zu rechnen

$$\sin f_1 = \pm\frac{\sin\mathfrak{r}'_{\odot} \pm k\sin 8''\!\cdot\!85}{R(1-\mu)} \qquad \mathfrak{u}' = z\,\mathrm{tang} f_1 + k\sec f_1$$

und im Uebrigen sind die früheren Ausdrücke von pag. 765, 793 und 801 zu benutzen. Bei $\sin f_1$ gilt das obere Zeichen bis zu dem Augenblick, in welchem die Phase = 6 Zoll ist, später das untere.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichung für Rectascensions- oder Deklinationsdifferenzen der Hörnerspitzen seien a, d die scheinbaren Coordinaten einer derselben. Im Uebrigen gelten dieselben Bezeichnungen wie vorhin. Wir finden zunächst die Länge der Centralen und ihren Positionswinkel im Sonnenmittelpunkte durch

$$\sin\sigma\sin p_{\odot} = \cos\delta'_{☾}\sin(\alpha'_{☾} - \alpha'_{\odot})$$
$$\sin\sigma\cos p_{\odot} = \sin(\delta'_{☾} - \delta'_{\odot}) + 2\cos\delta'_{☾}\sin\delta'_{\odot}\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha'_{☾} - \alpha'_{\odot}).$$

Berechnen wir dann die Winkel N und n wie im vorhergehenden Falle, so haben wir auch für die Hörnerspitzen

$$\sin r'_{\odot}\sin(p_{\odot} \pm N) = \cos d\sin(a - \alpha'_{\odot})$$
$$\sin r'_{\odot}\cos(p_{\odot} \pm N) = \sin(d - \delta'_{\odot}) + 2\cos d\sin\delta'_{\odot}\sin^2\tfrac{1}{2}(a - \alpha'_{\odot}).$$

Um nach diesen Formeln a und d zu finden, haben wir zunächst in der letzten Gleichung das kleine Correctionsglied unberücksichtigt zu lassen und Näherungswerthe a_1, d_1 zu berechnen, mit diesen ist dann die Rechnung unter Mitnahme jenes Gliedes zu wiederholen. Zwei analog gebildete Gleichungen gelten auch für den Mondmittelpunkt. Durch Quadriren und Addiren der beiden Gleichungssysteme, wobei das Correctionsglied fortfällt, da es höchstens Glieder dritter Ordnung ergiebt, wird

$$\sin^2 r'_{\odot} = \sin^2(\alpha'_{\odot} - a)\cos^2 d + \sin^2(\delta'_{\odot} - d)$$
$$\sin^2 r'_{☾} = \sin^2(\alpha'_{☾} - a)\cos^2 d + \sin^2(\delta'_{☾} - d)$$

und hieraus durch Differentiation

$$\sin r'_{\odot}\,dr_{\odot} = \sin(\alpha'_{\odot} - a)\cos^2 d\,d(\alpha_{\odot} - a) + \sin(\delta'_{\odot} - d)\,d(\delta_{\odot} - d)$$
$$\sin r'_{☾}\,dr_{☾} = \sin(\alpha'_{☾} - a)\cos^2 d\,d(\alpha_{☾} - a) + \sin(\delta'_{☾} - d)\,d(\delta'_{☾} - d)$$
$$(\alpha'_{\odot} - a)\cos^2 d\,da + (\delta'_{\odot} - d)\,dd = (\alpha'_{\odot} - a)\cos^2 d\,d\alpha_{\odot} + (\delta'_{\odot} - d)\,d\delta_{\odot} - r'_{\odot}\,dr_{\odot}$$
$$(\alpha'_{☾} - a)\cos^2 d\,da + (\delta'_{☾} - d)\,dd = (\alpha'_{☾} - a)\cos^2 d\,d\alpha_{☾} + (\delta'_{☾} - d)\,d\delta_{☾} - r'_{☾}\,dr_{☾}.$$

Aus diesen Gleichungen sind da und dd zu eliminiren. Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist also nach folgenden Vorschriften auszuführen:

$$\sigma\sin p_{\odot} = (\alpha'_{☾} - \alpha'_{\odot})\cos\delta'_{☾}$$
$$\sigma\cos p_{\odot} = (\delta'_{☾} - \delta'_{\odot}) + \tfrac{1}{2}\sin\delta'_{\odot}\cos\delta'_{☾}(\alpha'_{\odot} - \alpha'_{☾})^2\sin 1''$$
$$\sigma = r'_{\odot}\cos N + r'_{☾}\cos n \qquad \frac{(r'_{\odot} + r'_{☾})(r'_{\odot} - r'_{☾})}{\sigma} = r'_{\odot}\cos N - r'_{☾}\cos n$$

$$\left.\begin{aligned} r'_{\odot}\sin(p_{\odot} \pm N) &= (a - \alpha'_{\odot})\cos d \\ r'_{\odot}\cos(p_{\odot} \pm N) &= (d - \delta'_{\odot}) + \tfrac{1}{2}\sin\delta'_{\odot}\cos d(\alpha'_{\odot} - a)^2\sin 1'' \end{aligned}\right\}$$

{oberes Zeichen entspricht der einen, unteres der anderen Hörnerspitze.}

$$p = \frac{\delta'_{☾} - d}{\alpha'_{☾} - a} \qquad q = \frac{\delta'_{\odot} - d}{\alpha'_{\odot} - a} \qquad s = \frac{p}{p - q}$$

$$u = \frac{1}{p - q} \frac{r'_{\odot}}{\alpha'_{\odot} - a} \qquad v = \frac{1}{p - q} \frac{r'_{☾}}{\alpha'_{☾} - a}$$

$$da = (s - 1) d(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾}) + d\alpha_{\odot} + q s \sec^2 d d(\delta_{\odot} - \delta_{☾}) - p u \sec^2 d dr_{\odot} + q v \sec^2 d dr_{☾}$$

$$dd = -\frac{\cos^2 d}{p - q} d(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾}) + d\delta_{\odot} - s d(\delta_{\odot} - \delta_{☾}) + u dr_{\odot} - v dr_{☾}.$$

Bei der Anwendung rechnet man am besten mit den scheinbaren Coordinaten von Sonne und Mond eine Ephemeride für die Coordinaten jeder der Hörnerspitzen und ebenso Tafeln der Werthe p, q, r, s, u, v. Man interpolirt dann aus diesen Tabellen für die Beobachtungszeit des vorangehenden und die des nachfolgenden Hornes in jeder Beobachtung die Werthe der Coordinaten und der Coëfficienten und erhält die Bedingungsgleichung durch die Differenzen beider Einzelausdrücke.

Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die beiden zuletzt besprochenen Beobachtungen ist nicht Rücksicht genommen auf eine Correction der Parallaxen, weil sich die Beobachtungen zur Ermittelung derselben nicht eignen. Ebenso ist eine Correction der Länge nicht eingeführt, weil man solche Beobachtungen in der Regel nur auf festen Sternwarten ausführen wird. Sollen diese Correctionen indess eingeführt werden, so hat man, wie im Artikel »Parallaxe« ausführlicher dargelegt wird, wenn unter α, δ die geocentrischen, unter α', δ' die scheinbaren Coordinaten verstanden werden und $\Delta(\alpha_{☾} - \alpha_{\odot})$ die stündliche Aenderung der Coordinatendifferenz bezeichnet, an die Stelle von $d(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾})$ bezw. $d(\delta_{\odot} - \delta_{☾})$ zu setzen

$$d(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾}) + \frac{1}{3600} \Delta(\alpha_{\odot} - \alpha_{☾}) d\lambda + [(\alpha'_{\odot} - \alpha'_{☾}) - (\alpha_{\odot} - \alpha_{☾})] \frac{d(\pi_{☾} - \pi_{\odot})}{\pi_{☾} - \pi_{\odot}}$$

$$d(\delta_{\odot} - \delta_{☾}) + \frac{1}{3600} \Delta(\delta_{\odot} - \delta_{☾}) d\lambda + [\delta'_{\odot} - \delta'_{☾}) - (\delta_{\odot} - \delta_{☾})] \frac{d(\pi_{☾} - \pi_{\odot})}{\pi_{☾} - \pi_{\odot}}.$$

Sternbedeckungen und Planetenbedeckungen.

Diejenige Zone des Himmels, innerhalb deren geocentrische Bedeckungen von Sternen durch den Mond erfolgen können, ist begrenzt durch zwei Parallelkreise zur Ekliptik, die der grössten Breite des Nord- bezw. Südrandes des Mondes entsprechen. Wegen der Wirkung der Parallaxe rücken diese Grenzen, wenn wir einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche ins Auge fassen, noch um den Betrag der Horizontalparallaxe weiter. Um den äussersten Bereich der Zone der Sternbedeckungen zu erhalten, haben wir die Maximalwerthe der drei Grössen zu addiren: $5° 21' 46'' + 16' 45' + 1° 1' 24'' = 6° 39' 55''$. Es können also alle Sterne, deren Breite $\gtreqless 6° 39' 55''$ ist, vom Monde bedeckt werden. Da der Knoten der Mondbahn, während eines siderischen Umlaufs des Mondes, um $1° 26'$ rückwärts sich bewegt, können Bedeckungen eines bestimmten Sternes in der Nähe der Ekliptik nur in Zwischenräumen von $9\frac{1}{3}$ Jahren — eines halben Umlaufs des Mondknotens — sich ereignen. Bei Sternen an der Grenze der Zone dagegen folgen mehrere Bedeckungen in aufeinander folgenden Lunationen, dann tritt eine Pause von etwa 19 Jahren ein.

Die Formeln für die Berechnung der Sternbedeckungen ergeben sich als ein Specialfall der Formeln für Sonnenfinsternisse; wir haben den Mittelpunkt des verfinsterten Gestirnes nur in unendliche Ferne rücken, seine Parallaxe also $= 0$, und ebenso seinen Radius $= 0$ werden zu lassen. Die beiden Schattenkegel gehen dadurch über in einen einzigen Cylinder, dessen Axe zielt auf den seleno-

centrischen Ort des Sternes, welcher mit dem geocentrischen zusammenfällt, und dessen Radius gleich ist dem linearen Radius des Mondes k.

Bei der Berechnung verwendet man fast ausschliesslich äquatoreale Coordinaten, nur für weit zurückliegende Zeiten kann die Anwendung ekliptikaler Coordinaten von Vortheil sein. Wenden wir also die angegebenen Vereinfachungen an zunächst auf die BESSEL'schen Grundgleichungen, so erhalten wir folgendes System: θ = Ortssternzeit, $\alpha_{☾}$, $\delta_{☾}$, $\pi_{☾}$, α_*, δ_* geocentrische Coordinaten von Mond und Stern.

$$x = \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \cos \delta_{☾} \sin(\alpha_{☾} - \alpha_*)$$

$$y = \frac{1}{\sin \pi_{☾}} \left[\sin(\delta_{☾} - \delta_*) \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_{☾} - \alpha_*) + \sin(\delta_{☾} + \delta_*) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_{☾} - \alpha_*)\right]$$

$$\xi = \rho(1 + x) \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha_*)$$

$$\eta = \rho(1 + x)\left[\sin \varphi' \cos \delta_* - \cos \varphi' \sin \delta_* \cos(\theta - \alpha_*)\right]$$

$$k^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

oder auch, wenn P der Positionswinkel des Mondmittelpunktes vom Stern aus gesehen ist,

$$k \sin P = (x - \xi) \qquad k \cos P = (y - \eta).$$

Für die Anwendung zur Vorausberechnung berechnet man die Werthe x, y, ξ und η für einen bestimmten Zeitpunkt, wozu am bequemsten der Augenblick der wahren Conjunction von Mond und Stern dient. Mit den für denselben Zeitpunkt berechneten stündlichen Aenderungen findet man dann die einem beliebigen Zeitpunkte entsprechenden Werthe. Als Zeiteinheit dient die Stunde mittlerer Zeit; das in den Differentialen von ξ und η vorkommende Differential $\frac{d\theta}{dt}$ entspricht daher dem Verhältniss der Sternzeit zur mittleren Zeit, und es ist $\log \frac{d\theta}{dt} = 0{\cdot}00119$. Um es aber auf die lineare Einheit zu reduciren, tritt noch der Faktor $15 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \sin 1'' = N \log 9{\cdot}41797$ hinzu. Bei Vorausberechnungen können wir die Refraction vernachlässigen und ausserdem die Sinus der kleinen Bögen mit den Bögen selbst vertauschen. Unter Beibehaltung der in den Ephemeridensammlungen allgemein üblichen BESSEL'schen Bezeichnungen erhalten wir demnach folgendes Formelsystem:

$\Delta\alpha_{☾}$, $\Delta\delta_{☾}$ Aenderungen der Coordinaten des Mondes in 1^h m. Z. $\log \lambda = 9{\cdot}41916$

$$p = \frac{\alpha_{☾} - \alpha_*}{\pi_{☾}} \cos \delta_{☾} \qquad q = \frac{\delta_{☾} - \delta_*}{\pi_{☾}} \qquad p' = \frac{\cos \delta_{☾}}{\pi_{☾}} \Delta\alpha_{☾} \qquad q' = \frac{1}{\pi_{☾}} \Delta\delta_{☾}$$

$$u = \rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha_*) \qquad v = \rho\left[\sin \varphi' \cos \delta_* - \cos \varphi' \sin \delta_* \cos(\theta - \alpha_*)\right]$$

$$u' = \lambda \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha_*) \qquad v' = \lambda \rho \cos \varphi' \sin \delta_* \sin(\theta - \alpha_*)$$

$$p - u = m \sin M \qquad p' - u' = n \sin N$$

$$q - v = m \cos M \qquad q' - v' = n \cos N$$

$$k^2 = (m \sin M + t\, n \sin N)^2 + (m \cos M + t\, n \cos N)^2$$

$$\sin \psi = \frac{m}{k}(\sin M - N) \qquad (\psi \text{ 1. oder 4. Quadrant}) \qquad \log k = 9{\cdot}43543.$$

Mittlere Ortszeit der Berührung:

$$T = T_0 + \Delta\lambda - \frac{m}{n} \cos(M - N) \mp \frac{k}{n} \cos \psi.$$

Fällt T_0, die mittlere Zeit des Ephemeridenortes, für welche die Elemente gelten, zusammen mit der Zeit der wahren Conjunction, so ist $p = 0$. θ ist die T_0 entsprechende Sternzeit des Beobachtungsortes. Zur Erlangung hinreichend genauer Werthe für T ist eine mehrfache Näherung auszuführen. Mit den der

Ephemeride entnommenen Werthen der Elemente führt eine erste Näherung, wenn $\cos\psi < 1$ bleibt, auf zwei Werthe des T, von denen der kleinere dem Eintritt, der grössere dem Austritt zugehört; sie seien T_i und T_e. Bleibt in der ersten Näherung $\sin\psi > 1$, so rechnet man mit dem einzigen $\psi = 90°$ entsprechenden Werthe T weiter. Für die zweite Näherung setzt man

$$p_1 = p + (T_i - \Delta\lambda - T_0)\,p' \qquad q_1 = q + (T_i - \Delta\lambda - T_0)\,q'$$

und rechnet mit dem zu T_i gehörigen Werthe θ_i neue Werthe von u, v, u', v'; worauf dieselbe Rechnung wie vorhin zu verbesserten Werthen für den Eintritt und in analoger Weise für den Austritt führt. Bleibt auch in der zweiten und in etwaigen weiteren Näherungen $\sin\psi > 1$, so findet eine Bedeckung überhaupt nicht statt.

Um die Rechnung abzukürzen, kann man zweckmässig von einem rohen Näherungswerthe für T ausgehen, nämlich von der genäherten Zeit der scheinbaren Conjunction am Beobachtungsorte. Da für diese Zeit $P = 0$ oder $= 180°$ sein muss, lauten die Bedingungsgleichungen

$$0 = p - u + (T - \Delta\lambda - T_0)(p' - u')$$
$$\pm k = q - v + (T - \Delta\lambda - T_0)(q' - v').$$

Da T_0 zusammenfällt mit der Zeit der wahren Conjunction, ist $p = 0$, und wenn wir für p' seinen mittleren Werth 0·5646 setzen:

$$T = T_0 + \Delta\lambda + \frac{\rho\cos\varphi'\sin(\theta - \alpha^*)}{0{\cdot}5646 - \lambda\rho\cos\varphi'\cos(\theta - \alpha^*)}\,,$$

Für einen bestimmten Beobachtungsort kann man hiernach eine Tafel mit $\theta - \alpha^* =$ dem Stundenwinkel als Argument berechnen, der man sofort einen Näherungswerth T entnimmt, der nun bei der zweiten Näherung schon zu meist genügenden Werthen für die Berührungszeiten führt. Im Anhange des »Berliner Jahrbuchs« findet sich eine Hilfstafel, die mit den Argumenten φ' und $(\theta - \alpha^*)$ die Correction von $T_0 + \Delta\lambda$ ergiebt.

Aus den Gleichungen

$$k\sin P = m\sin M + (T - \Delta\lambda - T_0)\,n\sin N$$
$$k\cos P = m\cos M + (T - \Delta\lambda - T_0)\,n\cos N$$

folgt durch Einführung der oben gefundenen Werthe von $T - T_0$ und des Hilfswinkels ψ

$$k\sin P = k\sin(\psi \mp N)$$
$$k\cos P = \mp k\cos(\psi \mp N),$$

folglich ist

$$P = 180° - (\psi - N) \quad \text{oder} \quad = \psi + N$$

da dieses der Positionswinkel des Mondmittelpunktes vom Stern aus ist, erhalten wir den am Mondrande gezählten Positionswinkel der Ein- und Austrittsstelle:

$$\text{Eintritt} \quad Q = N - \psi \qquad \text{Austritt} \quad Q = 180° + N + \psi.$$

Es sind nun noch im folgenden die für die Anwendung ekliptikaler Coordinaten erforderlichen Formeln zusammengestellt, die sich in ähnlicher Weise aus den allgemeinen Gleichungen der Hansen'schen Theorie ergeben.

$$x_0 = \frac{\lambda_☾ - \lambda_*}{\pi_☾}\cos\beta_☾ \qquad y_0 = \frac{\beta_☾ - \beta_*}{\pi_☾} \qquad x' = \frac{1}{\pi_☾}\cos\beta_☾\,\Delta\lambda_☾ \qquad y' = \frac{1}{\pi_☾}\Delta\beta_☾$$

$$n\sin N = x' \qquad n\cos N = y' \qquad N' = N - q$$

$$\tan q = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha_*}{\cos\varepsilon\cos\delta_* + \sin\varepsilon\sin\delta_*\sin\alpha_*}$$

Kürzester Abstand — Zeit des kürzesten Abstandes

$$\gamma = -x_0 \cos N + y_0 \sin N \qquad \tau = T_0 - \frac{1}{n}(x_0 \sin N + y_0 \cos N)$$

$$u = \rho \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha_*) \qquad u' = [9{\cdot}41916]\, \rho \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha_*)$$

$$v = \rho \sin\varphi' \cos\delta_* - \rho\cos\varphi' \sin\delta_* \cos(\theta - \alpha_*) \qquad v' = [9{\cdot}41916]\, \rho\cos\varphi' \sin\delta_* \sin(\theta - \alpha_*)$$

$$-\gamma \cos N' - u = a \sin A \qquad n \sin N' - u' = b \sin B$$

$$\gamma \sin N' - v = a \cos A \qquad n \cos N' - v' = b \cos B$$

$$k \sin p = a \sin A + b(T - \Delta\lambda - \tau) \sin B$$

$$k \cos p = a \cos A + b(T - \Delta\lambda - \tau) \cos B$$

$$\sin\psi = \frac{a}{k} \sin(A - B) \qquad T = \tau + \Delta\lambda - \frac{a}{b}\cos(A - B) \mp \frac{k}{b}\cos\psi.$$

Die Ephemeridensammlungen geben die Elemente der Sternbedeckungen nur für die helleren Sterne. Will man systematisch Sternbedeckungen beobachten, so wird man sich nicht auf diese beschränken können, sondern auch schwächere Sterne mitnehmen. Man berechnet sich dann für den Beobachtungsort Tafeln, aus denen man mit den Argumenten Stundenwinkel und Aequatoreal-Horizontal-parallaxe des Mondes, die Parallaxe in *AR*, Deklinationen und die Correction des geocentrischen Radius entnimmt. Mit ihrer Hilfe rechnet man eine nach Intervallen von 10^m fortschreitende genäherte scheinbare Mondephemeride. Man bildet dann mit den scheinbaren Coordinaten des Sternes die Grösse

$$\Delta^2 = (\alpha_*' - \alpha'_☾)^2 \cos^2 \delta'_☾ + (\delta_*' - \delta'_☾)^2$$

für mehrere Zeitpunkte in der Nähe der Conjunction und findet durch Interpolation die Zeiten des Ein- und Austritts, für welche $\Delta = r'_☾$ sein muss.

Statt durch Rechnung kann man die Zeiten auch graphisch finden, indem man den scheinbaren Weg des Mondmittelpunktes in eine Karte einträgt, darauf um die einzelnen Sterne mit dem scheinbaren Mondradius Kreise beschreibt und die Schnittpunkte mit der Bahn des Mondmittelpunktes sucht. Die durch Schätzung zwischen den berechneten Punkten der Bahn zu ermittelnde Zeit, zu welcher der Mondmittelpunkt in den Schnittpunkten steht, giebt die Zeit des Ein- oder Austritts. Auch der Positionswinkel der Berührungsstelle ist der Zeichnung sofort zu entnehmen.

Für die Aufstellung der Bedingungsgleichung zur Ermittelung der Correctionen der Elemente aus Beobachtungen von Sternbedeckungen können wir uns gleichfalls auf die für Ränderberührungen bei Sonnenfinsternissen aufgestellten Formeln beziehen. Wegen der weit grösseren Sicherheit, die sich in der Beobachtung namentlich der Ein- und Austritte am dunklen Mondrande erzielen lässt, ist es wünschenswerth, noch weitere Correctionsglieder in die Bedingungsgleichung einzuführen. Wir betrachteten früher die die Lage des Beobachters auf der Erdoberfläche bestimmenden Grössen ξ, η, ζ als Constanten, soweit sie nicht abhängen von der Länge. Wir haben jetzt noch die Abhängigkeit dieser Grössen von der Gestalt des Erdkörpers und der Polhöhe hinzuzufügen. Wir haben also die Differentiale dm und dM zu bestimmen durch vollständige Differentiirung der Gleichungen

$$m \sin M = x_0 - \xi \qquad m \cos M = y_0 - \eta,$$

und es treten daher zu den Gliedern der früheren Gleichung hinzu die Ausdrücke

$$+\frac{1}{n} \sec\psi \sin(N - \psi)\, d\xi + \frac{1}{n} \sec\psi \cos(N - \psi)\, d\eta.$$

In den Ausdrücken

$$\xi = \rho \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha_*) \qquad \eta = \rho \sin\varphi' \cos\delta_* - \rho\cos\varphi' \sin\delta_* \cos(\theta - \alpha_*)$$

seien $d\rho$, $d\varphi'$ die Correctionen der angenommenen Werthe von ρ und φ'. $\theta - \alpha_*$ ist der Stundenwinkel des Sternes im Augenblicke der Bedeckung gerechnet vom geocentrischen Zenith aus. Die Beobachtung ergiebt $\theta - \alpha_*$ bezogen auf das scheinbare Zenith. Nennen wir also dl' die Abweichung des geocentrischen Zeniths vom scheinbaren in Länge, positiv, wenn das geocentrische östlich vom scheinbaren liegt, so ist dl' die Correction des Stundenwinkels. Wir haben nun

$$d\xi = \frac{\xi}{\rho}\, d\rho - \rho \sin\varphi' \sin(\theta - \alpha_*)\, d\varphi' + \rho \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha_*)\, dl'$$

$$d\eta = \frac{\eta}{\rho}\, d\rho + \rho\, [\cos\varphi' \cos\delta_* + \sin\varphi' \sin\delta_* \cos(\theta - \alpha_*)]\, d\varphi' + \rho \cos\varphi' \sin\delta_* \sin(\theta - \alpha_*)\, dl'.$$

Es ist demnach zu der früheren Bedingungsgleichung hinzuzufügen

$$+ \frac{1}{n} \sec\psi\, [\sin(N - \psi)\, \xi + \cos(N - \psi)\, \eta]\, \frac{1}{\rho}\, d\rho$$

$$- \frac{1}{n} \sec\psi [\rho \sin\varphi' \sin(\theta - \alpha_*) \sin(N - \psi) - \rho [\cos\varphi' \cos\delta_* + \sin\varphi' \sin\delta_* \cos(\theta - \alpha_*)] \cos(N - \psi)]\, d\varphi'$$

$$+ \frac{1}{n} \sec\psi \cdot \rho \cos\varphi' [\cos(\theta - \alpha_*) \sin(N - \psi) + \sin\delta_* \sin(\theta - \alpha_*) \cos(N - \psi)]\, dl'.$$

Der Coëfficient von $d\rho$ gestattet noch eine Umformung. Wir haben festgesetzt, dass der Hilfswinkel ψ für den Eintritt im 1. oder 4. Quadranten, für den Austritt im 2. oder 3. Quadranten gewählt werden soll. Führen wir in die Grundgleichungen

$$k \sin p = m \sin M + (T - \Delta\lambda - T_0)\, n \sin N$$
$$k \cos p = m \cos M + (T - \Delta\lambda - T_0)\, n \cos N$$

ein $\sin\psi = \frac{m}{k} \sin(M - N)$ und $(T - \Delta\lambda - T_0) = - \frac{m}{n} \cos(M - N) - \frac{k}{n} \cos\psi$, so folgt

$$k \sin p = k \sin(\psi - N), \quad k \cos p = - k \cos(\psi - N) \quad \text{also} \quad p = 180° - (\psi - N).$$

Da p der Positionswinkel am Sterne ist, so ist also der Positionswinkel des Sternes am Mondrande beim Ein- und Austritt $= N - \psi$. Im Augenblicke der Berührung ist folglich

$$k \sin(\psi - N) = x - \xi = x_0 + (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\, n \sin N - \xi$$
$$- k \cos(\psi - N) = y - \eta = y_0 + (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\, n \cos N - \eta$$

und es wird hieraus

$$\sin(N - \psi)\, \xi + \cos(N - \psi)\, \eta = x_0 \sin(N - \psi) + y_0 \cos(N - \psi) + (\theta_m - \Delta\lambda - T_0)\, n \cos\psi + k. \qquad (*)$$

Dieser Ausdruck kommt nun auch im Coëfficienten s von $d\pi$ vor, so dass also beide Correctionen nicht von einander getrennt werden können, wenn nur Beobachtungen von einem Erdorte vorliegen.

Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist demnach in folgender Weise vorzunehmen:

θ = Ortssternzeit der Bedeckung, θ_m = mittlere Ortszeit der Bedeckung, T_0 genäherte mittlere Zeit des Ephemeridenortes für den Augenblick θ_m

$$x_0 = \cos\delta_☾ \frac{\sin(\alpha_☾ - \alpha_*)}{\sin\pi_☾}$$

$$y_0 = \frac{1}{\sin\pi_☾} [\sin(\delta_☾ - \delta_*) + [4{\cdot}3845]\, (\alpha_☾ - \alpha_*)^2 \cos\delta_☾ \sin\delta_*].$$

x', y' stündliche Aenderungen von x und y für den Augenblick T_0. Man entnimmt x_0, y_0, x', y' durch Interpolation aus für fünf T_0 symmetrische umschliessende Zeitpunkte berechneten Werthen von x und y.

$$A \sin B = \rho \sin \varphi'$$
$$A \cos B = \rho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha_*)$$

$$\xi = \rho \cos \varphi' \sin(\theta - \alpha_*) + \text{Corr. weg. Refraction (pag. 769)}$$
$$\eta = A \sin(B - \delta_*) \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$
$$\zeta = A \cos(B - \delta_*) \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

$$m \sin M = x_0 - \xi \qquad n \sin N = x'$$
$$m \cos M = y_0 - \eta \qquad n \cos N = y'$$

$$\sin\psi = \frac{m}{k}\sin(M - N) \qquad \begin{matrix}\text{Eintritt } \psi \text{ 1. oder 4. Quadrant} \\ \text{Austritt } \text{ 2. ,, 3. ,,}\end{matrix}$$

$$t = \frac{m}{n}\,\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} = \frac{m}{n}\left\{\cos(M - N) + \frac{k}{m}\cos\psi\right\}$$

$$\varkappa = \frac{3600 \cdot \sin 1''}{n \cdot \sin \pi_{☾}}$$

$$p = \varkappa \cos\delta_{☾} \sin(N - \psi)\sec\psi \quad q = \varkappa\cos(N - \psi)\sec\psi$$
$$r = \varkappa\sec\psi \qquad s = \varkappa\sec\psi[x_0\sin(N - \psi) + y_0\cos(N - \psi) - tn\cos\psi + k]$$
$$u = \varkappa\sin\pi_{☾}\sec\psi\rho[\sin\varphi'\sin(\theta - \alpha_*)\sin(N - \psi) - [\cos\varphi'\cos\delta_* + \sin\varphi'\sin\delta_*\cos(\theta - \alpha_*)]\cos(N - \psi)]$$
$$v = \varkappa\sin\pi_{☾}\sec\psi\rho\cos\varphi'[\cos(\theta - \alpha_*)\sin(N - \psi) + \sin\delta_*\sin(\theta - \alpha_*)\cos(N - \psi)]$$

$$\theta^m - T_0 + 3600\,t = \Delta\lambda - p\,d(\alpha_{☾} - \alpha_*) - q\,d(\delta_{☾} - \delta_*) - r\,dr_{☾}$$
$$+ s\left[\cos\pi_{☾}\,d\pi_{☾} + \sin\pi_{☾}\frac{1}{\rho}d\rho\right] - u\,d\varphi' + v\,dl'.$$

Um die Bedingungsgleichungen gleichwerthig zu machen, genügt es wieder, sie durch r zu dividiren. In der Gleichung bedeuten $dr_{☾}$ und $d\pi_{☾}$ die Correctionen des wahren Mondradius und der wahren Mondparallaxe im Augenblicke der Beobachtung. In dieser Form wären die Gleichungen also aufzustellen, wenn es sich um über einen engbegrenzten Zeitraum, etwa über die Dauer einer totalen Mondfinsterniss vertheilte Beobachtungen handelt. Hat man Beobachtungen, die über einen längeren Zeitraum ausgedehnt sind, so muss man die Correction der mittleren Werthe des Radius und der Parallaxe suchen. Seien dieselben dr_0 und $d\pi_0$, so ist

$$dr_{☾} = \frac{\sin r_{☾}}{\sin r_0}dr_0 = \frac{\sin\pi_{☾}}{\sin\pi_0}dr_0 \qquad \text{und} \qquad d\pi_{☾} = \frac{\sin\pi_{☾}}{\sin\pi_0}d\pi_0.$$

An die Stelle der Glieder

$$- r\,dr_{☾} + s\left[\cos\pi_{☾}\,d\pi_{☾} + \sin\pi_{☾}\frac{1}{\rho}d\rho\right]$$

treten die folgenden:

$$- r'\,dr_0 + s'\left[\cos\pi_0\,d\pi_0 + \sin\pi_0\frac{1}{\rho}d\rho\right],$$

worin

$$\varkappa' = \frac{3600 \cdot \sin 1''}{n\sin\pi_0}$$

$$r' = \varkappa'\sec\psi \qquad s' = \varkappa'\sec\psi[x_0\sin(N - \psi) + y_0\cos(N - \psi) - tn\cos\psi + k].$$

In dieser Form sind die Gleichungen in den neueren Arbeiten namentlich von Küstner, L. Struvé und Battermann, auf die im Artikel »Parallaxe« noch zurückzukommen ist, angewandt. Man kann aber auch nach Bessel's Vorschlag die Bedingungsgleichungen so aufstellen, dass sie die Correction der Gestalt des Erdkörpers ergeben. Nennen wir e^2 die Excentricität des Erdkörpers, also

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, so sind die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes eines elliptischen Meridianschnittes

$$x = \rho \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \qquad y = \rho \sin \varphi' = \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Durch Differentiirung erhalten wir daraus

$$\frac{d \rho \cos \varphi'}{de^2} = \frac{1}{2} x \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi'}{(1 - e^2)^2} \qquad \frac{d \rho \sin \varphi'}{de^2} = \frac{1}{2} y \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi'}{(1 - e^2)^2} - \frac{\rho \sin \varphi'}{1 - e^2}.$$

Setzen wir also

$$\frac{\rho \sin \varphi'}{1 - e^2} = \beta,$$

so ist

$$\frac{d \rho \cos \varphi'}{de^2} = \frac{1}{2} \beta^2 \rho \cos \varphi' \qquad \frac{d \rho \sin \varphi'}{de^2} = \frac{1}{2} \beta^2 \rho \sin \varphi' - \beta;$$

damit wird nun

$$d\xi = \tfrac{1}{2} \beta^2 \xi$$
$$d\eta = \tfrac{1}{2} \beta^2 \eta - \beta \cos \delta_*$$

und die Bedingungsgleichung lautet

$$\theta_m - T_0 + 3600t = \Delta\lambda - pd(\alpha_☾ - \alpha_*) - qd(\delta_☾ - \delta_*) - rdr_☾ + s \cos \pi_☾ d\pi_☾ + w de^2,$$

worin nach der Gleichung (*) pag. 810

$$w = \varkappa \sec \psi \sin \pi_☾ \tfrac{1}{2} \beta^2 [x_0 \sin (N - \psi) + y_0 \cos (N - \psi) - t n \cos \psi + k]$$
$$- \varkappa \sec \psi \sin \pi_☾ \beta \cos \delta_* \cos (N - \psi).$$

Ist das vom Monde bedeckte Gestirn ein Planet und handelt es sich um die Vorausberechnung der Momente der Berührungen, bei welcher eine weitgehende Genauigkeit nicht erforderlich ist, so wendet man dieselben Formeln an, die zur Berechnung der Sternbedeckungen dienen (vergl. pag. 807). Es sind nur folgende Aenderungen vorzunehmen. Die Grösse λ ist die Aenderung des Stundenwinkels des Gestirnes in 1 Stunde mittlerer Zeit. Nennen wir also $\Delta\alpha$ die Bewegung des Planeten in AR in 1^h mittlerer Zeit ausgedrückt in Zeitsecunden, so ist jetzt $\lambda = 1{\cdot}00274 \cdot 15 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \sin 1'' - 15 \cdot \sin 1'' \cdot \Delta\alpha$, also

$$\lambda = N \log 9{\cdot}41916 - N \log [5{\cdot}86166] \Delta\alpha.$$

Der Radius des Schattenkreises ist zu bestimmen aus den allgemeinen Ausdrücken für Sonnenfinsternisse. Ist π die dem Augenblicke der Bedeckung entsprechende Parallaxe, σ der Radius der Planetenscheibe, so wird

$$\sin f = \pm \sin \sigma + k \sin \pi, \quad u' = \frac{1}{\sin \pi_☾ - \sin \pi} \tan g f + k = k + \frac{k \sin \pi \pm \sin \sigma}{\sin \pi_☾ - \sin \pi},$$

$$u = u' - \zeta \tan g f = k + \frac{k \sin \pi \pm \sin \sigma}{\sin \pi_☾ - \sin \pi} \mp \zeta \sin \sigma - \zeta k \sin \pi.$$

Man setzt daher genügend genau

$$k' = k \pm \frac{\sigma}{\pi_☾ - \pi} \quad \begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix} \text{ Berührung.}$$

Die genaue Berechnung der Berührungsmomente und die Vergleichung der Beobachtung mit den Tafeln erfordert die Berücksichtigung der wahren Figur der Planetenscheibe, die von der Kreisform in Folge von Abplattung und unvollständiger Beleuchtung verschieden ist. Es sind aber drei Fälle zu unterscheiden: Die Berechnung der Berührungen des voll erleuchteten Randes der sphärischen Planeten, also des Merkur, der Venus, des Mars, Uranus, Neptun ist auszuführen nach den Formeln für Sonnenfinsternisse mit Vertauschung der auf die Sonne

sich beziehenden Grössen mit den für den Planeten geltenden. Bei den Berührungen des unvollständig erleuchteten Randes, oder der Ränder der abgeplatteten Planetenscheiben und des Saturnsringes, berechnet man zunächst den der Berührungsstelle zugehörigen Radius. Bezüglich dieser Rechnungen ist zu verweisen auf BESSEL: Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe (Astr. Untersuchungen I, pag. 239). Führt man diesen Radius ein, so ist die Rechnung wieder nach den Sonnenfinsternissformeln auszuführen. Ist endlich die Bedeckung einer Hörnerspitze der Merkurs- oder Venussichel beobachtet, so hat man die Coordinaten dieser Spitze zu berechnen und die Beobachtung dann wie eine Sternbedeckung zu behandeln.

Resultate der Beobachtungen älterer Finsternisse.

Die Beobachtungen der Finsternisse, der Sonnenfinsternisse sowohl als auch der Sternbedeckungen, bieten ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung genauer Mondörter. Zur Verwerthung der neueren Beobachtungen dieser Art dienen die im vorigen auseinandergesetzten Methoden. Während diese Beobachtungen in der Jetztzeit aber nur eine verhältnissmässig untergeordnete Rolle neben den Meridianbeobachtungen spielen, sind wir für die Controlle unserer Mondtafeln für weiter zurückliegende Zeiten auf sie allein angewiesen. Die wichtigste Frage, die auf diesem Wege zu entscheiden ist, ist die nach den säcularen Aenderungen der Bewegung des Mondes. HALLEY hatte zuerst durch eine Vergleichung neuerer Mondbeobachtungen mit denen der Araber gefunden, dass eine Vereinigung beider nur möglich sei durch die Annahme einer Acceleration der mittleren Bewegung des Mondes. Zu denselben Resultaten haben auch alle späteren Vergleichungen der auf neueren Beobachtungen ruhenden Mondtafeln mit den alten Beobachtungen geführt. Die säculare Acceleration ist angenommen in T. MAYER, »Tabulae motuum solis et lunae« $=9''\cdot007$, in BÜRG, »Tables de la Lune« $=10''\cdot5$, in BURCKHARDT, »Tables de la Lune« $=9''\cdot0$. Alle diese Bestimmungen beruhen auf Beobachtungen, da es den Bemühungen der Mathematiker nicht gelang, sie aus der Theorie, die die Constanz der mittleren Bewegung fordert, zu erklären. Erst LAPLACE entdeckte die Ursache der Erscheinung in der Abnahme der Excentricität der Erdbahn, durch die eine vom Quadrat der Zeit abhängige Beschleunigung der Mondbewegung entstehen musste. Er bestimmte den Coëfficienten zu $10''\cdot18$, und da auch PLANA und DAMOISEAU zu nahe übereinstimmenden Werthen gelangten, schien die Frage entschieden. Sie wurde aber von neuem wach, als ADAMS zeigte, dass der LAPLACE'sche theoretische Werth bei strengerer Durchführung der Rechnung auf $5''\cdot78$ zu verkleinern sei, ein Werth, mit dem eine Darstellung der alten Finsternissbeobachtungen unmöglich ist. Die auf anderen abgeänderten Wegen gefundenen theoretischen Resultate von ADAMS, DELAUNAY und CAYLEY zeigten, dass in der That die Theorie den kleineren Werth fordert. Das schliessliche Resultat von DELAUNAY (Compt. rend. 82, pag. 495) ist $6''\cdot176$.

Die DAMOISEAU'schen Mondtafeln sind mit den alten Finsternissbeobachtungen verglichen durch J. ZECH (Preisschriften der Fürstlich JABLONOWSKI'schen Gesellschaft Nr. III u. IV). Die HANSEN'schen Tafeln sind in ähnlicher Weise verglichen durch den Autor selbst in seiner: »Darlegung der theor. Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen«, dann noch durch AIRY (Mem. of the Royal Astr. Soc. 26, pag. 152) und besonders durch NEWCOMB (Astron. Papers of the American Ephemeris I). Die Untersuchungen bestätigten stets, dass der kleine theoretische Werth nicht genüge, und dass noch eine weitere

Störung vorhanden sein müsse. Diese glaubte schon DELAUNAY (Compt. rend. 61, pag. 1023) in einer Verzögerung der Rotation der Erde unter der Wirkung der Fluthwellen suchen zu müssen, und in dieser Richtung bewegen sich auch die neuesten Untersuchungen (vergl. besonders G. H. DARWIN, Astr. Nachr. 96, pag. 217).

Neben dieser Acceleration der mittleren Bewegung sind nun in der Bewegung des Mondes noch andere Ungleichheiten langer Periode enthalten, deren Bestimmung weit zurückliegende genaue Mondörter erfordert. Solche Oerter lassen sich in genügender Weise aus den Beobachtungen der Araber und der Astronomen des Mittelalters erhalten. Die alten Sonnen- und Mondfinsterniss-beobachtungen gestatten dagegen nur eine ziemlich unsichere Verwerthung, da nur für wenige derselben die Zeit- und Ortsangabe und die Beschreibung genügend genau ist, um eine sichere Identificirung zu gestatten und eine Bedingungsgleichung für die Correctionen der Coordinaten des Mondes aufzustellen. Vor allem muss man sich beschränken auf die Verwendung totaler oder nahezu totaler Sonnenfinsternisse, da nur bei diesen die Wirkung der Correctionen der Coordinaten des Mondes gross genug ist, um in den rohen Angaben erkennbar zu sein. Die Aufgabe, die man zu lösen hat, ist die, solche Correctionen der Mondcoordinaten zu bestimmen, dass der Weg des Kernschattens sich einem gegebenen Punkte der Erdoberfläche bis auf eine bestimmte Grösse nähere.

In der BESSEL'schen Theorie ist der Abstand eines Punktes der Erdoberfläche, dessen Coordinaten in der auf der Kegelaxe senkrechten durch den Erdmittelpunkt gehenden Ebene ξ, η sind, vom Punkte x, y des Weges des Schnittpunktes der Kegelaxe bestimmt durch

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Sind also x_0, y_0 die der Zeit T_0 zugehörigen Coordinaten, x', y' die stündlichen Aenderungen und setzen wir wieder

$$x_0 - \xi = m \sin M \qquad x' - \frac{d\xi}{dt} = n_1 \sin N_1$$

$$y_0 - \eta = m \cos M \qquad y' - \frac{d\eta}{dt} = n_1 \cos N_1,$$

so ist auch für die Zeit

$$T = T_0 + \tau \qquad \Delta^2 = (m \sin M + \tau n_1 \sin N_1)^2 + (m \cos M + \tau n_1 \cos N_1)^2.$$

Durch Differentiation nach τ bekommen wir für jenen Werth, der Δ zu seinem Minimum Δ_* macht, $T = -\frac{m}{n} \cos(M - N_1)$, und indem wir diesen Werth einführen

$$\Delta_* = m \sin(M - N_1).$$

Die Abhängigkeit des kleinsten Abstandes von den Correctionen der Coordinaten wird also angegeben durch

$$d\Delta_* = \sin(M - N_1)\, dm + m \cos(M - N_1)\, dM$$

oder da

$$m\,dM = \cos M(dx_0 - d\xi) - \sin M(dy_0 - d\eta), \quad dm = \sin M(dx_0 - d\xi) + \cos M(dy_0 - d\eta)$$

ist

$$d\Delta_* = \cos N_1\,(dx_0 - d\xi) - \sin N_1\,(dy_0 - d\eta).$$

Da wir aus den Beobachtungen nur Correctionen des relativen Mondortes bestimmen können, die Coordinaten ξ und η aber nur in ganz geringem Grade von solchen Correctionen beeinflusst sind, da sie vom Stundenwinkel und der Deklination des Zielpunktes der Kegelaxe abhängen, haben wir $d\xi$ und $d\eta$ als

unabhängig von den Elementen der Finsterniss anzusehen. Ist nach den Mondtafeln die durch Δ_* bestimmte Phase sichtbar an dem Orte ξ, η und bestimmen wir die Correctionen $d\xi$, $d\eta$ und dx_0, dy_0 derart, dass $d\Delta_* = 0$ ist, so sieht nach den verbesserten Tafeln der Ort $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ dieselbe Phase. Nennen wir wieder q den Winkel, unter welchem vom Zielpunkt der Kegelaxe aus der Bogen zwischen dem Pole des Aequators und der Ekliptik erscheint:

$$tang\, q = tang\, \varepsilon \cos \lambda_\odot \qquad (q \text{ 1. oder 4. Quadrant})$$

so haben wir als Ausdrücke der Coordinaten nach pag. 766 und 770

$$x = \cos\beta_☾ \frac{\sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \cos q - \frac{\sin(\beta_☾ - \beta_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \sin q$$

$$y = \cos\beta_☾ \frac{\sin(\lambda_☾ - \lambda_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \sin q + \frac{\sin(\beta_☾ - \beta_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \cos q.$$

Führen wir die Differentiation aus und setzen ein in den Ausdruck für $d\Delta_*$, so entspricht der Bedingung $d\Delta_* = 0$ die Gleichung:

$$\cos N_1\, d\xi - \sin N_1\, d\eta = \cos(N_1 + q) \frac{\cos\beta_☾\, d(\lambda_☾ - \lambda_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} - \sin(N_1 + q) \frac{d(\beta_☾ - \beta_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}$$

$$- [x_0 \cos(N_1 + q) - y_0 \sin(N_1 + q)]\, cotang(\pi_☾ - \pi_\odot) \frac{d(\pi_☾ - \pi_\odot)}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}.$$

Es sind nun noch die Correctionen $d\lambda$, $d\beta$ zu verwandeln in Correctionen der Bahnelemente. Beschränken wir uns auf eine Correction der mittleren Länge l beim Monde, so können wir, wenn $\Delta\lambda$ die den Tafeln entnommene stündliche Aenderung der scheinbaren Länge des Mondes zur Zeit der Finsterniss in Bogenminuten ist, eine Grösse, die die ekliptischen Tafeln direkt ergeben, weil die stündliche Aenderung der mittleren Länge des Mondes $= 3'{\cdot}29$ ist, setzen $d\lambda_☾ = dl \dfrac{\Delta\lambda}{3{\cdot}29}$; andererseits folgt aus

$$tang\, \beta_☾ = tang\, i \sin(\lambda_☾ - \Omega) \qquad d\beta = tang\, i \cos^2 \beta_☾ \cos(\lambda_☾ - \Omega)(d\lambda_☾ - d\Omega).$$

Da $d\beta_\odot$ verschwindet, erhalten wir mit Beschränkung auf die Correctionen der Bahnelemente

$$\cos N_1\, d\xi - \sin N_1\, d\eta$$

$$= [\cos\beta_☾ \cos(N_1 + q) - tang\, i \cos^2 \beta_☾ \cos(\lambda_☾ - \Omega) \sin(N_1 + q)] \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)} \frac{\Delta\lambda}{3{\cdot}29}\, di$$

$$+ tang\, i \cos^2 \beta_☾ \cos(\lambda_☾ - \Omega) \sin(N_1 + q) \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\, d\Omega$$

$$- \cos\beta_☾ \cos(N_1 + q) \frac{1}{\sin(\pi_☾ - \pi_\odot)}\, d\lambda_\odot.$$

Soll aber auch die Correction der Länge des Perihels der Mondbahn bestimmt werden, so haben wir aus der Gleichung $tang(\lambda_☾ - \Omega) = \cos i\, tang\, u$, wo u das Argument der Breite ist, $d(\lambda_☾ - \Omega) = \cos i \dfrac{\cos^2(\lambda_☾ - \Omega)}{\cos^2 u} du = \cos i \sec^2 \beta\, du.$ Nun ist $u = \pi - \Omega + v$ (π = Länge des Perihels, v = wahre Anomalie) und $v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \ldots$ Also

$$du = d\pi + dM(1 + 2e \cos M) - d\Omega$$

und daher

$$d\lambda_☾ = \cos i \sec^2 \beta\, d\pi + \cos i \sec^2 \beta\, (1 + 2e \cos M)\, dM + (1 - \cos i \sec^2 \beta)\, d\Omega.$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke erhalten wir die Bedingungsgleichung zur Bestimmung von $d\pi$, dM, $d\Omega$.

Bei der Ermittelung der Differentiale $d\xi$ und $d\eta$ müssen wir uns wegen Mangels einer genauen Zeitangabe beschränken auf eine Aenderung der Polhöhe. Die Ausdrücke für ξ und η sind:

$$\xi = \rho \cos\varphi' \sin(\Theta - a) \qquad \eta = \rho \sin\varphi' \cos d - \rho \cos\varphi' \sin d \cos(\Theta - a).$$

Setzen wir also

$$a \sin A = \rho \sin\varphi' \sin t \qquad a \cos A = \rho \cos\varphi' \cos\delta_{\odot} + \rho \sin\varphi' \sin\delta_{\odot} \cos t,$$

wo t die wahre Ortszeit bedeutet, so ist

$$\cos N_1 \, d\xi - \sin N_1 \, d\eta = -a \sin(N_1 + A)\, d\varphi'.$$

Die aufzustellende Bedingungsgleichung wird also

$$d\varphi' = -\frac{\cos(N_1 + q)}{a \sin(N_1 + A)} \cos\beta_{☾} \frac{d(\lambda_{☾} - \lambda_{\odot})}{\sin(\pi_{☾} - \pi_{\odot})} + \frac{\sin(N_1 + q)}{a \sin(N_1 + A)} \frac{d(\beta_{☾} - \beta_{\odot})}{\sin(\pi_{☾} - \pi_{\odot})}.$$

$d\varphi'$ bedeutet in dieser Gleichung den auf dem Meridian des Ortes gemessenen Bogen, um welchen die Curve der Centralität an dem Orte vorübergeht, und um welchen wir also die Curve verschieben müssen, damit die Finsterniss an dem gegebenen Orte central werde. Einer Verschiebung der Curve nach Norden entspricht ein negativer Werth von $d\varphi'$. Zur Ermittelung der erforderlichen Verschiebung haben wir Rücksicht zu nehmen auf die Grösse des Schattenkreises, also die Breite der Zone der Totalität.

Bei der Schwierigkeit, aus den Angaben der alten Schriftsteller einwandsfreie Daten abzuleiten, können die auf ihnen beruhenden Bedingungsgleichungen nur ein geringes Vertrauen beanspruchen. Man hat daher für den gleichen Zweck die Aufzeichnungen der Schriftsteller des Mittelalters und die Beobachtungen der Araber und der Astronomen des späteren Mittelalters herangezogen. Diese Beobachtungen kann man der ihnen innewohnenden grösseren Genauigkeit wegen nach den allgemeinen Formeln für Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen behandeln, indem man die Correctionen der *AR* und Dekl. verwandelt in solche der Bahnelemente.

Auf dem angedeuteten Wege sind in den letzten Jahren mehrere Versuche gemacht, durch Ermittelung empirischer Correctionen der Elemente der Mondbahn einen engeren Anschluss der HANSEN'schen Mondtafeln an die Beobachtungen zu erreichen. So enthalten OPPOLZER's Syzygientafeln solche Correctionen die abgeleitet sind aus den im Almagest aufgeführten Mondfinsternissen und einer Reihe totaler Sonnenfinsternisse aus der Zeit von — 708 bis + 1241. Eine weitere sehr umfassende Untersuchung ist ausgeführt von GINZEL[1]); dieselbe benutzt eine grosse Zahl von Sonnenfinsternissen. Die in der dritten Abhandlung ermittelten empirischen Correctionen beruhen auf 22 Finsternissen aus der Zeit von + 71 bis + 1385. Diese Correctionen sind von SCHRAM[2]) in Tafeln gebracht, mit deren Hilfe man die Angaben des OPPOLZER'schen Canon der Finsternisse, der direkt auf den Syzygientafeln beruht, sehr bequem so corrigiren kann, dass sie diesen neuen Correctionen entsprechen. In einer weiteren Arbeit GINZEL's[3]), deren Veröffentlichung nahe bevorsteht, sind diese Correctionen verglichen mit den alten Ueberlieferungen. Es zeigt sich, dass durch dieselben eine sehr befriedigende Darstellung erreicht ist, so dass der völlige Anschluss der alten Beobachtungen an die des Mittelalters und der Jetztzeit erzielt ist. In der Arbeit

---

[1]) F. K. GINZEL, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. I.—III. Abhandl. Sitzb der k. Akad. der Wissensch. LXXXV, 3; LXXXVIII, 2; LXXXIX, 2. Wien.

[2]) R. SCHRAM, Reductionstafeln für den OPPOLZER'schen Finsterniss-Canon zum Uebergang auf die GINZEL'schen empirischen Correctionen. Denkschriften der k. Akad. der Wissenschaften, Bd. 56. Wien 1889.

[3]) F. K. GINZEL, Specieller Canon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Alterthumswissenschaften von 900 v. Chr. bis 600 n. Chr.

sind auch diejenigen Finsternisse, die sich zur Prüfung der Mondtheorie besonders eignen, eingehender besprochen. Der Werth der Säcular-Acceleration, der diesen GINZEL'schen empirischen Correctionen entspricht, ist 11″·473.

Die zweite Hypothese zur Erklärung des Unterschiedes des theoretischen und des von HANSEN nach den Beobachtungen angenommenen Werthes der Säcular-Acceleration hat NEWCOMB[1]) auf Grund eines sehr grossen Beobachtungsmaterials verfolgt. NEWCOMB benutzt von den klassischen Finsternissen nur die im Almagest angeführten Mondfinsternisse, ausserdem die arabischen und mittelalterlichen und neuen Beobachtungen. Er leitet aus ihnen Correctionen des Mondortes für 18 Zeitpunkte zwischen — 687 und + 1875 ab. Diese Correctionen sind in der folgenden Tabelle unter der Ueberschrift $B - R$ aufgeführt; sie beziehen sich auf die reine Theorie HANSEN's unter alleiniger Mitnahme der von ihm benutzten Säcular-Acceleration von 12″·17, aber unter Ausscheidung eines weiteren empirischen Gliedes, welches von der Venus abhängen sollte. Um den die Beobachtungen am besten darstellenden Werth der Acceleration zu erlangen, werden die Unterschiede zunächst aufgefasst als abhängig von einer Correction der mittleren Länge, einer solchen der hundertjährigen mittleren Bewegung und schliesslich einer Correction der Acceleration. Die dadurch erzielte Darstellung ist durch die Columne v der übrig bleibenden Fehler angezeigt; die Säcular-Acceleration folgt = 8″·81. Zur Erklärung der Fehler v werden die beiden Annahmen gemacht: 1. dass sie nur eine Folge sind von Ungleichheiten in der Rotation der Erde; 2. dass sie aus Ungleichheiten langer Periode in der Bewegung des Mondes hervorgehen. Für die erste Hypothese ist also an die Stelle der HANSEN'schen Acceleration der von der Theorie verlangte Werth $6''\cdot 18\, T^2$ einzusetzen. Die übrigbleibenden Fehler sind in der Tabelle unter $(B - R)_1$ angegeben, während unter Δt die den beobachteten Abweichungen entsprechenden Fehler der Zeitrechnung stehen. Diese Correctionen müssten von den Beobachtungszeiten abgezogen werden, um sie auf die bei gleichförmiger Rotation der Erde stattfindende Zeit zu reduciren. Die Columne $(B - R)_2$ endlich enthält diejenigen Fehler, welche in den Beobachtungen übrig bleiben, wenn man ein empirisches Glied abhängig vom Argumente $A = 18\,V - 16\,E - g$ (V = Länge der Venus, E = Länge der Erde, g = mittlere Anomalie des Mondes) einführt. Die nach dieser letzten Darstellung an die HANSEN'schen Tafeln anzubringende Gesammtcorrection hat den Ausdruck:

$$-1''\cdot 14 \quad -29''\cdot 17\,T \quad -3''\cdot 86\,T^2 \quad -V_2 \quad -0''\cdot 09\,\sin A \quad -15''\cdot 49\,\cos A,$$

worin T die Zeit in Jahrhunderten seit 1800, und V_2 das HANSEN'sche empirische Venusglied ist.

	$B-R$	v	$(B-R)_1$	Δt
—687	—11′	+16′	+38′·6	—70^m
—381	—27	— 7	+ 9·9	—18
—189	—20	— 4	+ 9·6	—17
+134	—16	— 6	+ 3·5	— 6
850	— 4·4	— 2·4	— 0·2	0
927	— 1·1	+ 0·3	+ 2·1	— 4
986	— 4·8	— 3·8	— 1·3	+ 2

	$B-R$	v	$(B-R)_1$	Δt	$(B-R)_2$
1625	+33″	+ 6″·1	—6″·6	+12^s	+3″·9
1650	+18	— 6·9	—19·0	+35	—2·2
1675	+15	— 7·4	—18·6	+34	—0·3
1700	+16	— 3·6	—13·5	+25	+1·0
1725	+16	— 0·3	— 8·6	+16	—0·8
1750	+19	+ 6·4	0·0	0	—0·8
1775	+21	+12·5	+ 8·4	—15	+1·6
1800	+15	+11·1	+ 9·5	—17	+0·6
1825	+ 2	+ 3·0	+ 4·4	— 8	—1·9
1850	—11	— 4·6	0·0	0	+0·2
1875	—28	—15·8	— 7·6	+14	+0·2

[1]) S. NEWCOMB, Researches on the motion of the Moon. Part I. Washington 1878.

Die Fehler v zeigen, dass die jetzige Mondtheorie die Beobachtungen nicht darzustellen vermag, welchen Werth der Säcular-Acceleration wir auch annehmen mögen. Die Fehler Δt, die der Hypothese einer ungleichen Erdrotation entsprechen, würden nicht eine gleichförmige Aenderung derselben, sondern eine ungleichförmige, sprungsweise erfordern, wodurch diese Hypothese wenig wahrscheinlich wird. Die Zahlen der letzten Columne beweisen endlich, dass wir den Beobachtungen seit 1625 durch die ermittelte empirische Correction und die Säcular-Acceleration $8''\cdot31$ genügen können. Mit diesen Annahmen ist aber eine Darstellung derjenigen Finsternisse, die HANSEN zur Ableitung seines Werthes der Säcular-Acceleration benützt hat, nicht möglich, und es ist daher auf Grund des von NEWCOMB benutzten Materials die Frage nicht zu entscheiden.

Planetenvorübergänge.

Die durch die unteren Planeten Merkur und Venus bewirkten partiellen Sonnenfinsternisse können in derselben Weise behandelt werden, wie die Sonnenfinsternisse, indem wir die auf den Mond sich beziehenden Grössen ersetzen durch diejenigen, die sich auf den Planeten beziehen. Der Umstand, dass der Einfluss der Parallaxe auf die Erscheinung ein weit erheblicherer ist, erfordert aber doch in einzelnen Punkten eine abweichende Behandlung.

Bezeichnen wir mit r und π den Radius der Planetenscheibe und die Parallaxe des Planeten, während wir, wie früher, unter $r_\odot$, $\pi_\odot$ die gleichen Grössen für die Sonne verstehen, so muss, wenn der Planet für irgend einen Punkt der Erdoberfläche die Sonnenscheibe wenigstens berühren soll, der kleinste Abstand der Mittelpunkte beider Scheiben $\leqq r + r_\odot + \pi - \pi_\odot$ sein, analog wie auf pag. 759 für Sonnenfinsternisse. Ist ferner β die geocentrische Breite des Planeten im Augenblick der unteren Conjunction und i' die Neigung der Bewegungsrichtung des Planeten in Bezug auf den Erdmittelpunkt gegen die Ekliptik, so dass (pag. 758) $tang\, i' = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda - \Delta\lambda_\odot} tang\, i$ ($\Delta\lambda$ und $\Delta\lambda_\odot$ stündliche Aenderungen der heliocentrischen Längen) ist, so bestimmt sich der kürzeste Abstand durch $\beta \cos i'$ und die zu erfüllende Bedingung ist also

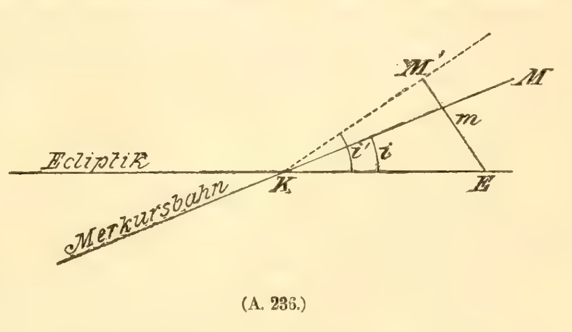
$$\beta \leqq (r + r_\odot + \pi - \pi_\odot) \sec i',$$

Wegen der Neigung der Bahnen von $7^\circ\cdot0$ beim Merkur und $3^\circ\cdot4$ bei der Venus kann diese Bedingung nur erfüllt sein, wenn der Planet sich in der Nähe der Knotenpunkte seiner Bahn befindet. Die Erde passirt den aufsteigenden Knoten der Merkursbahn um den 9. November, den absteigenden um den 7. Mai, den aufsteigenden der Venusbahn um den 8. Dezember, den absteigenden um den 6. Juni, und es können also Vorübergänge nur eintreten, wenn die unteren Conjunctionen der betreffenden Planeten auf diese Zeitpunkte fallen. Führen wir in den Ausdruck β die numerischen Werthe ein, so erhalten wir folgende Grenzwerthe für β, denen die entsprechenden Werthe der heliocentrischen Breite b und des Knotenabstandes hinzugefügt sind:

		i'	r	$r_\odot$	π	$\pi_\odot$
Merkur	☊	$8^\circ\cdot4$	$4''\cdot9$	$969''\cdot4$	$13''\cdot1$	$8''\cdot9$
	☋	10·4	5·9	950·6	15·9	8·8
Venus	☊	9·1	31·8	974·5	33·5	9·0
	☋	8·5	29·1	945·4	30·6	8·7

β	b		
$16'\ 29''\cdot1$	$35'\ 31''\cdot6$	$l -$ ☊ $=$	$4^\circ\ 49'.7$
16 19·7	20 0·9	$l -$ ☋	2 44·2
17 24·0	6 23·1	$l -$ ☊	1 47·5
16 40·7	6 41·1	$l -$ ☋	1 52·5.

Ein Vorübergang findet statt, wenn der Planet zur Zeit der unteren Conjunction höchstens um den berechneten Bogen vom Knotenpunkte entfernt ist. Wir erkennen daraus, dass beim Merkur die Bedingungen beim aufsteigenden Knoten erheblich günstiger sind als beim absteigenden Knoten, dass also November-Vorübergänge häufiger eintreten müssen, als Mai-Vorübergänge. Bei der Venus dagegen liegen die Verhältnisse bei beiden Knoten etwa gleich. Bei der weiteren Verfolgung müssen wir daher bei der Merkursbahn die beiden Knotenpunkte für sich behandeln, während wir bei der Venusbahn diesen Unterschied nicht zu machen brauchen. Nach LEVERRIER's Tafeln liegen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Merkur durch den aufsteigenden Knoten seiner Bahn $87^t{\cdot}969204$, während für den niedersteigenden Knoten diese Zeit $= 87^t{\cdot}969046$ ist. Die Erde kehrt in dieselben Punkte zurück nach $365^t{\cdot}254268$ bez. $365^t{\cdot}254147$. Hieraus folgt, dass Merkur während eines Umlaufs der Erde vom Knoten der Merkursbahn aus 4·152070 bez. 4·152075 Umläufe ausführt; es kommen also nahe auf 6 Erdumläufe 25 des Merkur, und auf 7 der Erde 29 des Merkur. In der That entsprechen 25 Umläufe des Merkur beim aufsteigenden Knoten 6·021094 Erdumläufen. Nach den Sonnentafeln durchläuft die Erde in dem Zeitraum von 0·021094 Jahr $= 7^t{\cdot}7048$ einen Bogen von $7°\,45'{\cdot}73$.



(A. 236.)

Ist also in Fig. 236 K der Knoten der Merkursbahn, so befindet die Erde sich, wenn der Merkur in diesem Punkte steht, in E, so dass $KE = 7°45'{\cdot}73$ ist. Denken wir uns die Erde ruhend, so bewegt sich der Merkur in einer unter $i' = 8°{\cdot}4$ gegen die Ekliptik geneigten Bahn, der kürzeste Abstand der Erde von dieser Bahn, d. i. der kürzeste heliocentrische Abstand von Merkur und Erde ist also $\sin m = \sin M'E = \sin i' \sin KE$. Durch Multiplikation mit dem Verhältniss der Entfernungen Merkur — Sonne zu Merkur — Erde $= R:\rho$, erhalten wir schliesslich die kürzeste geocentrische Distanz und durch fortgesetzte Addition finden wir in derselben Weise beliebig viele Durchgänge. So entsteht folgende Tabelle:

		Erdumläufe	Abst. d. Erde v. Knoten		m	$\log \frac{R}{\rho}$	μ
Nov. Durchgänge	6	+0·021094	7°	45'·73	+67'.83	9·6665	+31' 28"
	7	−0·015531	5	41·43	−49·80		−23 7
	13	+0·005563	2	2·62	+17·91		+ 8 19
	20	−0 009968	3	39·32	−32·03		−14 52
	33	−0·004405	1	36·98	−14·17		− 6 34
	46	+0·001158	0	25·51	+ 3·73		+ 1 44
	217	+0·000227	0	5·00	+ 0·73		+ 0 20
Mai Durchgänge	6	+0·021086	7	25·88	−80·30	9·9093	−65 10
	7	−0·015541	5	30·16	+59·44		+48 19
	13	+0·005545	1	57·45	−21·21		−17 13
	20	−0·009996	3	32·18	+38·32		+31 6
	33	−0·004451	1	34·39	+17.05		+13 50
	46	+0·001094	0	23·18	− 4·19		− 3 24
	217	−0·000075	0	1·59	+ 0.29		+ 0 14.

Mit Hilfe dieser Tabelle können wir von einem beobachteten Durchgange ausgehend die folgenden leicht berechnen. Im Jahre 1894 November 10 passirte Merkur die Sonnenscheibe in einem Abstande von + 4′ 26″. Wir haben also folgende Durchgänge:

	November 1907	kürzester Abstand	+ 12′ 45″
	1914		— 10 26
	1927		— 2 8
	1940		+ 6 10
	1953		+ 14 29 und einen
nahe centralen	1973		— 0 24 etc.

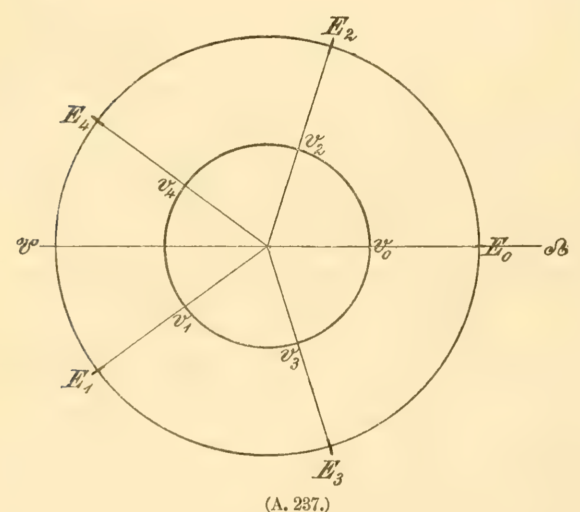
Der letzte Mai-Durchgang, war der vom 9. Mai 1891, bei welchem Merkur 12′ 34″ südlich vom Sonnenmittelpunkte passirte. Die folgenden Durchgänge sind also

Mai 1924	kürzester Abstand	+ 1′ 16
1937		— 15 57
1957		+ 15 9
1970		— 2 4 etc.

Die Durchgänge an beiden Knoten sind gebunden an eine Periode von 217 Jahren, nach deren Ablauf sie sich in derselben Reihenfolge und nahe gleichem Abstande vom Mittelpunkte der Sonnenscheibe wiederholen.

Für die Untersuchung der Periodicität der Venusdurchgänge betrachten wir zunächst die Bahnen der Erde und der Venus als concentrische Kreise. Es seien $V_0 E_0$ die Stellungen von Venus und Erde im Augenblicke einer beliebigen unteren Conjunction am aufsteigenden Knoten, die wir als Ausgangspunkt benützen wollen. Nach Leverrier sind die mittleren siderischen Bewegungen der beiden Planeten im Julianischen Jahr von 365·25 Tagen für

Venus 2106641″·40
Erde 1295977·38.



(A. 237.)

Es wird also die auf die Ausgangsconjunction folgende Conjunction in mittlerer Länge eintreten nach

$$\frac{1295977{\cdot}38}{810664{\cdot}02} \text{ Jul. Jahren} = 1^j\, 218^t\, 16^h\, 6^m\, 45^s.$$

Die Bewegung der Erde in dieser Zeit ist = 1 Umlauf + 215° 31′ 5″·2. Da der Knoten der Venusbahn eine jährliche rückläufige Bewegung von 20″·50 besitzt, so liegt der Punkt der zweiten Conjunction in mittlerer Länge vom Knotenpunkt entfernt um 215° 31′ 38″·0. Der Punkt der dritten Conjunction liegt gegen den der zweiten so, wie dieser gegen den Punkt der ersten Conjunction. Die ersten 5 Conjunctionen sind also folgende:

Conjunction 0 mittl. Länge vom ☊	0° 0′ 0″	Zeit	0ʲ	0ᵗ	0ʰ
1	215 31 38		1	218	16·1
2	71 3 16		3	72	2·2
3	286 34 54		4	290	18·3
4	142 6 32		6	144	4·4
5	357 38 10		7	362	20·5

Es ist also der Punkt der 5. folgenden Conjunction gegen den der Ausgangsconjunction um — 2° 21′ 50″ verschoben und die Conjunction tritt ein 8ʲ weniger 2ᵗ 9ʰ·5 nach der ersten. Wir können unsere Aufgabe jetzt also in der Verfolgung dieser 5 Conjunctionspunkte fortsetzen und haben zu untersuchen, wann dieselben in Folge ihrer rückläufigen Bewegung von 2° 21′ 50″ die Knoten der Venusbahn passiren.

Der Punkt 0 ist bei der 5. Conjunction schon 2° 21′ 50″ vom Knotenpunkte entfernt, er kann also, da nach der Tabelle auf pag. 818 der Abstand zwischen beiden für einen Durchgang höchstens 1° 52′·5 betragen darf, nicht mehr zu einem Durchgang Anlass geben. Die rückläufige Bewegung führt nun offenbar zunächst den Punkt 1 in den gegenüberliegenden Knoten. Dieser Punkt wird den Abstand vom Knoten = 35° 31′ 38″ genähert nach 15 × 5 Conjunctionen zurückgelegt haben. Wir berechnen also die Zeit und den Ort der 75. und der einschliessenden auf den Punkt 1 fallenden Conjunctionen. Darauf haben wir den Punkt 2, der nun wieder in den ersten Knotenpunkt rückt, in derselben Weise zu behandeln. Schliesslich gehen wir von der Conjunction in mittlerer Länge mit Hilfe der Tafeln über zu den Conjunctionen der wahren Länge und erhalten dadurch die folgende Tabelle:

Conjunction	Länge v. ☊	Zeit			Länge vom ☊	Zeit in Tagen
0	358° 58′ 31″	—0ʲ	0ᵗ	5ʰ·8	0° 0′ 0″	0ᵗ·000
5	356 26 22	+7	362	12·4	357 27 51	2919 513
66	185 29 16	105	187	14·2	186 30 45	38539·114
71	183 16 50	113	185	6·7	184 18 19	41458·810
76	181 4 19	121	182	23·3	182 5 48	44378·461
81	178 51 45	129	180	15·8	179 53 14	47298·196
86	176 39 2	137	178	8·3	177 40 31	50217·886
142	4 1 54	227	4	20·7	5 3 23	82016·930
147	1 29 41	235	2	9·0	2 31 10	85836·442
152	358 57 34	242	365	3·2	359 59 3	88755·955
157	356 25 35	250	362	15·5	357 27 4	91675·469
162	353 53 51	258	360	3·8	354 55 20	94594·984

Mit dieser Tabelle können wir von einer beobachteten oder nach den Ephemeriden berechneten Conjunction alle folgenden finden. Wir erkennen zunächst, dass die Durchgänge in der Regel paarweise in einem Abstande von 8 Jahren an demselben Knoten erfolgen und dass zwischen je zwei solchen Paaren eine Zeit von 105½ oder 113½ oder 121½ Jahren liegen muss. Zur Erleichterung der Rechnung sind in den letzten beiden Columnen der Tabelle die Längen vom aufsteigenden Knoten, die Zeit in Tagen gegeben.

Der erste beobachtete Venusdurchgang war der des Jahres 1639, den Horrox zu Hool bei Liverpool wahrnahm. Nach Encke's Berechnung fiel die Conjunction in Länge auf 1639 Dec. 4. 5ʰ 20ᵐ·9 m. Z. Paris. Der Durchgang fand am aufsteigenden Knoten statt in der vom ☊ gerechneten Länge 358° 56′ 34″. Von

diesem Durchgang ausgehend, sind in der folgenden Tafel mit Hilfe der Zahlen für die Conjunctionen 76, 81, 147, 152, 228, 233 die folgenden Durchgänge berechnet.

Tag des Gregorianischen Kalenders	Datum			Länge vom ☊
2320030·223	1639 Dez. 4	$5^h \cdot 3$	M. Z. Paris	358°56′34″
2364408·684	1761 Juni 5	16·4		181 2 22
2367328·419	1769 Juni 3	10·0		178 49 48
2405866·665	1874 Dez. 8	16·0		1 27 44
2408786·178	1882 Dez. 6	4·3		358 55 37
2453164·639	2004 Juni 7	15·3		181 1 25
2456084·373	2012 Juni 5	9·0		178 48 51

Die so gefundenen Conjunctionszeiten können natürlich nur genäherte sein, da zur Berechnung der wirklichen Zeiten die Störungen zu berücksichtigen wären. Sie genügen aber vollständig; der Fehler der hier gegebenen Rechnung betrug in den 4 beobachteten Durchgängen 1761, 69, 1874, 82: $-1^h \cdot 5$, $-0^h \cdot 2$, $-0^h \cdot 5$, $-0^h \cdot 2$.

Zur genaueren Vorausberechnung auf Grundlage der Bessel'schen Theorie der Finsternisse haben wir zunächst die Coordinaten des Zielpunktes der Kegelaxe, also den aus dem Merkur- bezw. Venuscentrum gesehenen Ort des Sonnenmittelpunktes zu suchen. Aus den Sonnen-Tafeln erhalten wir für den für die Berechnung angenommenen Zeitpunkt T die geocentrische Länge und Breite der Sonne und den Radiusvector der Erde, und zwar behaftet mit Aberration, diese Grössen seien $\lambda'_\odot$, $\beta'_\odot$, $R_\odot$. Aus den Planetentafeln erhalten wir die heliocentrische Länge und Breite und den Radiusvector des Planeten $= l, b, R$. Es sei nun τ_2 die Zeit, die das Licht gebraucht, um von der Sonne zur Erde, τ_1 die Zeit, die es gebraucht, um von der Sonne zum Planeten zu gelangen. Wenn der Beobachter zur Zeit T eine gewisse Stellung des Planeten gegen die Sonne wahrnimmt, so wird ihm diese Wahrnehmung vermittelt durch einen Lichtstrahl, der zur Zeit $T - \tau_2$ von der Sonne ausging und zur Zeit $T - \tau_2 + \tau_1$ den Planeten passirte. Wir müssen also zur Reduction der Beobachtung anwenden die wahren geocentrischen Coordinaten der Sonne zur Zeit $T - \tau_2$ und des Planeten zur Zeit $T - \tau_2 + \tau_1$. Da die wahren Coordinaten der Sonne zur Zeit $T - \tau_2$ gleich sind den scheinbaren zur Zeit T, so erhalten wir aus den Sonnentafeln, wenn wir mit dem Argument T eingehen, sofort die richtigen Grössen; sie seien $\lambda_\odot$, $\beta_\odot$, $R_\odot$. Die demselben Zeitpunkte zugehörigen Werthe l, b, R der wahren heliocentrischen Coordinaten des Planeten haben wir zu verbinden mit den wahren geocentrischen Coordinaten der Sonne, um die wahren geocentrischen Coordinaten des Planeten $\lambda_1, \beta_1, \Delta_1$ für den Zeitpunkt T zu erhalten. Sind $\Delta\lambda_\odot$, $\Delta\beta_\odot = 0$, $\Delta R_\odot$ die Aenderungen in der Zeiteinheit, so ist also

$$\lambda_{1\odot} = \lambda_\odot + \tau_2 \Delta\lambda_\odot \qquad \beta_{1\odot} = \beta_\odot \qquad R_{1\odot} = R_\odot + \tau_2 \Delta R_\odot$$

$$\Delta_1 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - l) = R_{1\odot} \sin(\lambda_{1\odot} - l)$$

$$\Delta_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - l) = R_{1\odot} \cos(\lambda_{1\odot} - l) + R \cos b$$

$$\Delta_1 \sin\beta_1 = R_{1\odot} \sin\beta_{1\odot} + R \sin b.$$

Sind dann wieder $\Delta\lambda_1, \Delta\beta_1, \Delta\Delta_1$ die Aenderungen der geocentrischen Coordinaten des Planeten in der Zeiteinheit, so erhalten wir die wahren geocentrischen Coordinaten zur Zeit $T - \tau_2 + \tau_1$, die den scheinbaren Coordinaten zur Zeit T entsprechen, durch

$$\lambda = \lambda_1 - (\tau_2 - \tau_1)\Delta\lambda \qquad \beta = \beta_1 - (\tau_2 - \tau_1)\Delta\beta \qquad \Delta = \Delta_1 - (\tau_2 - \tau_1)\Delta\Delta_1.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich nun die für die Berechnung anzuwendenden scheinbaren, aus dem Planetenmittelpunkt gesehenen Coordinaten des Sonnenmittelpunktes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}$ für die Zeit T durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \cos \mathfrak{B} \sin (\mathfrak{L} - \lambda) &= R_\odot \sin (\lambda_\odot - \lambda) \\ \mathfrak{R} \cos \mathfrak{B} \cos (\mathfrak{L} - \lambda) &= R_\odot \cos (\lambda_\odot - \lambda) - \Delta \cos \beta \\ \mathfrak{R} \sin \mathfrak{B} &= R_\odot \sin \beta_\odot - \Delta \sin \beta. \end{aligned}$$

Verwandeln wir dann die Länge und Breite $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ in äquatoreale Coordinaten, so sind dieses die in den Grundgleichungen der Theorie auftretenden Grössen a, d, die AR und Dekl. des Zielpunktes der Kegelaxe.

Die Berechnung der Coordinaten x, y, z des Planetenmittelpunktes und ξ, η, ζ des Erdortes in dem der Darstellung zu Grunde liegenden Coordinatensysteme ist in derselben Weise auszuführen, wie bei den Sonnenfinsternissen.

Nennen wir $r^1_\odot$ bezw. r^1 die Radien der Sonnen- bezw. der Planetenscheibe, wie er in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne erscheinen würde, so dass also $r^1_\odot = 959''\cdot63$ (Auwers), $r^1 = 3''\cdot34$ (Leverrier) für Merkur $= 8''\cdot40$ (Auwers) für die Venus zu setzen ist, so ist der Oeffnungswinkel des Schattenkegels gegeben durch

$$\sin f = \frac{\sin r^1 \pm \sin r^1_\odot}{R} \quad (R = \text{Radiusvektor des Planeten})$$

und der Radius des Schattenkreises in der durch den Erdmittelpunkt gehenden zur Kegelaxe senkrechten Ebene:

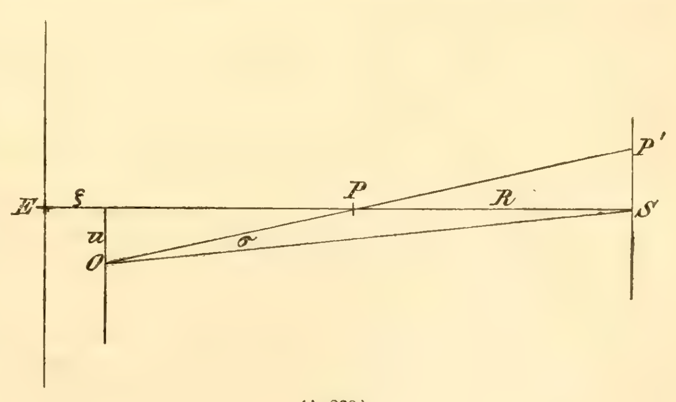
$$u' = \left(z \sin f + \frac{\sin r^1}{\sin 8''\cdot85} \right) \sec f.$$

($\sin r^1$ ist der lineare Radius des Planeten). z ist nun hinreichend nahe gleich dem Abstande des Planeten vom Erdmittelpunkt, also $= R_\odot - R = \Delta$ damit erhalten wir dann

$$u' = \left(\pm \frac{\Delta}{R} \sin r^1_\odot + \frac{R_\odot}{R} \sin r^1 \right) \frac{\sec f}{\sin 8''\cdot85}.$$

Diese Ausdrücke dienen zur Berechnung der Ränderberührungen.

Handelt es sich um die Berechnung einer bestimmten Entfernung der Mittelpunkte des Planeten und der Sonne, so ist ein anderer Werth einzuführen. Es sei in Fig. 238 S der Sonnenmittelpunkt, P der Mittelpunkt des Planeten, O der Erdort. SPE ist die Z-Axe des Coordinatensystems. Die Entfernung der beiden Mittelpunkte erscheint für den Beobachter unter dem Winkel $\sphericalangle P'OS = \sigma$. Da $EP = z$ ist, wird



(A. 238.)

$$\tan \sigma = \tan (\sphericalangle EPO - \sphericalangle ESO)$$

also da $\tan EPO = \dfrac{u}{z - \zeta}$ und $\tan ESO = \dfrac{u}{z - \zeta + R}$ ist

$$\tan \sigma = \frac{uR}{z(z + R) - \zeta(2z + R) + \zeta^2 + u^2}.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck zu

$$tang\,\sigma = \frac{uR}{z(z+R)}\left(1 + \zeta\frac{2z+R}{z(z+R)} - \frac{\zeta^2+u^2}{z(z+R)} + \ldots\right),$$

und setzen die Maximalwerthe ein, so ergiebt sich, dass bei Venusdurchgängen das zweite Glied des Klammerausdruckes für den Werth des σ höchstens $0''\cdot 19$, das dritte nur $0''\cdot 011$ ausmachen kann. Bei Merkursdurchgängen sind die Werthe noch kleiner. Wir können also das letzte Glied fortlassen, und im zweiten z durch Δ und $z + R$ durch $R_\odot$ ersetzen und haben

$$tang\,\sigma = \frac{uR}{\Delta\cdot R_\odot - \zeta(\Delta + R_\odot)}\,\frac{\Delta}{z}\cdot\frac{R_\odot}{z+R}.$$

Die Maximalwerthe der Faktoren $\frac{\Delta}{z}$ und $\frac{R_\odot}{z+R}$ sind bei Venusdurchgängen $sec\,22'\cdot 65$ bezw. $sec\,6'\cdot 51$. Bei der Kleinheit von σ können wir dieselben also $= 1$ setzen und haben schliesslich:

$$tang\,\sigma = \frac{uR}{\Delta R_\odot - \zeta(\Delta + R_\odot)} \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{R}\,tang\,\sigma\,[\Delta\cdot R_\odot - \zeta(\Delta + R_\odot)].$$

σ ist die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Scheiben. Führen wir an Stelle derselben die Entfernung σ' der Ränder ein, so ist

Distanz vom nächsten Sonnenrande = kleine Distanz $\sigma' = (r_\odot \pm r) - \sigma$
„ „ entferntesten „ = grosse „ $= \sigma + (r_\odot \pm r)$,
also

$\sigma = \pm(r_\odot \pm r) \mp \sigma'$ und hinreichend genau $tang\,\sigma = \pm\,tang\,(r_\odot \pm r) \mp tang\,\sigma'$

$$u = \pm\frac{1}{R}[\Delta R_\odot - \zeta(\Delta + R_\odot)]\,[tang\,(r_\odot \pm r) - tang\,\sigma'].$$

Weil nun für $\sigma' = 0$ dieser Ausdruck des u übergehen muss in den für Ränderberührungen, dürfen wir diesen an Stelle des ersten Theils setzen. Die lineare Einheit in Δ, R, $R_\odot$ ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, die in ζ der Erdradius. Diesen letzteren behalten wir als Einheit bei und erhalten also:

$$u = u' - \zeta\,tang\,f \mp \left(\frac{\Delta R_\odot}{sin\,8''\cdot 85} - \zeta(\Delta + R_\odot)\right)\frac{1}{R}\,tang\,\sigma',$$

oder wenn π, $\pi_\odot$ die Parallaxen im Augenblick der Beobachtung sind

$$= u' - \zeta\,tang\,f \mp \frac{1}{sin\,\pi}\,\frac{sin\,8''\cdot 85}{sin\,\pi_\odot}\,[1 - \zeta(sin\,\pi + sin\,\pi_\odot)]\,\frac{1}{R}\,tang\,\sigma'$$

Wir können nun die für die Vorausberechnung der Erscheinung eines Durchganges nöthigen Formeln zusammenstellen. Wir benutzen dazu das System, das auf pag. 775 für die Berechnung der Grenzcurven einer Sonnenfinsterniss aufgestellt ist.

Es werden den Tafeln für 3 oder 5 die Zeit der Conjunction symmetrisch umschliessende Zeitpunkte T die scheinbaren geocentrischen Sonnencoordinaten $\lambda_\odot$, $\beta_\odot$, $R_\odot$ und die wahren heliocentrischen Coordinaten des Planeten l, b, R entnommen und mit diesen nach den Vorschriften auf pag. 822 die scheinbaren geocentrischen Coordinaten des Planeten λ, β, Δ, sowie die Coordinaten des vom Planetenmittelpunkte aus gesehenen Sonnenortes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ gerechnet und dann die $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechenden äquatorealen Coordinaten a, d gesucht, und $\alpha_\odot - a = \Delta a$ gesetzt. Die mittlere der Zeiten T sei T_0, π, $\pi_\odot$ seien die Parallaxen des Planeten und der Sonne im Augenblick der Beobachtung, t die wahre Ortszeit der Beobachtung.

$$x = \frac{1}{sin\,\pi} cos\,\beta\, sin\,(\lambda - \Omega)$$

$$y = \frac{1}{sin\,\pi} sin\,(\beta - \mathfrak{B})$$

$$z = \frac{1}{sin\,\pi} cos\,(\beta - \mathfrak{B})$$

x', y' stündliche Aenderungen von x und y

$tang\,q = tang\,\varepsilon\,cos\,\lambda_{\odot}$ (q im 1. od. 4. Quadranten)

$n\,sin\,N = x' \quad n\,cos\,N = y'$

$N' = N - q$

Kürzester Abstand $\quad \gamma = y_0\,sin\,N - x_0\,cos\,N$

Zeit des kürzesten Abst. $\quad \tau = T_0 - \frac{1}{n}(x_0\,sin\,N + y_0\,cos\,N)$

Merkur $sin\,f_a = [7{\cdot}6691861]\,\frac{1}{R}$ $\qquad$ Venus $sin\,f_a = [7{\cdot}6714621]\,\frac{1}{R}$

$sin\,f_i = [7{\cdot}6661629_n]\,\frac{1}{R}$ $\qquad$ $sin\,f_i = [7{\cdot}6638588_n]\,\frac{1}{R}$

$$u' = \left[z\,sin\,f + \begin{matrix}0{\cdot}37740\\0{\cdot}94915\end{matrix}\right] sec\,f \begin{bmatrix}\text{Merkur}\\\text{Venus}\end{bmatrix}$$

$\rho\,cos\,\varphi' = cos\,\varphi_1 \qquad c\,sin\,d_0 = sin\,d$

$\rho\,sin\,\varphi' = (1 - \alpha)\,sin\,\varphi_1 \qquad c\,cos\,d_0 = (1 - \alpha)\,cos\,d$

$$cos\,\zeta_0 = sin\,\varphi_1\,sin\,d_0 + cos\,\varphi_1\,cos\,d_0\,cos\,(t + \Delta a)$$

$$sin\,\zeta_0\,sin\,\eta_0 = cos\,\varphi_1\,sin\,(t + \Delta a)$$

$$sin\,\zeta_0\,cos\,\eta_0 = sin\,\varphi_1\,cos\,d_0 - cos\,\varphi_1\,sin\,d_0\,cos\,(t + \Delta a)$$

$u = u' - c\,cos\,\zeta_0\,tang\,f$ (Ränderberührungen)

$= u' - c\,cos\,\zeta_0\,tang\,f \mp \left[\frac{1}{sin\,8''{\cdot}85} - cos\,\zeta_0\,\frac{\Delta + R_{\odot}}{\Delta R_{\odot}}\right] \frac{\Delta \cdot R_{\odot}}{R}\,tang\,\sigma'$ (Distanz σ')

$$u\,sin\,p = -\gamma\,cos\,N' + (t - \Delta\lambda - \tau)\,n\,sin\,N' - sin\,\zeta_0\,sin\,\eta_0$$

$$u\,cos\,p = \gamma\,sin\,N' + (t - \Delta\lambda - \tau)\,n\,cos\,N' - sin\,\zeta_0\,cos\,\eta_0.$$

Mit Hilfe dieser Elemente und Grundgleichungen ist nun die weitere Behandlung der Aufgabe der Berechnung der Grenzcurven und der Curven einer bestimmten Distanz ganz nach den bei den Sonnenfinsternissen auseinandergesetzten Formeln zu lösen.

Der grosse Werth der Planetenvorübergänge beruht, wie im Artikel »Parallaxe« ausführlicher gezeigt wird, in der durch dieselben gebotenen Gelegenheit zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Um zu sehen, wie die Genauigkeit der Bestimmung dieser Grösse aus den Beobachtungen für verschiedene Punkte der Erdoberfläche sich ergiebt, haben wir in unserer Gleichung die lineare Einheit, den äquatorealen Erdradius ρ_0, in den betreffenden Gliedern wirklich einzuführen, da ja die Aufgabe in der genauen Bestimmung des Verhältnisses dieser Einheit zur mittleren Entfernung der Erde von der Sonne besteht. Wir unterdrücken im Ausdruck von u die Glieder $\rho_0\,tang\,f$ und $\rho_0\,tang\,\sigma'$, die den anderen Gliedern gegenüber sehr klein sind, und haben so die Gleichungen

$$u = u' \mp \frac{1}{sin\,8''{\cdot}85}\,\frac{\Delta \cdot R_{\odot}}{R}\,tang\,\sigma'$$

$$u\,sin\,(p - \eta) = -\gamma\,cos\,(N' - \eta) + (t - \Delta\lambda - \tau)\,n\,sin\,(N' - \eta)$$

$$u\,cos\,(p - \eta) = \gamma\,sin\,(N' - \eta) + (t - \Delta\lambda - \tau)\,n\,cos\,(N' - \eta) - \rho_0\,sin\,\zeta.$$

Die Abplattung des Erdkörpers ist in diesen Ausdrücken vernachlässigt; es sind also ζ, η Zenithdistanz und parallaktischer Winkel des Zielpunktes der

Kegelaxe bezogen auf das excentrische Zenith. Wir haben diese Gleichungen zu differentiiren und dabei nur die vom Erdort und von den Beobachtungsdaten abhängigen Grössen als veränderlich zu betrachten. Es wird also

$$du = \mp \frac{1}{\sin 8''\!\cdot\!85} \frac{\Delta \cdot R_\odot}{R} \frac{d\sigma'}{\cos^2 \sigma'}$$

und nach der 2. und 3. Grundgleichung

$$du = n \cos(N' - p)(dt - d\Delta\lambda) - \rho_0 \sin\zeta \sin(p - \eta)\, d\eta - \rho_0 \cos\zeta \cos(p - \eta)\, d\zeta - \sin\zeta \cos(p - \eta)\, d\rho_0.$$

Durch Gleichsetzen und Unterdrückung der der Einheit nahe gleichen Faktoren ρ_0 und $\sec^2\sigma'$ in den Differentialen wird

$$\sin\zeta \cos(p - \eta)\, d\rho_0 = n \cos(N' - p)(dt - d\Delta\lambda) - \sin\zeta \sin(p - \eta)\, d\eta - \cos\zeta \cos(p - \eta)\, d\zeta \pm \frac{1}{\sin 8''\!\cdot\!85} \frac{\Delta \cdot R_\odot}{R}\, d\sigma'.$$

Durch Differentiation der Definitionsgleichungen für ζ und η erhalten wir, indem wir φ als genau bekannt ansehen,

$$\sin\zeta\, d\eta = \cos\varphi_1 [\cos(t + \Delta a) \cos\eta - \sin d_0 \sin(t + \Delta a) \sin\eta]\, dt$$

$$\cos\zeta\, d\zeta = \cos\varphi_1 [\cos(t + \Delta a) \sin\eta + \sin d_0 \sin(t + \Delta a) \cos\eta]\, dt$$

$$\sin(p - \eta) \sin\zeta\, d\eta + \cos(p - \eta) \cos\zeta\, d\zeta = \cos\varphi_1 [\cos(t + \Delta a) \sin p + \sin d_0 \sin(t + \Delta a) \cos p]\, dt.$$

Es ist nun $\frac{1}{R_\odot} d\rho_0 = \sin 8''\!\cdot\!85\, d\rho_0 = d \sin \pi_\odot = d\pi_\odot \sin 1''$; drücken wir weiter $d\sigma'$ aus in Bogensecunden, so haben wir in der Gleichung an seine Stelle $d\sigma' \sin 1''$ zu setzen. Schliesslich ist die Einheit für n die Stunde, sollen also dt und $d\lambda$ Zeitsecunden sein, so müssen wir den Faktor $\frac{15}{3600}$ hinzufügen und erhalten so die Endgleichung

$$\sin\zeta \cos(p - \eta)\, d\pi_\odot = \frac{n}{240} \frac{\cos(N' - p)}{\sin 1''} (dt - d\lambda) \sin 8''\!\cdot\!85 \pm \frac{\Delta \cdot R_\odot}{R}\, d\sigma' - \cos\varphi_1 [\cos(t + \Delta a) \sin p + \sin d_0 \sin(t + \Delta a) \cos p]\, dt \cdot \sin 8''\!\cdot\!85.$$

Das dritte Glied der rechten Seite kann seiner Kleinheit wegen unberücksichtigt bleiben. Der Ausdruck zeigt uns, dass unter sonst gleichen Beobachtungsumständen, also für gleiche Werthe der zufälligen Beobachtungsfehler und der Länge, die Bestimmung der Parallaxe um so sicherer sein wird, je grösser der Faktor $\sin\zeta \cos(p - \eta)$ ist, und es ist also dieser Coëfficient für die Auswahl der Beobachtungsorte maassgebend.

Der Maximalwerth des fraglichen Coëfficienten tritt ein, wenn gleichzeitig $\zeta = 90°$ und $p - \eta = 0°$ oder $= 180°$ ist. p ist der Positionswinkel des Planetenmittelpunktes, η der parallaktische Winkel im Zielpunkt der Kegelaxe oder ohne hier merklichen Fehler im Sonnenmittelpunkt, $p - \eta = 0$ oder $180°$ verlangt also, dass die Mittelpunkte der beiden Scheiben in einem und demselben Verticalkreise des Beobachtungsortes liegen, d. h. dass eine durch die Kegelaxe gelegte Ebene den Erdradius des Beobachtungsortes enthält. Soll nun wegen $\zeta = 90°$ die Erzeugende des Kegels die Erde berühren, so berührt der Schattenkegel die Erdoberfläche in dem betreffenden Punkte. Die Bedingung $\sin\zeta \cos(p - \eta) = \pm 1$ ist also erfüllt in den vier Berührungspunkten des Schattenkegels der betreffenden Erscheinung mit der Erdoberfläche. Diese Punkte selbst können nicht zur Beobachtung benützt werden, weil die Erscheinung im Horizonte erfolgt. Man muss sich auf einen kleineren Werth von $\sin\zeta$ be-

schränken. Bei gegebenem Werthe von $\sin\zeta$ tritt der Maximalwerth des Coëfficienten ein für $p - \eta = 0$ oder $= 180°$. HANSEN nennt jene Curve, die die Erdorte mit einander verbindet, die dieser Forderung Genüge leisten, die Haupthöhencurve der betreffenden Phase. Diese Curve beginnt und endigt also in den Berührungspunkten des Schattenkegels mit der Erdoberfläche und verbindet die Punkte, die bei bestimmter Höhe der Sonne über dem Horizonte die sicherste Bestimmung der Parallaxe gestatten. Weiter nennt HANSEN jene Curven, die die Punkte der Erdoberfläche enthalten, in welchen der Coëfficient $\sin\zeta\cos(p - \eta)$ einen bestimmten Werth k annimmt, und in welchen also bei kleineren Sonnenhöhen die Beobachtungsbedingungen gleich günstig sind, wie in dem $\sin\zeta = k$ entsprechenden Punkte der Haupthöhencurven, isosthenische Curven. Auf der isosthenischen Curve schwankt also ζ zwischen den Grenzen $90°$ und $arc\sin k$ und, $\cos(p - \eta)$ zwischen den Grenzen k und 1, und die Haupthöhencurve derselben Phase verbindet diejenigen Punkte der isosthenischen Curven, in denen $\cos(p - \eta) = 1$ ist.

Zur Bestimmung der Haupthöhencurve einer gegebenen Phase haben wir zunächst den dieser Phase entsprechenden Radius des Schattenkreises zu berechnen. Von dem gegebenen Werthe der Distanz σ' der Ränder ausgehend, finden wir für einen beliebigen Werth ζ:

$$u_0 = u' - \cos\zeta\, tang f \mp \left[\frac{1}{\sin 8''\cdot 85} - \cos\zeta\,\frac{\Delta + R_\odot}{\Delta R_\odot}\right]\frac{\Delta\cdot R_\odot}{R}\, tang\,\sigma'.$$

Die Grundgleichungen geben uns dann als Ausdruck der Forderung $\sin(p - \eta) = 0$, $\cos(p - \eta) = \pm 1$

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma\cos(N' - \eta) + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n\sin(N' - \eta) \\ \pm u_0 &= \gamma\sin(N' - \eta) + (t - \Delta\lambda - \tau)\, n\cos(N' - \eta) - \sin\zeta \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} (\pm u_0 + \sin\zeta)\sin(N' - \eta) &= \gamma \\ (\pm u_0 + \sin\zeta)\cos(N' - \eta) &= n(t - \Delta\lambda - \tau). \end{aligned}$$

Wir finden also durch die Gleichungen

$$\sin(N' - \eta) = \frac{\gamma}{\pm u_0 + \sin\zeta}$$

$$t - \Delta\lambda = \tau + \frac{1}{n}(\pm u_0 + \sin\zeta)\cos(N' - \eta)$$

zusammengehörige Werthe von η und $t - \Delta\lambda$. Mit dem bekannten Werthe von ζ ergeben uns dann die weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin d_0\cos\zeta + \cos d_0\sin\zeta\cos\eta \\ \cos\varphi_1\sin(t + \Delta a) &= \sin\zeta\sin\eta \\ \cos\varphi_1\cos(t + \Delta a) &= \cos d_0\cos\zeta - \sin d_0\sin\zeta\cos\eta, \end{aligned}$$

die entsprechenden Werthe von φ_1 und t, womit auch $\Delta\lambda$ bekannt wird.

Die Berechnung der isosthenischen Curven $\sin\zeta\cos(p - \eta) = k$ ist folgende. Der gegebene Werth k gestattet sofort für einen beliebig gewählten Werth von ζ das zugehörige $p - \eta$ zu finden; u_0 ist zu berechnen wie vorhin. Führen wir zur Erleichterung in die 2. und 3. Grundgleichung die Hilfsgrössen ein:

$$m\sin M = \gamma \qquad m\cos M = (t - \Delta\lambda - \tau)\, n,$$

so lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_0\sin(p - \eta) &= m\sin(N' - M - \eta) \\ u_0\cos(p - \eta) + \sin\zeta &= m\cos(N' - M - \eta). \end{aligned}$$

Wir finden also m und $M + \eta$ und, da $\sin M = \frac{\gamma}{m}$ ist, M und η selbst. Weiter ist $t - \Delta\lambda = \tau + \frac{m}{n} \cos M$, und nun sind noch φ_1 und t zu berechnen wie vorhin. Bezüglich weiterer Details über die Eigenschaften dieser Curven ist auf HANSEN's Abhandlung: »Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge«, Leipzig 1870, zu verweisen.

Die Berechnung der Grenzcurven und der über die Günstigkeit der Stationen entscheidenden Curven wird man nur bei Venusdurchgängen ausführen, wenn es sich um möglichste Ausbeutung der seltenen Erscheinung handelt. Bei Merkursdurchgängen kann man sich in der Regel damit begnügen, dass man als Grenzcurve einer bestimmten Phase den grössten Kreis betrachtet, dessen Pol der Ort des Zielpunktes der Kegelaxe im Augenblick des Eintritts der Phase für den Erdmittelpunkt ist und für die diesem grössten Kreise nahe liegenden Orte, die etwa zur Beobachtung dienen sollen, durch direkte Rechnung entscheidet, ob für sie durch die Wirkung der Parallaxe die Phase noch sichtbar wird.

Die Berechnung der Zeiten des Eintritts einer gegebenen Phase gestaltet sich am einfachsten nach der zuerst von LAGRANGE[1]) gegebenen, später von ENKE[2]) weiter ausgebildeten Methode. Nennen wir wieder $\alpha_\odot, \delta_\odot, \pi_\odot$ die geocentrischen Coordinaten und die Parallaxe des Sonnenmittelpunktes, α, δ, π die entsprechenden Grössen für den Planeten, sowie Δ die Distanz und p^* das Mittel der Positionswinkel der Verbindungslinie der Mittelpunkte in diesen Punkten, so erhalten wir durch die GAUSS'schen Gleichungen für Distanz und Positionswinkel zur Zeit T_0 die strengen Ausdrücke

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta_0 \cos p_0^* = \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha_\odot) \sin \tfrac{1}{2} (\delta - \delta_\odot)$$
$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta_0 \sin p_0^* = \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha_\odot) \cos \tfrac{1}{2} (\delta + \delta_\odot).$$

Wir können diese Gleichungen aber ohne einen 0''·005 erreichenden Fehler ersetzen durch die Näherungsausdrücke

$$\Delta_0 \cos p_0^* = \delta - \delta_\odot \qquad \Delta_0 \sin p_0^* = (\alpha - \alpha_\odot) \cos \tfrac{1}{2} (\delta + \delta_\odot). \tag{1}$$

Für die stündlichen Aenderungen dieser Ausdrücke führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} n \sin N &= \frac{d\Delta \sin p_0^*}{dt} = \cos \tfrac{1}{2} (\delta + \delta_\odot)\, d(\alpha - \alpha_\odot) - (\alpha - \alpha_\odot) \sin \tfrac{1}{2}(\delta + \delta_\odot)\, d\frac{\delta + \delta_\odot}{2} \sin 1'' \\ n \cos N &= \frac{d\Delta \cos p_0^*}{dt} = d(\delta - \delta_\odot). \end{aligned} \tag{2}$$

Soll zur Zeit T eine Berührung stattfinden, so muss für diesen Augenblick $\Delta = r_\odot \pm r$ werden. Also

$$(r_\odot \pm r) \cos p^* = \Delta_0 \cos p_0^* + n \cos N (T - T_0)$$
$$(r_\odot \pm r) \sin p^* = \Delta_0 \sin p_0^* + n \sin N (T - T_0).$$

Setzen wir also

$$\sin \psi = \sin (p^* - N) = \frac{\Delta_0}{r_\odot \pm r} \sin (p_0^* - N) \; [-90 < \psi < +90^\circ],$$

so wird

$$T = T_0 - 3600 \frac{\Delta_0}{n} \cos (p_0^* - N) \mp 3600 \frac{r_\odot \pm r}{n} \cos \psi \quad \begin{matrix}\text{Eintritt} \\ \text{Austritt}\end{matrix} \tag{3}$$

Positionswinkel der Berührungsstelle Eintritt $Q = 180^\circ + N - \psi$ Austritt $Q = N + \psi$

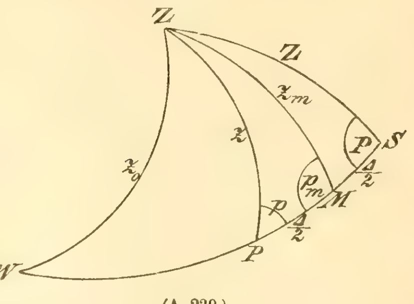
[1]) Mémoire sur le passage de Venus du 3. Juin 1769.

[2]) Ueber die Vorausberechnung der Planetendurchgänge. Berliner Jahrbuch 1842.

Kürzeste Distanz $\Delta_0 \sin(p_0^* - N)$

Zeit der kürzesten Distanz $\tau = T_0 - 3600 \frac{\Delta_0}{n} \cos(p_0^* - N)$.

Durch die Ausdrücke (1) (2) (3) finden wir die Zeiten der geocentrischen Berührung. Um zur scheinbaren Distanz überzugehen, betrachten wir das sphärische Dreieck zwischen dem geocentrischen Zenith und den Mittelpunkten S und P der beiden Scheiben. Die Zenithdistanzen der Punkte S und P seien Z und z, dann ist (Fig. 239)



(A. 239.)

$$\cos\Delta = \cos z \cos Z + \sin z \sin Z \cos PZS$$
$$-\sin\Delta\, d\Delta = -(\sin Z \cos z - \cos Z \sin z \cos PZS)\, dZ$$
$$-(\sin z \cos Z - \cos z \sin Z \cos PZS)\, dz.$$

Es ist aber die Wirkung der Parallaxe auf die Zenithdistanzen $dZ = \pi_\odot \rho \sin Z'$, $dz = \pi\rho \sin z'$. Nun kann π im Maximum bei Venusdurchgängen $= 32''$ werden, also ist im Maximum $z' = z + 32''$ und $dz = \pi\rho \sin z + \pi\rho \cos z \sin 32''$. Der grösste Fehler, den wir begehen, wenn wir z' und z vertauschen ist also $= \frac{32^2}{206264}$, also noch nicht $0''\cdot005$. Folglich können wir setzen:

$$\sin\Delta\, d\Delta = \sin\Delta \cos P \pi_\odot \rho \sin Z + \sin\Delta \cos p\, \pi\, \rho \sin z.$$

Nennen wir z_m die Zenithdistanz der Mitte M des Bogens PS und p_m den Positionswinkel der Verbindungslinie in diesem Punkte, so ist

$$\sin Z \cos P = \cos z_m \sin \frac{\Delta}{2} + \sin z_m \cos \frac{\Delta}{2} \cos p_m$$

$$\sin z \cos p = \cos z_m \sin \frac{\Delta}{2} - \sin z_m \cos \frac{\Delta}{2} \cos p_m$$

und es wird

$$d\Delta = \Delta' - \Delta = \rho \left[(\pi_\odot + \pi) \sin \frac{\Delta}{2} \cos z_m + (\pi_\odot - \pi) \cos \frac{\Delta}{2} \sin z_m \cos p_m\right].$$

Tragen wir auf der Verlängerung von SP über P hinaus vom Punkte M aus den Bogen G bestimmt durch

$$g \cos G = (\pi_\odot + \pi) \sin \frac{\Delta}{2} \qquad g \sin G = (\pi_\odot - \pi) \cos \frac{\Delta}{2}$$

ab und nennen z_0 die Zenithdistanz des so entstehenden Punktes W, so wird

$$\Delta' = \Delta + g\rho \cos z_0.$$

Die Gleichungen, durch die g und G eingeführt sind, ergeben

$$g^2 = (\pi_\odot - \pi)^2 + 4\pi_\odot \pi \sin^2 \frac{\Delta}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

also

$$g = (\pi_\odot - \pi) + \frac{2\pi_\odot \pi}{\pi_\odot - \pi} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Da aber $\frac{\Delta}{2}$ höchstens $= 9'$ werden kann, ist schon das zweite Glied der Entwickelung unmerklich, und wir haben

$$g = \pi_\odot - \pi \qquad \tan G = \frac{\pi_\odot - \pi}{\pi_\odot + \pi} \cot \frac{\Delta}{2}. \tag{4}$$

Die Relation $\Delta' = \Delta + g\rho \cos z_0$ ist der analytische Ausdruck eines berühmten, zuerst von LAGRANGE erwiesenen Theorems. Vernachlässigen wir nämlich die Abplattung der Erde, was wir hier unbedingt können, so besagt die Gleichung, dass die scheinbare Distanz der Gestirne für alle Orte, für welche $\cos z_0$ denselben Werth hat, die gleiche ist. Alle diese Orte liegen aber auf einem Kreise, welcher mit dem Radius z_0 um denjenigen Punkt der Erdoberfläche beschrieben wird, dessen Coordinaten denen des Punktes W gleich sind. Alle diese Punkte sehen also die scheinbare Distanz Δ' in einem und demselben Augenblick.

Aus der Zeit T der geocentrischen Berührung ist nun die Zeit T' der parallaktischen Berührung zu berechnen. Zur Zeit T' muss sein

$$\Delta' = (r_\odot \pm r) + (dr_\odot \pm dr),$$

wenn $r_\odot$ und r die geocentrischen Radien der Sonne und des Planeten sind. Die parallaktischen Aenderungen $dr_\odot$ und dr berechnen wir als die Differenz des Einflusses der Parallaxe auf den Mittelpunkt und auf den im Verticale dieses Punktes liegenden Randpunkt durch

$$dr_\odot = \pi_\odot \rho \sin(Z + r_\odot) - \pi_\odot \rho \sin Z = \pi_\odot \rho \cos Z \sin r_\odot$$

oder

$$\begin{aligned} dr_\odot &= r_\odot \pi_\odot \rho \sin 1'' \,[\sin\delta_\odot \sin\varphi' + \cos\delta_\odot \cos\varphi' \cos(\alpha_\odot - \theta)] \\ dr &= r\pi\rho \sin 1'' \,[\sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi' \cos(\alpha - \theta)]. \end{aligned} \tag{5}$$

θ ist die Sternzeit der Beobachtung. Die Zeit T' muss nun so bestimmt werden, dass durch die aus der gegenseitigen Bewegung der beiden Gestirne entstehende Aenderung der Distanz $\frac{d\Delta}{dt}$ die Grösse $dr_\odot \pm dr$ ausgeglichen werde.

Aus den Ausdrücken für n und N geht aber hervor

$$\frac{d\Delta}{dt} = n\cos(N - p_0{}^*) = n\cos\psi.$$

Die Differenz zwischen der geocentrischen Distanz Δ zur Zeit T und der parallaktischen Distanz Δ' zur Zeit T' ist

$$(T' - T)\, n\cos\psi + g\rho\cos z_0.$$

Soll diese Differenz $= dr_\odot \pm dr$ werden so muss also sein

$$T' = T + \frac{1}{n}\sec\psi\,(dr_\odot \pm dr) - \frac{1}{n}\sec\psi\, g\rho\cos z_0.$$

Zur Bestimmung von z_0 berechnen wir zunächst die Coordinaten des Punktes W, die α^* δ^* heissen mögen, nach den Ausdrücken[1])

$$\begin{aligned} \sin\Delta \sin p_\odot &= \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_\odot) \\ \sin\Delta \cos p_\odot &= \sin\delta \cos\delta_\odot - \cos\delta \sin\delta_\odot \cos(\alpha - \alpha_\odot) \\ \cos\delta^* \sin(\alpha^* - \alpha_\odot) &= \sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right) \sin p_\odot \\ \cos\delta^* \cos(\alpha^* - \alpha_\odot) &= \cos\left(G + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\delta_\odot - \sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\delta_\odot \cos p_\odot \\ \sin\delta^* &= \cos\left(G + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\delta_\odot + \sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\delta_\odot \cos p_\odot. \end{aligned} \tag{6}$$

Es wird dann $\cos z_0 = \sin\delta^* \sin\varphi' + \cos\delta^* \cos\varphi' \cos(\alpha^* - \theta)$. Ist also noch θ_0 die der mittleren Zeit T entsprechende Sternzeit des Ephemeridenortes und $\Delta\lambda$ die östlich positiv gerechnete Längendifferenz, so ist schliesslich

[1]) Für $p_\odot$ kann man ohne merklichen Fehler den Positionswinkel Q der Berührungsstelle setzen, der nach (3) gefunden wird.

$$T' = T + \Delta\lambda + \frac{3600}{n} sec\,\psi\,(dr_\odot \pm dr)$$
$$+ \frac{3600}{n} sec\,\psi\,(\pi - \pi_\odot)\,\rho\,[sin\,\delta^* sin\,\varphi' + cos\,\delta^* cos\,\varphi' cos\,(\alpha_* - \Theta_0 - \Delta\lambda)]. \quad (7)$$

Die Ausdrücke (4) (5) (6) (7) führen uns zur Kenntniss der Zeit der parallaktischen Berührung. Bei der Vorausberechnung sieht man in der Regel von dem kleinen Gliede $\frac{3600}{n} sec\,\psi\,(dr_\odot \pm dr)$ ab, da dasselbe gegenüber dem Einflusse der Tafelfehler völlig verschwindet. Wir können dann die Gleichung

$$T' = T + \Delta\lambda + \frac{3600}{n} sec\,\psi\,(\pi - \pi_\odot)\,cos\,z_0,$$

die nur Grössen enthält, die für die ganze Erdoberfläche bei demselben Durchgang und für eine bestimmte Phase constant sind, benutzen zur Bestimmung derjenigen Punkte, die die betreffende Erscheinung zuerst oder zuletzt sehen. Das erstere tritt ein, wenn $cos\,z_0 = -1$ ist, also in dem W diametral gegenüber liegenden Punkte, das letztere für $cos\,z_0 = +1$. Der Punkt W, dessen Länge $= \alpha^* - \Theta_0$, dessen Breite $= \delta^*$ ist, sieht also die Erscheinung zuletzt. Die Zeit der grösstmöglichen Beschleunigung oder Verzögerung ist bestimmt durch $\frac{1}{n} sec\,\psi\,(\pi - \pi_\odot)$. Setzt man noch

$$v = 3600\,\frac{1}{n} sec\,\psi\,(\pi - \pi_\odot)\,sin\,\delta^* \qquad w = 3600\,\frac{1}{n} sec\,\psi\,(\pi - \pi_\odot)\,cos\,\delta^* \qquad \alpha^* - \Theta_0 = \Omega$$

so sind diese Grössen für jede Phase constant und wir erhalten die Zeit der Phase für einen beliebigen Erdort durch

$$T' = T + \Delta\lambda + v\,\rho\,sin\,\varphi' + w\,\rho\,cos\,\varphi'\,cos\,(\Omega - \Delta\lambda).$$

Berechnung des Merkursdurchganges 1907 November 13/14.

Aus den LEVERRIER'schen Sonnen- bezw. Merkurstafeln wurden die folgenden Oerter berechnet:

Sonnenort

		$\lambda_\odot$	$\beta_\odot$	$log\,R_\odot$
1907 Nov. 13.	22^h M. Z. Paris	230° 52′ 40″·45	—0″·78	9·9952774
14.	1	231 0 13·66		649
	4	231 7 46·94		524

Merkursort

	l	b	$log\,R$
22^h	50° 22′ 0″·43	+0° 23′ 2″·82	9·4952005
1	51 7 43·61	28 39·26	9·4947701
4	51 53 32·19	34 15·86	9·4943518

Schiefe der Ekiptik $\varepsilon = 23° 27' 1''\cdot60$.

Es sind zunächst nach den Formeln auf pag. 822 die scheinbaren geocentrischen Coordinaten des Planeten für dieselben Zeiten zu berechnen. Die Aberrationszeit für die Sonne wird $= 492^s\cdot4$ und die den scheinbaren Sonnencoordinaten zum Uebergang auf wahre hinzuzufügenden Correctionen $\Delta\lambda = +20''\cdot66$ $\Delta\,log\,R = -17$ gefunden. Mit den so corrigirten Sonnenörtern ergeben sich die folgenden wahren geocentrischen Planetenörter und die zum Uebergang auf

wahre Oerter für die Zeit $T - \tau_2 + \tau_1 = T - 336^s{\cdot}7$ hinzuzufügenden Aenderungen

		λ		β		$\log\Delta$	
Nov. 13.	22^h	231° 7′ 21″·35	+18″·88	+0° 10′ 38″·19	−4″·85	9·8302405	−49
14.	1	230 57 16·12	+ 18·86	13 13·00	− 4·81	8304134	−59
	4	47 11·55	+ 18·84	15 46·68	− 4·77	8306173	−68.

Aus den scheinbaren geocentrischen Längen und Breiten werden mit der Schiefe der Ekliptik die scheinbaren Rectascensionen und Deklinationen und die Zeitgleichung = Rectascension der Sonne — mittlere Länge der Sonne corrigirt wegen Nutation:

		$\alpha_\odot$	$\delta_\odot$	α	δ
Nov. 13.	22^h	228° 26′ 30″.12	−17° 58′ 58″·14	228 44 37·48	−17 52 44·76
14.	1	228 34 9·72	−18 0 57·62	228 35 6·82	47 36·20
	4	228 41 49·67	−18 2 56·86	228 25 35·09	42 27·33

mittl. Länge ⊙ + Nut.	Zeitgl.	Sternzeit
232° 20 49·72	$-15^m\ 37^s{\cdot}3$	$13^h\ 29^m\ 23^s{\cdot}3$
28 13·26	36·2	16 29 52·8
35 36·80	35·1	19 30 22·4.

Wir gehen hiernach von folgenden Elementen aus:

$$T_0 = 1907 \text{ Nov. } 14.\ 1^h \text{ M. Z. Paris} = 16^h\ 29^m\ 52^s{\cdot}8 \text{ St. Z. Paris}$$

$$\alpha_\odot = 228°\ 34'\ 9''{\cdot}72 \qquad \alpha = 228\ \ 35\ \ 6{\cdot}82 \qquad \Delta(\alpha - \alpha_\odot)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_\odot + \delta) = -\ 327''{\cdot}01$$

$$\delta_\odot = -\ 18°\ 0'\ 57{\cdot}62 \qquad \delta = -\ 17\ 47\ 36{\cdot}20 \qquad \Delta(\delta - \delta_\odot) = +\ 142''{\cdot}69$$

$$r_\odot = 970''{\cdot}18 \quad \pi_\odot = 8''{\cdot}95$$

$$r = 4{\cdot}94 \quad \pi = 13{\cdot}03.$$

Die weitere Rechnung stellt sich folgendermaassen:

$\alpha - \alpha_\odot$	+57″·10	$n \sin N$	= −327″·01	$\log\Delta_0$	2·90486
	1·75664	$n \cos N$	= + 142·69	$compl.\ \log(r_\odot + r)$	7·01094
$\log\cos\frac{1}{2}(\delta + \delta_\odot)$	9·97844		$2{\cdot}51456_n$	$\log\sin(p_0^* - N)$	9·97382
$\log\Delta_0 \sin p_0^*$	1·73508		2·15439		9·88962
$\log\Delta_0 \cos p_0^*$	2·90386	N	−66° 25′·57	ψ	=50° 51′·40
p_0^*	3° 52′·72	$\log n$	2·55241	$\log\Delta_0\sin(p_0^* - N)$	=2·87868
$\log\Delta_0$	2·90486	$p_0^* - N$	+70° 18′·29		

	3·55630		3·55630
$compl.\ \log n$	7·44759		7·44759
$\log\Delta_0$	2·90486	$\log(r_\odot + r)$	2·98906
$\log\cos(p_0^* - N)$	9·52765	$\log\cos\psi$	9·80021
	3·43640		3·79316
	$2731^s{\cdot}5$		$6211^s{\cdot}0$

Zeit des geocentrischen Eintritts: $1^h{\cdot}0^m{\cdot}0 - 45^m\,5 - 1^h\ 43^m{\cdot}5$
$= \text{Nov. } 13.\ 22^h\ 31^m{\cdot}0$ m. Z. Paris

Positionswinkel der Eintrittsstelle $180° + N - \psi = Q = 62°\ 43'{\cdot}0$

Zeit der kürzesten Distanz = Nov. 14. $0^h\ 14^m{\cdot}5$ m. Z. Paris;
kürzeste Distanz $+\ 12'\ 36''{\cdot}3$.

$$T_0 = 22^h\,31^m : \delta_\odot = -\,17^\circ\,59'{\cdot}31 \quad \alpha_\odot = 228^\circ\,27'{\cdot}82$$

$log\,(\pi_\odot - \pi)$	$0{\cdot}61066_n$
$compl\,log\,(\pi_\odot + \pi)$	$8{\cdot}65797$
$log\,cotang\frac{1}{2}\,(r_\odot + r)$	$2{\cdot}62639$
	$1{\cdot}89502_n$
G	$90^\circ\,43'{\cdot}77$
$G + \frac{\Delta}{2}$	$90\;\;51{\cdot}90$

$log\,sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)$	$9{\cdot}99995$	1) $log\,cos\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)$	$8{\cdot}17888_n$	4) $log\,sin\left(G + \frac{\Delta}{2}\right)$	$9{\cdot}99995$
$log\,sin\,Q$	$9{\cdot}94878$	2) $log\,cos\,\delta_\odot$	$9{\cdot}97824$	5) $log\,cos\,Q$	$9{\cdot}66124$
	$9{\cdot}94873$	3) $log\,sin\,\delta_\odot$	$9{\cdot}48973_n$	6) $log\,sin\,\delta_\odot$	$9{\cdot}48973_n$
	$9{\cdot}10447$	1) + 2)	$8{\cdot}15712_n$	7) $log\,cos\,\delta_\odot$	$9{\cdot}97824$
$log\,tang\,(\alpha^* - \alpha_\odot)$	$0{\cdot}84426$	4) + 5) + 6)	$9{\cdot}15092_n$	1) + 3)	$7{\cdot}66861$
$\alpha^* - \alpha_\odot$	$81^\circ\,51'{\cdot}27$	*log* Diff.	$9{\cdot}10447$	4) + 5) + 7)	$9{\cdot}63943$
α^*	$310\;\;19{\cdot}09$			*log* Summe	$9{\cdot}64405$
				δ^*	$+26^\circ\,8'{\cdot}51$

	$3{\cdot}55630$	Θ_0	$14^h\,0\;\;28^s{\cdot}2$
$compl\,log\,n$	$7{\cdot}44759$		$=210^\circ\,7'{\cdot}0$
$log\,sec\,\psi$	$0{\cdot}19979$	$\alpha^* - \Theta_0$	$100^\circ\,12'{\cdot}1$
$log\,(\pi - \pi_\odot)$	$0{\cdot}61066$		
	$1{\cdot}81434$		
$log\,sin\,\delta^*$	$9{\cdot}64405$		
$log\,cos\,\delta^*$	$9{\cdot}95313$		

Ortszeit des Eintritts:

$$= 22^h\,31^m{\cdot}0 + \Delta\lambda + [1{\cdot}45839]\,\rho\,sin\,\varphi' + [1{\cdot}76747]\,\rho\,cos\,\varphi'\,cos\,(100^\circ\,12'{\cdot}1 - \Delta\lambda).$$

Sternbedeckungen durch Planeten.

Diese Erscheinungen sind völlig gleichartig mit Sternbedeckungen durch den Mond, wenn der in Frage kommende Planet als sphärisch zu betrachten ist, was bei Merkur, Venus und Mars der Fall ist. Hier sind also die Formeln von pag. 807 zu benutzen mit Vertauschung der sich auf den Mond beziehenden Grössen mit den analogen für den Planeten. k wird der lineare Radius des Planeten in Einheiten des Erdradius, also wenn r^1 der scheinbare Radius in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist, $k = \frac{sin\,r^1}{sin\,8''{\cdot}85}$.

Ist der in Frage kommende Planet dagegen ein abgeplattetes Rotationssphäroid, so hat man zunächst die scheinbare Figur zu berechnen, also die Ellipse, in welcher eine zum Visionsradius senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt des Planeten seine Oberfläche schneidet. Man berechnet dann weiter unter Vernachlässigung der Abplattung des Planeten einen genäherten Werth der Berührungszeiten und des Positionswinkels der Berührungsstellen, sucht dann die diesen Berührungsstellen entsprechenden Radien der scheinbaren Figur des Planeten und führt nun diese ein. Dann bekommt man verbesserte Werthe der Berührungszeiten, die den wahren schon sehr nahe liegen werden.

Finsternisserscheinungen in den Planetensystemen.

Im Jupiterssystem sind diejenigen Erscheinungen, die wir als Sonnen- und Mondfinsternisse bezeichnen, und die für unsere Erde immerhin ziemlich seltene

Erscheinungen sind, häufig wiederkehrende Vorkommnisse. Der Schatten des mächtigen Planeten reicht noch erheblich über die Bahn seines äussersten Trabanten hinaus. Die Neigung der Bahnen der Trabanten ist so gering, dass die 3 inneren Trabanten, wobei wir von dem neuesten 5. Trabanten absehen, in ihrer oberen Conjunction jedesmal den Schattenkegel passiren und eine Verfinsterung erleiden, und ebenso bei jeder unteren Conjunction eine Sonnenfinsterniss hervorrufen. Nur bei dem äussersten 4. Trabanten treten diese Erscheinungen nicht so regelmässig auf. Die Verfinsterungen der Trabanten behalten auch für den Beobachter auf der Erde ihren Charakter bei, wir sehen den Trabanten plötzlich verschwinden und später beim Verlassen des Schattens wieder erscheinen. Bei den beiden inneren Trabanten kann man freilich in der Regel nur einen dieser Vorgänge wahrnehmen, der zweite bleibt unsichtbar, weil der Trabant für uns beim Verlassen des Schattens schon durch den Jupiter selbst verdeckt ist; beim 3. und 4. Trabanten aber nehmen wir, wenn der Jupiter sich von der Conjunction oder Opposition um einen bestimmten Betrag entfernt hat, beide Erscheinungen wahr. Vor der Opposition, d. h. so lange Jupiter nach Mitternacht culminirt, steht die Erde westlich von der Linie Sonne — Jupiter; der Schatten Jupiters erscheint uns daher auf seiner Westseite, und an dieser erfolgen also die Ein- und Austritte der Trabanten. Nach der Opposition, wenn Jupiter vor Mitternacht culminirt, sehen wir dieselben Erscheinungen an der Ostseite der Jupitersscheibe. Die Beobachtung dieser Trabanten-Verfinsterungen bietet neben der heliometrischen Messung der Stellung der Trabanten gegen die Scheibe ein trotz grosser Einfachheit sehr zuverlässiges Mittel zur Bestimmung der Bahnen dieser Körper. Wir verdanken diesen Beobachtungen die Kenntniss der merkwürdigen Beziehungen, die zwischen den Bewegungen derselben bestehen. Ausser durch den Schatten Jupiters werden die Trabanten zur Zeit ihrer Opposition unseren Blicken regelmässig für bestimmte Zeit durch den Jupiter selbst entzogen. Bei den inneren Trabanten beobachten wir also ein Verschwinden im Schatten und ein Wiedererscheinen hinter der Scheibe, oder umgekehrt ein Verschwinden hinter der Scheibe und ein Wiedererscheinen aus dem Schatten. Bei den äusseren Trabanten können wir dagegen häufig die vier Momente hintereinander beobachten. Der unseren Sonnenfinsternissen entsprechende Vorgang zur Zeit der Conjunction der Trabanten besteht in einem Vorüberziehen des Trabanten und seines Schattens vor der Scheibe. Befindet sich die Erde genügend weit von der Linie Sonne — Jupiter entfernt, so sehen wir beide getrennt, der Trabant erscheint als runder, durch andere Färbung oder geringere Helligkeit von der Scheibe des Planeten sich abhebender Fleck, der Schatten als kreisförmiger schwarzer Fleck. Vor der Opposition liegt der Schatten westlich vom Trabanten, nach der Opposition östlich davon.

Der von BARNARD entdeckte 5. Jupiterstrabant steht der Jupitersoberfläche so nahe, dass sein Eintritt in den Schattenkegel so nahe bei der Scheibe des Planeten erfolgt, dass es auch mit dem grössten Fernrohre nicht möglich ist, den Trabanten bis dahin zu verfolgen. Er verschwindet schon früher in den Strahlen der Scheibe.

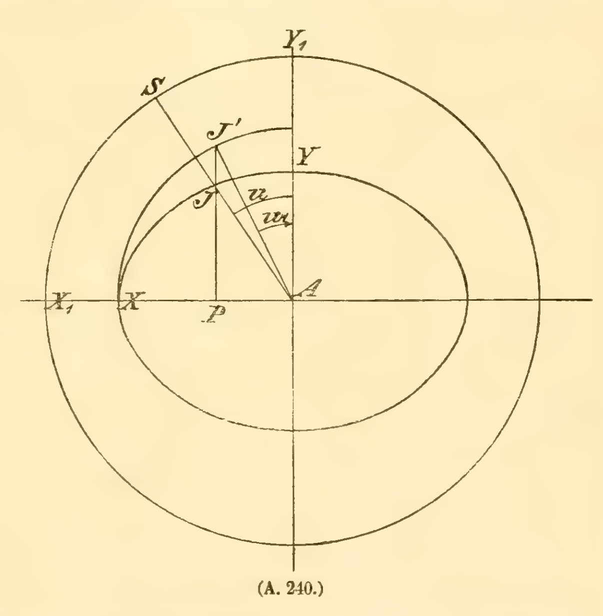
Im Saturnssystem ist trotz der grösseren Zahl der Trabanten die Erscheinung der Finsternisse doch nur eine seltene, wegen der grossen Neigung der Bahnen der Trabanten gegen die Saturnsbahn. Damit sie eintreten können, ist es nothwendig, dass die Sonne sich nahezu in der Ebene der Bahnen befindet, die für alle mit Ausnahme des 8. mit der Ebene des Saturnsringes nahezu zusammenfällt. Um die Zeit also, wo uns der Ring als eine Linie erscheint, treten die Ver-

finsterungen regelmässig auf. Bei jedem Umlauf des Saturn giebt es also zwei solche Perioden von Finsternissen. Die Dauer der Perioden ist für die verschiedenen Monde eine verschiedene, für die innersten ist sie am grössten, für die äussersten am kleinsten. Die Beobachtung dieser Finsternisse ist besonders des Ringes wegen eine sehr schwierige; nur bei dem hellsten Monde, dem Titan, gelingt sie etwas leichter. Die Bahn des 8. Trabanten, Japetus, hat eine beträchtliche Neigung gegen die Ebene des Saturnsäquators. Infolgedessen passirt dieser Trabant bei seinen allerdings sehr seltenen Verfinsterungen nicht nur den Schatten der Saturnskugel, sondern auch den des Ringsystems. BARNARD gelang im Jahre 1889 die Beobachtung einer solchen Verfinsterung.

Verfinsterungen der Marstrabanten sind gleichfalls zuweilen beobachtet. Für sie liegen die Verhältnisse etwa so wie bei den inneren Saturnsmonden, nur dass die Störung durch den Ring fortfällt.

Die Trabanten der äussersten Planeten sind zu lichtschwach, ihre Ein- und Austritte erfolgen für uns so nahe an der Scheibe des Planeten, dass eine Beobachtung derselben nicht möglich scheint.

Die Vorausberechnung und die Verwerthung der Finsternisse der Trabanten erfordert die Aufstellung der Gleichung des die Sonne und den Planeten einhüllenden Schattenkegels. Diese Aufgabe ist für den Jupiter zuerst von LAPLACE im 8. Kapitel der Méc. cél. gelöst. Die allgemeine Lösung der Aufgabe führt auf eine Gleichung vom 8. Grade; nur wenn man sich die Voraussetzung gestatten darf, dass der Sonnenmittelpunkt sich in der Ebene des Aequators des als Rotationsellipsoid angenommenen Planeten befindet, wird die Lösung einfacher, und nur unter dieser Voraussetzung ist sie auch von LAPLACE gegeben. Diese Voraussetzung ist aber beim Jupiter stets gestattet. Die Kegelaxe ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Körper, wir wählen sie wieder als Z-Axe; die Ebene der XZ lassen wir zusammenfallen mit der Ebene des Jupiteräquators, die Ebene der YZ enthält die Polaraxe Jupiters. Eine zur Kegelaxe senkrecht durch den Sonnenmittelpunkt gehende Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise vom Radius r, eine parallel durch den Jupitersmittelpunkt gehende Ebene schneidet ihn in einer Ellipse, deren Gleichung, wenn a der äquatoreale, b der polare Radius des Jupiter sind, ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Denken wir uns Fig. 240 diese beiden Schnitte durch Parallelen zur z-Axe projicirt auf eine zur Z-Axe senkrechte Ebene. XJY sei der Schnitt durch den Jupiter, $X_1 S Y_1$ der durch die Sonne. Schneiden wir nun den Kegel durch eine die Z-Axe enthaltende Ebene, die sich als gerade Linie AJS projicirt, und nennen



(A. 240.)

den Winkel dieser Ebene gegen die ZY-Ebene u, so sind die Coordinaten des Punktes $S: x_{,,} = r \sin u$, $y_{,,} = r \cos u$. Verlängern wir die Ordinate des Punktes J bis sie in J' einen über der grossen Axe der Ellipse beschriebenen Kreis trifft, und nennen den Winkel, den der Radius AJ' mit der Y-Axe einschliesst, u_1, so sind nach pag. 766, wenn α die Abplattung Jupiters ist, die Coordinaten des Punktes J

$$x_1 = AJ \sin u = a \sin u_1$$
$$y_1 = \frac{b}{a} PJ' = (1 - \alpha) AJ' \cos u_1 = a(1 - \alpha) \cos u_1 .$$

Legen wir den Coordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt des Jupiter und rechnen die z-Coordinate positiv in der Richtung von der Sonne zum Jupiter, nennen ferner S den Radiusvector Jupiters, so sind die Coordinaten

$$\begin{array}{llll} \text{von } S & x_{,,} = r \sin u & y_{,,} = r \cos u & z_{,,} = -S \\ \text{von } J & x_{,} = a \sin u_1 & y_{,} = a(1-\alpha) \cos u_1 & z_{,} = 0. \end{array}$$

Eine Gerade, die durch die Punkte J und S geht, ist eine Erzeugende der Kegeloberfläche. Die Gleichung dieser Geraden

$$\begin{aligned} x &= x_{,} + (x_{,,} - x_{,})t = a \sin u_1 + (r \sin u - a \sin u_1)t \\ y &= y_{,} + (y_{,,} - y_{,})t = a(1 - \alpha) \cos u_1 + [r \cos u - a(1 - \alpha) \cos u_1)]t \\ z &= z_{,} + (z_{,,} - z_{,})t = - St \end{aligned}$$

giebt uns also die Gleichung der Kegeloberfläche selbst. Für unsere Untersuchung bedürfen wir den Schnitt einer in der Entfernung s_0 eines Trabanten zur Zeit der Opposition durch den Kegel senkrecht zur Z-Axe gelegten Ebene. Wir setzen also $z = s_0$, wodurch $t = -\frac{s_0}{S}$ und

$$x = a \sin u_1 - \frac{r \sin u - a \sin u_1}{S} s_0$$
$$y = a(1 - \alpha) \cos u_1 - \frac{r \cos u - a(1 - \alpha) \cos u_1}{S} s_0$$

wird. Aus der Relation $\tang u = \frac{1}{1 - \alpha} \tang u_1$ erhalten wir aber nach einer bekannten Reihenentwickelung

$$u = u_1 + \frac{\alpha}{2} \sin 2 u_1 + \frac{\alpha^2}{4} (\sin 2 u_1 + \sin 4 u_1) + \ldots .$$

Der Unterschied zwischen u und u_1 ist also von der Ordnung der Abplattung; übergehen wir ihn in den Gliedern die den kleinen Faktor $\frac{r}{S}$ enthalten, so wird

$$x = a\left(1 + \frac{s_0}{S} - \frac{s_0}{S}\frac{r}{a}\right) \sin u_1 \qquad y = a(1 - \alpha)\left(1 + \frac{s_0}{S} - \frac{s_0}{S}\frac{r}{a(1-\alpha)}\right) \cos u_1 .$$

Der gesuchte Schnitt ist eine Ellipse mit den Halbaxen

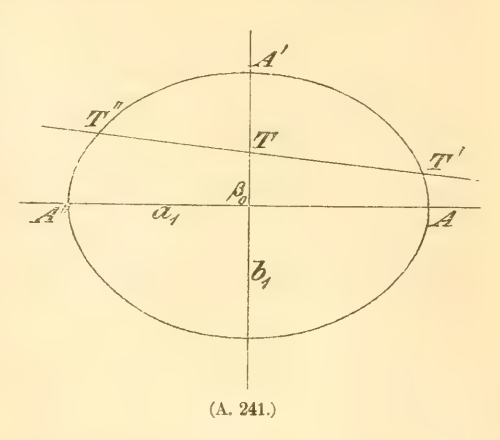
$$a_1 = a\left(1 + \frac{s_0}{S} - \frac{s_0}{S}\frac{r}{a}\right) \qquad b_1 = a(1 - \alpha)\left(1 + \frac{s_0}{S} - \frac{s_0}{S}\frac{r}{a(1-\alpha)}\right).$$

Die Applattung dieser Ellipse ist

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - b_1}{a_1} = \alpha\left(1 + \frac{s_0}{S}\frac{r}{a} + \ldots\right).$$

Für den äussersten Trabanten ist $s_0 = 26{\cdot}5a$ mit den mittleren Werthen $r = \tang 16'$, $S = 5{\cdot}20$ wird $\alpha_1 = 1{\cdot}023\alpha$. Sei nun Fig. 241 $AA'A''$ der Schnitt

durch den Schattenkegel, $T''TT''$ der Weg des Trabanten, den wir als geradlinig betrachten. Im Augenblick der Conjunction mit dem Jupiter, also wenn der Trabant in T steht, sei seine Breite über der Jupitersbahn AA'': β_0, im Augenblick des Eintritts in den Schatten bei T'' sei v_1 die von der Conjunction aus gerechnete Anomalie des Trabanten, s sein Radiusvektor, β seine Breite. Die Coordinaten des Punktes T'' sind dann



(A. 241.)

$$x = s \sin v_1$$

$$y = s\beta = s\left(\beta_0 + \frac{d\beta}{dv}\sin v_1 + \ldots\right).$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung der Schattenellipse ein, so wird

$$(1-\alpha_1)^2 s^2 \sin^2 v_1 + s^2\left(\beta_0 + \frac{d\beta}{dv}\sin v_1\right)^2 = a_1^2(1-\alpha_1)^2$$

$$(1-\alpha_1)^2 s^2 \sin^2 v_1 + 2s^2\beta_0\frac{d\beta}{dv}\sin v_1 = a_1^2(1-\alpha_1)^2 - s^2\beta_0^2$$

$$\sin v_1 = -\frac{\beta_0}{(1-\alpha_1)^2}\frac{d\beta}{dv} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{s^2} - \frac{\beta_0^2}{(1-\alpha_1)^2}}$$

Es sei nun A die halbe grosse Axe, e die Excentricität der Bahn des Trabanten, ferner π die Länge des Perijoviums, l die mittlere Länge des Trabanten. Wegen der Kleinheit von e (der grösste Werth ist 0·007 beim 4. Trabanten) dürfen wir setzen

$$v = l + 2e\sin(l-\pi).$$

Sind $l, l_{\prime\prime}$ die mittleren Längen im Anfangspunkt und Endpunkt des Bogens und ist t die Zeit, die der Trabant gebraucht, um vermöge seiner synodischen mittleren Bewegung $n - n_{\prime}$ den Bogen v zu durchlaufen, so ist

$$v = t(n-n') + 2e[\sin(l_{\prime\prime} - \pi) - \sin(l_1 - \pi)]$$

$$= t(n-n') + e\cos\left(\frac{l_{\prime\prime}+l_1}{2} - \pi\right)t(n-n')$$

$$= t(n-n')\left(1 + 2e\cos\left[\tfrac{1}{2}(l_{\prime\prime}+l_1) - \pi\right]\right)$$

und daraus

$$t = \frac{v}{n-n'}\left(1 - 2e\cos\left[\tfrac{1}{2}(l_{\prime\prime}+l_1) - \pi\right]\right).$$

Ist dann T_0 die Zeit, die der Trabant gebraucht, um bei gleichförmiger Bewegung einen Bogen $= AA''$ zu durchlaufen, also

$$T_0 = \frac{1}{n-n'}\arcsin\frac{a_1}{A},$$

so erhalten wir die Zeit T, die zum Durchlaufen des Bogens $T'T$ erforderlich ist, durch $T : T_0 = \sin v_1 : \frac{a_1}{A}$, und wenn wir nun alles zusammenfassen,

$$T = T_0\left(1 - 2e\cos\left[\tfrac{1}{2}(l_{\prime\prime}+l_{\prime}) - \pi\right]\right)\left[-\frac{\beta_0}{(1-\alpha_1)^2}\frac{A}{a_1}\frac{d\beta}{dv} \pm \sqrt{\frac{A^2}{s^2} - \frac{A^2}{a_1^2}\frac{\beta_0^2}{(1-\alpha_1)^2}}\right]. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck ergiebt die Zeit zwischen Conjunction und Ein- oder Austritt aus dem Schatten. Die Dauer der Verfinsterung wird, wenn l' die gemeinsame Länge des Jupiter und des Trabanten zur Zeit der Conjunction ist,

$$\tau = 2T_0\,[1 - 2e\cos(l' - \pi)]\sqrt{\frac{A^2}{s_0^2} - \frac{A^2}{a_1^2}\,\frac{\beta_0^2}{(1-\alpha_1)^2}} \qquad (2)$$

wobei noch

$$s = A\,[1 - e\cos(l' - \pi)].$$

Die Gleichungen (1) und (2) kann man benützen, um aus den Beobachtungen die Zeit der Conjunction und die gleichzeitige Breite β_0 des Trabanten abzuleiten; man hat beim 3. und 4. Trabanten die Gleichung (2) zu benützen, beim 1. und 2., bei denen man Ein- und Austritt bei demselben Durchgang durch den Schatten nie beobachten kann, dagegen die Gleichung (1), muss dann aber, um die systematischen Fehler der Beobachtung zu eliminiren, zwei Beobachtungen mit einander verbinden, von denen die eine unmittelbar vor, die andere hinter der Opposition des Jupiter mit der Erde liegt. Man findet ferner durch

$$\lambda = l' - \beta_0\,\frac{d\beta}{dv}$$

die jovicentrische Länge des Trabanten zur Zeit der Mitte der Finsterniss, und es ist

$$\frac{d\beta}{dv} = tang\,i\cos(l' - \Omega)\cos^2\beta_0.$$

Auf diesem Wege kann man aus den Beobachtungen der Verfinsterungen die Bahnelemente der Trabanten ableiten. Dabei hat man aber auf die Ungleichheiten ihrer Bewegung Rücksicht zu nehmen. Sind umgekehrt die Elemente der Trabanten-Bahnen gegeben, so hat man aus ihnen die Zeiten der heliocentrischen Conjunction mit dem Jupiter zu berechnen, und erhält durch Addition oder Subtraction der halben nach (2) berechneten Dauer der Verfinsterung die Zeit des Austritts aus dem Schatten bezw. des Eintritts in denselben.

Diesem Zwecke dienen die »Tables écliptiques des satellites de Jupiter« von DELAMBRE und von DAMOISEAU. Die letzteren sind die auch heute noch in Gebrauch befindlichen. Da sie nur bis 1880 reichten, sind sie fortgesetzt bis 1900 durch D. TODD: »A Continuation of de DAMOISEAU's Tables of the Sat. of Jup.«, und für die Zeit 1900 bis 1920 durch L. POTTIER: »Additions aux tables écliptiques des Sat. d. Jup. de DAMOISEAU«. Bulletin Astr. vol. XIII.

Es handelt sich nun noch um die Berechnung der übrigen Phänomene. Dividirt man die Differenz der geocentrischen und der heliocentrischen Länge des Jupiter durch die synodische Bewegung des betreffenden Trabanten, so erhält man die Zeit, die zur Zeit der heliocentrischen oberen Conjunction hinzuzulegen ist, um die Zeit der geocentrischen Conjunction oder die Mitte der Bedeckung des Trabanten durch den Jupiter zu erhalten. Führt man in die Gleichung (2) an Stelle der die Gestalt der Schattenellipse bestimmenden Grössen a_1 und α_1 diejenigen ein, die einer Projection der Jupitersscheibe auf eine zum Visionsradius senkrechte, in der Entfernung des Trabanten liegende Ebene entsprechen, so erhält man die Dauer der Bedeckung und damit die Zeiten des Ein- und Austritts des Trabanten in die Scheibe. Endlich kann man bei gehöriger Aenderung einzelner Argumente aus den Trabanten-Tafeln auch die Zeiten der heliocentrischen unteren Conjunctionen finden, aus denen dann die Phänomene des Vorüberganges des Trabanten und seines Schattens vor der Scheibe in ähnlicher Weise zu berechnen sind. Man bedient sich zu dieser Rechnung in der Regel der Tafeln, die WOOLHOUSE im Nautical Almanac 1835 gegeben hat. In den älteren Jahrgängen des Berliner Jahrbuchs (bis 1871) finden sich Tafeln, aus denen man die rechtwinkligen Coordinaten der Trabanten gegen

die Mitte der Jupitersscheibe für einen beliebigen Augenblick nach der Zeit der heliocentrischen oberen Conjunction findet, und mit deren Hilfe man gleichfalls wenigstens genähert die Erscheinungen der Vorübergänge berechnen kann.

Bei der Berechnung der Erscheinungen der Saturnstrabanten dürfen wir die Voraussetzung nicht machen, dass die Sonne in der Ebene des Aequators stehe, weil die Neigung dieser Ebene gegen die Bahnebene des Planeten eine sehr grosse ist. BESSEL ist bei der Berechnung einer solchen Erscheinung (Astr. Nachr., Bd. 9) ausgegangen von der Betrachtung eines Schattenkegels, dessen Spitze im Mittelpunkte der Sonne liegt, und SEELIGER (Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Classe XXIV) hat gezeigt, wie man aus den so erlangten Näherungswerthen durch Correctionen die wahren findet. Bei der geringen Sicherheit, die in der Beobachtung hier erreichbar ist, genügt dieses Verfahren völlig. Endlich hat BUCHHOLZ (Astr. Nachr., Bd. 137) die Berechnung einer Verfinsterung des Japetus durch den Schatten des Ringsystems ausgeführt und das Saturnring-Schattenproblem eingehender behandelt (Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-naturw. Classe, Bd. 104), während die Gleichung des dem Saturn selbst zugehörigen Schattenkegels von SOUILLART (Astr. Nachr., Bd. 91) gegeben ist.

Der Schattenkegel des Mars ist als Rotationskegel zu betrachten, da eine Abplattung dieses Planeten noch nicht nachgewiesen ist. KOBOLD.

Berichtigungen.

pag. 12, Zeile 5 v. o. statt »$sin\,\eta = sin\,v\,sin\,\rho$« lies »$sin\,\eta = sin\,\omega\,sin\,\rho$«.

„ 14, „ 23 v. u. statt »211°« lies »233°«.

„ 18, „ 17 v. u. statt »grösste Höhe« lies »kleinste Zenithdistanz«.

„ 37, Fig. A. 11 ist der Deferent statt aus »O« aus »E« beschrieben.

„ 37, Zeile 18 v. u. statt »$LCP = MCP + MCL = A + MCL$« lies »$LCP = MCP - MCL = A - MCL$«.

„ 208 „ 16 v. u. ist hinter »Fadendistanzen« einzuschalten »im Art. Passageninstrument«.

„ 284 „ 5 v. u. statt »$\varepsilon_1{}^2$« lies »$\varepsilon_2{}^2$«.

„ 288 in Fig. A. 106 links statt »S« lies »S'«.

„ 289 Zeile 10 v. o. vor »z« ist einzuschalten »s und«.

„ 294 „ 17 v. u. fehlt der Faktor »$tang\,D$«.

„ 297 „ 10 v. u. statt »$\xi_1\eta$« lies »$\xi,\ \eta$«.

„ 298 „ 5 v. o. statt »d« lies »δ'«.

„ 298 „ 11 v. u. statt »F« lies »F_0«.

„ 326 „ 21 v. u. statt »$sec\,z\,tang^2\,z'$« lies »$sec\,z'\,tang^2\,z'$«.

„ 343 „ 1 v. u. statt »Objective« lies »Objecte«.

„ 386 „ 6 v. u. statt »links« lies »rechts«.

„ 433 „ 8 v. u. statt »42^m« lies »52^m«.

„ 436 „ 21 v. o. statt »$cos\,\delta$« lies »$cos\,\delta\,d\delta$«.

„ 436 „ 23 v. o. statt »$cos\,\delta$« lies »$d\delta$«.

„ 438 „ 6 u. 5 v. u. statt »$sin\,(\psi + \varphi)$« lies »$sec\,(\psi + \varphi)$«.

„ 442 „ 7 v. o. statt »da« lies »$d\alpha$«.

„ 453 oben fehlt die Ueberschrift »I. Einleitung. Differentialgleichungen der Bewegung, Kepler'sche Gesetze«.

„ 459 Zeile 10 v. o. statt »1·17« lies »1·16«.

„ 464 „ 17 v. o. statt »I« in der Ueberschrift lies »II«.

„ 468 „ 8 v. u. statt »7·44614« lies »7·38264«.

„ 470 „ 5 v. o. statt »$sin\,N$« lies »$tang\,N$«.

„ 470 „ 26 v. u. statt »$tang\,\beta$« lies »$sin\,\alpha$«.

„ 471 „ 11 v. o. statt »☊'« lies »☊«.

„ 474 „ 17 v. u. statt »τ_1« lies »$\tau_1{}^2$«.

„ 475 „ 1, 3, 4, 17, 19 v. o. statt »dt« lies »$d\tau$«.

„ 475 „ 4 v. o. statt »$r_1{}^3$« lies »$r_2{}^3$«.

„ 476 „ 12 v. o. statt »$n_3\,tang\,\beta_3$« lies »$n_3\,\Delta_3\,tang\,\beta_3$«.

„ 479 „ 3 v. o. fehlt nach »$r_2{}^2$« das »Gleichheitszeichen«.

„ 484 „ 6 v. u. statt »$A + BP$« lies »$A + BP = 0$«.

„ 485 „ 8 v. u. statt »ρ« lies »ρ_2«.

„ 486 „ 1 v. o. statt »p'« lies »p''«.

„ 487 „ 7 v. o. nach »n_3« ist einzuschalten »R_3«.

„ 489 „ 8 v. u. statt »τ_2« im 3. Glied der Klammer lies »$\tau_2{}''$«.

„ 490 „ 18 v. o. statt »—« lies »=«.

„ 508 „ 10 v. u. statt »q« lies »$\sqrt{q}$«.

„ 510 „ 10 v. o. statt »$sin\,\psi_3$« lies »$sin^2\,\psi_3$«.

„ 510 „ 16 v. o. statt »r« lies »r_3«.








Date Due
L. B. Cat. No. 1137



WELLESLEY COLLEGE LIBRARY
3 5002 03505 8747
Science QB 14 .V15 1
Valentiner, Wilhelm, 1845-
Handwörterbuch der astronomie.
Science QB 14 .V15 1
Valentiner, Wilhelm, 1845-
Handwörterbuch der astronomie.

